Über eine Analogie zwischen rotierender Scheibe und belasteter Kreisplatte.

Von L. FÖPPL in Dresden.

In den folgenden Zeilen wird der Spannungs- und Formänderungszustand einer gleichmäßig rotierenden Scheibe (unter 1) nach der üblichen Darstellung behandelt und im Anschluß daran (unter 2) dasselbe für die symmetrisch belastete Kreisplatte ausgeführt, in beiden Fällen bei veränderlicher Dicke. Die vollkommene Analogie beider Aufgaben hinsichtlich der Spannung wie der Zerrung tritt dabei deutlich hervor, so daß Lösungen der einen unmittelbar auch Lösungen für die andere ergeben; hiervon wird an einem Beispiel Gebrauch gemacht, indem die bekannte Lösung für rotierende Scheiben mit veränderlicher Dicke auf die bisher unbekannte Lösung für symmetrisch belastete Kreisplatten von veränderlicher Stärke übertragen wird. Der Hauptvorteil dieser neuen Analogie dürfte neben der Oekonomie der Denkarbeit, die sie gestattet, in einer Oekonomie der Versuche zu erblicken sein, da sich auch die Versuchsergebnisse von dem einen auf den anderen Fall übertragen lassen. Als Grundannahmen für die Berechnung der Platte dienen die üblichen, gewöhnlich nach Kirchhoff bezeichneten, wonach nur die Biegung der Platte berücksichtigt wird.

1. Rotierende Scheibe mit veränderlicher Dicke. Wir denken uns eine kreissymmetrische Scheibe mit veränderlicher Dicke h , die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Es bildet sich dabei ein achsensymmetrischer Spannungs- und Formänderungszustand aus. In erster Annäherung nimmt man gleichmäßige Verteilung der Spannungen über die Dicke der Platte an jeder Stelle an¹⁾, so daß

$$h\sigma_r = T_r \text{ und } h\sigma_t = T_t$$

die Spannungsergebnisse für radiale und tangentielle Schnitte senkrecht zur Mittelfläche, bezogen auf die Längeneinheit in der Mittelfläche, bedeuten. Die Gleichgewichtsbedingung für ein in dieser Weise aus der Platte ausgeschnittenes Element lautet dann bekanntlich:

$$\frac{dT_r}{dr} = \frac{T_r - T_t}{r} - \mu\omega^2 r h \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Diese rein statische Bedingung liefert uns nur die eine Gleichung für die beiden Unbekannten T_r und T_t .

Um den Formänderungszustand zu beschreiben, bezeichnen wir mit ϱ den Zuwachs, den der Radius r der Scheibenmittelfläche infolge der Formänderung erfährt, so daß die auf die Längeneinheit bezogenen Dehnungen der Mittelfläche in Richtung des Radius und senkrecht dazu durch

$$\varepsilon_r = \frac{d\varrho}{dr}, \quad \varepsilon_t = \frac{\varrho}{r} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ausgedrückt werden. Nach dem Hookeschen Gesetz bestehen zwischen den Formänderungs- und Spannungsgrößen die Beziehungen:

$$\frac{d\varrho}{dr} = \frac{1}{Eh} \left(T_r - \frac{1}{m} T_t \right), \quad \frac{\varrho}{r} = \frac{1}{Eh} \left(T_t - \frac{1}{m} T_r \right)$$

oder nach den Spannungsergebnissen aufgelöst:

$$T_r = \frac{m^2}{m^2-1} Eh \left(\frac{d\varrho}{dr} + \frac{1}{m} \frac{\varrho}{r} \right), \quad T_t = \frac{m^2}{m^2-1} Eh \left(\frac{\varrho}{r} + \frac{1}{m} \frac{d\varrho}{dr} \right) \quad . \quad (3).$$

Nach Einsetzen dieser Werte für T_r und T_t in die obige Gl. (1) erhält man unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit von h :

$$\frac{d^2\varrho}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varrho}{dr} - \frac{\varrho}{r^2} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dr} \left(\frac{d\varrho}{dr} + \frac{1}{m} \frac{\varrho}{r} \right) = -\mu\omega^2 \frac{m^2-1}{m^2 E} r \quad . \quad . \quad (4).$$

Damit ist die Aufgabe auf diese Differentialgleichung für ϱ zurückgeführt, deren Lösung sich leicht angeben läßt, wenn h in seiner Abhängigkeit von r durch ein Potenzgesetz $h = cr^n$ gegeben ist.

¹⁾ Th. v. Kármán, Enzykl. d. math. Wissensch., Bd IV, Art. 27, S 359

Häufig geht man auch so vor¹⁾, daß man aus den Gl. (3) ρ eliminiert. Dann ergibt sich:

$$\frac{1}{h} \left(T_r - \frac{1}{m} T_t \right) = \frac{d}{dr} \left[\frac{r}{h} \left(T_t - \frac{1}{m} T_r \right) \right] \quad (5).$$

Diese Gleichung bestimmt zusammen mit Gl. (1) T_r und T_t . Durch Einführung einer Art Spannungsfunktion F , die mit den Spannungsergebnissen durch

$$T_r = \frac{F}{r}, \quad T_t = \frac{dF}{dr} + \mu \omega^2 h r^2 \quad (6)$$

verbunden ist, wird Gl. (1) identisch befriedigt, während Gl. (5) als Bestimmungsgleichung für F übergeht in

$$r \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} - \frac{1}{h} \frac{dh}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} - \frac{1}{m} F \right) + \left(3 + \frac{1}{m} \right) \mu \omega^2 h r^2 = 0 \quad (7).$$

Drückt man die Veränderlichkeit von h durch ein Potenzgesetz in r mit beliebig gegebenem Exponenten n aus:

$$h = c r^n \quad (8),$$

so wird aus Gl. (7)

$$r \frac{d^2 F}{dr^2} + (1-n) \frac{dF}{dr} - \left(1 - \frac{n}{m} \right) \frac{F}{r} + \left(3 + \frac{1}{m} \right) \mu \omega^2 c r^{n+2} = 0 \quad (9)$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$F = \alpha r^{n+3} + A r^\alpha + B r^\beta \quad (10),$$

wobei α sich bestimmt aus:

$$\alpha = - \frac{\left(3 + \frac{1}{m} \right) \mu \omega^2 c}{\frac{n}{m} + 3n + 8} \quad (11)$$

und α und β die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - n x + \frac{n}{m} - 1 = 0 \quad (12)$$

sind, während A und B die beiden Integrationskonstanten bedeuten, die den jeweiligen Randbedingungen anzupassen sind.

Durch Aneinanderreihen von mehreren Aesten, von denen jeder gut durch einen Ansatz nach Art von Gl. (8) dargestellt wird, läßt sich jede vorgegebene Veränderlichkeit der Dicke mit hinreichender Genauigkeit wiedergeben.

So weit ist die Theorie der rotierenden Scheiben mit veränderlicher Dicke bekannt und an zahlreichen Beispielen sind numerische Rechnungen durchgeführt worden. Wir werden nun zeigen, daß wir Schritt für Schritt die gleichen Überlegungen bei der Beanspruchung symmetrisch belasteter Kreisplatten anwenden können und auch zu denselben Lösungen geführt werden.

2. Symmetrisch belastete Kreisplatte mit veränderlicher Dicke. Wir denken uns die Platte mit veränderlicher Dicke ähnlich wie die Scheibe so ausgebildet, daß die Plattenmittelfläche vor der Formänderung eine Ebene ist und zwar eine Symmetrieebene für die Gestalt der Platte. Wie unter 1, wollen wir uns aus der Kreisplatte ein Element durch benachbarte Radial- und Kreisschnitte senkrecht zur Mittelfläche herausgeschnitten denken. Nach der Kirchhoffschen Plattentheorie sind die Spannungen in diesen Schnitten nach dem Geradliniengesetz verteilt. Wir sprechen hier gar nicht von den Spannungen, sondern gleich von den resultierenden Biegemomenten, bezogen auf die Längeneinheit in der Plattenmittelfläche. Die Biegemomente, zu denen die Spannungen in den Schnittflächen des Plattenelementes Veranlassung geben, nennen wir M_r bzw. M_t . Sie entsprechen den Spannungsergebnissen T_r und T_t bei der Scheibe. Außer den Biegungsspannungen treten aber bei der Platte noch Schubspannungen auf. Aus Symmetriegründen sind in den Radialschnitten die Schubspannungen null; auch in den Tangentialschnitten verschwinden aus dem gleichen Grund die Schubspannungen parallel zur Mittelfläche; dagegen sind in diesen Schnitten die Schubspannungen in Richtung senkrecht zur Mittelfläche von null verschieden und geben Veranlassung zu einer resultierenden Scherkraft V , die wir uns auch wieder auf die Längeneinheit in der Platten-

¹⁾ A. und L. Föppl, Drang und Zwang, München 1920, Bd. I, § 54.

mittelfläche bezogen denken wollen. Das Gleichgewicht des Plattenelementes gegen Verdrehen um eine in Richtung der Tangente an den Kreisschnitt r verlaufende Gerade lautet dann:

$$\frac{dM_r}{dr} = \frac{M_t - M_r}{r} - V \quad (1'),$$

eine Gleichung, die ähnlich gebaut ist wie Gl. (1). Die resultierende Scherkraft V folgt aus der Gleichgewichtsbedingung des Plattenelementes in vertikaler Richtung. Wird die Lastintensität mit p bezeichnet, so ergibt dies

$$\frac{d(Vr)}{dr} = pr.$$

Die Größe V läßt sich demnach aus der gegebenen Belastung p leicht berechnen, so daß wir sie als Bekannte in Gl. (1') ansehen wollen. Die rein statischen Bedingungen der Aufgabe sind damit erschöpft. Sie liefern eine Gleichung für die beiden Unbekannten M_r und M_t .

Um die Gestaltsänderung der Platte zu kennzeichnen, genügt es, die Krümmung der ursprünglich ebenen Plattenmittelfläche an jeder Stelle anzugeben. Da die Mittelfläche Achsensymmetrie besitzt, sind die Hauptkrümmungen an jeder Stelle durch die Krümmung κ_r des Meridianschnittes und die Krümmung κ_t senkrecht dazu bestimmt. Sie lassen sich beide mit Hilfe des Neigungswinkels φ , den die Tangente an die Meridiankurve der Mittelfläche mit der Horizontalen bildet, ausdrücken. Es ist nämlich

$$\kappa_r = \frac{d\varphi}{dr}, \quad \kappa_t = \frac{\varphi}{r} \quad (2').$$

Die Formänderungsgrößen der Platte κ_r , κ_t und φ einerseits und der Scheibe ε_r , ε_t und ϱ andererseits entsprechen sich gegenseitig.

Das Hookesche Gesetz lautet hier

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{EJ} \left(M_r - \frac{1}{m} M_t \right), \quad \frac{\varphi}{r} = \frac{1}{EJ} \left(M_t - \frac{1}{m} M_r \right),$$

wobei das Trägheitsmoment J sich ebenso wie die Biegemomente auf die Längeneinheit in der Mittelfläche bezieht, so daß

$$J = \frac{H^3}{12}$$

ist, wenn die Plattendicke im Gegensatz zur Scheibendicke h mit H bezeichnet wird.

Die Hookeschen Gleichungen nach den Momenten aufgelöst lauten:

$$M_r = \frac{m^2}{m^2 - 1} EJ \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{m} \frac{\varphi}{r} \right), \quad M_t = \frac{m^2}{m^2 - 1} EJ \left(\frac{\varphi}{r} + \frac{1}{m} \frac{d\varphi}{dr} \right) \quad (3').$$

Darin wird gewöhnlich

$$\frac{m^2}{m^2 - 1} EJ = N$$

die »Plattensteifigkeit« genannt, die hier mit J bzw. H von r abhängig ist. Das Trägheitsmoment J spielt hier dieselbe Rolle wie die Dicke h bei der Scheibe.

Wir können M_r und M_t nach den Gl. (3') in Gl. (1') einsetzen und erhalten eine Gleichung für φ , die natürlich dieselbe Form haben muß wie Gl. (4), wenn man die sich entsprechenden Größen einsetzt. Sie lautet:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{J} \frac{dJ}{dr} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{m} \frac{\varphi}{r} \right) = - \frac{V}{J} \frac{m^2 - 1}{m^2 E} \quad (4').$$

Dabei ist zu beachten, daß die sich entsprechenden Größen ϱ und φ von verschiedener Dimension sind. Um auch darin Übereinstimmung zu erzielen, multipliziere man etwa Gl. (4') mit dem Radius a der Platte bzw. Scheibe.

Machen wir von dem anderen Weg zur Lösung Gebrauch, den wir in 1 gezeigt haben, so ergibt die Elimination von φ aus den Gl. (3')

$$\frac{1}{J} \left(M_r - \frac{1}{m} M_t \right) = \frac{d}{dr} \left[\frac{r}{J} \left(M_t - \frac{1}{m} M_r \right) \right] \quad (5').$$

Zusammen mit Gl. (1') bestimmt diese Gleichung die Momente M_r und M_t .

Wir führen wieder eine Art Spannungsfunktion F ein durch

$$M_r = \frac{a F}{r}, \quad M_t = a \frac{dF}{dr} + Vr \quad (6'),$$

wodurch Gl. (1') identisch befriedigt wird und Gl. (5') die folgende Bedingungsgleichung für F liefert:

$$r \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} - \frac{1}{J} \frac{dJ}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} - \frac{1}{m} F \right) + \frac{r^2}{a} \frac{dV}{dr} + \frac{r}{a} V \left(2 + \frac{1}{m} - \frac{r}{J} \frac{dJ}{dr} \right) = 0. \quad (7')$$

Wir müssen nun nochmals auf die schon oben abgeleitete Gleichung, aus der sich die Scherkraft V bestimmt, zurückgreifen:

$$\frac{d(Vr)}{dr} = pr.$$

Welche von den üblichen Belastungen p auch gegeben sein mag und wie sich auch dementsprechend aus der letzten Beziehung V berechnet, so läßt sich stets Gl. (7') auf die gleiche Weise lösen, wie wir es unten für den besonderen Fall der strengen Analogie mit der rotierenden Scheibe angeben werden, so daß sich demnach der allgemeinste Fall einer symmetrisch belasteten Kreisplatte, die am Rand frei gelagert oder auch eingespannt ist, ohne Schwierigkeit erledigen läßt.

Um die vollkommene Analogie zwischen rotierender Scheibe und Kreisplatte zu Ende zu führen, sind noch die folgenden »Ähnlichkeitsbedingungen« zu erfüllen, wie ein Vergleich der Gl. (4) und (4') zeigt:

$$J = a^2 h, \quad a \frac{V}{J} = \mu \omega^2 r.$$

Der Faktor a^2 in der ersten Gleichung dient dazu, die Dimensionen auf beiden Seiten der Gleichung richtig zu stellen. Die zweite Ähnlichkeitsbedingung läßt sich durch Einführung der Belastung p auch folgendermaßen schreiben

$$p = \frac{\mu \omega^2}{a r} \frac{d(J r^2)}{dr} \quad \text{oder} \quad p = \mu \omega^2 \frac{a}{r} \frac{d(h r^2)}{dr}.$$

Damit geht Gl. (7') über in

$$r \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{dF}{dr} - \frac{F}{r} - \frac{1}{J} \frac{dJ}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} - \frac{1}{m} F \right) + \left(3 + \frac{1}{m} \right) \mu \omega^2 \frac{r^2}{a^2} J = 0 \quad (7'').$$

Wegen $\frac{J}{a^2} = h$ ist diese Gleichung identisch mit Gl. (7). Wie im Anschluß an Gl. (7), läßt sich hier selbstverständlich ebenso die Lösung von Gl. (7'') ohne Schwierigkeit angeben.

Die Analogie zwischen rotierender Scheibe und belasteter Kreisplatte ist demnach in allen Einzelheiten durchführbar und eine Lösung der einen Aufgabe liefert unmittelbar auch eine Lösung der anderen. Die sich entsprechenden Größen seien hier nochmals zusammengestellt, wobei durch Multiplikation bzw. Division mit dem konstanten Radius a für Gleichheit der Dimensionen entsprechender Größen gesorgt ist.

Scheibe	Platte
Abmessungen $\left\{ \begin{array}{l} \text{Radius } a \\ h \end{array} \right.$	Radius a $\frac{J}{a^2}$
Spannung $\left\{ \begin{array}{l} a T_r \\ a T_t \end{array} \right.$	M_r M_t
Zerrung $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho}{a} \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_t \end{array} \right.$	φ $\alpha \kappa_r$ $\alpha \kappa_t$
ferner: Zentrifugalkraft $\mu \omega^2 h r a$	Scherkraft V

Aus dem letzten Vergleichspunkt folgt die Bedingung für die Belastungsintensität p der Platte:

$$p = \mu \omega^2 \frac{a}{r} \frac{d(h r^2)}{dr}.$$

Damit ist der Vergleich vollkommen durchgeführt.

Für konstante Dicke $h = \frac{J}{a^2} = \text{konst.}$ folgt für die Belastung:

$$p = 2\mu\omega^2 ah = \text{konst.}$$

3. Beispiel. Bei rotierenden Scheiben gleicher Festigkeit ($\sigma_r = \sigma_t = \sigma = \text{konst.}$) wird für die Dicke h folgende Abhängigkeit von r gefunden¹⁾:

$$h = h_0 e^{-\frac{\mu\omega^2}{2\sigma} r^2}.$$

Wenn sich diese Gestalt der Scheibe auch nicht genau nachahmen läßt, da erst für $r = \infty$ die Dicke zu null würde, so liefert sie doch einen brauchbaren Anhaltspunkt für die Abnahme der Dicke mit r , und in der Tat stimmt die Form der bei der Laval-turbine verwendeten Laufräder gut damit überein.

Wir wollen die Dicke der Kreisplatte und ihre Belastungsintensität p angeben, die der obigen Scheibe entspricht. Die Dicke H bestimmt sich aus

$$J = \frac{H^3}{12} = a^2 h = a^2 h_0 e^{-\frac{\mu\omega^2}{2\sigma} r^2}$$

oder, indem wir mit $H_0 = \sqrt[3]{12a^2 h_0}$ die Dicke in der Mitte für $r = 0$ bezeichnen:

$$H = H_0 e^{-\frac{\mu\omega^2}{6\sigma} r^2}.$$

Die Belastung folgt aus

$$p = \mu\omega^2 \frac{a}{r} \frac{d(hr^2)}{dr} = \mu\omega^2 ha \left(2 + \frac{r}{h} \frac{dh}{dr}\right), \quad \text{zu} \quad p = 2\mu\omega^2 ha - \frac{\mu^2\omega^4}{\sigma} ar^2 h.$$

Die Belastungsintensität p hat demnach in der Mitte den Wert

$$p_0 = 2\mu\omega^2 ha.$$

Am Rand $r = a$ liegt die Platte frei auf, da hier $M_r = 0$ ist, entsprechend $\sigma_r = 0$ bei der Scheibe.

Im Anschluß an diese Aufgabe liegt es nahe, nach der Platte gleicher Festigkeit, etwa bei konstanter Belastung p , zu fragen. Diese Frage läßt sich nicht einfach beantworten, dagegen läßt sich die Bedingung

$$\frac{M_r}{J} = \frac{M_t}{J} = C = \text{konst.}$$

bei gleichmäßig verteilter Belastung einfach durchführen und liefert als Gesetz für die Abnahme der Dicke H der Platte: $C(H^3 - H_0^3) = 3pr^2$.

Die obige Bedingung bedeutet einen überall gleichmäßigen Anstieg der Spannungen von der Mittelfläche aus, so daß bei dem angegebenen Dikengesetz die Kantenspannungen an der Stelle der größten Dicke H_0 am größten ist. Durch einen noch etwas stärkeren Abfall der Dicke H mit wachsendem r kann man einer überall gleichen Kantenspannung nahe kommen. Auf weitere Einzelheiten in dieser Frage einzugehen läßt sich mit dem Zweck dieses Aufsatzes nicht vereinigen. 91

Die Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung und ihre Bedeutung für Zähigkeitsmessungen.²⁾

(Mit einem Anhang über den Druckverlust turbulenter Strömung beim Eintritt in ein Rohr.)

Von L. SCHILLER in Leipzig.

Gelegentlich einer experimentellen Untersuchung über den kritischen Wert der Reynoldsschen Zahl (reduzierten Geschwindigkeit)³⁾ wurde der Widerstand der Laminarströmung bei höheren Reynoldsschen Zahlen beträchtlich größer gefunden, als dem Poiseuilleschen Gesetze entspricht; die Differenz wuchs mit zunehmender Geschwindigkeit. Als Grund dieser Erscheinung ergab sich, daß innerhalb der Meßstrecke nicht durchwegs die von Poiseuille vorausgesetzte parabolische Geschwindigkeitsver-

¹⁾ Th. v. Kármán, Enzykl. d. math. Wissensch., Bd. IV, Art. 27, Nr. 11b, S. 361.

²⁾ Aus der Leipziger Habilitationsschrift des Verfassers.

³⁾ L. Schiller, Experimentelle Untersuchungen zum Turbulenzproblem. Diese Zeitschr. 1, S. 436, 1921. Hinweise auf diese Arbeit werden im folgenden durch Sch. angegeben.