Ueber die Vertheilung der statischen Elektricität in einem von zwei Kugelkalotten begrenzten Körper.

(Von Herrn *F. G. Mehler* zu Danzig.)

Das Problem der Elektricitätsvertheilung in einem von zwei sich nicht schneidenden Kugelflächen begrenzten Körper ist bekanntlich schon von *Poisson* für den besonderen Fall gelöst worden, dass der Körper aus zwei vollen Kugeln besteht und keine äusseren Kräfte auf ihn einwirken; seine allgemeine und vollständige Lösung aber hat es durch eine im Jahre 1862 erschienene Schrift des Herrn *C. Neumann* erhalten, deren Methoden und Hauptresultate man auch in diesem Journal (Bd. 62, p. 36 — 49) angegeben findet. Meine Absicht ist es, den bisher, so viel ich weiss, noch unerledigten Fall in Betracht zu ziehen, wo die Grenzen des Körpers durch zwei sich schneidende Kugelflächen bestimmt sind. Jeden der vier gesonderten Räume, in welche zwei solche Flächen den ganzen unendlichen Raum theilen, wird man nach Belieben als die Elektricität leitend oder nicht leitend voraussetzen können. Welche Anordnung man aber in dieser Beziehung auch treffen, und wo auch immer in dem nichtleitenden Raume der Sitz der vertheilend wirkenden elektrischen Massen sein möge, so sind doch alle daraus entspringenden Probleme, nach dem jetzigen Stande der allgemeinen Theorie, als vollständig gelöst zu betrachten *), sobald man kennt:

I. Die Dichtigkeit der elektrischen Schicht, welche durch einen elektrischen Massenpunkt auf einem von zwei Kugelkalotten eingeschlossenen Körper hervorgerufen wird und gebunden bleibt, wenn dieser Körper mit einem unendlich grossen Leiter in leitende Verbindung gebracht wird.

II. Die durch Influenz eines elektrischen Massenpunktes erzeugte Vertheilung in einem Leiter, der von innen durch zwei Kugelkalotten begrenzt, nach aussen hin unbegrenzt ist.

III. Die Vertheilung einer gegebenen Elektricitätsmenge auf einem isolirten Leiter der ersten Art.

Bei der Behandlung dieser Aufgaben, von denen übrigens die dritte,

*) Man vergleiche die beiden Aufsätze des Herrn *Lipschitz* in Bd. 58, p. 1 — 53 und 152 — 173 dieses Journals.

wie stets bei einem Leiter, der nur aus einem einzigen Stücke besteht, als ein Grenzfall der ersten angesehen werden kann, werde ich mich der Coordinaten bedienen, welche Herr *C. Neumann* seiner „*Theorie der Elektricitäts- und Wärme-Vertheilung in einem Ringe*“ (Halle 1864) zu Grunde gelegt hat. Die Integration der Differentialgleichung des Potentials wird zunächst mit Hülfe einer durch ein bestimmtes Integral definirten Transcendenten geschehen, welche hier dieselben Dienste leistet, wie die „*Bessel*sche Function“ für zwei sich berührende und die *Laplace*sche Function $P_n(x)$ für zwei völlig getrennte Kugelflächen; aber durch eine einfache Transformation wird es gelingen, das Resultat von jener Transcendenten zu befreien und in die Form eines einfachen bestimmten Integrales zu bringen, das unter dem Integralzeichen nur noch Kreis- und Exponentialfunctionen enthält. In gewissen speciellen Fällen, zu denen auch das von Herrn *Lipschitz* in dem zweiten der vorhin citirten Aufsätze und auch in einer späteren Arbeit *) behandelte „kreisförmig begrenzte Segment einer Kugelfläche“ gehört, ist sogar dieses Integral selbst auf Elementarfunctionen zurückführbar. Wenn nun Herr *Lipschitz* an dem letztgenannten Orte ein Verfahren angegeben hat, welches geeignet ist, die elektrostatische Vertheilung auch für eine beliebige Anzahl von ganz ausserhalb einander liegenden Kugelflächensegmenten zu bestimmen, und wenn man selbst annehmen will, dass dieses Verfahren auch für den Fall zweier Segmente mit gemeinschaftlichem Rande zulässig sei, so ist doch zu beachten, dass eine wirkliche Durchführung desselben die Ausführung einer unendlichen Reihe von Integrationen erfordern würde, und daher eine directe Lösung nichts weniger als überflüssig gemacht wird.

Noch muss ich bemerken, dass mittels des zuerst von Herrn *W. Thomson* aufgestellten Princips der sphärischen Spiegelung, das ich indessen nur aus der von Herrn *Lipschitz* gegebenen Darstellung kenne, das Problem I. sich auch auf III. zurückführen lässt; aber dieser Umstand konnte mich nicht hindern, den entgegengesetzten Weg einzuschlagen, weil die directe Lösung der ersten Aufgabe sich mit derselben Leichtigkeit, wie die der letzten, bewerkstelligen lässt.

§ 1.

Einführung der Coordinaten und der die Lösung vermittelnden Transcendenten.

Der Mittelpunkt des Kreises K, welcher den gemeinschaftlichen Rand der beiden den Leiter begrenzenden Kugelkalotten bildet, werde zum Anfangs-

*) Bd. 61, p. 1—21 dieses Journals.

punkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, und die Achse der x stehe senkrecht auf der Kreisebene. Man kann diese Ebene sich stets in horizontaler Lage und den positiven Theil der x-Achse nach oben gerichtet vorstellen. Die Ebene, welche durch irgend einen Punkt (x, y, z) und die x-Achse gelegt wird, schneidet den Rand in zwei Punkten, nach denen hin wir von (x, y, z) aus Radienvectoren ziehen. Von den beiden Winkeln, welche diese Radienvectoren bilden, bezeichnen wir, Herrn *C. Neumann* folgend, den hohlen oder den erhabenen durch ω, je nachdem (x, y, z) oberhalb oder unterhalb der yz-Ebene liegt; ferner durch e^{ϑ} das Verhältniss des grösseren Radiusvectors zum kleineren, und endlich durch φ den Winkel, welchen die vom Anfangspunkt der Coordinaten nach dem Endpunkt des kleineren Radiusvectors gezogene Gerade mit der positiven Richtung der y-Achse bildet. Der Winkel φ wird als zunehmend betrachtet werden im Sinne einer Drehung von der positiven y-Achse nach der positiven z-Achse hin. Um alle Punkte des Raumes zu erschöpfen, muss man ω und φ von 0 bis 2π und ϑ von 0 bis ∞ variiren lassen, und je nachdem man entweder ω oder φ oder ϑ einen constanten Werth beilegt, ist der Ort des Punktes (x, y, z) entweder eine durch den Kreis K begrenzte Kugelkalotte oder eine durch die Achse der x begrenzte Ebene, oder eine Ringfläche, entstanden durch Rotation eines Kreises, der auf der x-Achse zwei feste imaginaire Punkte im Abstande $\pm a\sqrt{-1}$ vom Anfangspunkt hat, wenn a den Radius des Kreises K vorstellt. Der Zusammenhang zwischen den ursprünglichen und den neuen Coordinaten wird durch die folgenden Formeln gegeben, in denen i die Bedeutung von $\sqrt{-1}$ hat:

$$(1.)\qquad \begin{cases} x = a\dfrac{\sin\omega}{\cos\vartheta i - \cos\omega}, \\[2ex] y = \dfrac{a}{i}\,\dfrac{\sin\vartheta i\cos\varphi}{\cos\vartheta i - \cos\omega}, \\[2ex] z = \dfrac{a}{i}\,\dfrac{\sin\vartheta i\sin\varphi}{\cos\vartheta i - \cos\omega}. \end{cases}$$

Für das Quadrat der Entfernung r des Punktes (x, y, z) von einem zweiten Punkte (x_1, y_1, z_1) oder $(\vartheta_1, \varphi_1, \omega_1)$ findet man:

$$(2.)\qquad r^2 = 2a^2\frac{\cos\vartheta i\cos\vartheta_1 i + \sin\vartheta i\sin\vartheta_1 i\cos(\varphi-\varphi_1) - \cos(\omega-\omega_1)}{(\cos\vartheta i - \cos\omega)(\cos\vartheta_1 i - \cos\omega_1)},$$

so dass

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\,\frac{pp_1}{P}$$

wird, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\sqrt{\cos\vartheta i - \cos\omega} = p, \qquad \sqrt{\cos\vartheta_1 i - \cos\omega_1} = p_1,$$
$$\sqrt{[\cos\vartheta i \cos\vartheta_1 i + \sin\vartheta i \sin\vartheta_1 i \cos(\varphi-\varphi_1) - \cos(\omega-\omega_1)]} = P.$$

Aus dem Ausdrucke für r^2 erhält man, indem man die beiden Punkte einander unendlich nahe rücken, d. h. $x_1 = x + dx$, $\vartheta_1 = \vartheta + d\vartheta$ etc. werden lässt, das Quadrat des Linienelements:

$$(3.) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{a^2}{p^4}(d\vartheta^2 - \sin^2\vartheta i\, d\varphi^2 + d\omega^2).$$

Vermittelst desselben wird die Differentialgleichung $\Delta^2 V = 0$ in die folgende transformirt:

$$(4.) \qquad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\sin\vartheta i}{ip^2}\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{i}{p^2 \sin\vartheta i}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\sin\vartheta i}{ip^2}\frac{\partial V}{\partial\omega}\right) = 0,$$

und diese nimmt durch die Substitution $V = pU$ die wesentlich einfachere Gestalt an:

$$(5.) \qquad \frac{1}{\sin\vartheta i}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta i\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right) - \frac{1}{\sin^2\vartheta i}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\omega^2} + \tfrac{1}{4}U = 0.$$

Enthält U die Variablen ϑ und φ nur in der Verbindung:

$$(6.) \qquad \cos\vartheta i\cos\vartheta_1 i + \sin\vartheta i \sin\vartheta_1 i\cos(\varphi-\varphi_1) = \cos\eta i,$$

wobei η stets reell ist und positiv genommen werden darf, so verwandelt sich die letzte Differentialgleichung in:

$$(7.) \qquad \frac{1}{\sin\eta i}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sin\eta i\frac{\partial U}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial\omega^2} + \tfrac{1}{4}U = 0,$$

und von dieser ist die Function

$$P^{-1} = (\cos\eta i - \cos(\omega_1-\omega))^{-\frac{1}{2}}$$

ein particuläres Integral.

Unsere nächste Aufgabe wird nun darin bestehen, für P^{-1} eine unseren Zwecken entsprechende Darstellung durch eine Summe von Elementen zu finden, deren jedes für sich der Gleichung (7.) Genüge leistet und dabei in zwei Factoren zerfällt, von denen der eine nur von $\omega_1-\omega$, der andere nur von η abhängt. Setzt man in der Gleichung

$$P^{-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u^2 + \cos\eta i - \cos(\omega_1-\omega)}$$

$\cos\alpha i$ statt $u^2 + \cos\eta i$, so wird dieselbe leicht in die folgende Form gebracht:

$$P^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\eta^\infty \frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_1-\omega-\alpha i) - \cot\frac{1}{2}(\omega_1-\omega+\alpha i)}{\sqrt{\cos\alpha i - \cos\eta i}}\, d\alpha.$$

Aber bekanntlich ist, wenn $\omega_1 - \omega$ zwischen 0 und 2π liegt:

$$\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega-\alpha i) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2\pi}(\omega_1-\omega-\alpha i)-1} - t^{-\frac{1}{2\pi}(\omega_1-\omega-\alpha i)}}{1-t}\,dt,$$

oder wenn man $t = e^{-2\mu\pi}$ setzt:

$$\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega-\alpha i) = 2\int_0^\infty \frac{\sin(\pi-(\omega_1-\omega)+\alpha i)\mu i}{\sin\mu\pi i}\,d\mu.$$

Von dieser Gleichung ist die durch Verwandlung von α in $-\alpha$ daraus hervorgehende zu subtrahiren und das Resultat in den letzten Ausdruck von P^{-1} zu substituiren. Kehrt man alsdann die Reihenfolge der Integrationen um und bezeichnet durch $J_\mu(\eta)$ die Transcendente:

$$(8^a.) \qquad J_\mu(\eta) = \frac{2i}{\pi\sin\mu\pi i}\int_\eta^\infty \frac{\sin\mu\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha i - \cos\eta i}},$$

so wird P^{-1}, unter der Voraussetzung, dass $0 < \omega_1 - \omega < 2\pi$, durch das folgende bestimmte Integral dargestellt:

$$(9.) \qquad P^{-1} = \int_0^\infty \cos(\pi-(\omega_1-\omega))\mu i\, J_\mu(\eta)\,d\mu.$$

Wenn man in der soeben erhaltenen Gleichung statt $\omega_1-\omega$ eine complexe Variable $\psi+\lambda i$ einführt und $2e^{-\mu\pi}F(\eta,\mu)$ statt $J_\mu(\eta)$ schreibt, so nimmt ihre rechte Seite die Form an:

$$\int_0^\infty (e^{-(\psi+\lambda i)\mu} + e^{-(2\pi-\psi-\lambda i)\mu})\,F(\eta,\mu)\,d\mu,$$

und die Function $F(\eta,\mu)$ bleibt zufolge (8^a.) für jedes endliche μ endlich und nimmt auch für $\mu=\infty$ sicher keinen unendlich grossen Werth an. Das Integral behält also, wenn ψ zwischen 0 und 2π gewählt wird, stets einen bestimmten Sinn und ist offenbar eine eindeutige und stetige Function von $\psi+\lambda i$. Ebendasselbe gilt von der linken Seite von (9.), wenn ihr reeller Theil stets mit einerlei Vorzeichen genommen wird, und zwar mit dem positiven, weil dieses für $\lambda=0$ Geltung hat. Deshalb ist die Substitution $\omega_1-\omega=\psi+\lambda i$ in (9.) für jedes reelle λ gestattet, wenn die Bedingung $0<\psi<2\pi$ festgehalten und das Vorzeichen der Wurzelgrösse in der angegebenen Weise bestimmt wird, und folglich ist auch:

$$(10.) \qquad \int_0^\infty \cos(\pi-\psi)\mu i\cos\lambda\mu\, J_\mu(\eta)\,d\mu = \tfrac{1}{2}\Sigma(\cos\eta i - \cos(\psi+\tau\lambda i))^{-\frac{1}{2}},$$

wenn die Summe auf der rechten Seite sich auf die beiden Werthe $\tau=1$ und $\tau=-1$ bezieht. Ein genaueres Eingehen auf das Verhalten von $J_\mu(\eta)$ für ein unendlich grosses μ würde zeigen, dass man in (10.) sogar $\psi = 0$ oder $= 2\pi$ nehmen darf, wenn η nicht $= 0$ und λ^2 nicht $= \eta^2$ ist, dass also

$$\int_0^\infty \cos\lambda\mu \,.\, \cos\pi\mu i \, J_\mu(\eta)\, d\mu = (\cos\eta i - \cos\lambda i)^{-\frac{1}{2}} \qquad (\text{für } 0 < \lambda < \eta)$$
$$= \qquad 0 \qquad (\text{für } \eta < \lambda < \infty),$$

und die Vergleichung der linken Seite dieser Gleichung mit der Darstellung, welche für die rechte Seite durch Anwendung des *Fourier*schen Satzes gewonnen wird, würde für $J_\mu(\eta)$ den neuen Ausdruck ergeben:

$$(8^b.) \qquad J_\mu(\eta) = \frac{2}{\pi\cos\mu\pi i}\int_0^\eta \frac{\cos\mu\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\cos\eta i - \cos\alpha i}} \qquad (\eta > 0).$$

Wir wollen den strengen Beweis dieser Formel aber lieber auf einem anderen Wege führen, auf dem wir auch noch andere bemerkenswerthe Ausdrücke für $J_\mu(\eta)$ gewinnen werden. Die Gleichung (10.) ist sicher gültig für $\psi = \pi$ und liefert:

$$(\cos\eta i + \cos\lambda i)^{-\frac{1}{2}} = \int_0^\infty \cos\lambda\mu\, J_\mu(\eta)\, d\mu,$$

so dass zufolge des *Fourier*schen Satzes:

$$(8^c.) \qquad J_\mu(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\mu\nu i}\, d\nu}{\sqrt{\cos\eta i + \cos\nu i}}.$$

Bringt man dies Integral in die Form:

$$J_\mu(\eta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{z^{\mu i - \frac{1}{2}}\, dz}{\sqrt{1 + 2z\cos\eta i + z^2}},$$

ersetzt den reciproken Werth der Quadratwurzel durch das bestimmte Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dt}{z + \cos\eta i + i\sin\eta i\cos t}$$

und wendet, nach Umkehrung der Integrationsfolge, die Substitution

$$z = (\cos\eta i + i\sin\eta i\cos t)\, z'$$

an, so wird die Integration nach z' ausführbar, und man erhält:

$$(8^d.) \qquad J_\mu(\eta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\cos\mu\pi i}\int_0^\pi (\cos\eta i + i\sin\eta i\cos t)^{\mu i - \frac{1}{2}}\, dt.$$

Durch die Substitution $\cos\eta i + i\sin\eta i\cos t = e^\alpha$, welche nur für $\eta = 0$ unstatthaft ist, erweist sich dieser Ausdruck als identisch mit dem in (8^b.) befindlichen, dessen Gültigkeit somit ebenfalls bewiesen ist.

Aus dem in (8^c.) enthaltenen Ausdrucke der Function $J_\mu(\eta)$ ergiebt sich am leichtesten, dass dieselbe der Differentialgleichung

$$(11.)\qquad \frac{1}{\sin\eta i}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sin\eta i\frac{\partial J_\mu(\eta)}{\partial\eta}\right)+(\mu^2+\tfrac{1}{4})J_\mu(\eta) = 0,$$

und folglich jedes Element des Integrales in (9.) der Gleichung (7.), Genüge leistet, ferner dass sie nebst ihren sämmtlichen nach $\cos\eta i$ genommenen Differentialquotienten bis $\eta=0$ inclusive stetig bleibt, und endlich, dass sie sich in eine nach Potenzen der positiven Grösse $h=\frac{1}{2}(\cos\eta i-1)$ fortschreitende, jedoch nur von $h=0$ bis $h=1$ convergente Reihe entwickeln lässt:

$$J_\mu(\eta) = \frac{\sqrt{2}}{\cos\mu\pi i}\left[1-\frac{(4\mu^2+1^2)h}{2^2}+\frac{(4\mu^2+1^2)(4\mu^2+3^2)h^2}{2^2 4^2}-\cdots\right].$$

Hieraus lässt sich der enge Zusammenhang der Transcendenten $J_\mu(\eta)$ sowohl mit der *Bessel*schen Function $J(x)$ als auch der *Laplace*schen $P_n(\cos\theta)$ sofort erkennen. Nimmt man nämlich μ unendlich gross und h unendlich klein, jedoch so, dass $4\mu^2 h$ einen endlichen Werth x^2 behält, so geht die in der Klammer befindliche Reihe über in $J(x)$; setzt man dagegen $2\mu i-1=2n$ und $h=-\sin^2\frac{1}{2}\theta$ (d. h. $\eta i=\theta$), so verwandelt sie sich in die von *Dirichlet* gegebene, nach Potenzen von $\sin\frac{1}{2}\theta$ fortschreitende Entwicklung von $P_n(\cos\theta)$.

§. 2.

Das Potential der durch einen Massenpunkt erzeugten Vertheilung, dargestellt mit Hülfe der Transcendenten $J_\mu(\eta)$.

Die Gleichungen der den Leiter begrenzenden Kalotten seien $\omega=\gamma$ und $\omega=\beta$, und es sei $\gamma<\beta$, so dass, wenn γ und β, der bisherigen Festsetzung über das Intervall von ω entsprechend, beide zwischen 0 und 2π gewählt werden, die zweite Kalotte stets unterhalb der ersten liegt. Die Bedingung dafür, dass ein Punkt $(\vartheta,\varphi,\omega)$ innerhalb des Leiters liege, wird durch die Ungleichheit $\gamma<\omega<\beta$ ausgedrückt, und der Punkt liegt ausserhalb desselben, wenn ω entweder zwischen β und 2π oder zwischen 0 und γ enthalten ist. Hiernach müsste die Variable ω beim Durchgange des Punktes durch das Unendliche oder den den Rand umgebenden Theil der yz-Ebene plötzlich von einem der Werthe 2π und 0 auf den andern überspringen; allein diese Unstetigkeit, welche in der Rechnung zu sehr lästigen Unterscheidungen Veranlassung geben würde, lässt sich vermeiden, wenn man den Winkel ω, der nach (1.) nur bis auf ein beliebiges zu addirendes Multiplum von 2π als Function der rechtwinkligen Coordinaten bestimmt ist, nachdem er den Werth 2π erreicht hat, von da sich continuirlich bis $2\pi+\gamma$ ändern lässt, so dass für Punkte ausserhalb des Leiters die eine Ungleichheit $\beta<\omega<2\pi+\gamma$ besteht. Jetzt steht auch nichts im Wege, der Constanten β einen Werth zu ertheilen, der $> 2\pi$ aber $< 2\pi+\gamma$ ist, und in diesem Falle besitzt der Leiter unendlich grosse Dimensionen, während der nichtleitende Raum von der Kalotte γ und der jetzt oberhalb dieser befindlichen Kalotte β vollständig eingeschlossen wird. *Dadurch wird es möglich, die in der Einleitung aufgestellten Probleme* I. *und* II. *gleichzeitig zu behandeln;* es werden sich nämlich die nachfolgenden Entwicklungen auf das erste oder zweite beziehen, je nachdem β zwischen γ und 2π oder zwischen 2π und $2\pi+\gamma$ liegt. Wir setzen also ein für alle Mal fest, dass:

$$0 < \gamma < 2\pi, \qquad \gamma < \beta < 2\pi+\gamma,$$

ferner dass für ausserhalb des Leiters gelegene Punkte:

$$(12.) \qquad \beta < \omega < 2\pi+\gamma,$$

und endlich nehmen wir für Punkte in der leitenden Substanz, je nachdem das Eine oder das Andere vortheilhafter ist:

$$(13.) \qquad \gamma < \omega < \beta \text{ oder } 2\pi+\gamma < \omega < 2\pi+\beta.$$

Die Coordinaten des erregenden Punktes, in welchem man sich die Einheit der negativen Elektricität concentrirt denkt, seien ϑ_1, φ_1, ω_1; da dieser Punkt ausserhalb des Leiters liegen muss, so muss ω_1 zwischen β und $2\pi+\gamma$ enthalten sein. Die Lösung der Aufgaben I. und II. erfordert nun die Kenntniss eines Potentiales V, welches von einer nur auf der Oberfläche des Leiters befindlichen Massenschicht herrührt und für jeden beliebigen Punkt der Oberfläche dem reciproken Werthe $\left(\frac{1}{r}\right)$ seines Abstandes von $(\vartheta_1, \varphi_1, \omega_1)$ gleich wird. Ich behaupte, dass dieses Potential V, bezogen auf irgend einen Punkt $(\vartheta, \varphi, \omega)$, sich für den ganzen Raum durch die folgenden Formeln darstellen lässt:

$$(14.) \quad \begin{cases} V = V_\beta + V_\gamma, \\ V_\beta = \frac{pp_1}{a\sqrt{2}} U_\beta, \qquad V_\gamma = \frac{pp_1}{a\sqrt{2}} U_\gamma, \\ U_\beta = \int_0^\infty A_\beta \cos(\pi-\omega+\beta)\mu i \, J_\mu(\eta)\, d\mu, \quad (\beta \leqq \omega \leqq 2\pi+\beta), \\ U_\gamma = \int_0^\infty A_\gamma \cos(\pi-\omega+\gamma)\mu i \, J_\mu(\eta)\, d\mu, \quad (\gamma \leqq \omega \leqq 2\pi+\gamma), \end{cases}$$

wenn A_β und A_γ passend als Functionen von μ bestimmt werden, und wenn man, den beigefügten Ungleichheiten entsprechend, für innere Punkte in U_β die zweite, in U_γ die erste der Ungleichheiten (13.), für äussere Punkte dagegen in beiden Ausdrücken die Ungleichheit (12.) bestehen lässt. Um diese Behauptung zu rechtfertigen, soll zunächst gezeigt werden, dass in der That

A_β und A_γ sich so bestimmen lassen, dass die auf die Oberfläche bezügliche Bedingung befriedigt wird. Lässt man den variablen Punkt $(\vartheta, \varphi, \omega)$, z. B. von aussen her, in die eine oder die andere der begrenzenden Kalotten rücken, und beachtet, dass die Gleichung (9.) des vorigen §. auf die Werthe $\omega = \beta$ und $\omega = \gamma$ anwendbar ist, weil die Differenzen $\omega_1 - \beta$ und $\omega_1 - \gamma$ positiv und $< 2\pi$ sind, so sieht man, dass die folgenden beiden Gleichungen zu erfüllen sind:

$$(U_\beta + U_\gamma)_{(\omega=\beta)} = P^{-1}_{(\omega=\beta)} = \int_0^\infty \cos(\pi - \omega_1 + \beta)\mu i\, J_\mu(\eta)\, d\mu,$$

$$(U_\beta + U_\gamma)_{(\omega=2\pi+\gamma)} = P^{-1}_{(\omega=\gamma)} = \int_0^\infty \cos(\pi - \omega_1 + \gamma)\mu i\, J_\mu(\eta)\, d\mu,$$

und diese werden erfüllt, wenn:

$$A_\beta \cos\pi\mu i + A_\gamma \cos(\pi + \gamma - \beta)\mu i = \cos(\pi - \omega_1 + \beta)\mu i,$$

$$A_\beta \cos(\pi + \gamma - \beta)\mu i + A_\gamma \cos\pi\mu i = \cos(\pi - \omega_1 + \gamma)\mu i.$$

Hieraus folgt:

$$(15.)\qquad A_\beta = \frac{\sin(2\pi + \gamma - \omega_1)\mu i}{\sin(2\pi + \gamma - \beta)\mu i}, \qquad A_\gamma = \frac{\sin(\omega_1 - \beta)\mu i}{\sin(2\pi + \gamma - \beta)\mu i}.$$

Nachdem nun A_β und A_γ so bestimmt worden sind, dass V sich an der Oberfläche auf den vorgeschriebenen Werth reducirt, so wird die ausgesprochene Behauptung ihrem ganzen Inhalte nach bewiesen sein, sobald noch nachgewiesen sein wird, dass V_β und V_γ für den ganzen Raum resp. die Potentiale zweier Massenschichten vorstellen, von denen die erste nur auf der Kalotte β, die zweite nur auf der Kalotte γ vertheilt ist. Hierbei genügt es aber offenbar, sich auf die Betrachtung von V_β zu beschränken.

1. Die Function $\cos(\pi - \omega + \beta)\mu i J_\mu(\eta)$ ist endlich und stetig in Bezug auf die Variablen μ, ω, η, sie wird am Rande, wo ϑ und folglich auch $\eta = \infty$, gleich Null, und sie hat zu beiden Seiten der Kalotte, d. h. für $\omega = \beta$ und $\omega = 2\pi + \beta$, einen und denselben Werth. Der Factor A_β ist ein echter Bruch und convergirt für $\mu = \infty$ hinreichend stark gegen Null, damit das Integral, durch welches U_β in (14.) definirt ist, stets einen bestimmten Sinn behalte. Die Grösse p ist stetig und endlich, ausser in unendlicher Nähe des Randes, und verschwindend klein für unendlich entfernte Punkte, weil für diese ϑ und ω sich resp. unendlich wenig von 0 und 2π unterscheiden. Ferner ist auch η mit Ausnahme des Randes endlich und eine stetige Function nicht allein der Variablen ϑ und φ sondern auch der rechtwinkligen Coordinaten, indem es auf der x-Achse, wo $\vartheta = 0$ und φ unbestimmt, nach (6.) von φ unabhängig ist. Aus dem Gesagten geht hervor, dass V_β im Unendlichen verschwindet

und im ganzen Raume sich stetig ändert, wofern nicht etwa am Rande, wo $\vartheta=\infty$ und ω unbestimmt ist und V_β unter der Form $\infty.0$ erscheint, eine Ausnahme eintritt. Wir wollen aber zeigen, dass auch am Rande V_β einen endlichen und eindeutigen Werth behält, und zu diesem Zwecke haben wir nur nachzuweisen, dass das Product $e^{\frac{1}{2}\eta}U_\beta$ für $\eta=\infty$ gegen einen festen und von ω unabhängigen Werth convergirt. Multiplicirt man beide Seiten von (8^a.) mit $e^{\frac{1}{2}\eta}$ und verwandelt α in $\eta+\alpha$, so wird, bis auf verschwindend kleine Grössen, für $\eta=\infty$:

$$e^{\frac{1}{2}\eta}J_\mu(\eta) = \frac{2\sqrt{2i}}{\pi\sin\mu\pi i}\int_0^\infty \frac{\sin\mu(\eta+\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{e^\alpha-1}},$$

und daher:

$$e^{\frac{1}{2}\eta}U_\beta = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sqrt{e^\alpha-1}}\int_0^\infty A_\beta\cos(\pi-\omega+\beta)\mu i\,\frac{2i\sin\mu(\eta+\alpha)}{\sin\mu\pi i}\,d\mu.$$

Theilt man das Integral nach μ in zwei andere mit den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ und ∞, so verschwindet das zweite für $\eta=\infty$, und das erste reducirt sich nach einem Theorem von *Dirichlet* auf den Werth von A_β für $\mu=0$; es wird also für $\eta=\infty$:

$$e^{\frac{1}{2}\eta}U_\beta = \frac{\sqrt{2}}{\pi}A_\beta(o)\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sqrt{e^\alpha-1}} = \sqrt{2}\cdot\frac{2\pi+\gamma-\omega_1}{2\pi+\gamma-\beta},$$

ist somit in der That endlich und von ω unabhängig.

2. Es ist auch leicht einzusehen, dass die ersten nach x, y, z genommenen Differentialquotienten von V_β nur beim Durchgange durch die Kalotte β eine Stetigkeitsunterbrechung erleiden, und dass sie nur am Rande unendlich grosse Werthe annehmen können.

3. Da $J_\mu(\eta)$ der Differentialgleichung (11.) genügt, so genügt U_β der Gleichung (5.) und folglich V_β der Gleichung (4.) oder $\Delta^2 V_\beta=0$.

Hiernach besitzt in der That V_β die characteristischen Eigenschaften des Potentials einer auf der Kalotte β vertheilten Massenschicht, und die Gleichungen (14.) und (15.) enthalten, wie behauptet wurde, die Lösung der Aufgabe.

§. 3.

Andere Ausdrücke für das Potential, welche die Transcendente $J_\mu(\eta)$ nicht enthalten. Bestimmung der Dichtigkeit.

Um die Ausdrücke von U_β und U_γ in (14.) in andere überzuführen, in denen $J_\mu(\eta)$ nicht mehr vorkommt, sollen A_β und A_γ in geeigneter Weise durch bestimmte Integrale ersetzt werden. Als Ausgangspunkt kann die bekannte, für $-1 < \alpha < 1$ und $-\pi < \delta < \pi$ gültige Formel dienen:

$$\frac{\sin\alpha\delta}{\sin\alpha\pi} = \frac{\sin\delta}{\pi}\int_0^1 \frac{x^\alpha + x^{-\alpha}}{x+2\cos\delta+x^{-1}}\,\frac{dx}{x}.$$

Dieselbe bleibt, wie sich in üblicher Weise rechtfertigen lässt, auch dann noch richtig, wenn α eine complexe Grösse, deren reeller Theil zwischen -1 und 1 liegt, oder auch eine rein imaginäre Grösse bedeutet. Führt man also statt $\alpha\delta$ und $\alpha\pi$ die Werthe:

$$\alpha\delta = (2\pi+\gamma-\omega_1)\mu i, \qquad \alpha\pi = (2\pi+\gamma-\beta)\mu i$$

ein, macht noch zur Abkürzung:

$$(16.)\qquad 2\pi+\gamma-\beta = \frac{\pi}{n},$$

so dass:

$$\delta = n(2\pi+\gamma-\omega_1) = \pi - n(\omega_1-\beta),$$

und setzt endlich $\log x = -n\lambda$, so erhält man:

$$A_\beta = \frac{n}{\pi}\sin n(\omega_1-\beta)\int_0^\infty \frac{\cos\lambda\mu\, d\lambda}{\cos n\lambda i - \cos n(\omega_1-\beta)}.$$

Für A_γ gilt ein ganz ähnlicher Ausdruck, der sich von dem vorstehenden nur dadurch unterscheidet, dass er unter dem Integralzeichen im Nenner statt der Differenz der beiden Cosinus die Summe eben derselben enthält. Nach Einführung dieser bestimmten Integrale für A_β und A_γ in (14.) wird die Integration nach μ vermittelst der Gleichung (10.), worin ψ resp. $=\omega-\beta$ und $=\omega-\gamma$ zu setzen, ausführbar, und man gelangt zu dem Resultate:

$$(17.)\quad \begin{cases} U_\beta = \dfrac{n}{2\pi}\sin n(\omega_1-\beta)\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\lambda\,\Sigma(\cos\eta i - \cos(\omega-\beta+\tau\lambda i))^{-\frac{1}{2}}}{\cos n\lambda i - \cos n(\omega_1-\beta)}, \\[2ex] U_\gamma = \dfrac{n}{2\pi}\sin n(\omega_1-\beta)\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\lambda\,\Sigma(\cos\eta i - \cos(\omega-\gamma+\tau\lambda i))^{-\frac{1}{2}}}{\cos n\lambda i + \cos n(\omega_1-\beta)}. \end{cases}$$

Diesen beiden Ausdrücken sollen jetzt, wenigstens für ausserhalb des Leiters gelegene Punkte, zwei andere für die Summe und die Differenz von U_β und U_γ an die Seite gestellt werden, bei welchen unter dem Integralzeichen statt des complexen Arguments der $(-\frac{1}{2})^{\text{ten}}$ Potenz ein reelles auftritt, und welche einige specielle Eigenschaften des Potentials, die aus (17.) nicht unmittelbar ersichtlich sind, leicht erkennen lassen. Man könnte die in Rede stehenden Darstellungen durch Transformation von (17.) mittels imaginärer Substitutionen ableiten, gelangt aber noch einfacher auf folgendem Wege zum Ziel. Nachdem man für A_β und A_γ ihre Werthe aus (15.) in die beiden letzten der Gleichungen (14.) eingesetzt hat, addire man diese Gleichungen, was für äussere Punkte ohne Weiteres erlaubt ist, weil dann bei beiden für ω dieselbe Ungleichheit gilt; von der Summe subtrahire man die Gleichung (9.), wodurch die Bedingung $\omega_1-\omega>0$ eingeführt wird: man findet dann nach einigen leichten Umformungen der Producte aus cos und sin:

$$U_\beta+U_\gamma-P^{-1}$$
$$=\int_0^\infty \frac{\cos(2\pi+\gamma+\beta-\omega_1-\omega)\mu i-\cos(2\pi+\gamma-\beta-\omega_1+\omega)\mu i}{\sin(2\pi+\gamma-\beta)\mu i}\sin\pi\mu i J_\mu(\eta)\,d\mu.$$

Ist aber $\omega_1<\omega$, so muss man in (9.) $\omega_1-\omega$ in $\omega-\omega_1$ verwandeln und kommt dann zu einem Ausdrucke, der sich von dem vorhergehenden nur durch Vertauschung von ω_1 und ω unterscheidet. Substituirt man nun für $\sin\pi\mu i J_\mu(\eta)$ seinen Werth aus (8^a.) und setzt:

$$e^{(2\pi+\gamma-\beta)\mu}=e^{\frac{1}{n}\pi\mu}=t^{-\frac{1}{2}},$$

so wird die Integration nach t vermöge einer von *Euler* herrührenden Integralformel ausführbar, und es ergiebt sich:

$$(18.)\quad\begin{cases} U_\beta+U_\gamma = P^{-1}-\dfrac{n}{\pi i}\displaystyle\int_\eta^\infty D.(\cos\alpha i-\cos\eta i)^{-\frac{1}{2}}d\alpha,\\[2ex] D = \dfrac{\sin n\alpha i}{\cos n\alpha i-\cos n(\omega_1-\omega)}-\dfrac{\sin n\alpha i}{\cos n\alpha i-\cos n(\omega_1+\omega-2\beta)}.\end{cases}$$

Dasselbe Resultat gilt auch für $\omega_1<\omega$, weil D durch die Vertauschung von ω und ω_1 ungeändert bleibt, und es gilt auch noch für $\omega_1=\omega$, wenn nicht gleichzeitig $\eta=0$, in welchem letzteren Falle es unter der Form $\infty-\infty$ erscheint. Ersetzt man übrigens P^{-1} durch das bestimmte Integral

$$P^{-1}=\frac{1}{\pi i}\int_\eta^\infty\frac{(\cos\alpha i-\cos\eta i)^{-\frac{1}{2}}\sin\alpha i\,d\alpha}{\cos\alpha i-\cos(\omega_1-\omega)}$$

und bringt dies mit dem in (18.) stehenden unter dasselbe Integralzeichen, so erhält man eine Formel, die auch dann noch gilt, wenn gleichzeitig $\omega_1=\omega$ und $\eta=0$, also $\vartheta=\vartheta_1$ und $\varphi=\varphi_1$, d. h. wenn der Punkt $(\vartheta,\varphi,\omega)$ mit $(\vartheta_1,\varphi_1,\omega_1)$ zusammenfällt.

In ganz ähnlicher Weise, und zwar mit Benutzung des in (8^b.) enthaltenen Ausdrucks von $J_\mu(\eta)$, findet man für die Differenz von U_β und U_γ:

$$(19.)\quad\begin{cases} U_\beta-U_\gamma = \sigma P^{-1}+\dfrac{n}{\pi}\displaystyle\int_0^\eta S.(\cos\eta i-\cos\alpha i)^{-\frac{1}{2}}d\alpha,\\[2ex] S = \dfrac{\sin n(\omega_1-\omega)}{\cos n\alpha i-\cos n(\omega_1-\omega)}+\dfrac{\sin n(\omega_1+\omega-2\beta)}{\cos n\alpha i-\cos n(\omega_1+\omega-2\beta)},\end{cases}$$

worin $\sigma = -1$ oder $= +1$ zu setzen, je nachdem $\omega_1 - \omega$ positiv oder negativ, und $\eta > 0$ vorausgesetzt ist. Für $\eta = 0$ hat man statt des Integrales den Grenzwerth zu nehmen, dem es für ein unendlich kleines η zustrebt, und welcher sich mit Hülfe der Substitution $\alpha = \eta\alpha'$ ermitteln lässt. Man findet auf diese Weise:

$$(U_\beta - U_\gamma)_{(\eta=0)} = -\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega)} + \frac{n}{\sqrt{2}}[\cot\tfrac{1}{2}n(\omega_1 - \omega) + \cot\tfrac{1}{2}n(\omega_1 + \omega - 2\beta)],$$

welche Grösse offenbar auch für ein unendlich kleines positives oder negatives $\omega_1 - \omega$ sich einer und derselben endlichen Grenze nähert, wie es sein muss. Uebrigens kann man, um die Analogie zwischen (19.) und (18.) vollständig zu machen, für σP^{-1} das bestimmte Integral

$$\sigma P^{-1} = -\frac{2}{\pi}\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega)\int_0^\eta \frac{(\cos\eta i - \cos\alpha i)^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}\alpha i\, d\alpha}{\cos\alpha i - \cos(\omega_1 - \omega)}$$

setzen, auf welches man durch Verbindung von (9.) und (8^b.) geführt wird, und welches sich auch direct durch Rationalmachung der Wurzelgrösse berechnen lässt.

Es bleibt jetzt noch übrig, die Dichtigkeit k der elektrischen Belegung zu bestimmen. Hierzu dient die Gleichung:

$$-4\pi k = \frac{\partial(V - r^{-1})}{\partial N} = \frac{pp_1}{a\sqrt{2}}\,\frac{\partial(U_\beta + U_\gamma - P^{-1})}{\partial N},$$

worin N die nach dem nichtleitenden Raume hin gerichtete Oberflächennormale bedeutet und nach vollzogener Differentiation $\omega = \beta$ oder $= 2\pi + \gamma$ gesetzt werden muss, je nachdem es sich um die Dichtigkeit für Punkte der Kalotte β oder der Kalotte γ handelt. Unterscheidet man diese Werthe von k durch die Zeichen k_β und k_γ, setzt:

$$\sqrt{\cos\vartheta i - \cos\beta} = p_\beta, \qquad \sqrt{\cos\vartheta i - \cos\gamma} = p_\gamma,$$

und beachtet, dass für die erste und die zweite Kalotte respective

$$p_\beta^2\,\partial N = a\,\partial\omega \quad \text{und} \quad p_\gamma^2\,\partial N = -a\,\partial\omega,$$

so ergiebt sich unter Anwendung von (18.) sofort:

$$(20.)\quad \begin{cases} k_\beta = \dfrac{p_1 n^2 \sin n(\omega_1 - \beta)}{2\sqrt{2}a^2\pi^2 i}\cdot p_\beta^3\displaystyle\int_\eta^\infty \frac{d\alpha \sin n\alpha i(\cos\alpha i - \cos\eta i)^{-\frac{1}{2}}}{(\cos n\alpha i - \cos n(\omega_1 - \beta))^2}, \\[2ex] k_\gamma = \dfrac{p_1 n^2 \sin n(\omega_1 - \beta)}{2\sqrt{2}a^2\pi^2 i}\cdot p_\gamma^3\displaystyle\int_\eta^\infty \frac{d\alpha \sin n\alpha i(\cos\alpha i - \cos\eta i)^{-\frac{1}{2}}}{(\cos n\alpha i + \cos n(\omega_1 - \beta))^2}. \end{cases}$$

Von besonderem Interesse ist es, das Verhalten von k für Punkte, die dem

Rande sehr nahe liegen, kennen zu lernen. Nun bemerkt man leicht, dass man, wenn ε einen gewissen Factor bezeichnet, der sich für ein ins Unendliche wachsendes ϑ unbegrenzt der Einheit nähert,

$$k_\beta = \varepsilon \frac{p_1 n^2 \sin n(\omega_1 - \beta)}{2\sqrt{2a^2\pi^2}} \cdot e^{\frac{3}{2}\vartheta} \int_\eta^\infty \frac{e^{-n\alpha} d\alpha}{\sqrt{e^\alpha - e^\eta}}$$

setzen darf. Das hierin vorkommende Integral wird durch die Substitution $\alpha = \eta + \log(1+t)$ in die Form eines *Euler*schen Integrals zweiter Gattung gebracht und nimmt mit dem unmittelbar davorstehenden Factor vereinigt für $\vartheta = \infty$ den Werth an:

$$\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} (\cos\vartheta_1 i + i \sin\vartheta_1 i \cos(\varphi - \varphi_1))^{-n-\frac{1}{2}} . e^{(1-n)\vartheta}.$$

Die Dichtigkeit für einen Punkt in der Nähe des Randes ist also gleich dem Producte einer endlichen Grösse in die $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz des kürzesten Abstandes des Punktes vom Rande; sie ist daher am Rande unendlich gross, wenn die Zahl n, deren kleinster Werth $\frac{1}{2}$ ist, zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt, sie bleibt endlich für $n = 1$, und sie ist gleich Null, wenn $n > 1$. Nach (16.) ist n der Quotient von π und $2\pi + \gamma - \beta$, und die letztere Grösse bedeutet den äusseren Neigungswinkel der in einem Punkte des Randes an die Oberfläche gelegten beiden Tangentialebenen. Es tritt also der erste oder der letzte der drei unterschiedenen Fälle ein, je nachdem dieser äussere Winkel $> \pi$ oder $< \pi$, d. h. je nachdem der Leiter einen scharfen oder einspringenden Rand hat, und der zweite Fall findet nur dann statt, wenn der Leiter eine volle Kugel oder ein unendlich grosser Körper mit einer kugelförmigen Höhlung ist.

§. 4.

Specielle Fälle.

Wenn n eine ganze Zahl ist, so lassen sich die beiden Bestandtheile von D in (18.) in Partialbrüche zerlegen vermittelst der Formel

$$\frac{\sin n\alpha i}{\cos n\alpha i - \cos n\Omega} = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\sin \alpha i}{\cos\alpha i - \cos\left(\Omega + \frac{1}{n} 2s\pi\right)},$$

und man findet dann durch Ausführung der Integration:

$$U_\beta + U_\gamma$$
$$= -\sum_1^{n-1} \left(\cos\eta i - \cos\left(\omega - \omega_1 + \frac{1}{n} 2s\pi\right)\right)^{-\frac{1}{2}} + \sum_0^{n-1} \left(\cos\eta i - \cos\left(\omega + \omega_1 - 2\beta + \frac{1}{n} 2s\pi\right)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Hieraus erkennt man leicht den folgenden Satz:

Ist n eine ganze Zahl, d. h. der äussere Winkel am Rande der Kalotten ein aliquoter Theil von π, so ist die Wirkung der durch einen Punkt $(\vartheta_1, \varphi_1, \omega_1)$ *von der Masse -1 erregten Vertheilung nach aussen hin äquivalent der Wirkung von $2n-1$ im Innern gelegenen Punkten, welche die Coordinaten*

$$\vartheta_1, \varphi_1, \omega_1 - \frac{1}{n} 2s\pi, (s=1,2,\ldots n-1) \text{ und } \vartheta_1, \varphi_1, 2\beta - \omega_1 - \frac{1}{n} 2s\pi, (s=0,1,\ldots n-1)$$

haben, und in denen respective die Elektricitätsmengen

$$-p_1\Big(\cos\vartheta_1 i - \cos\Big(\omega_1 - \frac{1}{n} 2s\pi\Big)\Big)^{-\frac{1}{2}} \text{ und } +p_1\Big(\cos\vartheta_1 i - \cos\Big(2\beta - \omega_1 - \frac{1}{n} 2s\pi\Big)\Big)^{-\frac{1}{2}}$$

concentrirt sind.

Werden die zu den beiden Kalotten gehörigen Kugelradien unendlich gross, während irgend eine an die Randkurve gelegte Tangente im Endlichen festgehalten wird, so geht der Leiter in einen von zwei sich schneidenden Ebenen begrenzten Körper über, jene $2n-1$ Punkte fallen mit den Spiegelbildern des erregenden Punktes zusammen, und die ihnen mitzutheilenden Elektricitätsmengen sind abwechselnd $= \pm 1$, ein Resultat, dessen Richtigkeit auch ohne jede Rechnung einleuchtend ist. Man möge aber nicht unbemerkt lassen, dass für ein nicht ganzzahliges n die Construction der Spiegelbilder für die Lösung der Aufgabe von keinem Nutzen ist, weil dann ein Theil der Bilder ausserhalb des Leiters fällt.

Noch ist ein anderer einfacher Fall, *in welchem die Integration in* (18.) *sich ausführen lässt,* hervorzuheben, nämlich derjenige, wo *n ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$.* Hier ergiebt sich, wenn man zur Abkürzung:

$$\cos\tfrac{1}{2}\Big(\omega_1 - \omega + \frac{1}{2n} 4s\pi\Big) = \cos\tfrac{1}{2}\eta i . \cos\Phi_s,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\Big(\omega_1 + \omega - 2\beta + \frac{1}{2n} 4s\pi\Big) = \cos\tfrac{1}{2}\eta i . \cos\Psi_s$$

setzt und Φ_s und Ψ_s zwischen 0 und π wählt:

$$U_\beta + U_\gamma = \frac{1}{\pi\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\eta i}\Big[\frac{\Phi_0}{\sin\Phi_0} - \sum_1^{2n-1}\frac{\pi - \Phi_s}{\sin\Phi_s} + \sum_0^{2n-1}\frac{\pi - \Psi_s}{\sin\Psi_s}\Big].$$

Ist $n = \frac{1}{2}$, d. h. $\beta = \gamma$, fallen also die beiden den Leiter begrenzenden Kalotten in eine einzige zusammen, so muss die erste der beiden vorstehenden Summen fortfallen, und die zweite ist auf das dem Werthe $s=0$ entsprechende Glied zu beschränken.

§. 5.

Die Vertheilung einer gegebenen Elektricitätsmenge ohne Einwirkung äusserer Kräfte.

Es bezeichne, wie bisher, V das Potential der dem Oberflächenwerthe r^{-1} entsprechenden Belegung; dagegen sei v dasjenige Flächenpotential, welches an der Oberfläche sich auf den constanten Werth 1 reducirt, d. h. von einer gewissen Elektricitätsmenge herrührt, die dem Leiter mitgetheilt ist und sich frei auf ihm verbreiten kann. Die Dimensionen des Leiters dürfen jetzt nicht unendlich gross sein, d. h. es muss $\beta < 2\pi$ vorausgesetzt werden. Der kleinste Abstand des Punktes $(\vartheta_1, \varphi_1, \omega_1)$ von der Oberfläche sei r_0, der grösste r_2, und der Abstand von einem festen Punkte im Innern des Leiters sei $= r_1$. Dann sind die Differenzen

$$v - r_0 V \quad \text{und} \quad r_2 V - v,$$

welche eben so wie V und v die Potentiale gewisser Flächenbelegungen vorstellen, an der Oberfläche respective zwischen den Werthen 0 und $1 - \frac{r_0}{r_2}$, 0 und $\frac{r_2}{r_0} - 1$ enthalten, also nirgends negativ. Deshalb können jene Differenzen, wie nach *Gauss* *) leicht in aller Strenge bewiesen werden kann, auch im ganzen Raume nirgends negative Werthe annehmen, und es ist demnach stets:

$$\frac{r_1}{r_0} v \geqq r_1 V \geqq \frac{r_1}{r_2} v.$$

Lässt man nun den erregenden Punkt $(\vartheta_1, \varphi_1, \omega_1)$ ins Unendliche rücken, (d. h. $\vartheta_1 = 0$, $\omega_1 = 2\pi$ werden), so nähern sich die Coefficienten von v beide unbegrenzt der Einheit, und es strebt also $r_1 V$ für $r_1 = \infty$ einem bestimmten Grenzwerthe zu, der von v nicht verschieden ist. Beachtet man noch, dass nach (2.) $\lim r_1 p_1 = a\sqrt{2}$, so ergiebt sich mit Rücksicht auf den in (14.) enthaltenen Zusammenhang zwischen V und $U_\beta + U_\gamma$:

$$(21.) \qquad v = p(U_\beta + U_\gamma)_{(\vartheta_1 = 0,\, \omega_1 = 2\pi)}.$$

Die Substitution der Werthe 0 und 2π statt ϑ_1 und ω_1 in den für U_β und U_γ gegebenen Formeln lässt sich ohne Weiteres ausführen, und es ist dabei nur zu beachten, dass dadurch $\eta = \vartheta$ wird. Ebenso verhält es sich mit den Formeln für die Dichtigkeit, und man erhält z. B.:

$$(22.) \qquad k_\beta = \frac{n^2 \sin n\gamma}{2a\pi^2 i} p_\beta^3 \int_\vartheta^\infty \frac{d\alpha \sin n\alpha i (\cos\alpha i - \cos\vartheta i)^{-\frac{1}{2}}}{(\cos n\alpha i + \cos n\gamma)^2}.$$

*) Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte. (Art. 26.)

Um die Mengen m_β und m_γ der auf den Kalotten β und γ vertheilten Elektricitäten zu bestimmen, kann die Bemerkung dienen, dass die zu einer Belegung irgend eines endlichen Flächenstücks gehörige Elektricitätsmenge gleich ist dem Potentiale der Belegung in Bezug auf einen unendlich entfernten Punkt multiplicirt mit der Entfernung (ϱ) des letzteren von einem im Endlichen gelegenen festen Punkte. Es ist also:

$$m_\beta = \varrho p\, U_\beta, \qquad m_\gamma = \varrho p\, U_\gamma,$$

wenn man nicht bloss $\vartheta_1 = 0$, $\omega_1 = 2\pi$, sondern auch $\vartheta = 0$, $\omega = 2\pi$ nimmt, wodurch $\varrho p = a\sqrt{2}$ wird. Unter Anwendung der Gleichungen (18.) und (19.) und mit Benutzung der dort resp. über P^{-1} und den Fall $\eta = 0$ gemachten Bemerkungen, erhält man somit:

$$(23.)\quad \begin{cases} m_\beta + m_\gamma = \dfrac{a}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \left(-\cot\tfrac{1}{2}\alpha i + n\cot\tfrac{1}{2}n\alpha i + \dfrac{n\sin n\alpha i}{\cos n\alpha i - \cos 2n\gamma}\right)\dfrac{d\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha i}, \\ m_\beta - m_\gamma = -an\cot n\gamma. \end{cases}$$

Von diesen Ausdrücken ist der zweite durch seine Einfachheit bemerkenswerth, und das Integral in dem ersten lässt sich wenigstens dann auf Elementarfunctionen zurückführen, wenn n ein rationaler Bruch ist.

Danzig, im Juli 1867.