Ueber eine Transformation der homogenen Functionen dritter Ordnung mit vier Veränderlichen.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

Herr *Steiner* hat im 53sten Bande dieses Journals, p. 139 eine Reihe von Sätzen angegeben, welche sich auf die von ihm Kernfläche der Oberfläche dritter Ordnung genannte Fläche beziehen. Diese Kernfläche ist, wie man leicht erkennt, nichts Anderes als die *Hesse*sche Determinante; und unter diesem Gesichtspunkt zeigt es sich, dafs die gedachten Sätze der Ausdruck für die algebraische Transformation einer homogenen Function dritter Ordnung mit vier Veränderlichen in die Summe von fünf Cuben ist, wobei dann zugleich die Determinante eine überraschend einfache Gestalt gewinnt, und die angeführten Sätze von selbst sich ergeben. Wenn man ferner bemerkt, wie aus den *Steiner*schen Sätzen sich ergiebt, dafs jene Transformation nur auf eine einzige Weise geleistet werden kann, und dieselbe also nur auf eine Gleichung des fünften Grades zurückführen kann, so erhellt sogleich die innere Wichtigkeit dieses Transformationsproblems, auch gegenüber den schönen vielfach angestellten Betrachtungen über die geraden Linien auf der Oberfläche dritter Ordnung, deren entsprechende Transformation auf vielfache Weise geleistet werden kann, und von einer Gleichung des 27sten Grades abhängt. Ich werde zunächst den analytischen Weg angeben, der zu den *Steiner*schen Sätzen führen kann, und sodann die Bildung der Gleichung fünften Grades angeben, welche zugleich über die Invarianten der betrachteten Functionen einige merkwürdige Andeutungen giebt.

1.

Es sei $u = 0$ die Gleichung einer Oberfläche dritter Ordnung, auf homogene Coordinaten bezogen. Sodann seien eben diese Coordinaten für einen Punkt der Oberfläche x_1, x_2, x_3, x_4, für einen beliebigen andern Punkt y_1, y_2, y_3, y_4. Legt man von dem Punkte y aus einen Berührungskegel an u, so ist die Bedingung dafür, dafs x auf der Berührungscurve liege, bekanntlich

$$(1.)\qquad \Sigma u_i y_i = 0,$$

durch die Indices von u immer Differentialquotienten nach den entsprechenden x bezeichnet. Die Gleichung (1.) stellt aber in Bezug auf x überhaupt eine Oberfläche zweiter Ordnung dar, die erste Polare des Punktes y. Damit diese Oberfläche ein Kegel sei, müssen die Differentialquotienten des Ausdrucks (1.) nach den x gleichzeitig verschwinden können, so dafs

$$(2.)\quad \begin{cases} u_{11}y_1+u_{12}y_2+u_{13}y_3+u_{14}y_4 = 0, \\ u_{21}y_1+u_{22}y_2+u_{23}y_3+u_{24}y_4 = 0, \\ u_{31}y_1+u_{32}y_2+u_{33}y_3+u_{34}y_4 = 0, \\ u_{41}y_1+u_{42}y_2+u_{43}y_3+u_{44}y_4 = 0. \end{cases}$$

Hierin bezeichnen dann die x die Coordinaten des Scheitels für diesen Kegel. Da man aber offenbar in den Gleichungen (2.) die y mit den x vertauschen kann, ohne dafs die Gleichungen sich ändern, so zeigt sich, dafs umgekehrt die erste Polare von x wieder ein Kegel sein mufs, dessen Scheitel in y liegt. Dieser Eigenschaft wegen hat Herr *Steiner* derartige Punkte y, x ***reciproke Pole*** genannt.

Aus (2.) folgt aber ohne Weiteres

$$(3.)\quad \varDelta = \Sigma \pm u_{11}u_{22}u_{33}u_{44} = 0;$$

der Ort der reciproken Pole ist daher die *Hesse*sche Determinante, von Herrn *Steiner* Kernfläche genannt.

Bezeichnet man ferner durch U_{ik} die Unterdeterminanten von $\varDelta$, durch α_1, α_2, α_3, α_4 beliebige Gröfsen, so kann man die Auflösungen der Gleichungen (2.) in folgender Gestalt darstellen:

$$(4.)\quad \begin{cases} y_1 = \alpha_1 U_{11}+\alpha_2 U_{12}+\alpha_3 U_{13}+\alpha_4 U_{14}, \\ y_2 = \alpha_1 U_{21}+\alpha_2 U_{22}+\alpha_3 U_{23}+\alpha_4 U_{24}, \\ y_3 = \alpha_1 U_{31}+\alpha_2 U_{32}+\alpha_3 U_{33}+\alpha_4 U_{34}, \\ y_4 = \alpha_1 U_{41}+\alpha_2 U_{42}+\alpha_3 U_{43}+\alpha_4 U_{44}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen begründen einen merkwürdigen Satz, welcher, wie ich glaube, neu ist. Man erhält nämlich daraus unmittelbar die Gleichung

$$\Sigma_i \Sigma_k \Sigma_h u_{ikh} y_i y_k y_h = \Sigma_i \Sigma_k \Sigma_h \Sigma_m \Sigma_n \Sigma_p u_{ikh} \alpha_m \alpha_n \alpha_p U_{im} U_{kn} U_{hp}.$$

Wegen der Gleichung $\varDelta = 0$ ist aber

$$U_{kn} U_{hp} = U_{kh} U_{np},$$

und daher ist obiger Ausdruck auch gleich

$$\Sigma_n \Sigma_p \alpha_n \alpha_p U_{np}\,.\,\Sigma_i \Sigma_k \Sigma_h \Sigma_m u_{ikh} \alpha_m U_{im} U_{kh}.$$

Bezeichnet man endlich noch durch Δ_i den Differentialquotienten von Δ nach x_i, so ist noch

$$\Sigma_k \Sigma_h U_{kh} u_{ikh} = \Delta_i,$$

und demnach stellt sich die obige Gleichung in der folgenden Form dar:

$$\Sigma_i \Sigma_k \Sigma_h u_{ikh} y_i y_k y_h = \Sigma_n \Sigma_p \alpha_n \alpha_p U_{np} . \Sigma_i \Sigma_m \alpha_m \Delta_i U_{mi}.$$

Betrachtet man jetzt den besondern Fall, wo die linke Seite verschwindet, also wo y in der Oberfläche $u=0$ liegt, so mufs auch die rechte Seite verschwinden. Der erste Factor rechts aber, welcher gleich

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 y_4$$

ist, kann offenbar immer durch passende Wahl der α so eingerichtet werden, dafs er nicht verschwindet. Daher bleibt nur der zweite Factor übrig, und es mufs also

$$\Sigma_i \Sigma_m \alpha_m \Delta_i U_{mi} = 0$$

sein. Ich habe in der vorangehenden Abhandlung bewiesen, dafs dies die Gleichung einer Oberfläche ist, welche durch die Berührungscurve von $\Delta=0$ und $F=0$ hindurchgeht, durch $F=0$ die im gedachten Aufsatz entwickelte Oberfläche bezeichnet, welche $u=0$ in den Orten der vierpunktigen Berührung schneidet. Man hat daher das Theorem:

Wenn von den reciproken Polen der eine in der Wendecurve ($\Delta=0$, $u=0$) liegt, so liegt der andre auf der Berührungscurve von $\Delta=0$ mit $F=0$; und umgekehrt.

Die Beziehung dieser beiden Curven, dafs sie einander berühren, wo sie sich treffen, habe ich a. a. O. bereits entwickelt. Hier zeigt sich ein neuer Zusammenhang; und den obigen Beweis und Satz kann man ohne Weiteres auch für algebraische Flächen beliebiger Ordnung folgendermafsen ausdrücken:

Wenn die erste Polare ein Kegel werden soll, so mufs die Spitze desselben auf der Determinantenfläche liegen, der Pol aber auf einer andern Fläche, welche durch Elimination der x aus den Gleichungen* (2.) *erhalten wird. Liegt sodann der Pol insbesondere auch auf der Fläche $u=0$, so liegt die Spitze des Polarkegels in der Berührungscurve von $\Delta=0$, $F=0$.

In Bezug auf die Oberflächen dritter Ordnung aber folgt ferner, dafs, wenn ein Pol im Schnitt von $u=0$, $\Delta=0$, $F=0$ liegt, also einer der 54 Berührungspunkte der Curven $u=0$, $\Delta=0$, und $u=0$, $F=0$ wird, nothwendig der reciproke Pol ebenfalls einer jener 54 Punkte sein mufs; oder, nach dem von Herrn *Steiner* eingeführten Ausdruck, dafs die Asymptotenpunkte paarweise reciproke Pole sind; ein Satz, welchen Herr *Steiner* a. a. O. gegeben hat, und auf welchen ich weiter unten Gelegenheit haben werde zurückzukommen.

Sodann aber sind diejenigen reciproken Pole vorzugsweise von Bedeutung, für welche die Ausdrücke der y in (4.) unbestimmt werden. Die Gleichungen

$$U_{ik} = 0$$

können nämlich sämmtlich mit einander bestehen, indem, wie Herr *Steiner* angiebt, zehn solche Pole existiren, deren reciproke Pole sich in zehn gerade Linien ausbreiten. Auf diesen Umstand beziehen sich die folgenden Transformationen.

2.

Bezeichnet man durch $a_{ikh} = \frac{1}{6}u_{ikh}$ den Coefficienten von $x_i x_k x_h$ in u, so kann man immer u in der Form darstellen:

$$(5.)\qquad u = \Sigma\Sigma\Sigma a_{ikh} x_i x_k x_h = A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + A_4^3 + A_5^3,$$

wo die linearen Ausdrücke

$$(6.)\qquad A_i = \alpha_{1i}x_1 + \alpha_{2i}x_2 + \alpha_{3i}x_3 + \alpha_{4i}x_4$$

in geeigneter Weise zu bestimmen sind. In der That ist zur Ausführung dieser Bestimmung die gehörige Zahl von willkürlichen Constanten α vorhanden. Ich werde zunächst zeigen, dafs die Transformation nur auf eine einzige Weise geschehen kann. Zu diesem Ende mufs ich die Determinante und die Unterdeterminanten derselben für die transformirte Function u bilden. Um die Bildung zu erleichtern, mag folgendes Lemma vorausgeschickt werden:

Sind $z_1, z_2, \dots z_{n+1}$ lineare Functionen von $x_1, x_2, \dots x_n$, so dafs

$$z_i = \alpha_{1i}x_1 + \alpha_{2i}x_2 + \dots + \alpha_{ni}x_n;$$

und ist demnach identisch

$$f(z_1, z_2, \dots z_{n+1}) = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n),$$

so ist auch identisch, wenn $f_{ik} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_k}$, $\varphi_{ik} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$ ***gesetzt wird:***

$$(7.)\qquad -\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \dots & f_{1,n+1} & k_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \dots & f_{2,n+1} & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n+1,1} & f_{n+1,2} & f_{n+1,3} & \dots & f_{n+1,n+1} & k_{n+1} \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_{n+1} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix},$$

wo die k die $n+1$ Determinanten bezeichnen, welche aus den $n+1$ Coefficientenreihen α zusammengesetzt werden können, und welche die Gleichung erfüllen

$$(8.)\qquad k_1 z_1 + k_2 z_2 + \cdots + k_{n+1} z_{n+1} = 0.$$

Die Gleichung (7.) ist leicht einzusehen, denn es ist offenbar

$$\varphi_{ik} = \Sigma\Sigma f_{mn}\alpha_{im}\alpha_{kn}.$$

Nach einem bekannten Satz ist also die Determinante der φ_{ik} gleich

$$\Sigma\Sigma F_{mn} k_m k_n,$$

wo die F_{mn} die Unterdeterminanten des Systems der f_{mn} darstellen. Diese Form ist aber nur eine andere Schreibart für die linke Seite der Gleichung (7.).

Dies vorausgeschickt, ist augenblicklich

$$(8^a.)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix} = -6^4 . \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 & 0 & k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_5 & k_5 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & 0 \end{vmatrix},$$

wenn man die A an die Stelle der z treten läfst, und daher die identische Gleichung festsetzt

$$(9.)\qquad 0 = k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 + k_4 A_4 + k_5 A_5 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} & A_1 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} & A_2 \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{43} & A_3 \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} & A_4 \\ \alpha_{15} & \alpha_{25} & \alpha_{35} & \alpha_{45} & A_5 \end{vmatrix}.$$

Die obige Form zeigt aber dann leicht die ausgerechnete Gestalt:

$$(10.)\qquad \frac{\Delta}{6^4} = k_1^2 A_2 A_3 A_4 A_5 + k_2^2 A_3 A_4 A_5 A_1 + k_3^2 A_4 A_5 A_1 A_2 + \cdots.$$

Um auf gleiche Weise die Unterdeterminanten von Δ zu bilden, betrachte ich die Function

$$u + \lambda(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4).$$

Die Determinante dieser Function in Bezug auf x_1, x_2, x_3, x_4, λ ist

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \beta_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \beta_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \beta_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \beta_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 \end{vmatrix} = -\Sigma\Sigma U_{ih}\beta_i\beta_h,$$

so dafs also die Coefficienten der $\beta_i\beta_h$ die Unterdeterminanten angeben. Betrachte ich jetzt in dem Lemma als die beiden Reihen von Veränderlichen die Gröfsen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \lambda \quad \text{und}\quad A_1,\ A_2,\ \ldots\ \lambda,$$

so findet sich

$$(11.)\qquad \Sigma\Sigma U_{ih}\beta_i\beta_h = 6^3.\begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & \gamma_1 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 & k_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 & k_3 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 & 0 & k_4 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_5 & k_5 & \gamma_5 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

durch $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ irgend ein System von Constanten bezeichnet, welches der Gleichung

$$(12.)\qquad \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \cdots$$

identisch Genüge leistet. Dieses System ist nicht ganz bestimmt; die Unterschiede verschiedener Systeme sind aber den k proportional, was bei der Form der rechten Seite von (11.) ohne Einflufs bleibt. Da ferner die β ganz beliebige Gröfsen bezeichneten, so kann auch ein solches System der γ ganz beliebig gewählt werden.

Die Ausführung der Determinante (11.) liefert dann die Form:

$$(13.)\qquad \Sigma\Sigma U_{ih}\beta_i\beta_h = 6^3(\gamma_1 k_2 - \gamma_2 k_1)^2 A_3 A_4 A_5 + \cdots,$$

wo nur ein Ausdruck als Repräsentant von zehn ähnlichen Ausdrücken hingeschrieben ist.

Diese Form zusammen mit (10.) zeigt nun aber,

1. *dafs die zehn Schnittlinien der Ebenen*

   $$A_1 = 0,\quad A_2 = 0,\quad \ldots\quad A_5 = 0$$

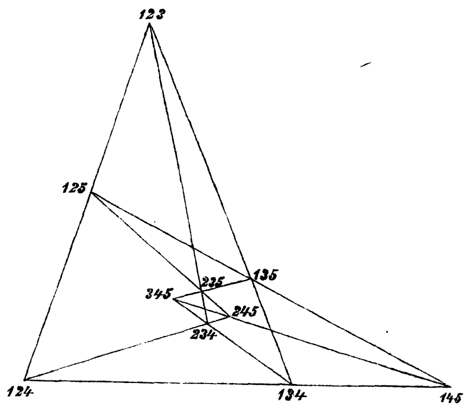
   ganz in der Fläche $\Delta = 0$ liegen, da bei dem Verschwinden von je zweien derselben auch Δ verschwindet,

2. *dafs für die zehn Schnittpunkte je dreier dieser Ebenen nicht blos Δ, sondern auch sämmtliche Unterdeterminanten verschwinden, da der Ausdruck* (13.) *dann identisch zu Null wird.*

Endlich folgt aber auch, dafs eben dies für keine andern Ebenen möglich ist. Denn da in (13.) die Coefficienten aller Producte zweier γ verschwinden müssen, so sieht man, dafs nothwendig die zehn Producte

$$A_1 A_2 A_3, \text{ etc.}$$

gleichzeitig für die betreffenden Punkte gleich Null sein müssen; was wieder nur möglich ist, wenn drei der A gleichzeitig verschwinden. Es giebt also wirklich nur fünf Ebenen A, welchen die Eigenschaft zukommt, dafs ihre Schnittlinien ganz in Δ liegen, und dafs ihre Schnittpunkte auch die Unterdeterminanten zu Null machen. Hierdurch ist einerseits bewiesen, dafs die obige Transformation nur auf eine Weise geleistet werden kann. Andrerseits aber enthält das Obige den analytischen Beweis für die *Steiner*schen Sätze über das Pentaeder der Ebenen A. Die Schnittpunkte der Ebenen sind solche Pole, deren reciproke sich in gerade Linien auflösen; sie sind zugleich Knotenpunkte von Δ, weil aufser Δ auch die Δ_i, als lineare Functionen der U_{ik}, verschwinden. Durch jeden Pol gehen drei der entsprechenden Geraden; auf jeder Geraden liegen drei der entsprechenden Pole. Diese Verhältnisse werden in der beistehenden Figur anschaulich, in welcher die fünf Ebenen durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ihre Schnittpunkte durch 123, etc. bezeichnet, und nur diejenigen zehn Linien gezogen sind, welche der Oberfläche Δ angehören.



Man kann diesen Betrachtungen andre hinzufügen, welche mit den Covarianten von u in Zusammenhang stehen. Von diesen habe ich aufser Δ zwei andere betrachtet, welche durch die Gleichungen

$$(14.)\quad \begin{cases} \Theta = \Sigma\Sigma U_{ik}\Delta_i\Delta_k, \\ T = \Sigma\Sigma U_{ik}\Delta_{ik} \end{cases}$$

gegeben sind; und aus denen sich die Function

$$(15.)\quad F = \Theta - 4\Delta T$$

zusammensetzt, welche gleich Null gesetzt, durch ihren Schnitt mit $u = 0$ die Orte der vierpunktigen Berührungen liefert. Diese beiden Covarianten sollen nunmehr gebildet werden. Zunächst entsteht Θ, wenn man in (13.) die β_i durch die Δ_i ersetzt; oder, was dasselbe ist, wenn man für die γ_i die

Differentialquotienten

$$(16.)\qquad \gamma_i = \frac{\partial \varDelta}{\partial A_i} = \nabla_i$$

einführt. Dadurch erhält man für Θ die Form:

$$(17.)\qquad \Theta = 6^3(k_1\nabla_2 - k_2\nabla_1)^2 A_3 A_4 A_5 + \cdots,$$

wo nur ein Term statt zehn ähnlicher hingeschrieben ist; und wo

$$(18.)\qquad \nabla_1 = 6^4(k_2^2 A_3 A_4 A_5 + k_3^2 A_4 A_5 A_2 + k_4^2 A_5 A_2 A_3 + k_5^2 A_2 A_3 A_4),$$

u. s. w.

Der Ausdruck von T findet sich leicht, wenn man bemerkt, dafs T der Coefficient von λ^3 in der Determinante von $u + \lambda\varDelta$ ist. Bezeichnet man daher durch ∇_{ik} den Ausdruck

$$\nabla_{ik} = \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial A_i \partial A_k},$$

wo dann

$$(19.)\qquad \nabla_{11} = \nabla_{22} \cdots = 0,\quad \nabla_{12} = 6^4(k_3^2 A_4 A_5 + k_4^2 A_5 A_3 + k_5^2 A_3 A_4),\ \text{u. s. w.};$$

so erhält man aus (8^a.) sehr leicht die Gestalt:

$$(20.)\qquad T = -6^3.2(A_1 A_2 A_3 k_4 k_5 \nabla_{45} + \cdots),$$

wo ein Term als Repräsentant von zehn verschiedenen hingeschrieben ist.

Betrachtet man jetzt einen Punkt, der von dem Schnittpunkt der Ebenen $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ unendlich wenig entfernt ist, so dafs die Ausdrücke A_1, A_2, A_3 unendlich klein von der ersten Ordnung werden. Dann wird auch T unendlich klein von der ersten Ordnung, $\varDelta$ von der zweiten und Θ von der dritten. Die Oberfläche $T = 0$ geht daher einfach durch den betrachteten Punkt, indem, beiläufig bemerkt, ihre Tangentenebene durch den Schnitt von A_4 und A_5 geht; die Oberfläche $\varDelta = 0$ hat in eben diesem Punkte einen Knotenpunkt, welcher sich einem Kegel der zweiten Ordnung anschliefst; die Oberflächen $\Theta = 0$ und $F = 0$ aber haben, indem sie durch denselben Punkt gehen, Knotenpunkte, welche sich Kegeln der dritten Ordnung anschliefsen. Man kann also den Satz aussprechen:

In den zehn Ecken des Pentaeders schneiden sich die Oberflächen $T=0$, $\varDelta=0$, $\Theta=0$, $F=0$; und zwar sind diese Ecken für $\varDelta$ Knotenpunkte, wo sich die Oberfläche einem Kegel der zweiten Ordnung, für Θ und F aber solche, wo sich diese Flächen Kegeln der dritten Ordnung anschliefsen.

Da ferner, wie ich gezeigt habe, die Oberflächen $F=0$, $\varDelta=0$ oder $\Theta=0$, $\varDelta=0$ sich längs einer Curve berühren, so folgt, *dafs in eben diesen*

zehn Punkten der Berührungskegel von Δ jeden der Berührungskegel von Θ und F in drei verschiedenen Seiten berühren mufs, wovon man sich auch leicht direct überzeugt. Und endlich also, ***dafs für die Berührungscurve von Δ mit F oder mit Θ jede Ecke des Pentaeders ein dreifacher Punkt ist.***

3.

Mit Hülfe der Invariantentheorie ist es nun möglich, die Gleichung fünften Grades wirklich aufzustellen, von welcher die Transformation (5.) abhängt. Die Hauptzüge einer solchen Theorie sind in der Abhandlung des Herrn *Aronhold* „über die homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen" (dieses Journal Bd. 55, p. 97) implicite enthalten; und ich mufs zum bessern Verständnifs des Folgenden einige Betrachtungen allgemeiner Natur vorausschicken, auf welche mich ein sorgfältiges Studium jener Abhandlung geführt hat, und welche, wie ich glaube, mit zu den Quellen gehören, aus welchen die schönen Untersuchungen des Herrn *Aronhold* geflossen sind.

Es sei F irgend eine ganze und rationale Grundform einer homogenen Function f von beliebig hohem Grade mit beliebig vielen Veränderlichen; wobei es ganz gleichgültig ist, ob F eine Invariante, Covariante, zugehörige Form oder Zwischenform ist. Ist dann a ein Coefficient von f, b der entsprechende einer ähnlichen Function φ, so ist offenbar

$$\Sigma b \frac{\partial F}{\partial a},$$

die Summe über alle Coefficienten ausgedehnt, simultane Grundform von f und φ; und sie geht, wenn jedes b dem entsprechenden a gleichgesetzt wird, in F über, multiplicirt mit einer reinen Zahl.

Setzt man dies Verfahren fort, indem man immer nach den a differentiirt und als Incremente die Coefficienten einer neuen Function von derselben Ordnung und Anzahl der Veränderlichen einführt, so erhält man zuletzt eine simultane Grundform für μ Functionen von gleicher Ordnung und gleich viel Veränderlichen, welche, wenn μ gleich dem Grade von F in Bezug auf die a ist, in Bezug auf die Coefficienten sämmtlicher Functionen linear ist, und aufserdem die Eigenschaft besitzt, in F, multiplicirt mit einem Zahlenfactor, überzugehen, sobald man die μ Functionen sämmtlich in f übergehen läfst.

Für diese μ Functionen darf man aber ohne Zweifel, wenn n der Grad von f ist, die n^{ten} Potenzen von ebensoviel linearen Ausdrücken

$$B = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots$$

setzen; und bildet man dann die simultane Grundform $[F]$ für diese n^{ten} Potenzen, so erhält man daraus F durch eine symbolische Substitution, wenn man die Producte von n der b durch den entsprechenden Coefficienten a ersetzt.

Die Grundform $[F]$ ist offenbar zugleich simultane Grundform für die μ linearen Ausdrücke B selbst. Wendet man nun auf eine solche Grundform die nämlichen Betrachtungen an, wie oben auf F, so zeigt es sich, dafs $[F]$ nothwendig auf rationale Weise aus solchen Grundformen der B zusammengesetzt sein mufs, welche in Beziehung auf die einzelnen b linear sind.

Solcher Grundformen giebt es inzwischen, wie die unmittelbare Betrachtung lehrt, nur vier Arten: *Covarianten,* welches die B selbst sind; eine *Zwischenform,* nämlich

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots;$$

Invarianten, welche die aus den verschiedenen B zu bildenden Determinanten

$$\Sigma \pm b_1 b'_2 b''_3 \ldots$$

sind; *zugehörige Formen,* welche aus den letztern entstehen, sobald eine Reihe der b durch die Veränderlichen u ersetzt wird.

Und dies führt ohne Weiteres zu dem Fundamentaltheorem:

Jede rationale und ganze Grundform wird erhalten, wenn man Aggregate der Producte der obigen vier Gestalten bildet, so dafs aber in jedem Producte jede Art der b $n$mal erscheint; und wenn man sodann für die Producte gleichartiger b die entsprechenden Coefficienten a einführt.

4.

Wendet man dies Theorem insbesondere auf die Invarianten der homogenen Functionen dritter Ordnung mit vier Veränderlichen an, so zeigt sich, dafs, wenn man die linearen Ausdrücke

$$\begin{array}{l} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

betrachtet, sämmtliche Invarianten unter das Schema

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4 \, \Sigma \pm e_1 f_2 g_3 h_4 \ldots$$

fallen, wo jede Reihe a, b, c etc. dreimal erscheinen mufs, und wo durch eine symbolische Substitution

$$a_i a_k a_h = b_i b_k b_h = \cdots = a_{ikh}$$

zu setzen ist; oder dafs wenigstens alle ganzen und rationalen Invarianten sich aus Invarianten dieser Art auf rationale Weise zusammensetzen. Und die Anzahl der mit einander multiplicirten Determinanten mufs dann offenbar, weil jedes $a, b, \ldots$ dreimal vorkommen mufs, eine der Zahlen 3, 6, 9, ... sein, wodurch man die Invarianten der Ordnungen 4, 8, 12, ... in Bezug auf a erhalten würde. Ich werde jetzt zeigen, dafs es keine Invarianten der Ordnungen 4, 12, etc. geben kann, und dafs sich überhaupt alle aus fünf Invarianten, welche einzeln von den Ordnungen 8, 16, 24, 32, 40 sind, auf rationale Weise zusammensetzen.

Zu diesem Zweck betrachte ich die transformirte Form

$$u = A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + A_4^3 + A_5^3,$$

in welcher zwischen den A die Relation (9.)

$$0 = k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 + k_4 A_4 + k_5 A_5$$

besteht. Man bemerkt, dafs jede Invariante von u sich zugleich als simultane Invariante der A darstellen mufs. Nach dem Obigen ist sie also eine ganze rationale Function der aus den A zu bildenden Determinanten; oder da dies eben die k sind, *so ist jede rationale ganze Invariante von u eine rationale ganze Function der k.*

Aber u ändert sich nicht, wenn man jedem System der Coefficienten α eine dritte Wurzel der Einheit als Factor hinzufügt. Durch passende Wahl derselben kann man es erreichen, dafs nur eines der k zugleich eine dritte Wurzel der Einheit als Factor enthält, während die übrigen unverändert bleiben. In den Invarianten können also nur die dritten Potenzen der k erscheinen. Da ferner auch durch Vertauschung der A die Invariante sich nicht ändern darf, so sieht man, dafs sie eine symmetrische Function der k^2 sein mufs. Und so kann man endlich den Satz aufstellen:

Jede ganze rationale Invariante von u ist eine symmetrische Function der sechsten Potenzen der k.

Die sechste Potenz der k entspricht aber der achten Ordnung der Invarianten in Bezug auf die a. *Die Ordnungen der Invarianten sind also sämmtlich durch 8 theilbar.*

Denkt man sich nun je eine Invariante der Ordnungen 8, 16, 24, 32, 40, so wird man aus ihnen die fünf symmetrischen Grundfunctionen der k successive bestimmen können. Gäbe es von einer dieser Ordnungen noch eine zweite Invariante, so könnte man aus ihr und den Invarianten von gleichem und niederem Grade die k eliminiren, d. h. sie durch jene ausdrücken. Ebenso kann man jede höhere Invariante durch die symmetrischen Grundfunctionen der k, also auch durch jene fünf Invarianten rational darstellen.

So ist es also bewiesen, *daſs es wesentlich nur je eine Invariante der Ordnungen 8, 16, 24, 32, 40 geben kann, und daſs sich alle übrigen aus diesen zusammensetzen.*

5.

Solche fünf Invarianten können ohne Mühe gebildet werden. Bezeichnet man durch

$$\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}$$

die Determinante $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4$, so erhält man als Schemata der gesuchten Invarianten durch eine leichte Combination die folgenden:

1) $$\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a \\ b' \\ c' \\ d' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a' \\ b \\ c' \\ d' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c \\ d' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d \end{vmatrix}$$

2) $$\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \\ d'' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a''' \\ b''' \\ c''' \\ d''' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a \\ a' \\ a'' \\ a''' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b \\ b' \\ b'' \\ b''' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c \\ c' \\ c'' \\ c''' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d \\ d' \\ d'' \\ d''' \end{vmatrix}$$

3) $$\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \\ r \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ r' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} k' \\ l' \\ m' \\ n' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a \\ a' \\ u \\ u' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b \\ b' \\ v \\ v' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c \\ c' \\ k \\ k' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d \\ d' \\ l \\ l' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m \\ m' \\ w \\ w' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n \\ n' \\ r \\ r' \end{vmatrix}$$

4) $$\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \\ d'' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \\ r \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ r' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u'' \\ v'' \\ w'' \\ r'' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} k' \\ l' \\ m' \\ n' \end{vmatrix}^2$$

$$\times \begin{vmatrix} a \\ a' \\ a'' \\ k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b \\ b' \\ b'' \\ l \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c \\ c' \\ c'' \\ m' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d \\ d' \\ d'' \\ n' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u \\ u' \\ u'' \\ k' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v \\ v' \\ v'' \\ l' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w \\ w' \\ w'' \\ m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r \\ r' \\ r'' \\ n \end{vmatrix}$$

5) $$\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \\ r \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ r' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} k' \\ l' \\ m' \\ n' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} e' \\ f' \\ g' \\ h' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{vmatrix}^2$$

$$\times \begin{vmatrix} a \\ a' \\ e \\ e' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b \\ b' \\ f \\ f' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c \\ c' \\ k \\ k' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d \\ d' \\ l \\ l' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u \\ u' \\ g \\ g' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v \\ v' \\ h \\ h' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w \\ w' \\ x \\ x' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r \\ r' \\ y \\ y' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m \\ m' \\ z \\ z' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n \\ n' \\ t \\ t' \end{vmatrix}.$$

Diese Formen sind zum Theil so verwickelt, dafs sie ihr wahres Bildungsgesetz nicht erkennen lassen; und sie sind in der That nicht in dieser Gestalt unmittelbar gebildet, sondern durch Einführung der Coefficienten von Δ. Da man sich nämlich leicht überzeugt, dafs die Determinante Δ die symbolische Gestalt annimmt:

$$\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}^2 \cdot (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots)(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots)(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots)(d_1 x_1 + d_2 x_2 + \cdots),$$

wo nach der Ausrechnung $a_i a_k a_h$, etc. $= a_{ikh}$ zu setzen ist, und wo nur ein Zahlenfactor ausgelassen ist; so lassen sich die obigen Formen, abgesehen von Zahlenfactoren, einfach darstellen, wenn man zu der symbolischen Substitution $a_i a_k a_h = b_i b_k b_h \cdots = a_{ikh}$ noch die andere:

$$\alpha_i \alpha_k \alpha_h \alpha_m = \beta_i \beta_k \beta_h \beta_m, \text{ etc.}$$

gleich dem entsprechenden Coefficienten von Δ, hinzufügt. Auf diese Weise erhält man die Formen:

$$1)\quad \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ a \\ c \\ d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ a \\ b \\ d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ a \\ b \\ c \end{vmatrix}$$

$$2)\quad \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{vmatrix}^4$$

$$3)\quad \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \varepsilon \\ \zeta \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \\ \zeta \end{vmatrix}^2$$

$$4)\quad \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \varepsilon \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \zeta \\ \eta \\ \vartheta \\ \delta \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \zeta \\ \eta \\ \vartheta \\ \varepsilon \end{vmatrix}^2$$

$$5)\quad \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \varepsilon \\ \zeta \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \eta \\ \vartheta \\ \gamma \\ \delta \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \eta \\ \vartheta \\ \iota \\ \varkappa \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon \\ \zeta \\ \iota \\ \varkappa \end{vmatrix}^2,$$

welche auf einfache und gesetzmäfsige Weise gebildet sind, und aus welchen durch Auflösung rückwärts die ersten Formen entstanden. Man bemerkt, dafs die drei letzten reine Invarianten von Δ sind; sie sind zugleich die einfachsten Invarianten, welche einer homogenen Function vierter Ordnung mit vier Veränderlichen zukommen.

Bezeichnet man nun die Combinationssummen der sechsten Potenzen von $k_1, k_2, \dots k_5$ durch $C_1, C_2, \dots C_5$, so dafs die k Wurzeln der Gleichung

$$(21.)\qquad k^{30}-C_1k^{24}+C_2k^{18}-C_3k^{12}+C_4k^6-C_5=0$$

sind, und bezeichnet man die fünf Invarianten in der ersten Gestalt durch $J_1, J_2, \dots J_5$, so müssen diese nach dem Obigen offenbar folgende Gestalt annehmen:

$$(22.)\quad\begin{cases} J_1=\varrho_1C_1,\\ J_2=\varrho_2C_2+\varrho_2'C_1^2,\\ J_3=\varrho_3C_3+\varrho_3'C_2C_1+\varrho_3''C_1^3,\\ J_4=\varrho_4C_4+\varrho_4'C_3C_1+\varrho_4''C_2^2+\varrho_4^{(3)}C_2C_1^2+\varrho_4^{(4)}C_1^4,\\ J_5=\varrho_5C_5+\varrho_5'C_4C_1+\varrho_5''C_3C_2+\varrho_5^{(3)}C_3C_1^2+\varrho_5^{(4)}C_2C_1^3+\varrho_5^{(5)}C_1^5,\end{cases}$$

wo die ϱ rationale Zahlen bedeuten. Dafs ein derartiges Resultat wirklich erscheint, kann man aus der ersten Form der Invarianten auch unmittelbar ersehen, wenn man die wirkliche Bildung versucht. Denn da nach ausgeführter Rechnung in denselben die symbolische Substitution

$$a_ia_ka_h=b_ib_kb_h=\cdots=a_{ikh}$$

auszuführen ist, welche, wenn man auf die transformirte Gestalt zurückgeht, den Ausdruck annimmt:

$$a_ia_ka_h=b_ib_kb_h=\cdots=\alpha_{i1}\alpha_{k1}\alpha_{h1}+\alpha_{i2}\alpha_{k2}\alpha_{h2}+\cdots,$$

so erkennt man unmittelbar, dafs jede der Invarianten sich in eine Summe von Producten wirklicher Determinanten auflöst, welche einzeln aus je vier Reihen der α zu bilden sind, d. h. in eine Summe von Producten der k. Ja man kann sogar die erste Form der Invarianten von vorn herein in eine solche Gestalt bringen, dafs die k darin abgesondert erscheinen, und die symbolischen Substitutionen nur noch Zahlenwerthe liefern. Denn drückt man die linearen Ausdrücke $a_1x_1+a_2x_2+\cdots$ etc. durch die A aus, so dafs sie die Gestalt annehmen

$$p_1A_1+p_2A_2+p_3A_3+\cdots \text{ etc.},$$

so hat man demnach

$$\begin{aligned} a_i&=p_1\alpha_{i1}+p_2\alpha_{i2}+\cdots+p_5\alpha_{i5},\\ b_i&=q_1\alpha_{i1}+q_2\alpha_{i2}+\cdots+q_5\alpha_{i5},\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

und die symbolische Determinante $\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}$ geht dann über in:

$$\Sigma \pm p_1 q_2 r_3 s_4 k_4;$$

so dafs die Invarianten sich als Producte von Determinanten fünfter Ordnung darstellen, welche in Bezug auf die k linear sind. Da aber sodann

$$(p_1 A_1 + p_2 A_2 + \cdots)^3 = u$$

sein soll, so hat man die symbolischen Substitutionen

$$p_i p_k p_h = q_i q_k q_h \cdots = 1 \text{ oder } = 0,$$

jenachdem i, k, h sämmtlich gleich, oder einige derselben verschieden sind. Diese Substitutionen bewegen sich dann also nur noch in numerischen Werthen. Eine solche Darstellung giebt dann z. B.

$$\varrho_1 = 120;$$

es scheint aber als wenn die Bestimmung der übrigen ϱ auf erhebliche Schwierigkeiten führe.

Löst man nun die Gleichungen (22.) nach den C auf, so dafs

$$(23.)\quad \begin{cases} C_1 = \sigma_1 J_1, \\ C_2 = \sigma_2 J_2 + \sigma_2' J_1^2, \\ C_3 = \sigma_3 J_3 + \sigma_3' J_2 J_1 + \sigma_3'' J_1^3, \\ C_4 = \sigma_4 J_4 + \sigma_4' J_3 J_1 + \sigma_4'' J_2^2 + \sigma_4^{(3)} J_2 J_1^2 + \sigma_4^{(4)} J_1^4, \\ C_5 = \sigma_5 J_5 + \sigma_5' J_4 J_1 + \sigma_5'' J_3 J_2 + \sigma_5^{(3)} J_3 J_1^2 + \sigma_5^{(4)} J_2 J_1^3 + \sigma_5^{(5)} J_1^5, \end{cases}$$

so erhält man die Coefficienten der gesuchten Gleichung fünften Grades durch die fünf Invarianten und durch rationale Zahlen ausgedrückt.

6.

Man kann diese Gleichung dazu benutzen, um besondere Fälle einer Oberfläche dritter Ordnung zu characterisiren. Soll z. B. insbesondere die Fläche eine Spitze darbieten, so müssen die Differentialquotienten von x sämmtlich gleichzeitig verschwinden können, d. h. es müssen die Gleichungen bestehn:

$$(24.)\quad \begin{cases} \alpha_{11} A_1^2 + \alpha_{12} A_2^2 + \cdots = 0, \\ \alpha_{21} A_1^2 + \alpha_{22} A_2^2 + \cdots = 0, \\ \alpha_{31} A_1^2 + \alpha_{32} A_2^2 + \cdots = 0, \\ \alpha_{41} A_1^2 + \alpha_{42} A_2^2 + \cdots = 0. \end{cases}$$

Die Auflösung der Gleichungen giebt dann, wenn μ eine beliebige Gröfse bedeutet:

$$(25.)\quad \begin{cases} A_1^2 = \mu k_1, \\ A_2^2 = \mu k_2, \\ \dots\dots \end{cases}$$

Führt man dies in die identische Gleichung

$$(26.)\quad k_1 A_1 + k_2 A_2 + \cdots = 0$$

ein, so erhält man die Bedingung

$$(27.)\quad \sqrt{k_1^3} + \sqrt{k_2^3} + \sqrt{k_3^3} + \sqrt{k_4^3} + \sqrt{k_5^3} = 0.$$

Die Fortschaffung der Wurzeln giebt dann eine symmetrische Function der k^6, welche auf den 24sten Grad der k ansteigt. In Folge der Gleichungen (23.) hat dieselbe also die Form:

$$(28.)\quad \tau J_4 + \tau' J_3 J_1 + \tau'' J_2^2 + \tau^{(3)} J_2 J_1^2 + \tau^{(4)} J_1^4 = 0,$$

wo die τ reine Zahlen bedeuten.

Man sieht leicht, dafs in einer derartigen Spitze die Flächen $\Delta = 0$, $T = 0$, $\Theta = 0$, $F = 0$ ebenfalls Spitzen erhalten; und zwar schliefst sich die Spitze von Δ so wie die Spitze von u einem Kegel der zweiten Ordnung an.

Um die 27 Geraden der Oberfläche dritter Ordnung mit der obigen Transformation in Zusammenhang zu bringen, kann man zunächst die Asymptotenpunkte aufsuchen. Nach (2.) sind je zwei reciproke Pole mit einander durch Gleichungen verbunden, welche sich aus der transformirten Function in folgender Gestalt darstellen:

$$(29.)\quad \begin{cases} \alpha_{11} A_1 B_1 + \alpha_{12} A_2 B_2 + \cdots + \alpha_{15} A_5 B_5 = 0, \\ \alpha_{21} A_1 B_1 + \alpha_{22} A_2 B_2 + \cdots + \alpha_{25} A_5 B_5 = 0, \\ \alpha_{31} A_1 B_1 + \alpha_{32} A_2 B_2 + \cdots + \alpha_{35} A_5 B_5 = 0, \\ \alpha_{41} A_1 B_1 + \alpha_{42} A_2 B_2 + \cdots + \alpha_{45} A_5 B_5 = 0, \end{cases}$$

wo nur der Kürze wegen, analog der Bedeutung von A_i, die Functionen

$$(30.)\quad B_i = \alpha_{1i} y_1 + \alpha_{2i} y_2 + \alpha_{3i} y_3 + \alpha_{4i} y_4$$

eingeführt sind. Die B stehen zu den y genau in derselben Beziehung, wie die A zu den x, und man kann zwei reciproke Pole durch die Buchstaben A, B andeuten. Durch Auflösung des Systems (29.) aber ergiebt sich:

$$(31.)\quad \begin{cases} A_1 B_1 = \lambda k_1, \\ A_2 B_2 = \lambda k_2, \\ \dots\dots\dots \\ A_5 B_5 = \lambda k_5, \end{cases}$$

durch λ einen willkürlichen Factor bezeichnet. Fügt man jetzt die Bedingung hinzu, dafs beide Pole auf der Oberfläche liegen, also Asymptotenpunkte sein sollen, so hat man die vier Gleichungen hinzuzufügen:

$$(32.)\quad \begin{cases} A_1^3+A_2^3+\cdots+A_5^3=0, & k_1A_1+k_2A_2+\cdots+k_5A_5=0, \\ B_1^3+B_2^3+\cdots+B_5^3=0, & k_1B_1+k_2B_2+\cdots+k_5B_5=0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (31.), (32.) genügen, um die Verhältnisse der A, B, λ zu bestimmen. Aber man sieht leicht, dafs man den letzten beiden Gleichungen (32.) mit Hülfe von (31.) auch die Gestalt geben kann:

$$A_1^2B_1+A_2^2B_2+\cdots+A_5^2B_5 = 0,$$
$$A_1B_1^2+A_2B_2^2+\cdots+A_5B_5^2 = 0;$$

und combinirt man dies mit den ersten beiden Gleichungen (32.), so folgt, dafs für jeden beliebigen Werth von ϱ

$$(A_1+\varrho B_1)^3+(A_2+\varrho B_2)^3+\cdots+(A_5+\varrho B_5)^3 = 0.$$

Da nun der Punkt $A+\varrho B$ ein beliebiger Punkt der Verbindungslinie von A, B ist, so mufs diese ganze Linie in der Oberfläche liegen, d. h. *je zwei Asymptotenpunkte, welche reciproke Pole sind, liegen auf einer der 27 Geraden der Oberfläche;* und umgekehrt kann man die 27 Geraden durch die 27 Punktenpaare A, B definiren.

Die wirkliche Aufstellung der Gleichung des 27sten Grades, von welcher die Auffindung der 27 Geraden abhängt, führt aber auf ein ganz anderes Problem, dessen Lösung sehr schwierig scheint. Die Theorie der Grundformen deutet darauf hin, dafs als unbekannte Gröfse der letzten Eliminationsgleichung von $p-1$ homogenen Gleichungen $f_1=0$, $f_2=0$, ... $f_{p-1}=0$ mit p Unbekannten eine absolute simultane Covariante der Functionen f_1, f_2, ... zu wählen ist, d. h. der Quotient zweier simultanen Covarianten gleich hoher Ordnung. Seien z. B. f_p und f_{p+1} solche Covarianten, bei welchen die gleiche Ordnung durch Potenzirung erreicht sein kann. Zwischen den $p+1$ Functionen f besteht dann eine Gleichung, welche von den Veränderlichen unabhängig ist, und nur noch die simultanen Invarianten enthält. Läfst man in dieser allgemeinen Beziehung dann f_1, f_2, ... verschwinden, so erhält man eine Gleichung für $\frac{f_p}{f_{p+1}}$, deren Coefficienten nur Functionen der simultanen Invarianten sind; und diese kann dann als die letzte Gleichung zur Bestimmung der Werthe der ursprünglichen Veränderlichen angesehen werden.

Wenn also die Asymptotenpunkte aus den Gleichungen $u=0$, $\Delta=0$, $\Theta=0$ erhalten werden, so hat man eine Beziehung zwischen diesen und irgend zwei andern Covarianten aufzusuchen, um dann eine Gleichung des 54sten Grades zu erhalten, welche sich auf den 27sten zurückführen läfst. Will man dagegen die Schnittpunkte der 27 Geraden mit einer beliebigen Ebene

$$c = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots = 0$$

erhalten, so hat man eine Beziehung zwischen u, Θ, Δ, T, c aufzusuchen, welche mit Hülfe simultaner Invarianten von u und c, d. h. durch Invarianten und zugehörige Formen von u, hervorgebracht werden kann. Der hohe Grad der resultirenden Gleichung läfst umgekehrt einen Rückschlufs darauf thun, dafs der Zusammenhang solcher Covarianten nur ein sehr verwickelter sein könne.

Man könnte aber eine solche Bildung unmittelbar an der transformirten Form vornehmen, indem man die x eliminirte. Die ersterwähnte Aufgabe namentlich kann dann offenbar nur noch Coefficienten enthalten, welche aus den symmetrischen Functionen der k^6 auf rationale Weise zusammengesetzt sind; und da diese Functionen ihrerseits sich durch die Invarianten J darstellen, so würde sich auf diesem Wege die allgemeinste Form der letzten Gleichung ergeben.

Carlsruhe, den 26sten März 1860.