

# Über Potenzreihen, deren Koeffizienten zahlentheoretische Funktionen sind.

Von

G. Szegő in Budapest.

Herr G. Pólya hat mir im Jahre 1915 folgende Vermutung brieflich mitgeteilt:

*Hat die Potenzreihe*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

*lauter ganzzahlige Koeffizienten und den Konvergenzradius 1, so stellt sie entweder eine rationale Funktion dar oder sie ist über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar, d. h. sie hat den Einheitskreis zur natürlichen Grenze<sup>1)</sup>.*

Die Frage, ob diese Vermutung zutrifft oder nicht, ist bis heute unentschieden. Die weitgehendsten Resultate, welche in dieser Hinsicht bisher erreicht wurden, sind folgende:

Ein Satz von Herrn G. Pólya: *Es sei  $R > 1$  und die Funktion  $f(z)$  im Kreise  $|z| \leq R$  eindeutig und mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von singulären Stellen regulär. Wenn  $a_n$  für alle  $n$  ganz ist, so ist  $f(z)$  eine rationale Funktion<sup>2)</sup>.*

Ein Satz von Herrn F. Hausdorff: *Die Potenzreihen mit lauter ganzzahligen Koeffizienten und dem Konvergenzradius 1, die über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar sind, bilden eine abzählbare Menge<sup>3)</sup>.*

<sup>1)</sup> Man vgl. G. Pólya, Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten [Mathematische Annalen 77 (1916), S. 497–513], S. 510.

<sup>2)</sup> A. a. O. S. 497. Vgl. noch die Arbeiten von R. Jentzsch, G. Pólya, F. Carlson, sämtliche unter dem Titel Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten in den Mathematischen Annalen bzw. 78, S. 276–285, 78, S. 286–293, 79, S. 237–245.

<sup>3)</sup> F. Hausdorff, Zur Verteilung der fortsetzbaren Potenzreihen, Mathematische Zeitschrift, 4, S. 98–103.

Der Zweck dieser Arbeit ist die Nichtfortsetzbarkeit über den Einheitskreis hinaus für einige Potenzreihen, deren Koeffizienten gewisse wohl-bekannte *zahlentheoretische* Funktionen von  $n$  sind, nachzuweisen. Dies wird erreicht durch eine einheitliche Methode, die sich einerseits auf einen Satz über Dirichletsche Reihen, andererseits auf gewisse Umformungen dieser Reihen stützt.

Einige der hier untersuchten Reihen sind bereits von anderen Autoren behandelt worden<sup>4)</sup>. Für gewisse andere unter ihnen folgt ferner die Eigenschaft der Nichtfortsetzbarkeit aus allgemeinen Kriterien<sup>5)</sup>. Doch glaube ich, daß die hier dargelegte Methode ein Interesse verdient, nicht bloß darum, weil sie die Nichtfortsetzbarkeit, welche für die meisten dieser Reihen unbekannt war, liefert, sondern noch mehr darum, weil es immer merkwürdig ist, wenn zahlentheoretische Betrachtungen auf die Lösung funktionentheoretischer Fragen führen.

### Inhalt.

- § 1. Hilfssätze aus der analytischen Zahlentheorie.
- § 2. Umformung Dirichletscher Reihen.
- § 3. Darstellung der Methode.

§ 4.  $\sum_{n=1}^{\infty} z^{p_n}.$

§ 5.  $\sum_{n=1}^{\infty} A(n) z^n.$

<sup>4)</sup> Die Reihen in den §§ 6 und 7 sind als Lambertsche Reihen darzustellen, ihre Nichtfortsetzbarkeit folgt aus gewissen allgemeinen Sätzen über Lambertsche Reihen. Man vgl. J. Franel, Sur la théorie des séries [Mathematische Annalen 52 (1899), S. 529–549], S. 548; ferner K. Knopp, Über Lambertsche Reihen [Journal für die reine und angewandte Mathematik. 142 (1913), S. 283–315], S. 313, 314.

Über die Potenzreihen in § 9 hat Fatou bewiesen, daß für sie  $z=1$  singulärer Punkt ist. P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor [Acta Mathematica. 30 (1906), S. 335–400], S. 392.

<sup>5)</sup> Es gilt der Fabrysche Satz:

Die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m_{\nu}} z^{m_{\nu}}$$

hat den Einheitskreis zur natürlichen Grenze, wenn

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt[m_{\nu}]{|a_{m_{\nu}}|} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{m_{\nu}}{\nu} = \infty$$

ist. Dieser Satz führt bei den Reihen in §§ 4, 5 zum Ziele.

$$\S 6. \sum_{n=1}^{\infty} o(n) z^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) z^n.$$

$$\S 7. \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) z^n.$$

$$\S 8. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{r(n)} z^n.$$

$$\S 9. \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) z^n.$$

$$\S 10. \sum_{n=1}^{\infty} [\mu(n)]^2 z^n.$$

$$\S 11. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{r(n)} \lambda(n) z^n.$$

### § 1.

#### Hilfssätze aus der analytischen Zahlentheorie<sup>6)</sup>.

Im folgenden bezeichne ich mit  $k$  immer eine ungerade Primzahl und mit  $g$  eine primitive Wurzel modulo  $k$ , d. h. eine solche zu  $k$  teilerfremde Zahl, für welche

$$1, g, g^2, \dots, g^{k-2}$$

inkongruent sind modulo  $k$ . Dann gehört zu jeder Zahl  $m$ , für welche  $(m, k) = 1$  ist, eine ganz bestimmte  $\nu$  mit der Eigenschaft

$$m \equiv g^{\nu} \pmod{k} \quad (0 \leq \nu \leq k-2).$$

Ist  $m \equiv m' \pmod{k}$ , so gehört zu  $m$  und  $m'$  dieselbe  $\nu$ . Ich setze  $\nu = j_m$ .

Ich definiere jetzt gewisse zahlentheoretische Funktionen, die sog. *Charaktere* auf folgende Weise: Es sei

$$\varrho = e^{\frac{2\pi}{k-1}i} \quad \text{und} \quad \chi_{\alpha}(n) = \varrho^{nj_{\alpha}},$$

wenn  $n$  nicht durch  $k$  teilbar ist. Andernfalls sei  $\chi_{\alpha}(n) = 0$  ( $\alpha$  ist ganz).

Diese Funktionen besitzen folgende elementare Eigenschaften:

$$a) \quad \chi_{\alpha}(n) = \chi_{\alpha'}(n) \quad \text{für} \quad \alpha \equiv \alpha' \pmod{k-1}.$$

$$b) \quad \chi_{\alpha}(n) = \chi_{\alpha}(n') \quad \text{für} \quad n \equiv n' \pmod{k}.$$

$$c) \quad \chi_{\alpha+\alpha'}(n) = \chi_{\alpha}(n) \chi_{\alpha'}(n).$$

<sup>6)</sup> Man vgl. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, 2 Bände, Leipzig und Berlin (B. G. Teubner) 1909. 1, S. 391–417 und S. 475–498. Ich zitiere dieses Buch im folgenden mit H.

$$d) \chi_\alpha(n n') = \chi_\alpha(n) \chi_\alpha(n').$$

$$e) \sum_{n=0}^{k-1} \chi_\alpha(n) = \begin{cases} k-1 & \text{für } \alpha = 0, \\ 0 & \text{für } 1 \leq \alpha \leq k-2. \end{cases}$$

$$f) \sum_{\alpha=0}^{k-2} \chi_\alpha(n) = \begin{cases} k-1 & \text{für } n \equiv 1 \pmod{k}, \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

Ich definiere ferner folgende analytische Funktionen:

$$L_\alpha(s) = L_{\alpha'}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_\alpha(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi_\alpha(p)}{p^s}} \\ (\alpha = 0, 1, \dots, k-2; \alpha' \equiv \alpha, \pmod{k-1}),$$

wo  $s = \sigma + it$  eine komplexe Veränderliche bezeichnet und  $p$  alle Primzahlen durchläuft. Diese Reihen sind sämtlich absolut konvergent, wenn  $\sigma = \Re s > 1$  ist. Ich zitiere die Hilfssätze: Die Funktion

$$L_0(s) = \left(1 - \frac{1}{k^s}\right) \zeta(s),$$

wo  $\zeta(s)$  die Riemannsche Zetafunktion bezeichnet, ist eine meromorphe Funktion, welche im Endlichen die einzige Singularität  $s=1$  hat. Die ganze transzendente Funktion  $(s-1)\zeta(s)$  verschwindet für  $s=-2, -4, -6, \dots$  und ihre übrigen Wurzeln liegen alle im Streifen

$$0 < \sigma < 1.$$

Ist  $1 \leq \alpha \leq k-2$ , so ist  $L_\alpha(s)$  eine ganze transzendente Funktion von der folgenden Form:

$$L_\alpha(s) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{\frac{s+\delta_\alpha}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+\delta_\alpha}{2}\right)} \xi_\alpha(s),$$

wo  $\delta_\alpha = 0$  oder  $1$ , je nachdem  $\alpha$  gerade oder ungerade ist,  $\Gamma(s)$  bezeichnet die Eulersche Gammafunktion und  $\xi_\alpha(s)$  die folgenden Eigenschaften besitzt:

a) Sie ist eine ganze transzendente Funktion.

b) Ihre Wurzeln liegen im Streifen

$$0 < \sigma < 1.$$

c) Sie genügt der Funktionalgleichung

$$\xi_\alpha(s) = \varepsilon_\alpha \xi_{k-1-\alpha}(1-s) \quad (1 \leq \alpha \leq k-2),$$

wo  $\varepsilon_\alpha$  eine nur von  $\alpha$  und  $k$  abhängende Konstante bezeichnet mit dem absoluten Betrage 1.

## § 2.

## Umformung Dirichletscher Reihen.

Es sei  $\varepsilon \neq 1$  eine  $k$ -te Einheitswurzel und

$$(1) \quad g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \varepsilon^n}{n^s}$$

eine Dirichletsche Reihe, die für genügend große  $\sigma$  absolut konvergiert. Ich setze

$$(2) \quad A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad A_r(s) = \sum_{n \equiv r \pmod{k}} \frac{a_n}{n^s} \quad (0 \leq r \leq k-1),$$

dann ist

$$g(s) = \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon^r \sum_{n \equiv r \pmod{k}} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon^r A_r(s).$$

Ferner definiere ich folgende analytische Funktionen:

$$(3) \quad M_\alpha(s) = \sum_{r=0}^{k-1} \chi_\alpha(r) A_r(s) = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{n \equiv r \pmod{k}} \frac{a_n \chi_\alpha(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \chi_\alpha(n)}{n^s} \quad (\alpha = 0, 1, \dots, k-2).$$

Nun betrachte ich das lineare System

$$x_0 \chi_0(1) + x_1 \chi_1(1) + \dots + x_{k-2} \chi_{k-2}(1) = \varepsilon$$

$$x_0 \chi_0(2) + x_1 \chi_1(2) + \dots + x_{k-2} \chi_{k-2}(2) = \varepsilon^2$$

...

$$x_0 \chi_0(k-1) + x_1 \chi_1(k-1) + \dots + x_{k-2} \chi_{k-2}(k-1) = \varepsilon^{k-1}.$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \chi_0(1) & \chi_1(1) & \dots & \chi_{k-2}(1) \\ \chi_0(2) & \chi_1(2) & \dots & \chi_{k-2}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_0(k-1) & \chi_1(k-1) & \dots & \chi_{k-2}(k-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \varrho^{j_1} & \dots & \varrho^{(k-2)j_1} \\ 1 & \varrho^{j_2} & \dots & \varrho^{(k-2)j_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varrho^{j_{k-1}} & \dots & \varrho^{(k-2)j_{k-1}} \end{vmatrix}$$

ist von 0 verschieden, da  $\varrho^{j_\alpha} \neq \varrho^{j_\beta}$  ist für  $\alpha \neq \beta$  und  $1 \leq \alpha, \beta \leq k-1$ . Das System gestattet somit eine ganz bestimmte Lösung und die Zahlen  $x_0, x_1, \dots, x_{k-2}$  hängen nur von  $k$  und  $\varepsilon$  ab.

Durch Addieren der obigen Gleichungen ergibt sich

$$x_0(k-1) = \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{k-1} = -1,$$

d. h.

$$(4) \quad x_0 = \frac{1}{1-k}.$$

Ich bemerke ferner, daß die Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_{k-2}$  nicht sämtlich

verschwinden. Ist nämlich  $j_r = \frac{k-1}{2}$  ( $2 \leq r \leq k-1$ ), so hat man nach der ersten und  $r$ -ten Gleichung

$$x_0 + x_1 + \dots + x_{k-2} = \varepsilon$$

$$x_0 - x_1 + \dots - x_{k-2} = \varepsilon^r$$

und  $\varepsilon$  ist verschieden von  $\varepsilon^r$ .

Es folgt nun

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^{k-2} x_\alpha M_\alpha(s) &= \sum_{\alpha=0}^{k-2} \sum_{r=0}^{k-1} x_\alpha \chi_\alpha(r) A_r(s) = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{\alpha=1}^{k-2} x_\alpha \chi_\alpha(r) A_r(s) \\ &= \sum_{r=1}^{k-1} \varepsilon^r A_r(s) = g(s) - A_0(s), \end{aligned}$$

d. h.

$$(5) \quad g(s) = A_0(s) + \sum_{\alpha=0}^{k-2} x_\alpha M_\alpha(s)$$

$$(5') \quad = A(s) + (x_0 - 1)M_0(s) + \sum_{\alpha=1}^{k-2} x_\alpha M_\alpha(s).$$

Diese Umformung von  $g(s)$  gilt vorläufig nur für genug große  $\sigma$ ; sie gilt aber nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung in der  $s$ -Ebene überall, wo die Funktionen  $A(s)$ ,  $M_0(s)$ ,  $M_1(s)$ , ...,  $M_{k-2}(s)$  sämtlich regulär sind.

### § 3.

#### Darstellung der Methode.

Es sei jetzt

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius 1. Ihre Nichtfortsetzbarkeit über den Einheitskreis hinaus wird offenbar bewiesen, wenn ich die Existenz einer überall dichten Menge von singulären Stellen am Rande des Einheitskreises nachweise. Für die Reihen, die hier behandelt werden, zeige ich insbesondere, daß die  $k$ -ten (von 1 verschiedenen) Einheitswurzeln singuläre Stellen sind, wo  $k$  unendlich viele Primzahlen durchläuft.

Es gilt nämlich folgender Satz:

*Es habe die Dirichletsche Reihe*

$$\gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^s}$$

*eine endliche Konvergenzabszisse; folglich ist*

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n$$

regulär für  $|z| < 1$ . Ist  $\varphi(z)$  regulär auch für  $z = 1$ , so ist  $\gamma(s)$  eine ganze transzendente Funktion<sup>7)</sup>.

Es sei also von nun an  $k$  eine feste ungerade Primzahl und  $\varepsilon$  eine ebenfalls feste, von 1 verschiedene  $k$ -te Einheitswurzel; ist  $f(z)$  für  $z = \varepsilon$  regulär, so ist

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \varepsilon^n}{n^s}$$

eine ganze transzendente Funktion, vorausgesetzt, daß  $a_n = O(n^r)$  ist. In den Fällen, die hier behandelt werden, kostet die Berechnung der Funktionen (3) (d. h. ihre Zurückführung auf  $L_a(s)$  und  $\zeta(s)$ ) keine besondere Mühe. Ich zeige nun mit Hilfe der Formel (5'), daß die Funktion  $g(s)$  an gewissen Stellen der  $s$ -Ebene Pole besitzt; daraus folgt aber die Unmöglichkeit der Annahme, daß  $f(z)$  für  $z = \varepsilon$  regulär ist.

Die Hauptschwierigkeit bei diesem Beweise besteht darin, daß mehrere Glieder der Summe (5') gleichzeitig singulär werden; die Aufgabe reduziert sich somit darauf, das Nichtverschwinden von den Residuen oder, allgemeiner, von gewissen Gliedern des singulären Teils der Laurentschen Entwicklung nachzuweisen.

Ich behalte durchwegs die Bezeichnungen (1), (2), (3).

#### § 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{p_n}.$$

$p_n$  bezeichnet, wie gewöhnlich, die  $n$ -te Primzahl. Also ist

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \text{ Primzahl ist,} \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

Man hat somit

$$M_\alpha(s) = \sum_p \frac{\chi_\alpha(p)}{p^s} \quad (\alpha = 0, 1, \dots, k-2),$$

wo die Summation über alle Primzahlen  $p$  zu erstrecken ist. Ferner

$$A_0(s) = \frac{1}{k^s}.$$

---

<sup>7)</sup> M. Fekete, Sur les séries de Dirichlet [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, **150** (1910), S. 1033–1036]; G. H. Hardy, The application to Dirichlet's series of Borel's exponential method of summation [Proceedings of the London Mathematical Society (2), **8** (1910), S. 277–294]. Übrigens ist der fragliche Satz auch der Arbeit von Hurwitz, Über die Anwendung eines funktionentheoretischen Prinzips auf bestimmte Integrale, Math. Annalen, **53**, S. 220–224 leicht zu entnehmen.

Diese Funktionen sind regulär für  $\sigma > 1$ . Es sei nun  $s$  reell und  $> 1$ . Die Reihe

$$\sum_p \frac{z_\alpha(p)}{p} = \lim_{s=1+0} \sum_p \frac{z_\alpha(p)}{p^s}$$

ist bekanntlich konvergent für  $1 \leq \alpha \leq k-2$  und eigentlich divergent für  $\alpha = 0^s$ ). Ferner ist  $x_0 \neq 0$ , also nach (5)

$$\lim_{s=1+0} g(s) = \infty,$$

womit, auf Grund der Ausführungen im § 3, die Behauptung bewiesen ist, d. h. daß die Reihe in der Überschrift dieses Paragraphen den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat.

Ähnlich können die Reihen behandelt werden

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} z^{p_m p_n}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} z^{p_m p_n p_r}, \quad \text{usw.}$$

### § 5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} A(n) z^n.$$

$A(n)$  bezeichnet hier das Mangoldtsche Symbol

$$A(n) = \begin{cases} \log p & \text{für eine Primzahlpotenz } n = p^m, \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

Man hat

$$M_\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_\alpha(n) A(n)}{n^s} = - \frac{L'_\alpha(s)}{L_\alpha(s)} \quad (\alpha = 0, 1, \dots, k-2)^9)$$

und

$$A_0(s) = \sum_{n \equiv 0 \pmod{k}} \frac{A(n)}{n^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A(k^m)}{k^{ms}} = \log k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k^{ms}} = \frac{\log k}{k^s - 1},$$

also, nach (5),

$$g(s) = \frac{\log k}{k^s - 1} - \sum_{\alpha=0}^{k-2} x_\alpha \frac{L'_\alpha(s)}{L_\alpha(s)}.$$

Es sei nun  $s = 1$ ;  $L_\alpha(s)$  ist hier regulär und von 0 verschieden für  $1 \leq \alpha \leq k-2^{10)}$ . Die Funktion  $L_0(s)$  hat hier aber einen Pol erster Ordnung, ähnliches gilt also für ihre logarithmische Ableitung. Ferner ist  $x_0 \neq 0$ ; also ist  $g(s)$  singulär für  $s = 1$ . Daraus folgt die Behauptung.

<sup>9)</sup> H., 1, S. 446.

<sup>9)</sup> H., 1, S. 420.

<sup>10)</sup> Man vgl. § 1.



## § 6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) z^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) z^n.$$

Ich bezeichne mit  $\sigma(n)$  die Summe der Teiler von  $n$  und mit  $\tau(n)$  die Anzahl derselben. Ich setze allgemein

$$\sigma_a(n) = \sum_{d|n} d^a,$$

wo  $a$  eine beliebige (reelle oder komplexe) Zahl ist<sup>11)</sup>. Man hat

$$\sigma_1(n) = \sigma(n), \quad \sigma_0(n) = \tau(n).$$

Ich beweise, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_a(n) z^n$$

für sämtliche  $a$ , welche nicht Wurzeln der Gleichung

$$\zeta(1-a) = 0$$

sind, über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar ist. Ist z. B.  $a=1$  oder 0, so ist diese Bedingung erfüllt.

Zunächst ist es klar, daß diese Potenzreihe den Konvergenzradius 1 hat. Es ist nämlich

$$|\sigma_a(n)| \leq n \operatorname{Max}(1, |n^a|)$$

und für Primzahlen

$$\sigma_a(p) = 1 + p^a.$$

Ich behaupte nun, daß

$$M_a(s) = L_a(s-a) L_a(s) \quad (\alpha = 0, 1, \dots, k-2)$$

ist. Wenn ich nämlich das Dirichletsche Produkt der beiden Reihen

$$L_a(s-a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_a(n)}{n^{s-a}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_a(n) n^a}{n^s}, \quad L_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_a(n)}{n^s}$$

bilde, so ist

$$\sum_{d|n} d^a \chi_a(d) \chi_a\left(\frac{n}{d}\right) = \chi_a(n) \sum_{d|n} d^a = \chi_a(n) \sigma_a(n).$$

Ferner folgt ähnlicherweise

$$A(s) = \zeta(s-a) \zeta(s),$$

d. h. nach (5')

$$g(s) = \zeta(s-a) \zeta(s) + (x_0 - 1) L_0(s-a) L_0(s) + \sum_{a=1}^{k-2} x_a L_a(s-a) L_a(s).$$

<sup>11)</sup>  $\sum_{d|n}$  bedeutet, wie gewöhnlich, daß über alle Teiler  $d$  von  $n$  summiert wird.

Ist  $1 \leq \alpha \leq k-2$ , so ist  $L_\alpha(s)$  in der ganzen  $s$ -Ebene regulär. In der Umgebung der Stelle  $s=1$  gilt die Entwicklung

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \dots,$$

ferner hat man

$$L_0(s) = \left(1 - \frac{1}{k^s}\right) \zeta(s);$$

also ist

$$\begin{aligned} \lim_{s=1} (s-1)g(s) &= \zeta(1-a) \left[1 + (x_0-1) \left(1 - \frac{1}{k^{1-a}}\right) \left(1 - \frac{1}{k}\right)\right] \\ &= \frac{\zeta(1-a)}{k^{1-a}} \quad \text{für } a \neq 0 \end{aligned}$$

(vgl. (4)) und

$$\lim_{s=1} (s-1)^2 g(s) = 1 + (x_0-1) \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 = \frac{1}{k} \quad \text{für } a=0.$$

Daraus folgt die Behauptung.

## § 7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) z^n.$$

$\varphi(n)$  bezeichnet hier das Eulersche Zeichen: die Anzahl der Zahlen  $x < n$ , die zu  $n$  teilerfremd sind. Es ist offenbar  $\varphi(n) < n$  und für Primzahlen  $\varphi(p) = p-1$ . Die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) z^n$$

hat somit den Konvergenzradius 1.

Man hat

$$M_\alpha(s) = \frac{L_\alpha(s-1)}{L_\alpha(s)} \quad (\alpha = 0, 1, \dots, k-2)$$

und

$$A(s) = \frac{\zeta(s-1)^{12})}{\zeta(s)}.$$

Also ist nach (5')

$$g(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} + (x_0-1) \frac{L_0(s-1)}{L_0(s)} + \sum_{\alpha=1}^{k-2} x_\alpha \frac{L_\alpha(s-1)}{L_\alpha(s)}.$$

Es sei nun  $s=2$ .  $M_\alpha(s)$  ist regulär für  $1 \leq \alpha \leq k-2$ ; das Residuum ist somit

$$\lim_{s=2} (s-2)g(s) = \frac{1}{\zeta(2)} \left[1 + (x_0-1) \frac{1 - \frac{1}{k}}{1 - \frac{1}{k^2}}\right] = \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{1 - k^2} \neq 0,$$

q. e. d.

<sup>12)</sup> Man vgl. H., 2, S. 680.

## § 8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\nu(n)} z^n.$$

$\nu(n)$  bezeichnet hier die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren in  $n$  [ $\nu(1) = 0$ ]. Es ist offenbar  $1 \leq 2^{\nu(n)} \leq \tau(n)$ ; ist nämlich

$$n = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_r^{\delta_r} \quad [\nu = \nu(n)],$$

so sind die Zahlen

$$1; p_1, p_2, p_3, \dots; p_1 p_2, p_1 p_3, \dots; p_1 p_2 p_3, \dots,$$

deren Anzahl eben  $2^{\nu(n)}$  ist, alle Teiler von  $n$ . Die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\nu(n)} z^n$$

hat somit den Konvergenzradius 1.

Man hat

$$M_\alpha(s) = [L_\alpha(s)]^2 \prod_p \left[ 1 - \frac{\chi_\alpha(p^2)}{p^{2s}} \right]^{13}.$$

Nun ist

$$\chi_\alpha(p^2) = [\chi_\alpha(p)]^2 = \chi_{2\alpha}(p),$$

d. h.

$$M_\alpha(s) = \frac{[L_\alpha(s)]^2}{L_{2\alpha}(2s)} \quad (\alpha = 0, 1, \dots, k-2)$$

und ähnlicherweise

$$A(s) = \frac{[\zeta(s)]^2}{\zeta(2s)}.$$

Es sei nun  $s = 1$ .  $M_\alpha(s)$  ist regulär für  $1 \leq \alpha \leq k-2$ ;  $g(s)$  hat den zweifachen Pol  $s = 1$ , denn es ist nach den Formeln (5') und (4) im § 2

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^2 g(s) = \frac{1}{\zeta(2)} \left[ 1 + (x_0 - 1) \frac{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^2}{1 - \frac{1}{k^2}} \right] = \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{1+k} \neq 0,$$

q. e. d.

## § 9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) z^n.$$

$\mu(n)$  bezeichnet das Möbiussche Symbol:

$$\mu(1) = 1,$$

$$\mu(n) = 0 \text{ für nicht quadratfreie } n,$$

<sup>13)</sup> H., 2, S. 682.

$\mu(n) = (-1)^r$ , wenn  $n$  quadratfrei ist und aus  $r$  verschiedenen Primfaktoren besteht.

Man hat

$$M_\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_\alpha(n) \mu(n)}{n^s} = \frac{1}{L_\alpha(s)} \quad (\alpha = 0, 1, \dots, k-2)$$

und

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \quad {}^{14)}.$$

Also ist

$$g(s) = \frac{1}{\zeta(s)} + \frac{x_0 - 1}{L_0(s)} + \sum_{\alpha=1}^{k-2} \frac{x_\alpha}{L_\alpha(s)}.$$

Ich betrachte diese Funktion an den Stellen  $s = -1, -3, -5, \dots$ . Hier verschwinden nur die  $L_\alpha(s)$  mit ungeradem  $\alpha$ <sup>15)</sup>; ich setze

$$R_q = \lim_{s=-(2q-1)} g(s)(s+2q-1) \quad (q = 1, 2, 3, \dots).$$

Man bedenke ferner, daß für ungerade  $\alpha$

$$L_\alpha(s) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{\frac{s+1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \xi_\alpha(s)$$

ist und

$$\lim_{s=-m} (s+m) \Gamma(s) = \frac{(-1)^m}{m!} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Man hat somit

$$\begin{aligned} \lim_{s=-(2q-1)} \frac{L_\alpha(s)}{s+2q-1} &= A_q \xi_\alpha(-2q+1) = A_q \varepsilon_\alpha \xi_{k-1-\alpha}(2q) \\ &= B_q \varepsilon_\alpha L_{k-1-\alpha}(2q) = B_q \varepsilon_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_\alpha(n)}{n^{2q}}, \end{aligned}$$

wo  $A_q$  und  $B_q$  von 0 verschieden sind und außer  $q$  nur von  $k$  abhängen. Nun ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_\alpha(n)}{n^{2q}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_\alpha(n) \mu(n)}{n^{2q}} = 1,$$

also

$$\lim_{s=-(2q-1)} \frac{s+2q-1}{L_\alpha(s)} = \frac{1}{B_q \varepsilon_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_\alpha(n) \mu(n)}{n^{2q}};$$

<sup>14)</sup> Man vgl. H., 2, S. 576.

<sup>15)</sup> Man vgl. § 1;  $\frac{1}{\Gamma(s)}$  hat nämlich die Wurzeln  $s = 0, -1, -2, \dots$

daraus folgt, wenn ich

$$d_n = \frac{x_1}{\varepsilon_1} \bar{\chi}_1(n) + \frac{x_3}{\varepsilon_3} \bar{\chi}_3(n) + \dots + \frac{x_{k-2}}{\varepsilon_{k-2}} \bar{\chi}_{k-2}(n)$$

setze, daß

$$R_q = \frac{1}{B_q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n \mu(n)}{n^{2q}} \quad (q = 1, 2, 3, \dots)$$

ist. Wäre nun  $R_q = 0$  für alle  $q$ , so hätte die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n \mu(n)}{n^s}$$

Wurzeln mit beliebig großer Abszisse.

Es gilt aber der Satz:

*Hat die Dirichletsche Reihe einen absoluten Konvergenzbereich und Wurzeln mit beliebig großer Abszisse, so verschwindet sie identisch<sup>16)</sup>.*

In diesem Falle ist

$$|d_n \mu(n)| \leq |x_1| + |x_3| + \dots + |x_{k-2}| = O(1),$$

also

$$d_n \mu(n) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Es ist aber  $d_n = d_{n'}$  für  $n \equiv n' \pmod{k}$ ; ist ferner  $1 \leq r \leq k-1$ , so enthält die arithmetische Progression  $r + kx$  immer eine Primzahl (sogar unendlich viele Primzahlen), für welche also

$$\mu(n) = \mu(r + kx) = -1 \neq 0$$

ist. Also ist  $d_n = d_r = 0$  für  $r = 1, 2, \dots, k-1$ , d. h.

$$\frac{x_1}{\varepsilon_1} \bar{\chi}_1(n) + \frac{x_3}{\varepsilon_3} \bar{\chi}_3(n) + \dots + \frac{x_{k-2}}{\varepsilon_{k-2}} \bar{\chi}_{k-2}(n) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, k-1).$$

Es ist also insbesondere

$$\frac{x_1}{\varepsilon_1} \bar{\varrho}^v + \frac{x_3}{\varepsilon_3} \bar{\varrho}^{3v} + \dots + \frac{x_{k-2}}{\varepsilon_{k-2}} \bar{\varrho}^{(k-2)v} = 0 \quad \left(0 \leq v \leq \frac{k-3}{2}\right).$$

Nun ist  $|\varepsilon_\alpha| = 1$ , und die Zahlen  $x_1, x_3, \dots, x_{k-2}$  können nicht sämtlich verschwinden (vgl. § 2); also ist die Determinante dieses Systems gleich 0. Dies trifft aber nicht zu, da  $\bar{\varrho}^\alpha \neq \bar{\varrho}^\beta$  für  $2 \leq |\alpha - \beta| \leq k-2$ . Damit ist die Behauptung bewiesen.

<sup>16)</sup> H., 2, S. 744, Satz 15.

## § 10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\mu(n)]^2 z^n.$$

Man hat

$$M_{\alpha}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{\alpha}(n) [\mu(n)]^2}{n^s} = \prod_p \left[ 1 + \frac{\chi_{\alpha}(p)}{p^s} \right] = \prod_p \frac{1 - \frac{\chi_{2\alpha}(p)}{p^{2s}}}{1 - \frac{\chi_{\alpha}(p)}{p^s}} = \frac{L_{\alpha}(s)}{L_{2\alpha}(2s)}$$

( $\alpha = 0, 1, \dots, k-2$ )

und

$$A(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}.$$

Also ist

$$g(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} + (x_0 - 1) \frac{L_0(s)}{L_0(2s)} + \sum_{\alpha=1}^{k-2} x_{\alpha} \frac{L_{\alpha}(s)}{L_{2\alpha}(2s)}.$$

Es sei  $s = 1$ ; das Residuum ist

$$\lim_{s=1} (s-1) g(s) = \frac{1}{\zeta(2)} + (x_0 - 1) \frac{1 - \frac{1}{k}}{1 - \frac{1}{k^2}} \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{1 - k^2} \neq 0,$$

q. e. d.

## § 11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{r(n)} \lambda(n) z^n.$$

Hier ist

$$\lambda(1) = 1,$$

$\lambda(n) = (-1)^r$ , wenn die Anzahl der Primfaktoren in  $n$  (mehrfache mit ihrer Multiplizität gezählt)  $r$  ist.

Man hat

$$M_{\alpha}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{\alpha}(n) 2^{r(n)} \lambda(n)}{n^s} = \prod_p \frac{\left[ 1 - \frac{\chi_{\alpha}(p)}{p^s} \right]^2}{1 - \frac{\chi_{2\alpha}(p)}{p^{2s}}} = \frac{L_{2\alpha}(2s)}{[L_{\alpha}(s)]^2} \quad (17)$$

( $\alpha = 0, 1, \dots, k-2$ )

und

$$A(s) = \frac{\zeta(2s)}{[\zeta(s)]^2}.$$

Also ist

$$g(s) = \frac{\zeta(2s)}{[\zeta(s)]^2} + (x_0 - 1) \frac{L_0(2s)}{[L_0(s)]^2} + \sum_{\alpha=1}^{k-2} x_{\alpha} \frac{L_{2\alpha}(2s)}{[L_{\alpha}(s)]^2}.$$

<sup>17)</sup> H., 2, S. 678.

Ich betrachte diese Funktion an den Stellen  $s = -1, -3, -5, \dots$ .  
Ich setze wie in § 9

$$R_q = \lim_{s=-(2q-1)} g(s)(s+2q-1) \quad (q=1, 2, 3, \dots).$$

Dann ist, wie dort, für ungerade  $\alpha$

$$\lim_{s=-(2q-1)} \frac{s+2q-1}{L_\alpha(s)} = \frac{1}{B_q \varepsilon_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_\alpha(n) \mu(n)}{n^{2q}};$$

ferner ist ähnlicherweise

$$\lim_{s=-(2q-1)} \frac{L_{2\alpha}(2s)}{s+2q-1} = C_q \varepsilon_{2\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_{2\alpha}(n)}{n^{4q-1}},$$

wo  $C_q$  von 0 verschieden ist und außer  $q$  nur von  $k$  abhängt.

Daraus folgt für ungerade  $\alpha$

$$\lim_{s=-(2q-1)} (s+2q-1) \frac{L_{2\alpha}(2s)}{[L_\alpha(s)]^2} = \frac{C_q}{B_q^2} \frac{\varepsilon_{2\alpha}}{\varepsilon_\alpha^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_\alpha(n) \mu(n)}{n^{2q}} \right\}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_{2\alpha}(n)}{n^{4q-1}}.$$

Ich definiere nun die folgenden zahlentheoretischen Funktionen:

$G(n) = 0$ , wenn  $n$  keine Quadratzahl ist,

$G(n) = \nu$ , wenn  $n = \nu^2$  ist.

Ferner sei

$$\mu^*(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

und

$$F(n) = \sum_{d|n} \mu^*(d) G\left(\frac{n}{d}\right).$$

Dann ist offenbar

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_\alpha(n) \mu(n)}{n^s} \right\}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_\alpha(n) \mu^*(n)}{n^s}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_{2\alpha}(n)}{n^{2s-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_\alpha(n^2) n}{n^{2s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_\alpha(n) G(n)}{n^s},$$

also

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_\alpha(n) \mu(n)}{n^s} \right\}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_{2\alpha}(n)}{n^{2s-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_\alpha(n) F(n)}{n^s}.$$

Ich setze

$$e_n = x_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2} \bar{\chi}_1(n) + x_3 \frac{\varepsilon_6}{\varepsilon_3^2} \bar{\chi}_3(n) + \dots + x_{k-2} \frac{\varepsilon_{2k-4}}{\varepsilon_{k-2}^2} \bar{\chi}_{k-2}(n),$$

dann ist

$$R_q = \frac{C_q}{B_q^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n F(n)}{n^{2q}} \quad (q \geq 1 \text{ und ganz}).$$

Wäre also  $R_q = 0$  für  $q = 1, 2, 3, \dots$ , so hätte die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n F(n)}{n^s}$$

Wurzeln mit beliebig großer Abszisse. Nun ist

$$e_n = O(1);$$

man hat ferner

$$|\mu^*(n)| \leq \sum_{d|n} 1 \leq n$$

und

$$|F(n)| \leq \sum_{d|n} d \sqrt{\frac{n}{d}} \leq n \sqrt{n} \sqrt{n} = n^2.$$

Daraus folgt nach § 9

$$e_n F(n) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Man hat aber wie dort  $e_n = e_{n'}$  für  $n \equiv n' \pmod{k}$ ; ferner ist, wenn  $p$  eine Primzahl bezeichnet,

$$\mu^*(1) = 1, \quad \mu^*(p) = 2\mu(p) = -2,$$

also

$$F(p) = G(p) - 2G(1) = -2 \neq 0.$$

D. h.

$$e_1 = e_2 = \dots = e_{k-1} = 0.$$

Daraus folgt ebenso wie in § 9 die Unmöglichkeit der Annahme, daß  $\eta(s)$  eine ganze transzendente Funktion ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

(Eingegangen am 4. August 1919.)