

## 11.

## Aufgaben und Lehrsätze,

erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

---

**Geometrische Aufgaben und Lehrsätze von Hrn. J. Steiner,**  
(Verfasser der Abhandlungen No. 5., 18., 25., 31. und 32. im ersten und No. 5.  
und 6. im zweiten Bande dieses Journals).

1. **Aufgabe.** Wenn in einer Ebene drei beliebige Kreise einander in einem Punct schneiden, so soll man durch denselben eine Gerade so ziehen, daß wenn  $A, B, C$  ihre übrigen Durchschnitte mit den Kreisen sind, die Abschnitte  $AB, BC$  der Geraden ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.

2. **Aufgabe.** Wenn im Raume vier beliebige Kugeln einander in einem Punct schneiden, so soll man durch denselben eine Gerade so ziehen, daß wenn  $A, B, C, D$  die Puncte sind, in welchen sie den Kugelflächen außerdem begegnet, ihre Abschnitte  $AB, BC, CD$  gegebene Verhältnisse zu einander haben.

3. **Aufgabe.** Wenn ein gegebenes (irreguläres) Vieleck ( $n$  Eck) so beschaffen ist, daß sowohl in als um dasselbe ein Kreis beschrieben werden kann, so soll man zwischen den Radien ( $r, R$ ) der beiden Kreise und dem Abstände ( $a$ ) ihrer Mittelpunkte von einander eine Gleichung finden. (Für das Dreieck ist diese zuerst von Euler gefundene Gleichung bekanntlich  $a^2 = R^2 - 2rR$ .)

4. **Aufgabe.** Wenn in einer Ebene zwei beliebige in einander liegende Kreise solche Lage zu einander haben, daß man zwischen denselben eine Reihe von  $n$  Kreisen so beschreiben kann, daß jeder jene beiden Kreise, und daß sie einander der Reihe nach berühren, so soll man zwischen den Radien jener beiden Kreise und dem Abstände ihrer Mittelpunkte von einander eine Gleichung finden. (Man sehe Band I. S. 256 dieses Journals.)

5. **Aufgabe.** Jeder beliebige Punct in der Ebene eines gegebenen geradlinigen Dreiecks kann einer der Brennpunkte eines Kegelschnitts sein, der alle drei Seiten des Dreiecks berührt. Man soll nun untersuchen, welche Lage der Punct in Beziehung auf das Dreieck haben müsse, damit der Kegelschnitt entweder Parabel, oder Ellipse, oder Hyperbel sei?

6.

6. Aufgabe. Fället man aus irgend einem Peripheriepunct  $P$ , des um ein gegebenes Dreieck beschriebenen Kreises, Lothe auf die Seiten des Dreiecks, so liegen bekanntlich die Fußpunkte dieser drei Lothe allemal in irgend einer Geraden  $G$ . Man soll nun denjenigen Punct  $P$  finden, für welchen die ihm zugehörige Gerade  $G$  mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

7. Lehrsatz. Halbirt man in einem Viereck im Kreise, sowohl die Winkel zwischen den Diagonalen, als auch die Winkel, welche die gegenüberliegenden Seiten einschließen, so sind von den 6 Geraden, welche diese Winkel halbiren, 3 und 3 parallel.

8. Lehrsatz. Vier beliebige Geraden in einer Ebene bilden, zu drei und drei genommen, vier Dreiecke. In jedem dieser Dreiecke schneiden die drei Lothe aus den Spitzen auf die gegenüberliegenden Seiten einander in einem Punct, und diese vier Puncte liegen allemal in einer Geraden.

9. Lehrsatz. Vier beliebige Puncte in der Peripherie eines gegebenen Kreises bestimmen, zu dreien genommen, vier Dreiecke. Die vier Puncte, in welchen die Lothe aus den Spitzen dieser vier Dreiecke auf die gegenüberliegenden Seiten einander schneiden, liegen allemal in der Peripherie eines Kreises, welcher dem gegebenen Kreise gleich ist.

10. Lehrsatz. Fället man aus den Ecken eines beliebigen (irregulären) Tetraëders auf die gegenüberliegenden Seitenebenen Lothe, so schneiden diese vier Lothe einander im Allgemeinen nicht. Schneiden sich aber, in einem besondern Falle, irgend zwei derselben, so schneiden alle vier einander in einem und demselben Puncte. Im Allgemeinen aber haben die genannten vier Lothe die merkwürdige Eigenschaft, daß jede Gerade, welche durch irgend drei derselben geht, auch das vierte schneidet, d. h., daß durch jeden beliebigen Punct, den man in einem der vier Lothe annimmt, allemal eine Gerade so gelegt werden kann, daß sie die drei übrigen Lothe schneidet.

11. Lehrsatz. Vier der Größe und Lage nach gegebene Kugeln können im Allgemeinen von 16 bestimmten Kugeln berührt werden; gehen sie aber durch unendliche Vergrößerung in vier Ebenen über, die ein Tetraëder (beliebige dreiseitige Pyramide) bilden, so bleiben von jenen 16 Kugeln, im Allgemeinen, nur noch 8 übrig, d. h., es giebt im

Allgemeinen 8 Kugeln, von denen jede die vier Seitenebenen eines gegebenen Tetraëders berührt. Von diesen 8 Kugeln ist *a*) eine dem Tetraëder eingeschrieben; *b*) von vier andern berührt jede die Außenseite einer Seitenebene und die Verlängerungen der drei übrigen; und *c*) jede der drei übrigen Kugeln berührt alle Seitenebenen in ihrer Verlängerung und zwar zwei Seitenebenen auf ihrer Außenseite.

Bezeichnet man nun den Radius der Kugel (*a*) durch  $R$ , die Radien der Kugeln (*b*), nach der Ordnung ihrer Größe, durch  $R_1, R_2, R_3, R_4$ , wo nemlich der letzte der größte ist, und die Radien der Kugeln (*c*), nach der Ordnung ihrer Größe, durch  $R_5, R_6, R_7$ , so hat man zwischen diesen Radien unter andern folgende merkwürdige Relationen:

$$\text{I. } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_7},$$

$$\text{II. } \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} = 0,$$

$$\text{III. } \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} + \frac{1}{R_4^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_5^2} + \frac{1}{R_6^2} + \frac{1}{R_7^2}, \text{ u. s. w.}$$

Sind von den Seitenebenen des Tetraëders drei zu einander senkrecht, so hat man z. B. auch noch folgende Gleichungen:

$$\text{IV. } \frac{1}{R_4 - R} = \frac{1}{R_1 + R_7} + \frac{1}{R_2 + R_6} + \frac{1}{R_3 + R_5},$$

$$\text{V. } \frac{1}{RR_4} = \frac{1}{R_1 R_7} + \frac{1}{R_2 R_6} + \frac{1}{R_3 R_5}.$$

12. Lehrsatz. Beschreibt man in einem beliebigen dreikantigen Körperwinkel eine Reihe Kugeln, von denen jede die drei Seitenebenen desselben berührt, und die einander der Ordnung nach berühren, so bilden die Radien dieser Kugeln, ihrer Größe nach, eine geometrische Progression. Sind z. B.  $a, b, c$  die Winkel, welche die Kanten des Körperwinkels mit einander bilden, und setzt man die Radien zweier nach einander folgender Kugeln  $R_1$  und  $R_2$ , und zur Abkürzung  $a + b + c = 2s$ , so ist der Exponent der genannten Progression:

$$\text{I. } \frac{R_2}{R_1} = \left[ \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s}} + \sqrt{\left(1 + \frac{\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s}\right)} \right]^2.$$

Oder sind  $A, B, C$  die drei Flächenwinkel des Körperwinkels, und man setzt zur Abkürzung  $A + B + C = 2S$ , so ist:

$$\text{II. } \frac{R_2}{R_1} = \left[ \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)}{2 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}} + \sqrt{\left(1 + \frac{-\cos S \cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)}{2 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}\right)} \right]^2.$$

## Aufgaben von Anderen.

13. Grenzen für die Zahl der imaginären Wurzeln einer algebraischen Gleichung von einem beliebigen Grade, aus den gegebenen Coefficienten der Gleichung zu finden.

14. Aus der Gleichung

$(a_1 + x)^{\frac{1}{2}} + (a_2 + x)^{\frac{1}{2}} + (a_3 + x)^{\frac{1}{2}} + (a_4 + x)^{\frac{1}{2}} + (a_5 + x)^{\frac{1}{2}} + (a_6 + x)^{\frac{1}{2}} = 0$ ,  
wo  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_6$  beliebige, von einander verschiedene, gegebene Größen sind,  $x$  zu finden.

15. Man kann beweisen, daß die Zahl  $\pi$ , welche die Länge des Umfanges eines Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser 1 ist, desgleichen ihr Quadrat, nothwendig irrationale Zahlen sind. (Man sehe z. B. Legendre *géométrie*, note IV.) Nachzuweisen, ob, und wenn es angehet, wie sich beweisen lasse, daß, wenn  $n$  eine beliebige ganze Zahl bedeutet, auch  $\pi^n$  nothwendig irrational ist?

16. In der Reihe

$$x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 4x^6 + 2x^7 \dots,$$

welche gleich

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} \dots + \frac{x^n}{1-x^n} \dots$$

ist, sind die Coefficienten der verschiedenen Glieder, wie Lambert bemerkt hat, gleich den Zahlen der ganzzahligen Divisoren der Exponenten der nemlichen Glieder, so daß von allen Gliedern, deren Coefficienten 2 sind, und nur von diesen Gliedern die Exponenten Primzahlen sind. Man verlangt durch einen endlichen Ausdruck diese Lambertsche Reihe zu summiren.

17. Die Bernoullischen Zahlen, die Differenz-Coefficienten und die Facultäten - Coefficienten allgemein durch Producte von der Form  $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \dots$  auszudrücken.

18. Die Größe  $a^{a^{a^{a^{\dots}}}}$  nach  $a$  und der Zahl  $x$  der Exponenten zu entwickeln. Diese Zahl  $x$  ist z. B. in der Größe  $a^{a^{a^3}}$  gleich 3.

19. Aus dem Cardanischen Ausdruck der Wurzeln der Gleichungen vom dritten Grade, oder demjenigen durch trigonometrische Linien, die Wurzeln der Gleichung  $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$  für den Fall herzuleiten, wenn  $a_0 = 0$  ist.

20.  $X = 0$  sei eine beliebige algebraische Gleichung, z. B. vom  $n$ ten Grade, wie

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} \dots + a_n = 0.$$

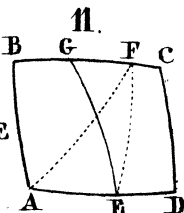
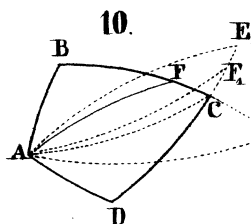
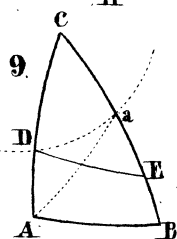
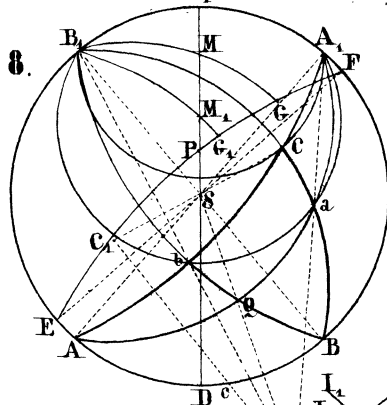
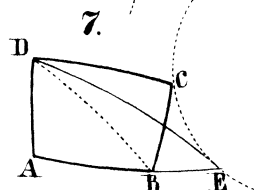
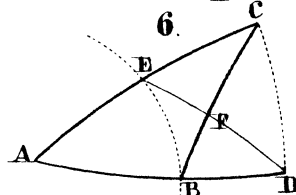
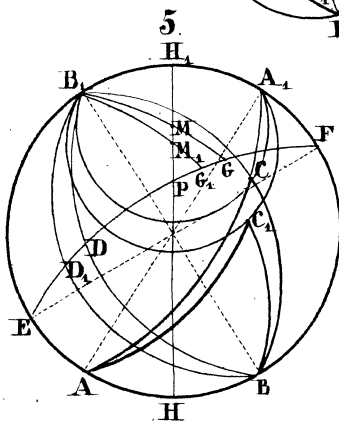
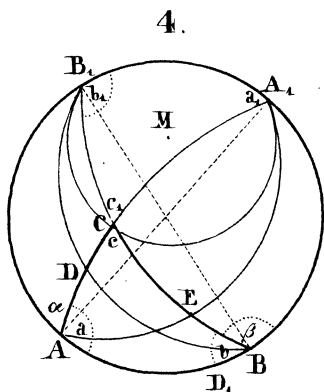
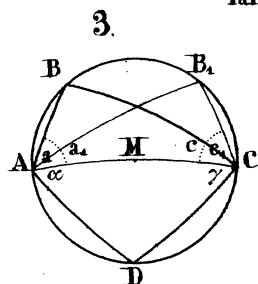
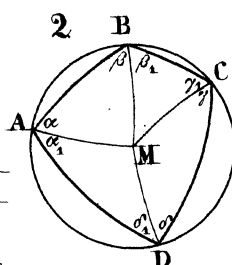
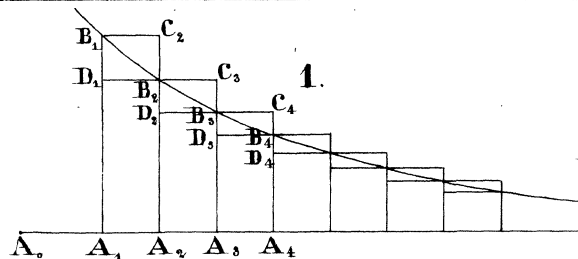
$Y = 0$  sei diejenige Gleichung, deren Wurzeln bestimmte Potestäten, z. B. die  $m$ ten Potestäten der Wurzeln der Gleichung  $X = 0$  sind. Alsdann lassen sich bekanntlich die Coefficienten der Gleichung  $Y = 0$  aus den Coefficienten der Gleichung  $X = 0$  finden. Es fragt sich, ob sich auch, wenn nicht alle Coefficienten der Gleichung  $X = 0$ , sondern statt der fehlenden einige Coefficienten der Gleichung  $Y = 0$  gegeben sind, die übrigen Coefficienten der beiden Gleichungen finden lassen, und wenn es angehet, wie.

21. Aus den gegebenen Seiten eines Vielecks im Kreise von einer beliebigen Seitenzahl, den Inhalt des Vielecks und den Halbmesser des Kreises zu finden. Dieses kann gefordert werden, weil alle Vielecke im Kreise mit den nemlichen Seiten, in welcher Ordnung auch die bestimmten Seiten auf einander folgen mögen, offenbar gleich groß sind, auch alle diese Vielecke nothwendig in gleichen Kreisen liegen.

22. Unter allen Kreis-Abschnitten von gleichem Umfange, die kleiner sind als der halbe Kreis, und unter allen beliebigen Kreis-Ausschnitten von gleichem Umfange die kleinsten zu finden.

23. Ein Körper, der aus einer gleichartigen, dichten und als vollkommen unelastisch betrachteten Masse besteht, deren Cohäsionskraft gegeben ist, und der die Form eines senkrechten, kreisförmigen Cylinders mit parallelen Grundflächen hat, dessen senkrechte Höhe, wenn man will, gegen den Durchmesser nur klein ist, ruhet mit dem Rande der kreisförmigen, unteren Grund-Ebene wagerecht auf einer festen Unterstüztung. Im Mittelpunct der oberen Grund-Ebene wirkt senkrecht auf dieselbe, also in lothrechter Richtung, eine Kraft. Zu finden, wie groß diese Kraft, mit oder auch ohne Rücksicht auf das Gewicht des Cylinders, sein muß, um denselben zu zerbrechen, und in welcher Linie der Cylinder brechen wird.

24. Die Gestalt eines Hohlspiegels zu finden, der die Strahlen eines kugelförmigen leuchtenden Körpers von gegebenem Durchmesser so wenig als möglich zerstreut, oder so nahe als möglich dieselben parallel wirft.



15.

