Über die Zerlegbarkeit von flächentreu aufeinander abgebildeten Gebieten in unendlich kleine, paarweise kongruente Teile.

Von

M. Lagally in München.

Die Frage der Zerlegbarkeit inhaltsgleicher ebener Figuren, deren Begrenzung von geraden Linien oder von paarweise kongruenten Kurvenbögen gebildet wird, in eine endliche Anzahl von paarweise kongruenten Teilfiguren hat wegen ihrer Bedeutung für die Grundlagen der Geometrie eingehende Untersuchung gefunden. Dagegen scheint über die mehr flächentheoretisch interessante Zerlegungsgleichheit von beliebig begrenzten, ebenen oder auf krummen Flächen gelegenen, im gewöhnlichen Sinne inhaltsgleichen, aber nicht endlich gleichen Gebieten keine Literatur vorhanden zu sein.

Auf ein Beispiel für die Zerlegbarkeit zweier solcher Gebiete in unendlich viele paarweise kongruente Rechtecke hat mich Herr Prof. Finsterwalder aufmerksam gemacht, das sich bei der Abbildung der Kugel auf den längs des Äquators berührenden Kreiszylinder mittels der Lambertschen flächentreuen Zylinderprojektion ergibt. Bezeichnet man Länge und Breite eines Punktes der Kugeloberfläche mit λ und φ , so ist das Linienelement auf der Kugel vom Radius 1

$$ds_1^2 = d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2,$$

das Linienelement auf dem Bildzylinder dagegen

$$ds_2^2 = \cos^2 \varphi d\varphi^2 + d\lambda^2.$$

Bildet man auf der Kugel aus Meridianen und Parallelkreisen ein Kurvennetz mit solcher Verteilung der Netzlinien, daß für beide Kurvenscharen die Differenz der Parameter zweier aufeinander folgender Kurven auf der ganzen Kugel denselben konstanten Wert $d\varphi = d\lambda = \delta$ besitzt, so ist das Bild einer rechtwinkligen Netzmasche auf der Kugel mit den Seiten δ und $\delta \cdot \cos \varphi$ ein Rechteck auf dem Zylinder mit den Seiten $\delta \cdot \cos \varphi$ und δ .

Denkt man sich also die Kugelfläche in die rechtwinkligen Maschen zerschnitten und diese nach Drehung um 90° wieder zusammengesetzt, so wird aus den Teilen der Kugelfläche der Zylindermantel aufgebaut.

Im allgemeinen ist, wie die folgende Untersuchung zeigt, bei flächentreuer Abbildung keine derartige Zerlegung in Rechtecke möglich. Dagegen gibt es stets, wenn das Abbildungsgesetz bekannt ist, unendlich viele Zerlegungen beider Gebiete in paarweise symmetrische Parallelogramme, die also durch Umklappen zur Deckung gebracht werden können, wenn man nicht Wert darauf legt, durch nochmalige Zerschneidung jedes Parallelogramms etwa in zwei kongruente gleichschenklige Trapeze auch die Möglichkeit einer Deckung durch Verschiebung herzustellen. Die Kurvennetze, welche die Zerlegung in symmetrische Parallelogramme leisten, zerfallen in zwei verschiedene Arten, welche im folgenden als „längentreue“ und „längentvertauschte“ Netze auseinandergehalten sind.

Eine Abbildung zweier ebener oder auf krummen Flächen gelegener Gebiete läßt sich, wenn $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ zwei einander auf beiden Flächenstücken entsprechende Kurvenscharen sind, in folgender Weise herstellen:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(u, v), & x_2 &= x_2(u, v), \\ y_1 &= y_1(u, v), & y_2 &= y_2(u, v), \\ z_1 &= z_1(u, v), & z_2 &= z_2(u, v). \end{aligned}$$

Die Abbildung ist flächentreu, wenn die das Linienelement auf beiden Flächen darstellenden quadratischen Formen:

$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2$, $ds_2^2 = E_2 du^2 + 2F_2 du dv + G_2 dv^2$ dieselbe Determinante besitzen, die dann, weil die beiden Formen definit sind, einen positiven Wert hat. Also

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2 = \Delta > 0.$$

Bei jeder Abbildung gibt es in jedem Punkte zwei sich zu zwei Kurvennetzen zusammenschließende Richtungen, in denen die Abbildung längentreu ist, also $ds_1^2 = ds_2^2$ ist.

Diese Richtungen ergeben sich aus den Wurzeln der in $\frac{dv}{du}$ quadratischen Gleichung

$$S = ds_1^2 - ds_2^2 = (E_1 - E_2) du^2 + 2(F_1 - F_2) du dv + (G_1 - G_2) dv^2 = 0.$$

Bei flächentreuer Abbildung sind die längentreuen Richtungen stets reell; die Determinante D von S ist nämlich negativ, wie sich in folgender Weise ergibt:

$$\begin{aligned} D &= (E_1 - E_2)(G_1 - G_2) - (F_1 - F_2)^2 \\ &= (E_1 G_1 - F_1^2) + (E_2 G_2 - F_2^2) - (E_1 G_2 + E_2 G_1 - 2F_1 F_2). \end{aligned}$$

Die beiden ersten Summanden sind gleich der Determinante Δ ; führt man in dem 3. Glied die aus der Determinante Δ berechneten Ausdrücke ein:

$$G_1 = \frac{\Delta + F_1^2}{E_1}, \quad G_2 = \frac{\Delta + F_2^2}{E_2},$$

so ergibt sich

$$D = 2\Delta - \frac{E_1}{E_2}\Delta - \frac{E_1}{E_2}F_2^2 - \frac{E_2}{E_1}\Delta - \frac{E_2}{E_1}F_1^2 + 2F_1F_2,$$

$$D = -\Delta \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} - \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}F_2 - \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}F_1 \right)^2.$$

Dieser letztere Ausdruck ist, da Δ positiv ist und die beiden Quadrate nicht gleichzeitig verschwinden, sicher negativ; also ist

$$D < 0.$$

Die Differenz zweier verschiedener definiter Formen von gleicher Determinante ist eine indefinite Form.

Nachdem hiermit die Existenz von zwei reellen längentreuen Kurvenscharen bei flächentreuer Abbildung nachgewiesen ist, sollen die Winkel ω_1 und ω_2 berechnet werden, unter denen sich zwei Kurven der beiden Scharen in entsprechenden Punkten beider Flächen schneiden. Sind $\frac{dv}{du}$ und $\frac{\delta v}{\delta u}$ die den beiden längentreuen Richtungen entsprechenden Wurzeln von $S=0$, und ds und δs die zugehörigen Linienelemente, so ist

$$\cos \omega_1 = \frac{E_1 du \delta u + F_1 (du \delta v + dv \delta u) + G_1 dv \delta v}{ds \delta s},$$

$$\cos \omega_2 = \frac{E_2 du \delta u + F_2 (du \delta v + dv \delta u) + G_2 dv \delta v}{ds \delta s}.$$

Aus den Koeffizienten der Gleichung $S=0$ ergeben sich für die symmetrischen Funktionen der Wurzeln die Werte:

$$\frac{dv}{du} + \frac{\delta v}{\delta u} = -2 \frac{F_1 - F_2}{G_1 - G_2}, \quad \frac{dv}{du} \cdot \frac{\delta v}{\delta u} = \frac{E_1 - E_2}{G_1 - G_2}.$$

Hieraus folgt:

$$\cos \omega_1 = \frac{1}{G_1 - G_2} \cdot [E_1 (G_1 - G_2) - 2F_1 (F_1 - F_2) + G_1 (E_1 - E_2)] \frac{du}{ds} \cdot \frac{\delta u}{\delta s},$$

$$\cos \omega_2 = \frac{1}{G_1 - G_2} \cdot [E_2 (G_1 - G_2) - 2F_2 (F_1 - F_2) + G_2 (E_1 - E_2)] \frac{du}{ds} \cdot \frac{\delta u}{\delta s}.$$

Die beiden Ausdrücke in den eckigen Klammern unterscheiden sich unter Voraussetzung flächentreuer Abbildung nur durch das Vorzeichen; es ist nämlich

$$\begin{aligned} E_1 (G_1 - G_2) - 2F_1 (F_1 - F_2) + G_1 (E_1 - E_2) &= \\ &= 2(E_1 G_1 - F_1^2) - E_1 G_2 + 2F_1 F_2 - G_1 E_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 (G_1 - G_2) - 2F_2 (F_1 - F_2) + G_2 (E_1 - E_2) &= \\ &= -2(E_2 G_2 - F_2^2) + E_1 G_2 - 2F_1 F_2 + G_1 E_2. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}\cos \omega_1 &= -\cos \omega_2, \\ \omega_1 + \omega_2 &= 180^\circ.\end{aligned}$$

Die Schnittwinkel der längentreuen Kurven in entsprechenden Punkten beider Flächen ergänzen sich also zu 180° ¹⁾.

Die Ableitung setzt voraus, daß die Abbildung nicht isometrisch ist; in diesem Fall würde das Linienelement auf beiden Flächen für jede Richtung $\frac{dv}{du}$ übereinstimmen; die Gleichung $S = 0$ ist identisch erfüllt.

Wenn man jetzt auf beiden Flächen die beiden Kurvensysteme des bei jeder flächentreuen Abbildung vorhandenen längentreuen Netzes als Parameterkurven α, β einführt, so wird

$$\begin{aligned}ds_1^2 &= E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2 = A d\alpha^2 + 2B d\alpha d\beta + C d\beta^2, \\ ds_2^2 &= E_2 du^2 + 2F_2 du dv + G_2 dv^2 = A d\alpha^2 - 2B d\alpha d\beta + C d\beta^2.\end{aligned}$$

Durch Subtraktion ergibt sich

$$S = (E_1 - E_2) du^2 + 2(F_1 - F_2) du dv + (G_1 - G_2) dv^2 = 4B d\alpha d\beta.$$

Zerlegt man die linke Seite in zwei Linearfaktoren

$$(E_1 - E_2) du^2 + 2(F_1 - F_2) du dv + (G_1 - G_2) dv^2 = (p du + q dv)(p' du + q' dv),$$

so ist

$$\begin{aligned}d\alpha &= \varrho(p du + q dv), & \alpha &= \int \varrho(p du + q dv), \\ d\beta &= \varrho'(p' du + q' dv), & \beta &= \int \varrho'(p' du + q' dv).\end{aligned}$$

Die letzteren Ausdrücke geben die *längentreuen Kurven in geschlossener Form*; dabei sind ϱ und ϱ' zwei integrierende Faktoren, auf deren Aufsuchung also das Problem zurückgeführt ist.

Von der Wahl der integrierenden Faktoren ist die Anordnung der Netzkurven und damit Gestalt und Größe der Netzmaschen an jeder Stelle der beiden Netze abhängig. Da in jeden integrierenden Faktor eine willkürliche Funktion eingeht, hängt die Anordnung der zwei Scharen längentreuer Kurven zu längentreuen Netzen von zwei willkürlichen Funktionen ab.

Diese Tatsache erhält erhöhte Bedeutung, wenn man die von den Diagonalkurven der längentreuen Netze gebildeten Netze betrachtet. Diese Diagonalnetze ändern sich gestaltlich und werden im allgemeinen von anderen Kurven gebildet, wenn die Anordnung der Kurven der längen-

¹⁾ Vgl. hierzu und zum vorhergehenden E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. 1. Heft: Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörige Abbildungen, Leipzig 1911, § 7, S. 60.

treuen Netze geändert wird. Ein Paar einander auf beiden Flächen entsprechender Diagonalnetze besitzt folgende, geometrisch ohne weiteres ersichtliche Eigenschaft: In entsprechenden Maschen haben entsprechende Winkel gleiche Größe, während die *nicht* entsprechenden Seiten gleiche Länge besitzen. Die Diagonalnetze sollen deshalb *längenvertauschte Netze* heißen. Umgekehrt bilden die Diagonalkurven eines Paares, von längenvertauschten Netzen wieder längentreue Netze. *Die längenvertauschten Netze sind also den Anordnungen der längentreuen Kurven zu längentreuen Netzen eindeutig zugeordnet* und wie diese von zwei willkürlichen Funktionen abhängig (Fig. 1).

Fig. 1.

Um das Linienelement, bezogen auf ein längenvertauschtes Netz, zu erhalten, hat man die Parameter $\mu = \frac{\alpha + \beta}{2}$; $\nu = \frac{\alpha - \beta}{2}$ der Diagonalen eines längentreuen Netzes einzuführen. Dann wird

$$ds_1^2 = (A + 2B + C)d\mu^2 + 2(A - C)d\mu d\nu + (A - 2B + C)d\nu^2,$$

$$ds_2^2 = (A - 2B + C)d\mu^2 + 2(A - C)d\mu d\nu + (A + 2B + C)d\nu^2,$$

oder kurz

$$ds_1^2 = a_{11}d\mu^2 + 2a_{12}d\mu d\nu + a_{22}d\nu^2,$$

$$ds_2^2 = a_{32}d\mu^2 + 2a_{12}d\mu d\nu + a_{11}d\nu^2.$$

Die Gleichheit entsprechender Winkel ist hieraus zu erkennen; für die Gleichheit nicht entsprechender Seiten einer Masche ist die Verteilung nach dem Gesetz $d\mu = d\nu = \text{const.}$ über das ganze Netz hin notwendig.

Wenn $A = C$ ist, wird $a_{12} = 0$; aus einem längengleichen Rhombennetz geht ein längenvertauschtes Rechtecksnetz hervor. Ein längengleiches Rhombennetz ist unter den Anordnungen der längentreuen Kurven nur dann enthalten, wenn sich zwei Funktionen $f_1(\alpha)$ und $f_2(\beta)$ so angeben lassen, daß $Af_1(\alpha) = Cf_2(\beta)$ ist.

Längengleiche Rechtecksnetze sind nicht möglich, ohne daß die Abbildung isometrisch wird.

In der Figur 1 sind $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$ entsprechende Maschen zweier längentreuer Netze; $B_1E_1F_1D_1$ und $B_2E_2F_2D_2$ entsprechende Maschen der zugehörigen längenvertauschten Netze. Dann gelten folgende Beziehungen:

In den längentreuen Netzen ist:

$$A_1 B_1 = A_2 B_2,$$

$$A_1 D_1 = A_2 D_2,$$

$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle D_2.$$

In den längenvertauschten Netzen ist:

$$B_1 D_1 = B_2 E_2,$$

$$B_1 E_1 = B_2 D_2,$$

$$\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2.$$

In beiden Fällen lassen sich entsprechende Netzmaschen durch eine geeignete Umlappung zur Deckung bringen.

Beispiele:

1. Bei der auf Seite 1 besprochenen Abbildung durch die *Lambertsche flächentreue Zylinderprojektion* bilden die Meridiane und Parallelkreise auf der Kugel mit ihren Bildkurven, den Mantellinien und Parallelkreisen des Kreiszylinders längenvertauschte Rechtecksnetze; die Diagonalkurven dieser beiden Netze bilden längengleiche Rhombennetze.

2. *Abbildung des Kreises vom Radius 1 auf ein Quadrat von der Seite $\sqrt{\pi}$.* In der Ebene des Kreises seien zunächst Polarkoordinaten r_1, φ_1 , in der Ebene des Quadrats rechtwinklige Koordinaten x_2, y_2 eingeführt; dann sind die Linienelemente:

$$ds_1^2 = dr_1^2 + r_1^2 d\varphi_1^2, \quad ds_2^2 = dx_2^2 + dy_2^2.$$

Es sollen nun die Kreisradien $\varphi_1 = \text{const.}$ auf die Geraden $y_2 = \text{const.}$ abgebildet werden durch

$$\frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{y_2}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_1 = 2\sqrt{\pi} y_2.$$

Dann entsprechen den Kreisen $r_1 = \text{const.}$ die Geraden $x_2 = \text{const.}$ in einer Anordnung, die durch die Bedingung der Flächentreue bestimmt ist:

$$\frac{1}{2} r_1^2 d\varphi_1 = x_2 dy_2,$$

also

$$x_2 = r_1^2 \sqrt{\pi}.$$

Wenn man jetzt

$$r_1 = u, \quad x_2 = \sqrt{\pi} u^2$$

und

$$y_2 = v, \quad \varphi_1 = 2\sqrt{\pi} v$$

eingführt, so wird

$$ds_1^2 = du^2 + 4\pi u^2 dv^2, \quad ds_2^2 = 4\pi u^2 du^2 + dv^2.$$

Fig. 2.

Diese beiden Linienelemente gehören von selbst längenvertauschten Rechtecksnetzen an, wenn man die Maschenlängen dadurch bestimmt, daß man

im ganzen Abbildungsbereich $du = dv = \text{const.}$ setzt; die Behandlung der Gleichung $S = 0$ erübrigt sich.

Teilt man den Kreisradius in p und den Umfang in q gleiche Teile, so ist

$$dr_1 = \frac{1}{p}, \quad d\varphi_1 = \frac{2\pi}{q}, \quad \text{also} \quad du = \frac{1}{p}, \quad dv = \frac{\sqrt{\pi}}{q};$$

folglich müßte $\frac{q}{p} = \sqrt{\pi}$ sein; für die Herstellung einer Figur mit endlichen Maschenlängen genügt es, $\sqrt{\pi}$ durch einen Näherungswert, etwa $\frac{23}{13}$ zu ersetzen (Fig. 2).

3. *Abbildung der Kugel auf die Ebene durch die Sanson-Flamsteedsche Projektion.* Ein Netz von Meridianen $u = \text{const.}$ und Parallelkreisen $v = \text{const.}$ der Kugel vom Radius 1 wird derart auf die Ebene abgebildet, daß die Parallelkreise in parallele Gerade übergehen, auf denen die Bogenlängen längentreu aufgetragen werden; von den Meridianen geht einer, der Ausgangsmeridian, in eine dazu senkrechte Gerade über, und zwar ebenfalls unter längentreuer Abbildung. Die Bilder der anderen Meridiane sind damit bestimmt. Daß die Abbildung flächentreu ist, ist geometrisch ohne weiteres ersichtlich.

Für die Koordinaten der Kugelpunkte (1) und der Punkte in der Ebene (2) hat man

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos v \cos u, & x_2 &= u \cos v, \\ y_1 &= \cos v \sin u, & y_2 &= v, \\ z_1 &= \sin v, & z_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dann sind die beiden Linienelemente

$$ds_1^2 = \cos^2 v du^2 + dv^2,$$

$$ds_2^2 = \cos^2 v du^2 - 2u \sin v \cos v du dv + (u^2 \sin^2 v + 1) dv^2;$$

außerdem ist

$$\Delta = E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2 = \cos^2 v.$$

Um die Kurven α, β des längentreuen Netzes zu erhalten, bildet man den Ausdruck

$$S = ds_1^2 - ds_2^2 = 2u \sin v \cos v du dv - u^2 \sin^2 v dv^2 = 4B d\alpha d\beta.$$

Zerlegung der linken Seite in Linearfaktoren gibt

$$\begin{aligned} d\alpha &= \varrho (2u \cos v du - u^2 \sin v dv), \\ d\beta &= \varrho' \sin v dv, \end{aligned}$$

wo ϱ und ϱ' integrierende Faktoren sind. Setzt man

$$\varrho = \frac{1}{u^2 \cos v}, \quad \varrho' = \frac{1}{\sin v},$$

so wird

$$d\alpha = \frac{2 du}{u} - \operatorname{tg} v dv, \quad \text{also} \quad \alpha = \lg(u^2 \cos v),$$

$$d\beta = dv, \quad \beta = v.$$

An Stelle von α führt man besser durch eine andere Anordnung der Netzkurven $\bar{\alpha} = e^{\frac{\alpha}{2}}$ ein; dann sind

$$u \sqrt{\cos v} = \bar{\alpha}, \quad v = \beta$$

die Kurven des längentreuen Netzes, bezogen auf das geographische Koordinatensystem auf der Kugel. Die entsprechenden Kurven der Ebene sind in rechtwinkligen Koordinaten

$$x_2 = \bar{\alpha} \sqrt{\cos y_2}, \quad y_2 = \beta.$$

Für das Linienelement ergibt sich auf der Kugel und in der Ebene

$$ds_1^2 = \cos \beta d\bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha} \sin \beta d\bar{\alpha} d\beta + \left(\frac{\bar{\alpha}^2 \sin^2 \beta}{4 \cos \beta} + 1 \right) d\beta^2,$$

$$ds_2^2 = \cos \beta d\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha} \sin \beta d\bar{\alpha} d\beta + \left(\frac{\bar{\alpha}^2 \sin^2 \beta}{4 \cos \beta} + 1 \right) d\beta^2.$$

Um auch noch ein längenvertauschtes Netz zu erhalten, hat man die Diagonalkurven μ, ν des längentreuen Netzes bei beliebiger Anordnung seiner Kurven, etwa der durch $\bar{\alpha}$ und β bestimmten, zu ziehen:

$$\mu = \frac{\bar{\alpha} + \beta}{2}, \quad \nu = \frac{\bar{\alpha} - \beta}{2}.$$

Die Netzkurven sind dann auf der Kugel:

$$2\mu = u \sqrt{\cos v} + v, \quad 2\nu = u \sqrt{\cos v} - v$$

und in der Ebene:

$$2\mu = \frac{x_2}{\sqrt{\cos y_2}} + y_2; \quad 2\nu = \frac{x_2}{\sqrt{\cos y_2}} - y_2.$$

(Eingegangen am 2. Juli 1919.)