

8.

Mémoire sur une classe particulière d'équations
résolubles algébriquement.(Par Mr. N. H. *Abel.*)

Il est vrai que les équations algébriques ne sont pas résolubles généralement; mais il y en a une classe particulière de tous les degrés dont la résolution algébrique est possible. Telles sont p. ex. les équations de la forme $x^n - 1 = 0$. La résolution de ces équations est fondée sur certaines relations qui existent entre les racines. J'ai essayé à généraliser cette remarque en supposant que deux racines d'une équation donnée soient tellement liées entre elles, qu'on puisse exprimer rationnellement l'une par l'autre, et j'ai trouvé, qu'une telle équation peut toujours être résolue à l'aide d'un certain nombre d'équations moins élevées. Il y a même des cas où l'on peut résoudre algébriquement l'équation donnée elle-même. Cela arrive p. ex. toutes les fois que, l'équation donnée étant irréductible, son degré est un nombre premier. La même chose a lieu encore si toutes les racines d'une équation peuvent être exprimées par

$$x, \theta x, \theta^2 x, \theta^3 x, \dots, \theta^{n-1} x, \text{ où } \theta^n x = x,$$

θx étant une fonction rationnelle de x , et $\theta^2 x, \theta^3 x, \dots$ des fonctions de la même forme de θx , prise deux fois, trois fois, etc. . . .

L'équation $\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$, si n est un nombre premier, est dans ce cas; car en désignant par x une racine primitive pour le module n , on peut, comme on sait, exprimer les $n - 1$ racines par:

$x, x^\alpha, x^{\alpha^2}, x^{\alpha^3}, \dots, x^{\alpha^{n-2}}, \text{ où } x^{\alpha^{n-1}} = x,$
c'est-à-dire en faisant $x^\alpha = \theta x$, par:

$x, \theta x, \theta^2 x, \theta^3 x, \dots, \theta^{n-2} x, \text{ où } \theta^{n-1} x = x.$

La même propriété convient à une certaine classe d'équations qu'offre la théorie des fonctions elliptiques.

En général je suis parvenu à démontrer le théorème suivant:

„Si les racines d'une équation d'un degré quelconque sont liées entre-elles de sorte, que toutes ces racines peuvent être exprimées rationnellement au moyen de l'une d'elles, que nous désignerons par x ; si de plus, en dé-

signant par θx , $\theta_1 x$ deux autres quelconques des racines en question, on a

$$\theta \theta_1 x = \theta_1 \theta x:$$

l'équation, dont il s'agit sera toujours résoluble algébriquement. De même si l'on suppose l'équation irréductible et son degré exprimé par

$$\alpha_1^{\nu_1} \cdot \alpha_2^{\nu_2} \cdot \dots \cdot \alpha_\omega^{\nu_\omega},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\omega$ sont des nombres premiers différens, on pourra réduire la résolution de cette équation à celle de ν_1 équations du degré α_1 , de ν_2 équations du degré α_2 , de ν_3 équations du degré α_3 etc."

Après avoir présenté généralement cette théorie, je l'appliquerai aux fonctions circulaires et elliptiques.

§. 1.

Nous allons d'abord considérer le cas où l'on suppose que deux racines d'une équation irréductible *) soient liées tellement entre-elles, que l'une puisse être exprimé rationnellement par l'autre.

Soit

$$1. \quad \varphi x = 0$$

une équation du degré μ , et x' et x les deux racines qui sont liées entre-elles par l'équation

$$2. \quad x' = \theta x_1,$$

où θx désigne une fonction rationnelle de x et de quantités connues. La quantité x' étant une des racines de l'équation, on aura $\varphi(x') = 0$ et en vertu de (2.)

$$3. \quad \varphi(\theta x_1) = 0.$$

Je dis maintenant que cette équation aura encore lieu, si au lieu de x_1 on met une autre racine quelconque de l'équation proposée. On aura effectivement le théorème suivant **).

*) Une équation $\varphi x = 0$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles d'un certain nombre de quantités connues a, b, c, \dots s'appelle irréductible, lorsqu'il est impossible d'exprimer ses racines par une équation moins élevée, dont les coefficients soient également des fonctions rationnelles de a, b, c, \dots .

**) Ce théorème se démontrera aisément comme il suit;

Quelle que soit la fonction rationnelle $f x$, on peut toujours faire $f x = \frac{M}{N}$, où M et N sont des fonctions entières de x , qui n'ont pas de facteur commun; mais une fonction de x peut toujours être mise sous la forme $P + Q \cdot \varphi x$, ou P et Q sont des fonctions entières, telles, que le

Théorème I. „Si une des racines d'une équation irréductible $\Phi x = 0$ satisfait à une autre équation $f x = 0$, où $f x$ désigne une fonction rationnelle de x et des quantités connues qu'on suppose contenues dans Φx ; cette dernière équation se trouvera encore satisfaite en mettant au lieu de x une racine quelconque de l'équation $\Phi x = 0$; mais le premier membre de l'équation (3.) est une fonction rationnelle de x , donc on aura

$$4. \quad \Phi(\theta x) = 0, \text{ si } \Phi x = 0,$$

c'est-à-dire, si x est une racine de l'équation $\Phi x = 0$, la quantité θx le sera également.

Maintenant, en vertu de ce qui précède, θx_1 est une racine de l'équation $\Phi x = 0$; donc $\theta\theta x_1$ le sera aussi; également $\theta\theta\theta x_1$, etc. le seront encore en répétant l'opération désignée par θ un nombre quelconque de fois.

Soit pour abréger

$$\theta\theta x_1 = \theta^2 x_1; \quad \theta\theta^2 x_1 = \theta^3 x_1; \quad \theta\theta^3 x_1 = \theta^4 x_1 \text{ etc.},$$

on aura la série

$$5. \quad x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \theta^3 x_1, \theta^4 x_1, \dots$$

et toutes ces quantités seront des racines de l'équation $\Phi x = 0$. La série (5.) aura une infinité de termes, mais l'équation $\Phi x = 0$ n'ayant qu'un nombre fini de racines différentes, il faut que plusieurs quantités de la série (5.) soient égales entre-elles.

Supposons donc p. ex.

$$\theta^m x_1 = \theta^{m+n} x_1,$$

ou bien

$$6. \quad \theta^n (\theta^m x_1) - \theta^m x_1 = 0,$$

en observant que $\theta^{n+m} x_1 = \theta^n \theta^m x_1$.

Le premier membre de l'équation (6.) est une fonction rationnelle de $\theta^m x_1$; or cette quantité est une racine de l'équation $\Phi x = 0$, donc en vertu du théorème énoncé plus haut, on pourra mettre x_1 au lieu de $\theta^m x_1$.

degré de P soit moindre que celui de la fonction φx . Donc, en faisant $M = P + Q \cdot \varphi x$, on aura $f x = \frac{P + Q \cdot \varphi x}{N}$. Cela posé, soit x la racine de $\varphi x = 0$, qui satisfait en même tems à $f x = 0$; x_1 sera également une racine de l'équation $P = 0$. Or si p n'est pas zéro pour une valeur quelconque de x , cette équation donnera x , comme racine d'une équation d'un degré moindre que celui de $\varphi x = 0$; ce qui est contre l'hypothèse; donc $P = 0$ et par suite $f x = \varphi x \cdot \frac{Q}{N}$, d'où l'on voit que $f x$ sera égal à zéro en même tems que φx q. e. d.

Cela donne

$$7. \theta^n x_1 = x_1,$$

où l'on peut supposer que n ait la plus petite valeur qui existe, en sorte que toutes les quantités

$$8. x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \dots \theta^{n-1} x_1$$

soient différentes entre-elles.

L'équation (7.) donnera

$$\theta^k \theta^n x_1 = \theta^k x_1, \text{ c'est-à-dire: } \theta^{n+k} x_1 = \theta^k x_1.$$

Cette formule fait voir qu'à partir du terme $\theta^{n-1} x_1$, les termes de la suite (8.) se reproduiront dans le même ordre. Les n quantités (8.) seront donc les seules de la série (5.) différentes entre-elles.

Cela posé, si $\mu > n$, soit x_2 une autre racine de l'équation proposée, qui n'est pas contenue dans la suite (8.), il suit du théorème I., que toutes les quantités

$$9. x_2, \theta x_2, \theta^2 x_2, \dots \theta^{n-1} x_2, \dots$$

seront également des racines de l'équation proposée. Or je dis que cette suite ne contiendra que n quantités différentes entre-elles et des quantités (8.). En effet, ayant $\theta^n x_1 - x_1 = 0$, on aura en vertu du théorème I.: $\theta^n x_2 = x_2$ et par suite:

$$\theta^{n+k} x_2 = \theta^k x_2.$$

Donc les seules quantités de la série (9.) qui pourront être différentes entre-elles, seront les n premières

$$10. x_2, \theta x_2, \theta^2 x_2, \dots \theta^{n-1} x_2.$$

Or celles-ci seront nécessairement différentes entre-elles et des quantités (8.). En effet, si l'on avait

$$\theta^m x_2 = \theta^\nu x_2,$$

où m et ν sont moindre que n , il en résulteroit $\theta^m x_1 = \theta^\nu x_1$, ce qui est impossible, car toutes les quantités (8.) sont différentes entre-elles. Si au contraire on avoit:

$$\theta^m x_2 = \theta^\nu x_1,$$

il en résulteroit

$$\theta^{n-m} \theta^\nu x_1 = \theta^{n-m} \theta^m x_2 = \theta^{n-m+m} x_2 = \theta^n x_2 = x_2,$$

donc

$$x_2 = \theta^{n-m+\nu} x_1,$$

c'est-à-dire la racine x_2 seroit contenue dans la série (8.), ce qui est contre l'hypothèse.

Le nombre des racines contenues dans (8.) et (10.) est $2n$, donc μ sera ou égal à $2n$, ou plus grand que ce nombre.

Soit dans le dernier cas x_3 une racine différente des racines (8.) et (10.), on aura une nouvelle série de racines

$$x_3, \theta x_3, \theta^2 x_3, \dots \theta^{n-1} x_3, \dots$$

et on démontrera précisément de la même manière, que les n premières de ces racines sont différentes entre-elles et des racines (8.) et (10.).

En continuant le procédé jusqu'à ce que toutes les racines de l'équation $\Phi x = 0$ soient épuisées, on verra que les μ racines de cette équation seront divisées en plusieurs groupes, composés de n termes; donc μ sera divisible par n , et en nommant m le nombre des groupes, on aura :

$$11. \mu = m.n.$$

Les racines elles mêmes seront :

$$12. \begin{cases} x_1, & \theta x_1, & \theta^2 x_1, & \dots & \theta^{n-1} x_1, \\ x_2, & \theta x_2, & \theta^2 x_2, & \dots & \theta^{n-1} x_2, \\ x_3, & \theta x_3, & \theta^2 x_3, & \dots & \theta^{n-1} x_3, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m, & \theta x_m, & \theta^2 x_m, & \dots & \theta^{n-1} x_m. \end{cases}$$

Si $m = 1$, on aura $n = \mu$, et les μ racines de l'équation $\Phi x = 0$ seront exprimées par

$$13. x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \dots \theta^{n-1} x_1.$$

Dans ce cas, comme on verra dans la suite, l'équation $\Phi x = 0$ est résoluble algébriquement. Mais la même chose n'aura pas toujours lieu lorsque m est plus grand que l'unité. On pourra seulement réduire la résolution de l'équation $\Phi x = 0$ à celle d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré, dont les coefficients dépendent d'une équation du $m^{\text{ième}}$ degré; c'est ce que nous allons démontrer dans le paragraphe suivant.

§. 2.

Considérons un quelconque des groupes (12.), p. ex. le premier, et faisons

$$14. \begin{cases} (x - x_1)(x - \theta x_1)(x - \theta^2 x_1) \dots (x - \theta^{n-1} x_1) \\ = x^n + A'_1 x^{n-1} + A''_1 x^{n-2} \dots + A_1^{(n-1)} x + A_1^{(n)} = 0, \end{cases}$$

les racines de cette équation seront

$$x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \dots \theta^{n-1} x_1,$$

et les coefficients $A'_1, A''_1, \dots A_1^{(n)}$ seront des fonctions rationnelles et

symétriques de ces quantités. Nous verrons qu'on peut faire dépendre le développement de ces coefficients de la résolution d'une seule équation du degré m .

Pour le montrer, considérons en général une fonction quelconque rationnelle et symétrique de $x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \dots, \theta^{n-1} x_1$, et soit

$$15. \quad y_1 = f(x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \dots, \theta^{n-1} x_1)$$

cette fonction.

En mettant au lieu de x_1 successivement x_2, x_3, \dots, x_m , la fonction y_1 prendra différentes valeurs, que nous désignerons par $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$. Cela posé, si l'on forme une équation du degré m :

$$16. \quad y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \dots + p_{m-1} y + p_m = 0,$$

dont les racines sont $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$, je dis que les coefficients de cette équation pourront être exprimés rationnellement par les quantités connues, qu'on suppose données par l'équation proposée.

Les quantités $\theta x_1, \theta^2 x_1, \dots, \theta^{n-1} x_1$ étant des fonctions rationnelles de x_1 , la fonction y_1 le sera également. Soit

$$17. \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = F x_1, \\ \text{nous aurons aussi} \\ y_2 = F x_2; \quad y_3 = F x_3; \quad \dots \quad y_m = F x_m. \end{array} \right.$$

Mettant dans (15.) successivement $\theta x_1, \theta^2 x_1, \theta^3 x_1, \dots, \theta^{n-1} x_1$ au lieu de x_1 , et remarquant que $\theta^n x_1 = x_1$; $\theta^{n+1} x_1 = \theta x_1$; $\theta^{n+2} x_1 = \theta^2 x_1$, etc. il est clair que la fonction y_1 ne changera pas de valeur; on aura donc

$$y_1 = F x_1 = F(\theta x_1) = F(\theta^2 x_1) = \dots = F(\theta^{n-1} x_1)$$

et également

$$y_2 = F x_2 = F(\theta x_2) = F(\theta^2 x_2) = \dots = F(\theta^{n-1} x_2),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_m = F x_m = F(\theta x_m) = F(\theta^2 x_m) = \dots = F(\theta^{n-1} x_m).$$

Elevant chaque membre de ces équations à la $y^{\text{ième}}$ puissance, on en tire:

$$y_1^y = \frac{1}{n} \cdot \{(F x_1)^y + (F \theta x_1)^y + \dots + (F \theta^{n-1} x_1)^y\},$$

$$y_2^y = \frac{1}{n} \cdot \{(F x_2)^y + (F \theta x_2)^y + \dots + (F \theta^{n-1} x_2)^y\},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_m^y = \frac{1}{n} \cdot \{(F x_m)^y + (F \theta x_m)^y + \dots + (F \theta^{n-1} x_m)^y\}.$$

En ajoutant ces dernières équations on aura la valeur de

$$y_1^y + y_2^y + y_3^y + \dots + y_m^y$$

exprimée en fonction rationnelle et symétrique de toutes les racines de l'équation $\varphi x = 0$, savoir:

$$19. y_1^\nu + y_2^\nu + y_3^\nu + \dots + y_m^\nu = \frac{1}{n} \Sigma (F x)^\nu.$$

Le second membre de cette équation peut être exprimé rationnellement par les coefficients de φx et θx , c'est-à-dire par des quantités connues. Donc, en faisant

$$20. r_\nu = y_1^\nu + y_2^\nu + y_3^\nu + \dots + y_m^\nu,$$

on aura la valeur de r_ν , pour une valeur quelconque entière de ν . Or connoissant r_1, r_2, \dots, r_m , on en pourra tirer rationnellement la valeur de toute fonction symétrique des quantités y_1, y_2, \dots, y_m . On pourra donc trouver de cette manière tous les coefficients de l'équation (16.) et par conséquent déterminer toute fonction rationnelle et symétrique de $x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \dots, \theta^{n-1} x_1$ à l'aide d'une équation du $m^{\text{ième}}$ degré. Donc on aura de cette manière les coefficients de l'équation (14.), dont la résolution donnera ensuite la valeur de x_1 etc.

On voit par là qu'on peut ramener la résolution de l'équation $\varphi x = 0$, qui est du degré $\mu = m.n$, à celle d'un certain nombre d'équations du degré m et n . Il suffit même, comme nous allons voir, de résoudre une seule équation du degré m et m équations du degré n .

Soit ψx_1 un quelconque des coefficients $A'_1, A''_1, \dots, A_1^{(n)}$ et faisons

$$21. t_\nu = y_1^\nu \cdot \psi x_1 + y_2^\nu \cdot \psi x_2 + y_3^\nu \cdot \psi x_3 + \dots + y_m^\nu \cdot \psi x_m.$$

Puisque $y_i^\nu \cdot \psi x_i$ est une fonction symétrique des quantités $x_1, \theta x_1, \dots, \theta^{n-1} x_1$, on aura, en remarquant que $\theta^n x_1 = x_1$; $\theta^{n+1} x_1 = \theta x_1$ etc.

$$y_1^\nu \psi x_1 = (F x_1)^\nu \cdot \psi x = (F \theta x_1)^\nu \cdot \psi \theta x_1 = \dots (F \theta^{n-1} x_1)^\nu \cdot \psi \theta^{n-1} x_1,$$

donc:

$$y_1^\nu \psi x_1 = \frac{1}{n} \cdot \{(F x_1)^\nu \cdot \psi x_1 + (F \theta x_1)^\nu \cdot \psi \theta x_1 + \dots (F \theta^{n-1} x_1)^\nu \cdot \psi \theta^{n-1} x_1\}.$$

On trouvera de semblables expressions pour $y_2^\nu \cdot \psi x_2, y_3^\nu \cdot \psi x_3, \dots, y_m^\nu \cdot \psi x_m$, en mettant x_2, x_3, \dots, x_m à la place de x_1 . En substituant ces valeurs, on voit que t_ν deviendra une fonction rationnelle et symétrique de toutes les racines de l'équation $\varphi x = 0$. En effet on aura

$$22. t_\nu = \frac{1}{n} \Sigma (F x)^\nu \cdot \psi x.$$

Donc on peut exprimer t_ν rationnellement par des quantités connues.

Cela posé, en faisant $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots, m-1$, la formule (21.) donnera:

$$\begin{aligned} \psi x_1 + \psi x_2 + \dots + \psi x_m &= t_0, \\ y_1 \psi x_1 + y_2 \psi x_2 + \dots + y_m \psi x_m &= t_1, \\ y_1^2 \psi x_1 + y_2^2 \psi x_2 + \dots + y_m^2 \psi x_m &= t_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_1^{m-1} \psi x_1 + y_2^{m-1} \psi x_2 + \dots + y_m^{m-1} \psi x_m &= t_{m-1}. \end{aligned}$$

On tirera aisément de ces équations, linéaires par rapport à $\psi x_1, \psi x_2, \dots, \psi x_m$, les valeurs de ces quantités en fonctions rationnelles de $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$.

En effet, en faisant

23. $(y - y_2)(y - y_3) \dots (y - y_m)$
 $= y^{m-1} + R_{m-2}y^{m-2} + R_{m-3}y^{m-3} + \dots + R_1y + R_0,$

on aura

24. $\psi x_1 = \frac{t_0 R_0 + t_1 R_1 + t_2 R_2 + \dots + t_{m-2} R_{m-2} + t_{m-1}}{R_0 + R_1 y_1 + R_2 y_1^2 + \dots + R_{m-2} y_1^{m-2} + y_1^{m-1}}.$

Les quantités R_0, R_1, \dots, R_{m-2} sont des fonctions rationnelles de $y_2, y_3, y_4, \dots, y_m$, mais on peut les exprimer par y_1 seul. En effet, en multipliant (23.) par $y - y_1$, on aura:

$$\begin{aligned} (y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_m) &= y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \dots + p_{m-1} y + p_m \\ &= y^m + (R_{m-2} - y_1) y^{m-1} + (R_{m-3} - y_1 R_{m-2}) y^{m-2} + \dots \end{aligned}$$

d'où l'on tirera, en comparant les puissances égales de y :

25. $\begin{cases} R_{m-2} = y_1 + p_1, \\ R_{m-3} = y_1 R_{m-2} + p_2 = y_1^2 + p_1 y_1 + p_2, \\ R_{m-4} = y_1 R_{m-3} + p_3 = y_1^3 + p_1 y_1^2 + p_2 y_1 + p_3, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ R_0 = y_1^{m-1} + p_1 y_1^{m-2} + p_2 y_1^{m-3} + \dots + p_{m-1}. \end{cases}$

En substituant ces valeurs, l'expression de ψx_1 deviendra une fonction rationnelle de y_1 et de quantités connues, et on voit qu'il est toujours possible de trouver ψx_1 de cette sorte, sous condition que le dénominateur

$$R_0 + R_1 y_1 + R_2 y_1^2 + \dots + R_{m-2} y_1^{m-2} + y_1^{m-1}$$

ne soit pas zéro. Or on peut donner à la fonction y_1 une infinité de formes qui rendront impossible cette équation, p. ex. en faisant

26. $y_1 = (\alpha - x_1)(\alpha - \theta x_1)(\alpha - \theta^2 x_1) \dots (\alpha - \theta^{n-1} x_1),$

où α est indéterminé, le dénominateur dont il s'agit ne peut pas s'évanouir. En effet ce dénominateur étant la même chose que

$$(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \dots (y_1 - y_m),$$

on auroit

$$y_1 = y_k,$$

s'il étoit nul, c'est-à-dire

$$(\alpha - x_1)(\alpha - \theta x_1) \dots (\alpha - \theta^{n-1} x_1) = (\alpha - x_k)(\alpha - \theta x_k) \dots (\alpha - \theta^{n-1} x_k),$$

ce qui est impossible, car toutes les racines $x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \dots, \theta^{n-1} x_1$ sont différentes de celles-ci: $x_k, \theta x_k, \theta^2 x_k, \dots, \theta^{n-1} x_k$.

Les coefficients $A'_1, A''_1, \dots, A^{(n)}_1$ peuvent donc s'exprimer rationnellement par une même fonction y_1 , dont l'expression dépend d'une équation du degré m .

Les racines de l'équation (14.) sont

$$x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \dots, \theta^{n-1} x_1.$$

En remplaçant dans les coefficients A'_1, A''_1 etc. y_1 par y_2, y_3, \dots, y_m , on obtiendra $m-1$ autres équations, dont les racines seront respectivement:

$$x_2, \theta x_2, \dots, \theta^{n-1} x_2,$$

$$x_3, \theta x_3, \dots, \theta^{n-1} x_3,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_m, \theta x_m, \dots, \theta^{n-1} x_m.$$

Théorème II. L'équation proposée $\varphi x = 0$ peut donc être décomposée en un nombre de m d'équations du degré n ; donc les coefficients sont respectivement des fonctions rationnelles d'une même racine d'une seule équation du degré m .

Cette dernière équation n'est pas généralement résoluble algébriquement quand elle passe le quatrième degré, mais l'équation (14.) et les autres semblables le sont toujours en supposant connus les coefficients A'_1, A''_1 etc., comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

§. 3.

Dans le paragraphe précédent nous avons considéré le cas où m est plus grand que l'unité. Maintenant nous allons nous occuper du cas où $m = 1$.

Dans ce cas on aura $\mu = n$, et les racines de l'équation $\varphi x = 0$ seront

$$27. x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \dots, \theta^{n-1} x_1;$$

or je dis que toute équation dont les racines peuvent être exprimées de cette sorte est résoluble algébriquement.

Soit α une racine quelconque de l'équation $\alpha^\mu - 1 = 0$, et faisons

$$28. \quad \psi x = (x + \alpha \theta x + \alpha^2 \theta^2 x + \alpha^3 \theta^3 x + \dots + \alpha^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x)^\mu,$$

ψx sera une fonction rationnelle de x . Or cette fonction peut s'exprimer rationnellement par les coefficients de Φx et θx .

En mettant $\theta^m x$ au lieu de x , on aura

$$\psi \theta^m x =$$

$$(\theta^m x + \alpha \theta^{m+1} x + \alpha^2 \theta^{m+2} x + \dots + \alpha^{\mu-m} \theta^m x + \alpha^{\mu-m+1} \theta^{m+1} x + \dots + \alpha^{\mu-1} \theta^{m+\mu-1} x)^\mu;$$

maintenant on a

$$\theta^\mu x = x, \quad \theta^{\mu+1} x = \theta x, \quad \dots \quad \theta^{\mu+n-1} x = \theta^{n-1} x,$$

donc :

$$\psi \theta^m x =$$

$$(\alpha^{\mu-m+1} x + \alpha^{\mu-m+1} \theta x + \dots + \alpha^{\mu-1} \theta^{m-1} x + \theta^m x + \alpha \theta^{m+1} x + \dots + \alpha^{\mu-m-1} \theta^{m-1} x)^\mu.$$

Or $\alpha^\mu = 1$, donc :

$$\begin{aligned} \psi \theta^m x &= [\alpha^{\mu-m+1} (x + \alpha \theta x + \alpha^2 \theta^2 x + \dots + \alpha^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x)]^\mu \\ &= \alpha^{\mu(\mu-m+1)} (x + \alpha \theta x + \dots + \alpha^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x)^\mu, \end{aligned}$$

donc,

$$\alpha^{\mu(\mu-m+1)} \text{ étant } = 1,$$

on voit que

$$\psi \theta^m x = \psi x.$$

En faisant $m = 1, 2, 3, \dots, \mu - 1$, et ajoutant ensuite, on trouvera :

$$29. \quad \psi x = \frac{1}{n} \{ \psi x + \psi \theta x + \psi \theta^2 x + \dots + \psi \theta^{\mu-1} x \}.$$

ψx sera donc une fonction rationnelle et symétrique de toutes les racines de l'équation $\Phi x = 0$, et par conséquent on pourra l'exprimer rationnellement en quantités connues.

Soit $\psi x = v$, on tire de l'équation (28.) :

$$30. \quad \sqrt[\mu]{v} = x + \alpha \theta x + \alpha^2 \theta^2 x + \dots + \alpha^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x.$$

Cela posé, désignons les μ racines de l'équation

$$\alpha^\mu - 1 = 0$$

par

$$31. \quad 1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{\mu-1}$$

et les valeurs correspondantes de v par

$$32. \quad v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{\mu-1},$$

l'équation (30.) donnera, en mettant à la place de α successivement 1,

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mu-1}$:

$$33. \begin{cases} \sqrt[\mu]{v_0} = x + \theta x + \theta^2 x + \dots + \theta^{\mu-1} x, \\ \sqrt[\mu]{v_1} = x + \alpha_1 \theta x + \alpha_1^2 \theta^2 x + \dots + \alpha_1^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x, \\ \sqrt[\mu]{v_2} = x + \alpha_2 \theta x + \alpha_2^2 \theta^2 x + \dots + \alpha_2^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x, \\ \dots \\ \sqrt[\mu]{v_{\mu-1}} = x + \alpha_{\mu-1} \theta x + \alpha_{\mu-1}^2 \theta^2 x + \dots + \alpha_{\mu-1}^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x. \end{cases}$$

En ajoutant ces équations on aura :

$$34. x = \frac{1}{\mu} \{-A + \sqrt[\mu]{v_1} + \sqrt[\mu]{v_2} + \sqrt[\mu]{v_3} + \dots + \sqrt[\mu]{v_{\mu-1}}\},$$

où A exprime la quantité rationnelle $\sqrt[\mu]{v_0}$.

On connoit par là la racine x . Généralement on trouve la racine $\theta^m x$ en multipliant la première des équations (33.) par 1, la seconde par α_1^{-m} , la troisième par α_2^{-m} etc., et ajoutant; il viendra alors :

$$35. \theta^m x = \frac{1}{\mu} \{-A + \alpha_1^{-m} \cdot \sqrt[\mu]{v_1} + \alpha_2^{-m} \cdot \sqrt[\mu]{v_2} + \dots + \alpha_{\mu-1}^{-m} \cdot \sqrt[\mu]{v_{\mu-1}}\}.$$

En donnant à m les valeurs 0, 1, 2, . . . $\mu - 1$, on aura la valeur de toutes les racines de l'équation.

L'expression précédente des racines contient généralement un nombre $\mu - 1$ de radicaux différens, de la forme $\sqrt[\mu]{v}$. Elle aura donc un nombre $\mu^{\mu-1}$ de valeurs, tandis que l'équation $\varphi x = 0$ n'en a que μ . Mais on peut donner à l'expression des racines une autre forme, qui n'est pas exposée à cette difficulté. En effet, lorsque la valeur de $\sqrt[\mu]{v_1}$ est fixée, celle des autres radicaux le sera également, comme nous allons le voir.

Quel que soit le nombre μ , premier ou non, on peut toujours trouver une racine α de l'équation $\alpha^\mu - 1 = 0$, telle que les racines

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{\mu-1}$$

puissent être représentées par

$$36. \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^\mu.$$

Cela posé on aura

$$37. \begin{cases} \sqrt[\mu]{v_k} = x + \alpha^k \theta x + \alpha^{2k} \theta^2 x + \dots + \alpha^{(\mu-1)k} \theta^{\mu-1} x, \\ \sqrt[\mu]{v_1} = x + \alpha \theta x + \alpha^2 \theta^2 x + \dots + \alpha^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x, \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$38. \begin{cases} \sqrt[\mu]{v_k} \cdot (\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = (x + \alpha^k \theta x + \alpha^{2k} \theta^2 x + \dots + \alpha^{(\mu-1)k} \theta^{\mu-1} x) \\ \quad \times (x + \alpha \theta x + \alpha^2 \theta^2 x + \dots + \alpha^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x)^{\mu-k}. \end{cases}$$

Le second membre de cette équation est une fonction rationnelle de x , qui ne changera pas de valeur en mettant au lieu de x une autre racine quelconque $\theta^m x$, comme on le verra aisément, en faisant cette substitution et ayant égard à l'équation $\theta^{\mu-1} x = \theta^r x$. En désignant donc la fonction dont-il s'agit par ψx , on aura :

$$\sqrt[\mu]{v_k} \cdot (\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = \psi x = \psi \theta x = \psi \theta^2 x = \dots = \psi \theta^{\mu-1} x,$$

et de là :

$$39. \sqrt[\mu]{v_k} \cdot (\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = \frac{1}{\mu} \{ \psi x + \psi \theta x + \psi \theta^2 x + \dots + \psi \theta^{\mu-1} x \}.$$

Le second membre de cette équation est une fonction rationnelle et symétrique des racines, donc on peut l'exprimer en quantités connues. En la désignant par a_k , on aura :

$$40. \sqrt[\mu]{v_k} (\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = a_k$$

et de là :

$$41. \sqrt[\mu]{v_k} = \frac{a_k}{v_1} (\sqrt[\mu]{v_1})^k.$$

A l'aide de cette formule l'expression de la racine x deviendra :

$$42. x = \frac{1}{\mu} \left\{ -A + \sqrt[\mu]{v_1} + \frac{a_2}{v_1} (\sqrt[\mu]{v_1})^2 + \frac{a_3}{v_1} (\sqrt[\mu]{v_1})^3 + \dots + \frac{a_{\mu-1}}{v_1} (\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-1} \right\}.$$

Cette expression de x n'a que μ valeurs différentes, qu'on obtiendra en mettant au lieu de $\sqrt{v_1}$ les μ valeurs :

$$\sqrt[\mu]{v_1}, \alpha \sqrt[\mu]{v_1}, \alpha^2 \sqrt[\mu]{v_1}, \dots, \alpha^{\mu-1} \sqrt[\mu]{v_1}.$$

La méthode que nous avons suivie précédemment pour la résolution de l'équation $\Phi x = 0$ s'accorde au fond avec celle dont Mr. Gauss a fait usage dans ses „*Disquisitiones arithmeticae pag. 645. et seq.*” pour résoudre une certaine classe d'équations, auxquelles il étoit parvenu dans ses recherches sur l'équation $x^n - 1 = 0$. Ces équations ont la même propriété que notre équation $\Phi x = 0$; savoir que toutes ses racines peuvent être représentées sous la forme :

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^{\mu-1} x,$$

θx étant une fonction rationnelle.

En vertu de ce qui précède nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Théorème III. Si les racines d'une équation algébrique peuvent être représentées par :

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^{\mu-1} x,$$

où $\theta^\mu x = x$ et θx désigne une fonction rationnelle de x et de quantités connues, cette équation sera toujours résoluble algébriquement.

On en tire le suivant, comme corollaire:

Théorème IV. Si deux racines d'une équation irréductible, dont le degré est un nombre premier, sont dans un tel rapport, qu'on puisse exprimer l'une rationnellement par l'autre, cette équation sera résoluble algébriquement.

En effet cela suit immédiatement de l'équation (11.)

$$\mu = m.n,$$

où l'on doit avoir $m = 1$, si μ est un nombre premier, et par conséquent les racines s'expriment par $x, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^{\mu-1} x$.

Dans le cas, où toutes les quantités connues de Φx et θx sont réelles, les racines de l'équation Φx jouiront d'une propriété remarquable, que nous allons démontrer.

Par ce qui précède on voit que $a_{\mu-1}$ peut être exprimée rationnellement par les coefficients de Φx et θx , et par α . Si donc ces coefficients sont réels, $a_{\mu-1}$ doit avoir la forme

$$a_{\mu-1} = a + b\sqrt{-1},$$

où $\sqrt{-1}$ n'entre qu'à cause de la quantité α , qui en général est imaginaire, et qui généralement peut avoir la valeur

$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{\mu} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{2\pi}{\mu}.$$

En changeant donc dans α le signe de $\sqrt{-1}$ et désignant par $a'_{\mu-1}$ la valeur correspondente de $a_{\mu-1}$, on aura

$$a'_{\mu-1} = a - b\sqrt{-1}.$$

Or suivant (40.) il est évident, que $a'_{\mu-1} = a_{\mu-1}$, donc $b = 0$ et

$$43. \quad a_{\mu-1} = a.$$

Donc $a_{\mu-1}$ a toujours une valeur réelle. On démontrera de la même manière que

$$v_1 = c + d\sqrt{-1} \text{ et } v_{\mu-1} = c - d\sqrt{-1},$$

où c et d sont réels.

Donc:

$$v_1 + v_{\mu-1} = 2c,$$

$$v_1 v_{\mu-1} = a^\mu.$$

De là on tire

$$44. \quad v_1 = c + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{(a^\mu - c^2)},$$

et par suite $\sqrt{\mu}{(a^\mu - c^2)} = d$; d'où l'on voit que $\sqrt{\mu}{(a^\mu - c^2)}$ a toujours une valeur réelle.

Cela posé, on peut faire

$$45. \quad c = (\sqrt{\rho})^\mu \cos \delta, \quad \sqrt{\mu}{(a^\mu - c^2)} = (\sqrt{\rho})^\mu \sin \delta,$$

où ρ est une quantité positive.

On en tire

$$c^2 + [\sqrt{\mu}{(a^\mu - c^2)}]^2 = (\sqrt{\rho})^{2\mu},$$

c'est-à-dire

$$46. \quad a^\mu = \rho^\mu;$$

par conséquent ρ sera égal à la valeur numérique de a . D'ailleurs on voit que a est toujours positif, si μ est un nombre impair.

Connoissant ρ et δ , on aura

$$v_1 = (\sqrt{\rho})^\mu \cdot (\cos \delta + \sqrt{-1} \cdot \sin \delta)$$

et par suite

$$\sqrt{\mu}{v_i} = \sqrt{\rho} \cdot \left\{ \cos \left(\frac{\delta + 2m\pi}{\mu} \right) + \sqrt{-1} \cdot \sin \left(\frac{\delta + 2m\pi}{\mu} \right) \right\}.$$

En substituant cette valeur de $\sqrt{\mu}{v_i}$ dans l'expression de x (42.), elle prendra la forme:

$$47. \quad x = \frac{1}{\mu} \left\{ -A + \sqrt{\rho} \cdot \left(\cos \frac{\delta + 2m\pi}{\mu} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{\delta + 2m\pi}{\mu} \right) \right. \\ \left. + (f + g\sqrt{-1}) \left(\cos \frac{2(\delta + 2m\pi)}{\mu} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{2(\delta + 2m\pi)}{\mu} \right) \right\} \\ + (F + G\sqrt{-1}) \sqrt{\rho} \cdot \left(\cos \frac{3(\delta + 2m\pi)}{\mu} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{3(\delta + 2m\pi)}{\mu} \right) \\ + (f_1 + g_1\sqrt{-1}) \left(\cos \frac{4(\delta + 2m\pi)}{\mu} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{4(\delta + 2m\pi)}{\mu} \right) \\ + \text{etc.}$$

où ρ , A , f , g , F , G etc., sont des fonctions rationnelles de $\cos \frac{2\pi}{\mu}$, $\sin \frac{2\pi}{\mu}$ et des coefficients de φx et θx . On trouvera toutes les racines, en donnant à m les valeurs 0, 1, 2, 3, $\mu - 1$.

L'expression précédente de x fait voir:

Théorème V. que pour résoudre l'équation $\varphi x = 0$, il suffit:

- 1) de diviser la circonférence entière du cercle en μ parties égales,
- 2) de diviser un angle δ , qu'on peut construire ensuite, en μ parties égales,
- 3) d'extraire la racine carrée d'une seule quantité ρ .

Ce théorème n'est que l'extension d'un théorème semblable, que Mr. Gauss donne sans démonstration dans l'ouvrage cité plus haut, pag. 651.

Il y a encore à remarquer que les racines de l'équation $\Phi x = 0$ sont ou toutes réelles ou toutes imaginaires. En effet si une racine x est réelle, les autres le sont également, comme les expressions

$$\theta x, \theta^2 x, \dots \theta^{\mu-1} x,$$

qui ne contiennent que des quantités réelles, le font voir. Si au contraire x est imaginaire, les autres racines le sont aussi, car si par ex. $\theta^m x$ étoit réelle, $\theta^{\mu-m}(\theta^m x) = \theta^\mu x = x$, le seroit également, contre l'hypothèse. Dans le premier cas a sera positif et dans le second négatif.

Si μ est un nombre impair, toutes les racines seront réelles.

La méthode que nous avons donné dans ce paragraphe, pour résoudre l'équation $\Phi x = 0$, est applicable dans tous les cas, le nombre μ étant premier ou non; mais si μ est un nombre composé, il existe encore une autre méthode qui offre quelques simplifications et que nous allons exposer en peu de mots.

Soit $\mu = m.n$, les racines

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots \theta^{\mu-1} x$$

pourront être groupées de la manière suivante:

$$\begin{array}{ccccccc} x, & \theta^m x, & \theta^{2m} x, & \dots & \theta^{(n-1)m} x, \\ \theta x, & \theta^{m+1} x, & \theta^{2m+1} x, & \dots & \theta^{(n-1)m+1} x, \\ \theta^2 x, & \theta^{m+2} x, & \theta^{2m+2} x, & \dots & \theta^{(n-1)m+2} x, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^{m-1} x, & \theta^{2m-1} x, & \theta^{3m-1} x, & \dots & \theta^{nm-1} x. \end{array}$$

En faisant pour abrégér:

48. $\theta^m x = \theta_1 x,$

49. $x = x_1, \theta x = x_2, \theta^2 x = x_3, \dots \theta^{m-1} x = x_m,$

on peut écrire les racines comme il suit:

50.
$$\left\{ \begin{array}{l} 1') \ x_1, \ \theta_1 x_1, \ \theta_1^2 x_1, \ \dots \ \theta_1^{n-1} x_1, \\ 2') \ x_2, \ \theta_1 x_2, \ \theta_1^2 x_2, \ \dots \ \theta_1^{n-1} x_2, \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ m') \ x_m, \ \theta_1 x_m, \ \theta_1^2 x_m, \ \dots \ \theta_1^{n-1} x_m. \end{array} \right.$$

Donc en vertu de ce qu'on a vu dans le §. 2. on peut décomposer l'équation $\Phi x = 0$, qui est du degré $m.n$, en m équations du degré n , dont les coefficients dépendront d'une équation du degré m . Les racines de ces m équations seront respectivement les racines $1', 2', \dots m'$.

Si n est un autre nombre composé $m_1.n_1$, on peut décomposer de la même manière chacune des équations du degré n , en m_1 équations

du degré n_1 , dont les coefficients dépendront d'une équation du degré m_1 . Si n_1 est encore un nombre composé, on peut continuer la décomposition de la même manière.

Théorème VI. En général, si l'on suppose

$$51. \mu = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \dots m_n,$$

la résolution de l'équation proposée $\Phi x = 0$ sera ramenée à celle de n équations des degrés:

$$m_1, m_2, m_3, \dots m_n.$$

Il suffit même de connaître une seule racine de ces équations, car si on connaît une racine de l'équation proposée, on aura toutes les autres racines, exprimées en fonctions rationnelles de celle-ci.

La méthode précédente est au fond la même que celle, que Mr. Gauss donne pour la réduction de l'équation à deux termes $x^\mu - 1 = 0$.

Pour faire voir plus clairement la décomposition précédente de l'équation $\Phi x = 0$ en d'autres de degrés moins élevés, supposons par ex. $\mu = 30 = 5 \cdot 3 \cdot 2$.

Dans ce cas les racines seront:

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots \theta^{29} x.$$

D'abord nous formerons une équation du 6^{ième} degré, dont les racines seront:

$$x, \theta^5 x, \theta^{10} x, \theta^{15} x, \theta^{20} x, \theta^{25} x.$$

Soit $R = 0$ cette équation, on peut déterminer ses coefficients, rationnellement, par une même quantité y , qui sera la racine d'une équation du cinquième degré: $P = 0$.

Le degré de l'équation $R = 0$ étant lui même un nombre composé, nous formerons une équation du 3^{ième} degré: $R_1 = 0$, dont les racines seront:

$$x, \theta^{10} x, \theta^{20},$$

et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de y , et d'une même quantité z , qui est racine d'une équation du second degré $P_1 = 0$, dans laquelle les coefficients sont exprimés rationnellement par y .

Voici le tableau des opérations:

$$x^3 + f(y, z) \cdot x^2 + f_1(y, z) \cdot x + f_2(y, z) = 0,$$

$$z^2 + f y \cdot z + f_1 y = 0,$$

$$y^5 + A_1 \cdot y^4 + A_2 \cdot y^3 + A_3 \cdot y^2 + A_4 \cdot y + A_5 = 0.$$

On peut aussi commencer par une équation du 2^{ième} degré en x , ou bien par une équation du 5^{ième} degré.

Reprenons l'équation générale $\Phi x = 0$.

En supposons $\mu = m.n$, on peut faire

$$52. \quad x^{n_1} + f_1 y . x^{n_1-1} + f_2 y^2 . x^{n_1-2} + \dots = 0,$$

où y est déterminé par une équation du $m^{\text{ième}}$ degré:

$$53. \quad y^m + A . y^{m-1} + \dots = 0,$$

dont tous les coefficients sont exprimés rationnellement en quantités connues.

Cela posé, soient:

$$54. \quad \begin{cases} \mu = m_1 . m_2 . m_3 \dots m_\omega \text{ et } \mu = m_1 . n_1, \\ \mu = m_2 . n_2; \dots \dots \dots \mu = m_\omega . n_\omega, \end{cases}$$

plusieurs manières de décomposer le nombre μ en deux facteurs, on pourra décomposer l'équation proposée $\Phi x = 0$ en deux autres des ω manières suivantes:

$$(1.) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1(x_1, y_1) = 0, \text{ dont les racines seront } x, \theta^{n_1} x, \theta^{2m_1} x, \dots \theta^{(n_1-1)m_1} x \\ \text{et les coefficients des fonctions rationnelles d'une quantité } y_1, \text{ racine} \\ \text{d'une équation } f_1(y_1) = 0, \text{ du degré } m_1. \end{array} \right.$$

$$(2.) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_2(x_1, y_2) = 0, \text{ dont les racines seront } x, \theta^{n_2} x, \theta^{2m_2} x, \dots \theta^{(n_2-1)m_2} x \\ \text{et les coefficients: des fonctions rationnelles d'une même quantité } y_2, \\ \text{racine d'une équation } f_2 y_2 = 0, \text{ du degré } m_2. \end{array} \right.$$

.....

$$(\omega) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_\omega(x, y_\omega) = 0, \text{ dont les racines seront } x, \theta^{n_\omega} x, \theta^{2m_\omega} x, \dots \theta^{(n_\omega-1)m_\omega} x \\ \text{et les coefficients des fonctions rationnelles d'une même quantité } y_\omega, \\ \text{racine d'une équation } f_\omega y_\omega = 0, \text{ du degré } m_\omega. \end{array} \right.$$

Supposons maintenant que $m_1, m_2, \dots m_\omega$ pris deux à deux, soient premiers entre eux, je dis qu'on pourra exprimer la valeur de x rationnellement par les quantités $y_1, y_2, y_3, \dots y_n$. En effet, si $m_1, m_2, \dots m_\omega$ sont premiers entre eux, il est clair qu'il n'y a qu'une seule racine, qui satisfera à la fois à toutes les équations

$$55. \quad F_1(x, y_1) = 0, F_2(x, y_2) = 0, \dots F(x, y_\omega) = 0;$$

savoir la racine x . Donc, suivant un théorème connu, on peut exprimer x rationnellement par les coefficients de ces équations et conséquemment par les quantités $y_1, y_2, \dots y_\omega$.

Voilà donc ramenée la résolution de l'équation proposée à celle de ω équations: $f_1 y_1 = 0; f_2 y_2 = 0; \dots f_\omega y_\omega = 0$, qui sont respectivement des degrés: $m_1, m_2, \dots m_\omega$, et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des coefficients de Φx et θx .

Si l'on veut que les équations

$$56. f_1 y_1 = 0; f_2 y_2 = 0; \dots f_\omega y_\omega$$

soient les moins élevées possibles, il faut choisir $m_1, m_2, \dots, m_\omega$ tels, que ces nombres soient des puissances de nombres premiers. P. ex. si l'équation proposée $\Phi x = 0$ est du degré:

$$57. \mu = \varepsilon_1^{\nu_1} \cdot \varepsilon_2^{\nu_2} \cdot \dots \cdot \varepsilon_\omega^{\nu_\omega},$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\omega$ sont des nombres premiers différents, on aura

$$58. m_1 = \varepsilon_1^{\nu_1}; m_2 = \varepsilon_2^{\nu_2}; \dots m_\omega = \varepsilon_\omega^{\nu_\omega}.$$

L'équation proposée étant résoluble algébriquement, les équations (56.) le seront aussi; car les racines de ces équations sont des fonctions rationnelles de x . On peut aisément les résoudre de la manière suivante:

La quantité y est une fonction rationnelle et symétrique des racines de l'équation (53.), c'est-à-dire de:

$$59. x, \theta^m x, \theta^{2m} x, \dots \theta^{(n-1)m} x.$$

Soit

$$60. y = Fx = f(x, \theta^m x, \theta^{2m} x, \dots \theta^{(n-1)m} x),$$

les racines de l'équation (53.) seront

$$61. Fx; F(\theta x); F(\theta^2 x); \dots F(\theta^{m-1} x);$$

or je dis que l'on peut exprimer ces racines de la manière suivante:

$$62. y, \lambda y, \lambda^2 y, \dots \lambda^{m-1} y,$$

où λy est une fonction rationnelle de y et de quantités connues.

On aura

$$63. F(\theta x) = f\{\theta x, \theta(\theta^m x), \theta(\theta^{2m} x), \dots \theta(\theta^{(n-1)m} x)\},$$

donc $F(\theta x)$ sera, autant que Fx , une fonction rationnelle et symétrique des racines $x, \theta^m x, \dots \theta^{(n-1)m} x$, donc on peut, par le procédé, trouvé (24.), exprimer $\psi(\theta x)$ rationnellement par ψx . Soit donc

$$\psi \theta x = \lambda \psi x = \lambda y,$$

on aura, en remplaçant (en vertu du 1. théorème) x par $\theta x, \theta^2 x, \dots \theta^{m-1} x$:

$$\psi \theta^2 x = \lambda \psi \theta x = \lambda^2 y,$$

$$\psi \theta^3 x = \lambda \psi \theta^2 x = \lambda^3 y,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\psi \theta^{m-1} x = \lambda \psi \theta^{m-2} x = \lambda^{m-1} y,$$

c. q. f. d. .

Maintenant les racines de l'équation (53.) pouvant être représentées par:

$$y, \lambda y, \lambda^2 y, \dots \lambda^{m-1} y,$$

on peut résoudre algébriquement cette équation de la même manière que

l'équation $\Phi x = 0$. (Voyez le théorème III.).

Si m est une puissance d'un nombre premier $= e^r$, on peut encore déterminer y à l'aide de v équations du degré e . (Voyez le théorème VI.)

Si dans le théorème III., l'on suppose, que μ soit une puissance de 2, on aura, comme corollaire, le théorème suivant.

Théorème VII. Si les racines d'une équation du degré 2^ω peuvent être représentées par

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^{2^\omega - 1} x, \text{ où } \theta^{2^\omega} x = x,$$

cette équation pourra être résolue à l'aide de l'extraction de ω racines quarrées.

Ce théorème, appliqué à l'équation $\frac{x^{1+2^\omega} - 1}{x - 1} = 0$, où $1 + 2^\omega$ est un nombre premier, donne le théorème de Mr. Gauss pour le cercle.

§. 4.

Des équations dont toutes les racines peuvent être exprimées rationnellement par l'une d'entre elles.

Nous avons vu précédemment (théorème III.) qu'une équation de degré quelconque, dont les racines peuvent être exprimées par

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^{\mu-1} x$$

est toujours résoluble algébriquement.

Dans ce cas toutes les racines sont exprimées rationnellement par l'une d'entre elles; mais une équation, dont les racines ont cette propriété, n'est pas toujours résoluble algébriquement; néanmoins, hors le cas considéré précédemment, il y a encore un autre, dans lequel cela a lieu. On aura le théorème suivant;

Théorème VIII. Soit $\chi x = 0$ une équation algébrique quelconque, dont toutes les racines peuvent être exprimées rationnellement par l'une d'entre elles, que nous désignerons par x . Soient θx et $\theta_1 x$ deux autres racines quelconques, l'équation proposée sera résoluble algébriquement, si l'on a $\theta \theta_1 x = \theta_1 \theta x$.

La démonstration de ce théorème peut être réduite sur le champ à la théorie exposée §. 2., comme nous allons le voir.

Si l'on connoit la racine x , on en aura en même tems toutes les autres; il suffit donc de chercher la valeur de x .

Si l'équation

$$64. \chi x = 0$$

n'est pas irréductible, soit

$$65. \Phi x = 0$$

l'équation la moins élevée, à laquelle puisse satisfaire la racine x , les coefficients de cette équation ne contenant que des quantités connues. Dans ce cas les racines de l'équation $\Phi x = 0$ se trouveront parmi celles de l'équation $\chi x = 0$ (voyez le premier théorème), et par conséquent elles pourront s'exprimer rationnellement par l'une d'entre elles.

Cela posé soit θx une racine différente de x , en vertu de ce qu'on a vu dans le premier paragraphe, les racines de l'équation $\Phi x = 0$ pourront être exprimées comme il suit:

$$\begin{matrix} x, & \theta x, & \theta^2 x, & \dots & \theta^{n-1} x, \\ x_1, & \theta x_1, & \theta^2 x_1, & \dots & \theta^{n-1} x_1, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-1}, & \theta x_{m-1}, & \theta^2 x_{m-1}, & \dots & \theta^{n-1} x_{m-1}, \end{matrix}$$

et en formant l'équation

$$66. \quad x^n + A' x^{n-1} + A'' x^{n-2} + A''' x^{n-3} + \dots + A^{(n-1)} x + A^{(n)} = 0,$$

dont les racines sont $x, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^{n-1} x$, les coefficients $A', A'', \dots, A^{(n)}$ pourront être exprimés rationnellement par une même quantité y , qui sera racine d'une équation irréductible *):

$$67. \quad y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \dots + p_{m-1} y + p_m = 0,$$

dont les coefficients sont des quantités connues (voyez §. 2.).

La détermination de x peut s'effectuer à l'aide des deux équations (66.) et (67.). La première de ces équations est résoluble algébriquement, en supposant les coefficients connus, c'est-à-dire la quantité y (voyez le théorème III.). Quant à l'équation en y , nous allons démontrer que ses racines ont la même propriété que celles de l'équation proposée $\Phi x = 0$, savoir d'être exprimables rationnellement par l'une d'entre elles.

La quantité y est (voy. 15.) une certaine fonction rationnelle et symétrique des racines $x, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^{n-1} x$. En faisant:

$$68. \quad \begin{cases} y = f(x, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^{n-1} x), \\ \text{les autres racines de l'équation (67.) seront:} \\ y_1 = f(x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \dots, \theta^{n-1} x_1), \\ \dots \\ y_{m-1} = f(x_{m-1}, \theta x_{m-1}, \theta^2 x_{m-1}, \dots, \theta^{n-1} x_{m-1}). \end{cases}$$

*) On démontrera aisément, que cette équation ne pourra être reductible. Soit $R = 0$ l'équation irréductible en y , et ν son degré. En éliminant y , on aura une équation en x du degré $n\nu$; donc $n\nu \geq \mu$. Mais on a

$$\begin{matrix} \mu = n \cdot m, \\ \nu \geq m, \end{matrix}$$

donc ce qui est impossible, car ν est moindre que m . Donc etc.

Maintenant, dans le cas en question x_1, \dots, x_{m-1} seront des fonctions rationnelles de la racine x . Faisons en conséquence

$$x_1 = \theta_1 x, \quad x_2 = \theta_2 x, \quad \dots \quad x_{m-1} = \theta_{m-1} x,$$

les racines de l'équation (67.) auront la forme:

$$y_1 = f(\theta_1 x, \theta \theta_1 x, \theta^2 \theta_1 x, \dots, \theta^{n-1} \theta_1 x).$$

Suivant l'hypothèse les fonctions θ et θ_1 ont la propriété que:

$$\theta \theta_1 x = \theta_1 \theta x,$$

équation qui, en vertu du théorème I, aura lieu en substituant à la place de x une autre racine quelconque de l'équation $\Phi x = 0$. On en tire successivement

$$\theta^2 \theta_1 x = \theta \theta_1 \theta x = \theta_1 \theta^2 x,$$

$$\theta^3 \theta_1 x = \theta \theta_1 \theta^2 x = \theta_1 \theta^3 x,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\theta^{n-1} \theta_1 x = \theta \theta_1 \theta^{n-2} x = \theta_1 \theta^{n-1} x.$$

L'expression de y_1 deviendra par là:

$$y_1 = f(\theta_1 x, \theta_1 \theta x, \theta_1 \theta^2 x, \dots, \theta_1 \theta^{n-1} x),$$

et on voit que y_1 , comme y , est une fonction rationnelle et symétrique des racines

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^{n-1} x.$$

Donc en vertu du théorème II. on peut exprimer y_1 rationnellement par y et des quantités connues. Le même raisonnement s'appliquera à toute autre racine de l'équation (67.). Soient maintenant λy , $\lambda_1 y$ deux racines quelconques, je dis qu'on aura

$$\lambda \lambda_1 y = \lambda_1 \lambda y.$$

En effet ayant p. ex.

$$\lambda y = f(\theta_1 x, \theta \theta_1 x, \dots, \theta^{n-1} \theta_1 x),$$

si

$$y = f(x, \theta x, \dots, \theta^{n-1} x),$$

on aura, en mettant $\theta_2 x$ au lieu de x :

$$\lambda y_2 = f(\theta_1 \theta_2 x, \theta \theta_1 \theta_2 x, \dots, \theta^{n-1} \theta_1 \theta_2 x)$$

où

$$y_2 = f(\theta_2 x, \theta \theta_2 x, \dots, \theta^{n-1} \theta_2 x) = \lambda_1 y,$$

donc

$$\lambda \lambda_1 y = f(\theta_1 \theta_2 x, \theta \theta_1 \theta_2 x, \dots, \theta^{n-1} \theta_1 \theta_2 x)$$

et également

$$\lambda_1 \lambda y = f(\theta_2 \theta_1 x, \theta \theta_2 \theta_1 x, \dots, \theta^{n-1} \theta_2 \theta_1 x),$$

donc, puisque $\theta_1 \theta_2 x = \theta_2 \theta_1 x$,

$$\lambda \lambda_1 y = \lambda_1 \lambda y.$$

Les racines de l'équation (67.) auront donc précisément la même propriété que celles de l'équation $\Phi x = 0$.

Cela posé, on peut appliquer à l'équation (67.) le même procédé, qu'à l'équation $\Phi x = 0$; c'est-à-dire, la détermination de y peut s'effectuer à l'aide de deux équations, dont l'une sera résoluble algébriquement et l'autre aura la propriété de l'équation $\Phi x = 0$.

Donc le même procédé peut encore être appliqué à cette dernière équation. En continuant, il est clair que la détermination de x pourra s'effectuer à l'aide d'un certain nombre d'équations, qui seront toutes résolubles algébriquement. Donc enfin l'équation $\Phi x = 0$ sera résoluble à l'aide d'opérations algébriques, en supposant connues les quantités qui avec x composent les fonctions:

$$\Phi x, \theta x, \theta_1 x, \theta_2 x, \dots \theta_{m-1} x.$$

Il est clair que le degré de chacune des équations auxquelles se réduit la détermination de x , sera un facteur de μ qui marque le degré de l'équation $\Phi x = 0$; et:

Théorème IX. Si l'on désigne les degrés de ces équations respectivement par

$$n, n_1, n_2, \dots n_\omega,$$

on aura:

$$\mu = n \cdot n_1 \cdot n_2 \dots n_\omega.$$

En rapprochant ce qui précède à ce qui a été exposé dans le §. 3., on aura le théorème suivant:

Théorème X. Supposant le degré μ de l'équation $\Phi x = 0$ décomposé comme il suit:

$$69. \mu = \varepsilon_1^{\nu_1} \cdot \varepsilon_2^{\nu_2} \cdot \varepsilon_3^{\nu_3} \dots \varepsilon_\alpha^{\nu_\alpha},$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots \varepsilon_\alpha$ sont des nombres premiers, la détermination de x pourra s'effectuer à l'aide de la résolution de ν_1 équations du degré ε_1 , de ν_2 équations du degré ε_2 , etc., et toutes ces équations seront résolubles algébriquement.

Dans le cas où $\mu = 2^\nu$, on peut trouver la valeur de x à l'aide de l'extraction de ν racines carrées.

§. 5.

Application aux fonctions circulaires.

En désignant par α la quantité $\frac{2\pi}{\mu}$, on sait qu'on peut trouver une équation algébrique du degré μ , dont les racines seront les μ quantités:

$$\cos \alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha, \dots \cos \mu\alpha,$$

et dont les coefficients seront des nombres rationnels. Cette équation sera

$$70. \quad x^\mu - \frac{1}{4}\mu \cdot x^{\mu-2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{\mu(\mu-3)}{1 \cdot 3} \cdot x^{\mu-4} \dots = 0.$$

Nous allons voir que cette équation a la même forme que l'équation $\chi x = 0$, considérée dans le paragraphe précédent.

Soit $\cos a = x$, on aura d'après une formule connue, quel que soit a :

$$71. \quad \cos ma = \theta(\cos a),$$

où θ désigne une fonction entière. Donc $\cos ma$, qui exprime une racine quelconque de l'équation (70.), sera une fonction rationnelle de la racine x . Soit $\theta_1 x$ une autre racine, je dis qu'on aura

$$\theta \theta_1 x = \theta_1 \theta x.$$

En effet, soit $\theta_1 x = \cos m'a$, la formule (71.) donnera, en mettant $m'a$ au lieu de a :

$$\cos(m m'a) = \theta(\cos m'a) = \theta \theta_1 x.$$

De la même manière on aura

$$\cos(m' m a) = \theta_1(\cos m a) = \theta_1 \theta x,$$

donc:

$$\theta \theta_1 x = \theta_1 \theta x.$$

Donc suivant ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent,

$$x \text{ ou } \cos a = \cos \frac{\pi}{\mu}$$

pourra être déterminé algébriquement. Cela est connu.

Supposons maintenant que μ soit un nombre premier $= 2n + 1$, les racines de l'équation (70.) seront:

$$\cos \frac{2\pi}{2n+1}, \quad \cos \frac{4\pi}{2n+1}, \quad \dots \quad \cos \frac{4n\pi}{2n+1}, \quad \cos 2\pi.$$

La dernière racine $\cos 2\pi$ est égale à l'unité, donc l'équation (70.) est divisible par $x - 1$. Les autres racines seront toujours égales entre-elles par couples, car on a $\cos \frac{2m\pi}{2n+1} = \cos \frac{(2n+1-m)2\pi}{2n+1}$, donc on peut trouver une équation dont les racines seront:

$$72. \quad \cos \frac{2\pi}{2n+1}, \quad \cos \frac{4\pi}{2n+1}, \quad \dots \quad \cos \frac{2n\pi}{2n+1}.$$

Cette équation sera:

$$73. \quad x^n + \frac{1}{2}x^{n-1} - \frac{1}{4}(n-1)x^{n-2} - \frac{1}{8}(n-2)x^{n-3} \\ + \frac{1}{16} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} x^{n-4} + \frac{1}{32} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} \cdot x^{n-5} - \text{etc.} = 0.$$

Cela posé, soit

$$\cos \frac{2\pi}{2n+1} = x = \cos a,$$

on aura d'après ce qui précède:

$$\cos \frac{2m\pi}{2n+1} = \theta x = \cos ma.$$

L'équation (73.) sera donc satisfaite par les racines

$$74. \quad x, \theta x, \theta^2 x, \theta^3 x, \dots$$

On a, quelle que soit la valeur de a :

$$\theta(\cos a) = \cos ma.$$

De là on tire successivement:

$$\theta^2(\cos a) = \theta(\cos ma) = \cos m^2 a,$$

$$\theta^3(\cos a) = \theta(\cos m^2 a) = \cos m^3 a,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\theta^\mu(\cos a) = \theta(\cos m^{\mu-1} a) = \cos m^\mu a.$$

Les racines (74.) deviendront donc

$$75. \quad \cos a, \cos ma, \cos m^2 a, \cos m^3 a, \dots \cos m^\mu a, \dots$$

Cela posé, si m est une racine primitive pour le module $2n+1$ (voyez *Gaußs Disquis. arithm. pag. 53.*), je dis que toutes les racines

$$76. \quad \cos a, \cos ma, \cos m^2 a, \dots \cos m^{n-1} a$$

seront différentes entre elles. En effet si l'on avoit

$$\cos m^\mu a = \cos m^\nu a,$$

où μ et ν sont moindres que n , on en tireroit:

$$m^\mu a = \pm m^\nu a + 2k\pi,$$

où k est entier. Cela donne en remettant pour a sa valeur $\frac{2\pi}{2n+1}$,

$$m^\mu = \pm m^\nu + k(2n+1),$$

donc

$$m^\mu + m^\nu = m^\nu (m^{\mu-\nu} + 1),$$

et par conséquent

$$m^{\mu(\mu-\nu)} - 1$$

seroit divisible par $2n+1$, ce qui est impossible, car $2(\mu-\nu)$ est moindre que $2n$, et nous avons supposé que m est une racine primitive.

On aura encore:

$$\cos m^n a = \cos a,$$

car $m^{2n} - 1 = (m^n - 1)(m^n + 1)$ est divisible par $2n+1$; donc:

$$m^n = -1 + k(2n+1),$$

et par suite:

$$\cos m^n a = \cos(-a + k \cdot 2\pi) = \cos a.$$

De là on voit que les n racines de l'équation (73.) pourront s'exprimer par (76.); c'est-à-dire par:

$$x, \theta x, \theta^2 x, \theta^3 x, \dots, \theta^{n-1} x, \text{ où } \theta^n x = x.$$

Donc, en vertu du théorème (III.), cette équation sera résoluble algébriquement.

En faisant $n = m_1 \cdot m_2 \dots m_\omega$, on peut diviser la circonférence entière du cercle en $2n + 1$ parties égales, à l'aide de ω équations des degrés $m_1, m_2, m_3, \dots, m_\omega$. Si les nombres $m_1, m_2, \dots, m_\omega$ sont premiers entre eux, les coefficients de ces équations seront des nombres rationnels.

En supposant $\pi = 2^\omega$, on aura le théorème connu sur les polygones réguliers, qui peuvent être construits géométriquement.

En vertu du théorème V. on voit que pour diviser la circonférence entière du cercle en $2n + 1$ parties égales, il suffit

- 1) de diviser la circonférence entière du cercle en $2n$ parties égales,
- 2) de diviser un arc, qu'on peut construire ensuite, en $2n$ parties égales,
- 3) et d'extraire la racine carrée d'une seule quantité ρ .

M. Gauss a énoncé ce théorème dans ses *Disquis.*, et il ajoute que la quantité dont il faut extraire la racine, sera égale à $2n + 1$. C'est ce qu'on peut démontrer aisément comme il suit.

On a vu (40. 38. 46.) que ρ est la valeur numérique de la quantité $(x + \alpha \theta x + \alpha^2 \theta^2 x + \dots + \alpha^{n-1} \theta^{n-1} x)(x + \alpha^{n-1} \theta x + \alpha^{n-2} \theta^2 x + \dots + \alpha \theta^{n-1} x)$ où $\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$. En substituant pour $x, \theta x, \dots$ leurs valeurs $\cos a, \cos m a, \cos m^2 a, \dots$ on aura:

$$\begin{aligned} \pm \rho &= \{ \cos a + \alpha \cos m a + \alpha^2 \cos m^2 a + \dots + \alpha^{n-1} \cos m^{n-1} a \} \\ &\times \{ \cos a + \alpha^{n-1} \cos m a + \alpha^{n-2} \cos m^2 a + \dots + \alpha \cos m^{n-1} a \}. \end{aligned}$$

En développant et mettant $\pm \rho$ sous la forme

$$\pm \rho = t_0 + t_1 \alpha + t_2 \alpha^2 + \dots + t_{n-1} \alpha^{n-1},$$

on trouvera facilement:

$$\begin{aligned} t_\mu &= \cos a \cdot \cos m^\mu a + \cos m a \cdot \cos m^{\mu+1} a + \dots + \cos m^{n-1-\mu} a \cdot \cos m^{n-1} a \\ &+ \cos m^{n-\mu} a \cdot \cos a + \cos m^{n-\mu+1} a \cdot \cos m a + \dots + \cos m^{n-1} a \cdot \cos m^{\mu-1} a. \end{aligned}$$

Maintenant on a

$$\cos m^\mu a \cdot \cos m^{\mu+\nu} a = \frac{1}{2} \cos(m^{\mu+\nu} a + m^\nu a) + \frac{1}{2} \cos(m^{\mu+\nu} a - m^\nu a),$$

donc:

$$\begin{aligned} t_\mu &= \frac{1}{2} \{ \cos(m^\mu + 1)a + \cos(m^\mu + 1)ma + \cos(m^\mu + 1)m^2 a + \dots + \cos(m^\mu + 1)m^{n-1} a \} \\ &+ \frac{1}{2} \{ \cos(m^\mu - 1)a + \cos(m^\mu - 1)ma + \cos(m^\mu - 1)m^2 a + \dots + \cos(m^\mu - 1)m^{n-1} a \}. \end{aligned}$$

Si l'on fait $(m^\mu + 1)a = a'$, $(m^\mu - 1)a = a''$, on aura :

$$t_\mu = \frac{1}{2} \{ \cos a' + \theta(\cos a') + \theta^2(\cos a') + \dots + \theta^{n-1}(\cos a') \} \\ + \frac{1}{2} \{ \cos a'' + \theta(\cos a'') + \theta^2(\cos a'') + \dots + \theta^{n-1}(\cos a'') \}.$$

Cela posé, il y a deux cas, savoir: μ est différent de zéro ou non.

Dans le premier cas il est clair que $\cos a'$ et $\cos a''$ sont des racines de l'équation (73.), donc $\cos a' = \theta^\delta x$, $\cos a'' = \theta^\varepsilon x$. En substituant, il viendra, en remarquant que $\theta^n x = x$:

$$t_\mu = \frac{1}{2} \{ \theta^\delta x + \theta^{\delta+1} x + \dots + \theta^{n-1} x + x + \theta x + \dots + \theta^{\delta-1} x \} \\ + \frac{1}{2} \{ \theta^\varepsilon x + \theta^{\varepsilon+1} x + \dots + \theta^{n-1} x + x + \theta x + \dots + \theta^{\varepsilon-1} x \},$$

donc

$$t_\mu = x + \theta x + \theta^2 x + \dots + \theta^{n-1} x,$$

c'est-à-dire t_μ est égal à la somme des racines; par suite en vertu de l'équation (73.):

$$t_\mu = -\frac{1}{2}.$$

Dans le cas où $\mu = 0$, la valeur de t_μ deviendra :

$$t_0 = \frac{1}{2} \{ \cos 2a + \cos 2ma + \dots + \cos 2m^{n-1}a \} + \frac{1}{2} n;$$

or $\cos 2a$ est une racine de l'équation (73.), donc en faisant

$$\cos 2a = \theta^\delta x,$$

on aura :

$$\cos 2a + \cos 2ma + \dots + \cos 2m^{n-1}a \\ = \theta^\delta x + \theta^{\delta+1} x + \dots + \theta^{n-1} x + x + \theta x + \dots + \theta^{\delta-1} x = -\frac{1}{2},$$

par conséquent :

$$t_0 = \frac{1}{2} n - \frac{1}{4}.$$

En vertu de ces valeurs de t_0 et t_μ , la valeur de $\pm \varrho$ deviendra :

mais
$$\pm \varrho = \frac{1}{2} n - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \{ \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^{n-1} \},$$

donc :

$$\pm \varrho = \frac{1}{2} n + \frac{1}{4},$$

et puisque ϱ est essentiellement positif,

$$\varrho = \frac{2n+1}{4}.$$

Cette valeur de ϱ donne

$$\sqrt{\varrho} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2},$$

donc la racine carrée qu'il y a à extraire est celle du nombre $2n+1$, comme le dit M. Gauss*).

Christiania, 29. Mars 1828.

*) L'auteur de ce mémoire donnera dans une autre occasion des applications aux fonctions elliptiques.