# Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen.

(Erste Mitteilung.)

Von

G. Szegő in Budapest.

Inhalt.



## Einleitung.

Der Zweck dieser Arbeit ist, im Rahmen einer einfachen Minimum-Aufgabe (§ 3), einige Sätze zu entwickeln, die geeignet sind, die Theorie der Toeplitzschen Formen von *endlichvielen* Variablen näher zu begründen. Unter Toeplitzschen Formen verstehe ich diejenigen Hermiteschen Formen, deren Matrix die Gestalt hat

$$\begin{Bmatrix} c_0 & c_{-1} & c_{-2} & \dots & c_{-n} \\ c_1 & c_0 & c_{-1} & \dots & c_{-n+1} \\ c_2 & c_1 & c_0 & \dots & c_{-n+2} \\ & & & \dots & . \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_0 \end{Bmatrix},$$

wo

$$c_{-n} = \bar{c}_n{}^{1)} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ist[2]). Ich setze

$$c_n = a_n + i b_n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

dann ist es besonders interessant, die Zahlen $a_n$ und $b_n$ als die Fourierschen Konstanten einer reellen, $(L)$ integrablen[3]) Funktion $f(\theta)$ aufzufassen; d. h. es sei

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta,$$

also

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{in\Theta}\, d\theta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

So gehört zu jeder Funktion $f(\theta)$ eine ganz bestimmte Schar von Toeplitzschen Formen[4])

$$T_n(f; x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{p=0}^{n} c_{p-q}\, x_p\, \bar{x}_q \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

deren jede ein Abschnitt der nachfolgenden ist.

---

1) $\bar{x}$ bezeichnet die zu $x$ konjugiert komplexe Größe.

2) Ich unterscheide die Toeplitzschen Formen von den sog. $L$-Formen, deren Koeffizientenschema folgendes Aussehen hat:

$$(c_{p-q})_{-n}^{n}.$$

Diese Formen stehen natürlich in engstem Zusammenhange mit den Toeplitzschen Formen. Die Benennung „Toeplitzsche Form" kommt bei E. Fischer (a. a. O. 5) c) S. 254–256) vor.

3) D. h. im Lebesgueschen Sinne.

4) O. Toeplitz, a) Zur Transformation der Scharen bilinearer Formen von unendlichvielen Veränderlichen [Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse 1907, S. 110–115]; b) Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Variablen [ebenda 1910, S. 489–506]; c) Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen. I. Teil: Theorie der $L$-Formen [Mathematische Annalen, 70 (1911), S. 351–376]; d) Über die Fouriersche Entwickelung positiver Funktionen [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo 32 (2º Semestre 1911), S. 191–192].

Die Arbeiten von Toeplitz, Carathéodory und Fejér[5]) haben bekanntlich auf einen tiefgehenden Zusammenhang gewiesen, der zwischen dem Wertevorrat dieser Formen und dem von $f(\theta)$ besteht. Nach gewissen Vorbereitungen, die im I. und II. Teil der vorliegenden Arbeit enthalten sind, will ich im III. Teil diesen Zusammenhang noch näher präzisieren, indem ich die Eigenwerte obiger Formen betrachte und deren Verteilung untersuche. Es ergibt sich der Satz (§ 8), daß sie für $\lim n = \infty$ „im Durchschnitt" mit den äquidistanten Ordinaten von $f(\theta)$ übereinstimmen[6]).

Bei der Abfassung des IV. Teiles[7]) hatte ich eine gewisse Analogie vor Augen, die an vielen Punkten zwischen der Theorie der Toeplitzschen und der sog. *rekurrierenden* (Hankelschen) Formen[8]) besteht. Unter rekurrierenden Formen verstehe ich diejenigen quadratischen Formen, deren Matrix die Gestalt hat

$$\begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_{n+1} \\ g_2 & g_3 & g_4 & \cdots & g_{n+2} \\ & \cdot & & \cdots & \cdot \\ g_n & g_{n+1} & g_{n+2} & \cdots & g_{2n} \end{pmatrix} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Diese Formen haben eine ebenfalls sehr ausgedehnte Literatur, die übrigens

---

5) Man vgl. außer den oben zitierten Arbeiten von Toeplitz: a) C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo 32 (2° Semestre 1911), S. 193–217]; b) C. Carathéodory und L. Fejér, Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landauschen Satz [ebenda S. 218–239]; c) E. Fischer, Über das Carathéodorysche Problem, Potenzreihen mit positivem reellen Teil betreffend [ebenda, S. 240–256]; d) I. Schur, Über einen Satz von C. Carathéodory [Sitzungsberichte der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften 1912, S. 4–15]; e) G. Frobenius, Ableitung eines Satzes von Carathéodory aus einer Formel von Kronecker [ebenda S. 16–31]; f) F. Riesz, Über ein Problem des Herrn Carathéodory [Journal für die reine und angewandte Mathematik, **146** (1915), S. 83–87]; g) I. Schur, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind [ebenda **147** (1917), S. 205–232 und **148** (1918), S. 122–145]. Man vgl. insbesondere § 8; h) O. Szász, Über harmonische Funktionen und $L$-Formen [Mathematische Zeitschrift, **1** (1918), S. 140–162].

6) Dieses Resultat ist in meiner ungarischen Arbeit enthalten: A Toeplitz-féle formákról [Mathematikai és természettudományi értesitő, **35** (1917), S. 185–222] S. 203.

7) Erscheint in einer zweiten Mitteilung.

8) G. Frobenius, Über das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen [Journal für die reine und angewandte Mathematik, **114** (1895), S. 187–230] § 8.

viel älter ist, als die der Toeplitzschen Formen. Nun besteht, wie gesagt, zwischen den beiden Theorien eine gewisse Parallelität, die besonders scharf hervortritt, wenn die Konstanten $g_n$ als die Stieltjesschen Momente einer im reellen Intervalle $(\alpha, \beta)$ definierten reellen Funktion $p(t)$ aufgefaßt werden, d. h.

$$g_n = \int_\alpha^\beta p(t) t^n dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die Idee dieser Analogie ist nach beiden Richtungen zu verwerten. Anwendungen auf die Theorie der rekurrierenden Formen lasse ich hier beiseite[9]); ich befasse mich hier nur mit der Übertragung eines, mit den rekurrierenden Formen eng zusammenhängenden Begriffes auf die Theorie der Toeplitzschen Formen.

Es sei $p(t)$ eine für $\alpha \leqq t \leqq \beta$ definierte nichtnegative, $(L)$ integrable Funktion und

$$\int_\alpha^\beta p(t) dt > 0.$$

Ich betrachte das System

$$\sqrt{p(t)}, \ \sqrt{p(t)}\,t, \ \ldots, \ \sqrt{p(t)}\,t^n, \ \ldots$$ [10])

und bilde daraus nach dem Verfahren von E. Schmidt durch Orthogonalisierung das System

$$\sqrt{p(t)}\,P_0(t), \ \sqrt{p(t)}\,P_1(t), \ \ldots, \sqrt{p(t)}\,P_n(t), \ \ldots$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) $P_n(t)$ ist ein Polynom $n$-ten Grades.

b) Der Koeffizient von $t^n$ in $P_n(t)$ ist positiv.

c) $\int_\alpha^\beta p(t) P_m(t)\, P_n(t) dt = \varepsilon_{mn}$ [11]) $\qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Ist z. B. $p(t) = 1$, $\alpha$ und $\beta$ endlich, dann ist $P_n(t)$ (abgesehen von einem konstanten Faktor und von einer linearen Transformation der Variablen) gleich dem $n$-ten Legendreschen Polynome.

Die Polynome $P_n(t)$ spielen bekanntlich eine wichtige Rolle in der Theorie der Stieltjesschen Kettenbrüche[12]). Dort zeigt sich auch die

---

[9]) Eine diesbezügliche Arbeit von mir wurde am 18. III. 1918 der ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt.

[10]) Alle Quadratwurzeln sind positiv (nichtnegativ) zu nehmen.

[11]) $\varepsilon_{mn}$ ist gleich 0 oder 1, je nachdem $m \neq n$ oder $m = n$ ist.

[12]) S. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig und Berlin (B. G. Teubner), 1913, S. 379.

intime Beziehung, in welcher sie zu den rekurrierenden Formen stehen. Ihre verschiedenen interessanten Eigenschaften will ich hier nicht auseinandersetzen. Ich bemerke nur, daß die meisten wohlbekannten Polynomtypen (die Polynome von Legendre, Laguerre, Jacobi und Hermite) als spezielle Fälle in dieser allgemeinen Klasse enthalten sind.

Die Eigenschaften dieser Polynome haben mehrere Autoren untersucht. Um so auffallender ist es, daß in der Theorie der Toeplitzschen Formen die entsprechenden Polynome meines Wissens bisher nicht behandelt worden sind[13]). Diese Polynome definiere ich folgendermaßen:

Es sei $f(\theta)$ eine für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ definierte nichtnegative, $(L)$ integrable Funktion und

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta > 0.$$

Ich betrachte das System

$$\sqrt{f(\theta)},\ \sqrt{f(\theta)}\, z,\ \ldots,\ \sqrt{f(\theta)}\, z^n,\ \ldots \qquad (z = e^{i\Theta})$$

und bilde daraus nach dem Verfahren von E. Schmidt durch Orthogonalisierung das System

$$\sqrt{f(\theta)}\, \varphi_0(z),\ \sqrt{f(\theta)}\, \varphi_1(z),\ \ldots,\ \sqrt{f(\theta)}\, \varphi_n(z),\ \ldots \qquad (z = e^{i\Theta})$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) $\varphi_n(z)$ ist ein Polynom $n$-ten Grades.

b) Der Koeffizient von $z^n$ in $\varphi_n(z)$ ist positiv.

c) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, \varphi_m(z)\, \overline{\varphi_n(z)}\, d\theta = \varepsilon_{mn} \quad (z = e^{i\Theta};\ m, n = 0, 1, 2, \ldots).$

Ist z. B. $f(\theta) = 1$, so ist $\varphi_n(z) = z^n$.

Die so definierten Polynome $\varphi_n(z)$ hängen eng mit den zu $f(\theta)$ gehörigen Toeplitzschen Formen zusammen und haben in mehreren Punkten ähnliche Eigenschaften, wie die Polynome $P_n(t)$. Im IV. Teil beweise ich unter anderem den Satz (§ 14):

Es sei $f(\theta)$ positiv und $\log f(\theta)$ $(L)$ integrabel; dann existiert

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi_n(z)}{z^n}$$

für $|z| > 1$ und stellt dort eine reguläre Funktion dar.

[13]) Man vgl. jedoch a. a. O. [5]) d) und e), wo ähnliche Polynome eine wichtige Rolle spielen.

Ferner (§ 15):

Jede für $|z| \leqq 1$ regulär-analytische Funktion $F(z)$ gestattet eine Entwicklung nach den Polynomen $\varphi_n(z)$

$$F(z) = c_0 \varphi_0(z) + c_1 \varphi_1(z) + \ldots + c_n \varphi_n(z) + \ldots,$$

deren Koeffizienten $c_n$ sich auf die Fouriersche Weise ergeben:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) F(z) \overline{\varphi_n(z)} \, d\theta \quad (z = e^{i\Theta};\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Diese Entwicklung konvergiert für $|z| < R$, wenn $R > 1$ den Radius des größten Kreises bezeichnet, welcher keinen singulären Punkt von $F(z)$ enthält und stellt dort $F(z)$ dar. Sie divergiert ferner für $|z| > R$. Man hat übrigens

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}.$$

Es besteht demnach eine volle Analogie zu den Potenzreihen.

# I. Teil.

# Über verschiedene Mittelwerte.

Um den Gang der späteren Untersuchungen nicht unterbrechen zu müssen und zwecks Einheitlichkeit der Darstellung, schicke ich hier einige Definitionen und Hilfssätze voraus, die im folgenden mehrmals Anwendung finden.

## § 1.

## Das arithmetische und geometrische Mittel.

1. Es sei $f(\theta)$ im Intervalle $(0, 2\pi)$ nichtnegativ und $(L)$ integrabel. Ich bezeichne

$$A[f(\cdot)] = A(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \, d\theta$$

als das *„arithmetische Mittel“* von $f(\theta)$; das ist eine ganz bestimmte nichtnegative Zahl. Ist $0 \leqq m \leqq f(\theta) \leqq M$, so hat man

$$m \leqq A(f) \leqq M.$$

Ich definiere ferner das *„geometrische Mittel“* von $f(\theta)$ auf folgende Weise. Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und $f^{\varkappa}(\theta)$ $(L)$ integrabel, wo $\varkappa$ positiv ist. Ist $f(\theta) \geqq m > 0$, so setze ich

$$G[f(\cdot)] = G(f) = e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log f(\Theta) \, d\Theta}$$

Das ist eine ganz bestimmte positive Zahl, da ja

$$\log x \leqq x - 1 \qquad (x > 0),$$

also

$$\log m \leqq \log f(\theta) \leqq \frac{f^{\varkappa}(\theta) - 1}{\varkappa} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

ist. Existiert aber eine solche Zahl $m$ nicht, so unterscheide ich zwei Fälle. Ist das Lebesguesche Maß der Menge $E\,[f(\theta) = 0]$[14]) positiv, so setze ich $G(f) = 0$. Ist es gleich 0, so kann ich zunächst voraussetzen, daß $f(\theta)$ überall positiv ist. Das Integral

$$\int\limits_{f(\theta) \geqq 1} \log f(\theta)\, d\theta$$

ist nun immer endlich, weil

$$0 \leqq \int\limits_{f(\theta) \geqq 1} \log f(\theta)\, d\theta \leqq \int\limits_{f(\theta) \geqq 1} \frac{f^{\varkappa}(\theta) - 1}{\varkappa}\, d\theta \leqq \frac{1}{\varkappa} \int\limits_{0}^{2\pi} f^{\varkappa}(\theta)\, d\theta$$

ist. Das Integral

$$\int\limits_{f(\theta) < 1} \log f(\theta)\, d\theta$$

kann entweder endlich oder nicht endlich (d. h. $-\infty$) sein. Ist es endlich, so bleibt die obige Formel für $G(f)$ in Gültigkeit; ist es nicht endlich (d. h. $-\infty$), so setze ich $G(f) = 0$[15]).

So ist $G(f)$ als eine ganz bestimmte nichtnegative Zahl definiert. Ich bezeichne sie als das geometrische Mittel von $f(\theta)$.

2. Ich stelle hier einige Sätze für $G(f)$ zusammen, die, falls $f(\theta)$ positiv und stetig ist, wohlbekannt sind.

Satz I. *Es sei* $0 \leqq m \leqq f(\theta) \leqq M$ *und* $f(\theta)$ $(L)$ *integrabel. Dann ist*

$$m \leqq G(f) \leqq M. \tag{1}$$

Dies folgt unmittelbar aus der Definition. Zum Beispiel

$$G(1) = 1.$$

Satz II. *Es seien* $f(\theta)$, $\varphi(\theta)$ *nichtnegativ und* $(L)$ *integrabel. Dann ist*

$$G(f)\, G(\varphi) = G(f\varphi). \tag{2}$$

[14]) Ich bezeichne dies mit $\operatorname{mes} E\,[f(\theta) = 0]$.

[15]) $G(f)$ ist also dann und nur dann positiv, wenn (mit Ausnahme einer 0-Menge) $f(\theta)$ positiv und $\log f(\theta)$ $(L)$ integrabel ist.

Diese Gleichung ist trivial, wenn $f(\theta)$, $\varphi(\theta)$ (mit Ausnahme einer 0-Menge)[16]) positiv und $\log f(\theta)$, $\log\varphi(\theta)$ $(L)$ integrabel sind. Ist ferner $\operatorname{mes} E[f(\theta)=0]>0$, oder $\operatorname{mes} E[\varphi(\theta)=0]>0$, so ist sie auch klar. Es bleibt also nur der Fall zu betrachten, wo $f(\theta)$, $\varphi(\theta)$ positiv und die Funktionen $\log f(\theta)$, $\log\varphi(\theta)$ nicht beide $(L)$ integrabel sind. Dann kann aber das Integral

$$\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta$$

nicht endlich sein (es ist also gleich $-\infty$), da ja die Integrale

$$\int\limits_{f(\Theta)\geqq 1}\log f(\theta)\,d\theta,\quad \int\limits_{\varphi(\Theta)\geqq 1}\log\varphi(\theta)\,d\theta$$

endlich sind. Also ist $G(f\varphi)=0$. Daraus folgt die Behauptung.

Satz III. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und $(L)$ integrabel. Dann ist*

(3) $$\lim_{\varepsilon=+0} G(f+\varepsilon)=G(f).$$

Es sei zunächst $\operatorname{mes} E[f(\theta)=0]=\alpha>0$. Für $\varepsilon>0$ hat man

$$\log G(f+\varepsilon)\leqq\frac{\alpha}{2\pi}\log\varepsilon+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{f(\Theta)\geqq 1-\varepsilon}\log[f(\theta)+\varepsilon]\,d\theta.$$

Nun gilt die Ungleichung

$$0<\log(x+\varepsilon)-\log x<\frac{\varepsilon}{x}\qquad(x>0,\ \varepsilon>0),$$

so daß

$$\log G(f+\varepsilon)\leqq\frac{\alpha}{2\pi}\log\varepsilon+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{f(\Theta)\geqq 1-\varepsilon}\log f(\theta)\,d\theta+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

woraus

$$\lim_{\varepsilon=+0} G(f+\varepsilon)=0=G(f)$$

folgt.

Ich kann also voraussetzen, daß $\operatorname{mes} E[f(\theta)=0]=0$, oder auch, daß $f(\theta)$ überall positiv ist. Dann ist nach der obigen Ungleichung

$$\lim_{\varepsilon=+0}\int\limits_{f(\Theta)\geqq 1}\log[f(\theta)+\varepsilon]\,d\theta=\int\limits_{f(\Theta)\geqq 1}\log f(\theta)\,d\theta.$$

Es sei jetzt $\eta=\sqrt{\varepsilon}$ und $0<\varepsilon<\frac{1}{4}$. Es sind zwei Fälle möglich. Ist das Integral

$$\int\limits_{f(\Theta)<1}\log f(\theta)\,d\theta=\lim_{\eta=+0}\int\limits_{\eta\leqq f(\Theta)<1}\log f(\theta)\,d\theta$$

[16]) Unter 0-Menge verstehe ich eine Menge, deren Lebesgueesches Maß gleich 0 ist.

endlich, d. h.

$$\lim_{\eta=+0} \int_{f(\Theta)<\eta} \log f(\theta)\,d\theta = 0,$$

so hat man $(\eta + \varepsilon = \sqrt{\varepsilon} + \varepsilon < \frac{3}{4} < 1)$

$$0 \leqq \int_{f(\Theta)<1} \log[f(\theta)+\varepsilon]\,d\theta - \int_{f(\Theta)<1} \log f(\theta)\,d\theta$$

$$\leqq 2\pi\frac{\varepsilon}{\eta} + \int_{f(\Theta)<\eta} \log[f(\theta)+\varepsilon]\,d\theta - \int_{f(\Theta)<\eta} \log f(\theta)\,d\theta \leqq 2\pi\sqrt{\varepsilon} - \int_{f(\Theta)<\eta} \log f(\theta)\,d\theta,$$

woraus die Behauptung folgt. Ist aber dieses Integral nicht endlich, also $G(f) = 0$, so ist

$$\int_{f(\Theta)<1} \log[f(\theta)+\varepsilon]\,d\theta \leqq \int_{\eta \leqq f(\Theta)<1} \log[f(\theta)+\varepsilon]\,d\theta \leqq \int_{\eta \leqq f(\Theta)<1} \log f(\theta)\,d\theta + 2\pi\frac{\varepsilon}{\eta}$$

$$\leqq \int_{\eta \leqq f(\Theta)<1} \log f(\theta)\,d\theta + 2\pi\sqrt{\varepsilon},$$

woraus $\lim_{\varepsilon=+0} G(f+\varepsilon) = 0$ folgt. Damit ist der Satz III bewiesen.

Satz IV. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und $(L)$ integrabel, dann ist*

$$(C) \qquad G(f) \leqq A(f)\text{[17]}.$$

Dieser Satz folgt mittels Grenzübergangs unmittelbar aus der bekannten Ungleichung[18])

$$(4) \qquad e^{\frac{m_1 \log x_1 + m_2 \log x_2 + \ldots + m_n \log x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}} \leqq \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

$$(m_k > 0,\ x_k > 0;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

## § 2.

## Eine Verallgemeinerung des geometrischen Mittels.

3. Es sei $\alpha = \varrho e^{i\varphi}$ eine beliebige komplexe Zahl im Innern des Einheitskreises, d. h. $\varrho < 1$. Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und $f^{\varkappa}(\theta)$ $(L)$-integrabel, wo $\varkappa$ positiv ist. Ich definiere den Mittelwert $G(\alpha; f)$ folgendermaßen:

---

[17]) Dieser Satz rührt in seiner einfachsten Form von Cauchy her: Cours d'analyse de l'école royale polytechnique. Œuvres complètes, Paris (Gauthier-Villars), 1897, II. Série, **3**, S. 375.

[18]) S. J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes [Acta Mathematica, **30** (1906), S. 175—201] S. 184.

Ist $G(f)=0$, so setze ich $G(\alpha; f)=0$.

Ist $G(f)>0$, so setze ich

$$G(\alpha; f)=e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log f(\Theta)\frac{1-|\alpha|^2}{|1-\bar{\alpha}z|^2}d\Theta}=e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log f(\Theta)\frac{1-\varrho^2}{1-2\varrho\cos(\Theta-\varphi)+\varrho^2}d\Theta}$$

$$(z=e^{i\Theta}).$$

Man kann diesem Ausdruck auch eine andere Form geben. Ist nämlich $G(f)>0$, so ist $\log f(\theta)$ $(L)$ integrabel; es existiert also die formelle Fourier-Entwicklung

$$\log f(\theta)\sim k_0+2\sum_{n=1}^{\infty}(k_n\cos n\theta+l_n\sin n\theta).$$

Ich setze

$$g(z)=\frac{k_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(k_n-il_n)z^n$$

und

$$D(z)=e^{g(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}d_nz^n.$$

Dann ist

a) $D(z)$ regulär-analytisch für $|z|<1$.

b) $D(z)\neq 0$ für $|z|<1$.

c) $$|D(z)|^2=e^{2\Re g(z)}=e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log f(x)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\Theta)+r^2}dx}=G(z; f)$$

$$(z=re^{i\Theta};\ r<1)[19].$$

Folglich

$$G(\alpha; f)=|D(\alpha)|^2.$$

Man hat offenbar

$$G(0; f)=|D(0)|^2=e^{k_0}=G(f).$$

Es gelten ferner die Sätze:

*Ist* $0\leqq m\leqq f(\theta)\leqq M$ *und* $f(\theta)(L)$ *integrabel, so ist*

$$m\leqq G(\alpha; f)\leqq M. \tag{1'}$$

Ferner

$$G(\alpha; 1)=1.$$

*Sind* $f(\theta)$, $\varphi(\theta)$ *nichtnegativ und* $(L)$ *integrabel, so ist*

$$G(\alpha; f)\,G(\alpha; \varphi)=G(\alpha; f\varphi). \tag{2'}$$

---

[19]) Ich verstehe unter $\Re x$ den reellen Teil der komplexen Zahl $x$.

*Ist $f(\theta)$ nichtnegativ und $(L)$ integrabel, so ist*

$$\lim_{\varepsilon=+0} G(\alpha; f+\varepsilon) = G(\alpha; f). \tag{3'}$$

Diese Sätze können ähnlich bewiesen werden, wie die entsprechenden Sätze für $G(f)$.

4. Es gilt nun der

Satz V. *Ist $f(\theta)$ nichtnegativ, $(L)$ integrabel und $G(f) > 0$, so ist*

$$|d_0|^2 + |d_1|^2 + \ldots + |d_n|^2 + \ldots \leqq A(f) \tag{5}$$ [20].

Man hat nämlich nach der Ungleichung (4)

$$|D(re^{i\Theta})|^2 = e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log f(x) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\Theta)+r^2}dx} \leqq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}dx,$$

also

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |D(re^{i\Theta})|^2 d\theta \leqq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx = A(f),$$

d. h.

$$|d_0|^2 + |d_1|^2 r^2 + \ldots + |d_n|^2 r^{2n} \leqq A(f),$$

für jedes $r < 1$ und für jedes $n$. Hieraus folgt

$$|d_0|^2 + |d_1|^2 + \ldots + |d_n|^2 \leqq A(f),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

5. Aus Satz V ergibt sich folgende Verallgemeinerung des Satzes IV:

Satz VI. *Ist $f(\theta)$ nichtnegativ und $(L)$ integrabel, so wird*

$$G(\alpha; f) \leqq \frac{A(f)}{1-|\alpha|^2}. \tag{C'}$$

*Das Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn (mit Ausnahme einer 0-Menge)*

$$f(\theta) = \frac{c}{|1-\bar{\alpha}z|^2} \qquad (z = e^{i\Theta})$$

*ist* $(c \geqq 0)$.

[20]) Diese Ungleichung genügt vollkommen für meine späteren Zwecke. Ich erwähne jedoch, daß hier unter den genannten Bedingungen immer das Gleichheitszeichen gilt; es bestehen allgemeiner die Gleichungen

$$d_0\bar{d}_\varkappa + d_1\bar{d}_{\varkappa+1} + \ldots + d_n\bar{d}_{\varkappa+n} + \ldots = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)e^{i\varkappa\Theta}d\theta \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dieses System gibt eigentlich eine Parameterdarstellung für die Fourierschen Konstanten einer nichtnegativen, $(L)$ integrablen Funktion $f(\theta)$, deren geometrisches Mittel $G(f)$ positiv ist.

*Insbesondere gilt in $(C)$ dann und nur dann das Gleichheitszeichen*[21]), *wenn (mit Ausnahme einer* 0-*Menge)*

$$f(\theta) = c$$

*ist* $(c \geqq 0)$.

Ist $G(f) = 0$, so ist die Ungleichung $(C')$ trivial. Ist $G(f) > 0$, so hat man

$$G(\alpha; f) = |d_0 + d_1 \alpha + \ldots + d_n \alpha^n + \ldots|^2,$$

also nach der Schwarzschen Ungleichung

$$G(\alpha; f) \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{2n} = \frac{1}{1-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^2 \leqq \frac{A(f)}{1-|\alpha|^2}, \qquad \text{q. e. d.}$$

Wenn in dieser Ungleichung das Gleichheitszeichen gilt, so sind zwei Fälle möglich. Entweder muß $G(\alpha; f) = G(f) = A(f) = 0$ sein, d. h. (mit Ausnahme einer 0-Menge) $f(\theta) = 0$; oder aber $G(f) > 0$ und

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} d_n \alpha^n \right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{2n},$$

also

$$d_n = \lambda \bar{\alpha}^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

d. h.

$$D(z) = \frac{\lambda}{1 - \bar{\alpha} z}$$

und

$$g(z) = \log \lambda - \log(1 - \bar{\alpha} z) = \log \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}^n}{n} z^n.$$

So folgt

$$k_n - i l_n = \frac{\bar{\alpha}^n}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

d. h.

$$k_n = \frac{\varrho^n}{n} \cos n\varphi, \qquad l_n = \frac{\varrho^n}{n} \sin n\varphi \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es ist nun

$$-\log|1 - \bar{\alpha} z|^2 = -2\Re \log(1 - \bar{\alpha} z) = 2\Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\bar{\alpha} z)^n}{n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{n} \cos n(\theta - \varphi)$$
$$(z = e^{i\Theta}),$$

also (mit Ausnahme einer 0-Menge)[22])

$$\log f(\theta) + \log|1 - \bar{\alpha} z|^2 = \text{const.} \qquad (z = e^{i\Theta}),$$

q. e. d.

---

[21]) Dieser Teil des Satzes findet sich für positive und stetige Funktionen bei G. Pólya [Archiv der Mathematik und Physik, 20 (1912), S. 272, 457-te Aufgabe].

[22]) Ist $g(\theta)(L)$ integrabel und $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta) e^{in\Theta}\, d\theta = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, so ist (mit Ausnahme einer 0-Menge) $g(\theta) = \text{const}$.

6. Ich erwähne hier noch einen Satz, der in den meisten praktischen Fällen eine zur Berechnung von $G(\alpha; f)$ gut brauchbare Methode liefert.

**Satz VII.** *Es sei $F(z)$ regulär-analytisch für $|z| \leqq 1$ und*

$$f(\theta) = |F(z)|^2 \qquad (z = e^{i\Theta});$$

*ich setze*

$$F^*(z) = F(z),$$

*wenn $F(z)$ für $|z| < 1$ nicht verschwindet; es sei ferner*

$$F^*(z) = F(z) \frac{1-\bar{z}_1 z}{z - z_1} \frac{1-\bar{z}_2 z}{z - z_2} \cdots \frac{1-\bar{z}_m z}{z - z_m},$$

*wenn die Wurzeln von $F(z)$ innerhalb des Einheitskreises (mit ihrer Multiplizität gezählt) $z_1, z_2, \ldots, z_m$ sind. Dann ist*

a) $F^*(z)$ *regulär-analytisch für* $|z| < 1$.

b) $F^*(z) \neq 0$ *für* $|z| < 1$.

c) $f(\theta) = |F(z)|^2 = |F^*(z)|^2 \qquad (z = e^{i\Theta})$.

(6) d) $G(\alpha; f) = |F^*(\alpha)|^2$ [23]).

a) und b) sind klar; c) folgt aus der Gleichung

$$\left|\frac{1-\bar{z}_0 z}{z - z_0}\right| = 1. \qquad (|z| = 1; \quad |z_0| \neq 1).$$

d) läßt sich auf folgende Weise beweisen. Die Funktion

$$G(z) = \log F^*(z)$$

ist für $|z| < 1$ regulär; sie hat ferner am Rande des Einheitskreises nur logarithmische Singularitäten in endlicher Anzahl. Also ist mit Ausnahme von endlich vielen Stellen $\theta$

$$\log f(\theta) = 2\,\Re \log F^*(z) = 2\,\Re\, G(z) \qquad (z = e^{i\Theta}),$$

d. h. mit den vorigen Bezeichnungen $g(z) = ic + G(z)$ und also $D(z) = e^{ic} F^*(z)$, q. e. d.

## II. Teil.

## Eine Minimum-Aufgabe.

### § 3.

### Formulierung des Problems.

7. Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und ($L$) integrabel $A(f) > 0$ [24]), $\alpha$ eine beliebige komplexe Größe. Ich betrachte das Integral

[23]) Dies ist eine Verallgemeinerung des bekannten Jensenschen Satzes.

[24]) D. h. $f(\theta)$ ist positiv auf einer Menge vom positiven Maße.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|\,P_n(z)\,|^2\, d\,\theta \qquad (z = e^{i\,\Theta});$$

wo $P_n(z)$ ein Polynom $n$-ten Grades bezeichnet, welches der Bedingung

$$P_n(\alpha) = 1$$

genügt. Ich frage: Welches ist die *untere Grenze* $\mu_n(\alpha; f)$ dieses Integrals, während $P_n(z)$ mit der obigen Einschränkung die Gesamtheit der Polynome $n$-ten Grades durchläuft?

Ich setze

$$P_n(z) = x_0 + x_1(z-\alpha) + \ldots + x_n(z-\alpha)^n,$$

dann ist $\mu_n(\alpha; f)$ die untere Grenze der Hermiteschen Form

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|\,x_0 + x_1(z-\alpha) + \ldots + x_n(z-\alpha)^n\,|^2\, d\theta \qquad (z = e^{i\,\Theta})$$

für $x_0 = 1$. Die untere Grenze ist somit Minimum, das für ein einziges Wertsystem der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erreicht wird. Also

$$\mu_n(\alpha; f) = \text{Min}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|\,P_n(z)\,|^2\, d\theta \qquad (z = e^{i\,\Theta}),$$

während $P_n(\alpha) = 1$ ist. Oder

$$\mu_n(\alpha; f) = \text{Min}\,\frac{1}{2\pi}\,\frac{\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|\,P_n(z)\,|^2\, d\,\theta}{|\,P_n(\alpha)\,|^2} \qquad (z = e^{i\,\Theta}),$$

während $P_n(\alpha) \neq 0$ ist.

8. Es sei jetzt $|\,\alpha\,| < 1$. Zunächst ist es klar, daß man sich bei der Aufsuchung des Minimumwertes $\mu_n$ auf diejenigen Polynome $P_n(z)$ beschränken kann, die für $|\,z\,| < 1$ nicht verschwinden. Also

$$\mu_n(\alpha; f) = \text{Min}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|\,P_n(z)\,|^2\, d\theta \qquad (z = e^{i\,\Theta}),$$

während $P_n(z)$ die Gesamtheit derjenigen Polynome $n$-ten Grades durchläuft, welche den Bedingungen genügen:

a) $P_n(z) \neq 0$ für $|\,z\,| < 1$.

b) $P_n(\alpha) = 1$.

Sei nämlich $|\,z_0\,| < 1$ und $P_n(z_0) = 0$. Ich bilde das Polynom $(\alpha \neq z_0)$

$$P_n^*(z) = P_n(z)\,\frac{1 - \bar{z}_0 z}{z - z_0}\,\frac{\alpha - z_0}{1 - \bar{z}_0\,\alpha}.$$

Nun hat man bekanntlich

$$\left|\frac{1-\bar{z}_0 z}{z-z_0}\right| = 1 \qquad (z = e^{i\Theta})$$

und

$$\left|\frac{\alpha - z_0}{1-\bar{z}_0 \alpha}\right| < 1,$$

also

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|P_n^*(z)|^2\,d\theta < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|P_n(z)|^2\,d\theta \qquad (z = e^{i\Theta}),$$

während $P_n^*(\alpha) = P_n(\alpha) = 1$ ist; hieraus folgt die Behauptung.

9. Es sei wieder $|\alpha| < 1$. Ich gebe der vorher gestellten Minimum-Aufgabe eine andere Form. Zu diesem Zwecke zitiere ich den folgenden Satz des Herrn Fejér:

*Ist $\varphi_n(\theta)$ ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom $n$-ter Ordnung, so läßt es sich immer in der Form darstellen*

$$\varphi_n(\theta) = |P_n(z)|^2 \qquad (z = e^{i\Theta}),$$

*wo $P_n(z)$ ein Polynom $n$-ten Grades bezeichnet*[25]).

Diese Darstellung ist im allgemeinen auf mehrere Arten möglich. Man kann aber leicht eine eindeutig bestimmte „Normaldarstellung" festlegen, indem man etwa die folgenden Einschränkungen macht:

a) $\varphi_n(\theta) \not\equiv 0$.

b) $P_n(z) \neq 0$ für $|z| < 1$.

c) $P_n(\alpha)$ ist reell und positiv[26]).

Dann ist nach Satz VII

$$G(\alpha; \varphi_n) = |P_n(\alpha)|^2 = [P_n(\alpha)]^2.$$

Daraus folgt nun der

Satz VIII. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und $(L)$ integrabel, $A(f) > 0$, $|\alpha| < 1$, $n$ positiv und ganz. Dann ist*

$$\mu_n(\alpha; f) = \mathrm{Min}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\varphi_n(\theta)\,d\theta = \mathrm{Min}\,A(f\varphi_n),$$

---

25) L. Fejér, Über trigonometrische Polynome [Journal für die reine und angewandte Mathematik, 146 (1915), S. 53–82], S. 62.

26) Zu diesem Zwecke ist es am besten, die Formel

$$\left|\frac{1-\bar{z}_0 z}{z-z_0}\right| = 1 \qquad (|z| = 1;\ |z_0| \neq 1)$$

zu benutzen. Ist ferner $|R(z)|^2 = 1$ $(z = e^{i\Theta})$, wo $R(z)$ eine für $|z| \leqq 1$ reguläre und von 0 verschiedene rationale Funktion bezeichnet, so ist nach Satz VII

$$G(\alpha; 1) = 1 = |R(\alpha)|^2 \qquad (|\alpha| < 1),$$

d. h. $R(\alpha) = \mathrm{const.}$

*wo* $\varphi_n(\theta)$ *ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom* $n$*-ter Ordnung bezeichnet, für welches* $G(\alpha;\varphi_n)=1$ *ist. Allgemeiner wird also*

$$\mu_n(\alpha; f) = \operatorname{Min} \frac{A(f\varphi_n)}{G(\alpha;\varphi_n)} \tag{7}$$

*für alle nichtnegativen (nicht identisch verschwindenden) trigonometrischen Polynome* $n$*-ter Ordnung.*

## § 4.

## Über die Minimumwerte $\mu_n$.

10. Eine unmittelbare Folge der Definition ist die Ungleichung

$$\mu_n(\alpha; f) \leqq A(f) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ferner

$$\mu_n(\alpha; f) \leqq \mu_{n-1}(\alpha; f) \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots). \tag{8}$$

Die nichtnegativen Zahlen $\mu_n$ streben somit einem Grenzwerte zu, d. h. es gilt der

Satz IX. *Es sei* $f(\theta)$ *nichtnegativ und* $(L)$ *integrabel,* $A(f) > 0$. *Die Folge der nichtnegativen Zahlen*

$$\mu_n(\alpha; f) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

*ist monoton abnehmend; es existiert also der Grenzwert*

$$\lim_{n=\infty} \mu_n(\alpha; f) = \mu(\alpha; f) \leqq A(f).$$

11. Ich beweise jetzt den

Satz X. *Es sei* $f(\theta) \leqq g(\theta)$ *und* $g(\theta)$ *ebenfalls* $(L)$ *integrabel. Dann ist*

$$\mu_n(\alpha; f) \leqq \mu_n(\alpha; g) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Man hat nämlich

$$\mu_n(\alpha; f) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|P_n(z)|^2 d\theta \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\,|P_n(z)|^2 d\theta \quad (z = e^{i\theta})$$

für jedes Polynom $n$-ten Grades $P_n(z)$ mit der Eigenschaft $P_n(\alpha) = 1$. Daraus folgt die Behauptung.

Aus Satz X ergibt sich die Ungleichung

$$\mu(\alpha; f) \leqq \mu(\alpha; g).$$

Ist z. B. $0 \leqq m \leqq f(\theta) \leqq M$, so hat man

$$m\,\mu_n(\alpha; 1) \leqq \mu_n(\alpha; f) \leqq M\,\mu_n(\alpha; 1) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

und

$$m\,\mu(\alpha; 1) \leqq \mu(\alpha; f) \leqq M\,\mu(\alpha; 1). \tag{9'}$$

Die Größen $\mu_n(\alpha; 1)$, $\mu(\alpha; 1)$ lassen sich leicht berechnen. Man hat nämlich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n|^2 d\theta = |x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 \quad (z = e^{i\theta}),$$

also

$$\mu_n(\alpha; 1) = \operatorname{Min} \frac{|x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}{|x_0 + x_1\alpha + \ldots + x_n\alpha^n|^2}.$$

Nun ist nach der Schwarzschen Ungleichung

$$|x_0 + x_1\alpha + \ldots + x_n\alpha^n|^2 \leqq \frac{1-|\alpha|^{2n+2}}{1-|\alpha|^2}(|x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)$$

und für $x_k = \lambda\bar{\alpha}^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ ist hier das Gleichheitszeichen gültig. Also

$$(10) \qquad \mu_n(\alpha; 1) = \frac{1-|\alpha|^2}{1-|\alpha|^{2n+2}}\,^{27)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Hieraus folgt

$$(10') \qquad \mu(\alpha, 1) = \begin{cases} 1-|\alpha|^2 & \text{für} \quad |\alpha| < 1, \\ 0 & \text{für} \quad |\alpha| \geqq 1. \end{cases}$$

Man hat also nach dem Vorigen

$$(9) \qquad \frac{1-|\alpha|^2}{1-|\alpha|^{2n+2}} m \leqq \mu_n(\alpha; f) \leqq \frac{1-|\alpha|^2}{1-|\alpha|^{2n+2}} M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

und

$$(9') \qquad \begin{aligned} (1-|\alpha|^2)m \leqq \mu(\alpha; f) &\leqq (1-|\alpha|^2)M \qquad (|\alpha| < 1), \\ \mu(\alpha; f) &= 0 \qquad (|\alpha| \geqq 1). \end{aligned}$$

12. Es sei $|\alpha| < 1$. Eine andere Abschätzung der Minimumwerte $\mu_n$ erhält man auf folgende Weise. Es gilt nach $(C')$ die Ungleichung

$$G(\alpha; f)\, G(\alpha; \varphi_n) = G(\alpha; f\varphi_n) \leqq \frac{A(f\varphi_n)}{1-|\alpha|^2},$$

also

$$G(\alpha; f)(1-|\alpha|^2) \leqq \frac{A(f\varphi_n)}{G(\alpha; \varphi_n)}$$

für sämtliche nichtnegative trigonometrische Polynome $n$-ter Ordnung $\varphi_n(\theta)$, welche nicht identisch verschwinden. Daraus folgt die Ungleichung

$$(11) \qquad G(\alpha; f)(1-|\alpha|^2) \leqq \mu_n(\alpha; f) \qquad (|\alpha| < 1;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

und so

$$(11') \qquad G(\alpha; f)(1-|\alpha|^2) \leqq \mu(\alpha; f) \qquad (|\alpha| < 1).$$

---

27) Ist $|\alpha| = 1$, so ist dieser Ausdruck durch $\dfrac{1}{n+1}$ zu ersetzen.

13. Ich beweise jetzt den

Satz XI. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und $(L)$ integrabel, $A(f) > 0$, $|\alpha| < 1$, $n$ eine feste positive Zahl. In der Ungleichung* (11) *steht dann und nur dann das Gleichheitszeichen, wenn (mit Ausnahme einer* 0-*Menge)*

$$f(\theta) = \frac{1}{|1-\bar{\alpha}z|^2}\frac{1}{\varphi(\theta)} \qquad (z = e^{i\theta}) \tag{12}$$

*ist, wo $\varphi(\theta)$ ein positives trigonometrisches Polynom $n$-ter Ordnung bezeichnet.*

Die Behauptung besteht aus zwei Teilen.

a) *Die Bedingung* (12) *ist notwendig.* Ist nämlich

$$\mu_n(\alpha; f) = G(\alpha; f)(1 - |\alpha|^2),$$

so hat man

$$G(\alpha; f)(1 - |\alpha|^2) = \frac{A(f\varphi_n^*)}{G(\alpha; \varphi_n^*)},$$

wo $\varphi_n^*(\theta)$ ein nicht identisch verschwindendes nichtnegatives trigonometrisches Polynom $n$-ter Ordnung bezeichnet. Also ist

$$G(\alpha; f\varphi_n^*)(1 - |\alpha|^2) = A(f\varphi_n^*),$$

d. h. nach Satz VI (mit Ausnahme einer 0-Menge)

$$f(\theta)\varphi_n^*(\theta) = \frac{c}{|1-\bar{\alpha}z|^2} \qquad (z = e^{i\theta},\ c > 0).$$

Daraus ergibt sich aber, daß $\varphi_n^*(\theta)$ nicht verschwinden darf, da in diesem Falle $f(\theta)$ aufhört $(L)$ integrabel zu sein. Also ist $\varphi_n^*(\theta) > 0$, woraus die Behauptung folgt.

b) *Die Bedingung* (12) *ist hinreichend.* Man hat laut Definition für jedes $\varphi_n(\theta)$

$$\mu_n(\alpha; f) \leqq \frac{A(f\varphi_n)}{G(\alpha; \varphi_n)},$$

also speziell

$$\mu_n(\alpha; f) \leqq \frac{A(f\varphi)}{G(\alpha; \varphi)} = \frac{A(f\varphi)}{G(\alpha; f\varphi)} G(\alpha; f).$$

Nun ist (mit Ausnahme einer 0-Menge)

$$f(\theta)\varphi(\theta) = \frac{1}{|1-\bar{\alpha}z|^2} \qquad (z = e^{i\theta}),$$

so daß nach Satz VI

$$\frac{A(f\varphi)}{G(\alpha; f\varphi)} = 1 - |\alpha|^2.$$

Daraus folgt

$$\mu_n(\alpha; f) \leqq G(\alpha; f)(1 - |\alpha|^2)$$

und so nach (11)

$$\mu_n(\alpha; f) = G(\alpha; f)(1 - |\alpha|^2), \quad \text{q. e. d.}$$

Ist z. B. $\varphi(\theta)$ ein positives trigonometrisches Polynom $p$-ter Ordnung und

$$f(\theta) = \frac{1}{|1-\bar{\alpha} z|^2} \frac{1}{\varphi(\theta)} \qquad (|\alpha| < 1;\ z = e^{i\theta}),$$

so ist

$$\mu_n(\alpha; f) = G(\alpha; f)(1 - |\alpha|^2) \qquad (n \geqq p)$$

und also

$$\mu(\alpha; f) = G(\alpha; f)(1 - |\alpha|^2).$$

## § 5.

## Konvergenz der Minimumwerte $\mu_n$.

14. Das soeben erhaltene Resultat suggeriert die Vermutung, daß in der Ungleichung (11′) immer das Gleichheitszeichen steht. Diese Vermutung wird in der Tat bestätigt durch den

Satz XII. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und $(L)$ integrabel, $A(f) > 0$, $|\alpha| < 1$. Die Folge der Minimumwerte*

$$\mu_n(\alpha; f) = \operatorname{Min} \frac{A(f\varphi_n)}{G(\alpha; \varphi_n)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

*strebt monoton abnehmend nach dem Grenzwerte*

$$\lim_{n=\infty} \mu_n(\alpha; f) = \mu(\alpha; f) = G(\alpha; f)(1 - |\alpha|^2).$$

Man hat nämlich nach Satz VIII und IX

$$\mu(\alpha; f) \leqq \frac{A(f\varphi)}{G(\alpha; \varphi)}, \tag{13}$$

wo $\varphi(\theta)$ ein beliebiges nichtnegatives trigonometrisches Polynom bezeichnet, das nicht identisch verschwindet.

Es sei zunächst $0 < m \leqq f(\theta)$. Ich behaupte, daß die Ungleichung (13) auch dann richtig bleibt, wenn $\varphi(\theta)$ eine beliebige $(L)$ integrable Funktion bezeichnet, für welche

$$0 < \mu \leqq \varphi(\theta) \leqq M$$

ist. Ich bilde nämlich die Partialsummen

$$s_0(\theta),\ s_1(\theta),\ \ldots,\ s_n(\theta),\ \ldots$$

der zu $\varphi(\theta)$ gehörigen Fourierschen Reihe, ferner die arithmetischen Mittel derselben

$$\sigma_0(\theta),\ \sigma_1(\theta),\ \ldots,\ \sigma_n(\theta),\ \ldots.$$

Dann ist nach L. Fejér[28])

$$0 < \mu \leqq \sigma_n(\theta) \leqq M \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi;\ n = 0, 1, 2, \ldots);$$

[28]) Untersuchungen über Fouriersche Reihen [Mathematische Annalen, 58 (1904), S. 51—69], S. 60.

ferner

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\varphi(\theta) - \sigma_n(\theta)]^2 \, d\theta = 0 \text{ [29]},$$

also für genügend große $n$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(\theta) - \sigma_n(\theta)| \, d\theta < \varepsilon,$$

wo $\varepsilon > 0$ beliebig ist.

Nun ist $\sigma_n(\theta)$ ein positives trigonometrisches Polynom; also

$$\mu(\alpha; f) \leqq \frac{A(f\sigma_n)}{G(\alpha; \sigma_n)}.$$

Ich benutze jetzt die Ungleichungen

$$|e^{x_1} - e^{x_2}| \leqq e^a |x_1 - x_2| \qquad (x_1 \text{ und } x_2 \leqq a),$$

$$|\log y_1 - \log y_2| \leqq \frac{|y_1 - y_2|}{b} \qquad (y_1 \text{ und } y_2 \geqq b > 0);$$

man hat

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log\varphi(\theta) - \log\sigma_n(\theta)| \frac{1-|\alpha|^2}{|1-\bar{\alpha}z|^2} d\theta \leqq \frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log\varphi(\theta) - \log\sigma_n(\theta)| \, d\theta$$

$$\leqq \frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|}\frac{1}{\mu}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(\theta) - \sigma_n(\theta)| \, d\theta < \frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|}\frac{\varepsilon}{\mu} \qquad (z = e^{i\Theta}),$$

also

$$|G(\alpha; \varphi) - G(\alpha; \sigma_n)| < \frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|}\frac{\mathsf{M}}{\mu}\varepsilon = \varepsilon',$$

wo $\varepsilon'$ mit $\varepsilon$ nach 0 strebt.

Ich setze ferner $\eta = \sqrt{\varepsilon}$. Man hat

$$|A(f\varphi) - A(f\sigma_n)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{\eta f(\Theta) < 1} f(\theta)|\varphi(\theta) - \sigma_n(\theta)| d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\eta f(\Theta) \geqq 1} f(\theta)|\varphi(\theta) - \sigma_n(\theta)| d\theta$$

$$< \frac{\varepsilon}{\eta} + \frac{\mathsf{M}}{\pi}\int_{\eta f(\Theta) \geqq 1} f(\theta) \, d\theta = \varepsilon'',$$

wo $\varepsilon''$ mit $\varepsilon$ nach 0 strebt.

Aus (13) folgt hiermit für genügend kleine $\varepsilon$

$$\mu(\alpha; f) < \frac{A(f\varphi) + \varepsilon''}{G(\alpha; \varphi) - \varepsilon'},$$

---

[29]) Dies folgt aus der Ungleichung

$$\left(\frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1}\right)^2 \leqq \frac{a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n+1}.$$

d. h.

$$\mu(\alpha; f) \leqq \frac{A(f\varphi)}{G(\alpha; \varphi)}, \quad \text{q. e. d.}$$

Daraus folgt sofort, daß (13) auch dann richtig bleibt, wenn die untere Grenze von $\varphi(\theta)$ gleich 0 ist, vorausgesetzt dabei, daß $G(\varphi) > 0$ ist. In der Tat, hat man für jedes $\varepsilon > 0$

$$\mu(\alpha; f) \leqq \frac{A[f(\varphi+\varepsilon)]}{G(\alpha; \varphi+\varepsilon)} \leqq \frac{A(f\varphi)+\varepsilon A(f)}{G(\alpha; \varphi)},$$

woraus die Behauptung folgt.

Ich setze jetzt in (13)

$$\varphi(\theta) = \frac{1-|\alpha|^2}{|1-\bar{\alpha}z|^2}\frac{1}{f(\theta)} \qquad (z = e^{i\theta}).$$

Es ist

$$0 < \varphi(\theta) \leqq \frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|}\frac{1}{m}$$

und $G(\varphi) < 0$, da $G(\varphi)G(f) = 1-|\alpha|^2$ ist. Man hat ferner nach Satz VI

$$G(\alpha; f\varphi) = \frac{A(f\varphi)}{1-|\alpha|^2},$$

also

$$\mu(\alpha; f) \leqq \frac{A(f\varphi)}{G(\alpha; f\varphi)} G(\alpha; f) = G(\alpha; f)(1-|\alpha|^2),$$

d. h. nach (11′)

$$\mu(\alpha; f) = G(\alpha; f)(1-|\alpha|^2), \quad \text{q. e. d.}$$

Es sei endlich $f(\theta)$ eine nichtnegative, $(L)$ integrable Funktion und $A(f) > 0$. Dann ist nach Satz X für jedes $\varepsilon > 0$

$$\mu(\alpha; f) \leqq \mu(\alpha; f+\varepsilon) = G(\alpha; f+\varepsilon)(1-|\alpha|^2),$$

also nach (3′)

$$\mu(\alpha; f) \leqq G(\alpha; f)(1-|\alpha|^2),$$

woraus die Behauptung folgt.

Damit ist Satz XII völlig bewiesen.

## III. Teil.

## Über die Toeplitzschen Formen.

Wir haben bereits in § 3 den Zusammenhang bemerkt, der zwischen der dort gestellten Minimum-Aufgabe und gewissen Hermiteschen Formen besteht. In diesem III. Teil will ich die bisher erhaltenen Sätze in der erwähnten Beziehung deuten, bzw. auf die Untersuchung Toeplitzscher Formen anwenden.

## § 6.

## Toeplitzsche Formen und Toeplitzsche Determinanten.

15. Es sei $f(\theta)(L)$ integrabel und

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta, \quad b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots; b_0 = 0);$$

ich setze

$$c_{\pm n} = a_n \pm i b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) z^{\pm n}\, d\theta \qquad (z = e^{i\theta}; n = 0, 1, 2, \ldots),$$

dann ist

$$c_{-n} = \bar{c}_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ich bilde mit Toeplitz[30]) folgende Schar von Hermiteschen Formen

$$\text{(T)} \quad T_n(f; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} c_{p-q} x_p \bar{x}_q$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n|^2\, d\theta$$
$$(z = e^{i\theta}; n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ich bezeichne diese Formen als die „*zu* $f(\theta)$ *gehörigen Toeplitzschen Formen*“, ihre Determinanten

$$\text{(D)}\ D_n[f(\cdot)] = D_n(f) = \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & c_{-2} & \ldots & c_{-n} \\ c_1 & c_0 & c_{-1} & \ldots & c_{-n+1} \\ c_2 & c_1 & c_0 & \ldots & c_{-n+2} \\ & & & \ldots & \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 - ib_1 & a_2 - ib_2 & \ldots & a_n - ib_n \\ a_1 + ib_1 & a_0 & a_1 - ib_1 & \ldots & a_{n-1} - ib_{n-1} \\ a_2 + ib_2 & a_1 + ib_1 & a_0 & \ldots & a_{n-2} - ib_{n-2} \\ & & & \ldots & \\ a_n + ib_n & a_{n-1} + ib_{n-1} & a_{n-2} + ib_{n-2} & \ldots & a_0 \end{vmatrix}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

als die „*zu* $f(\theta)$ *gehörigen Toeplitzschen Determinanten*“.

---

[30]) A. a. O. [4]) b) S. 499.

16. Es sei jetzt (mit Ausnahme einer 0-Menge)

$$m \leqq f(\theta) \leqq M,$$

ferner seien die Veränderlichen der Bedingung

$$|x_0|^2 + |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = 1$$

unterworfen; dann ist

$$(14) \qquad m \leqq T_n(f; x_0, x_1, \dots, x_n) \leqq M \qquad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

da ja

$$T_n(1; x_0, x_1, \dots, x_n) = |x_0|^2 + |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = 1$$

ist. Das Gleichheitszeichen in (14) ist dann und nur dann gültig, wenn (mit Ausnahme einer 0-Menge) $f(\theta) =$ const. ist.

Es sei ferner $f(\theta) \geqq 0$ und $A(f) > 0$. Dann ist

$$T_n(f; x_0, x_1, \dots, x_n) > 0$$

für alle $x_0, x_1, \dots, x_n$, die nicht sämtlich verschwinden; also ist

$$(15) \qquad D_n(f) > 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

17. Herr G. Pólya hat eine Darstellung der Toeplitzschen Determinanten gegeben[31]), die aus (D) mit Hilfe einer Formel von G. Landsberg[32]) leicht gefolgert werden kann, nämlich

$$(\mathrm{P}) \quad D_n(f) = \frac{2^{n^2-1}}{(n+1)!} \frac{1}{\pi^{n+1}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi}}_{n+1} f(\theta_0) f(\theta_1) \dots f(\theta_n) \prod_{\mu,\nu}^{0,1,\dots,n} \sin^2 \frac{\theta_\mu - \theta_\nu}{2} \, d\theta_0 \, d\theta_1 \dots d\theta_n$$
$$(n = 0, 1, 2, \dots).$$

Daraus folgt, wenn $g(\theta)$ nichtnegativ und $(L)$ integrabel ist und $0 \leqq m \leqq f(\theta) \leqq M$ ist, daß

$$(16) \qquad m^{n+1} \leqq D_n(f) \leqq M^{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(17) \qquad m^{n+1} D_n(g) \leqq D_n(fg) \leqq M^{n+1} D_n(g) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ist; Gleichheit kann hier nur dann bestehen, wenn (mit Ausnahme einer 0-Menge) $f(\theta) =$ const. ist. Ferner folgt mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung

$$(18) \qquad D_n(fg) \leqq \sqrt{D_n(f^2) D_n(g^2)} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

hier ist das Gleichheitszeichen nur dann gültig, wenn (mit Ausnahme einer 0-Menge) $f(\theta) =$ const. $g(\theta)$ ist.

---

[31]) L'Intermédiaire des Mathématiciens, **21** (1914), S. 27. Question 4340.

[32]) G. Landsberg, Theorie der Elementarteiler linearer Integralgleichungen [Mathematische Annalen, **69** (1910), S. 227–265] S. 231.

18. Es sei jetzt wieder allgemein $f(\theta)$ $(L)$ integrabel. Ich führe einige Hilfssätze aus der Theorie der Hermiteschen Formen an.

Zunächst gibt es bekanntlich eine lineare Transformation

$$x_\varkappa = l_{\varkappa 0}^{(n)} \xi_0^{(n)} + l_{\varkappa 1}^{(n)} \xi_1^{(n)} + \ldots + l_{\varkappa n}^{(n)} \xi_n^{(n)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n)$$

mit der Eigenschaft

$$\text{(T}'\text{)} \qquad T_n(f; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \lambda_0^{(n)} |\xi_0^{(n)}|^2 + \lambda_1^{(n)} |\xi_1^{(n)}|^2 + \ldots + \lambda_n^{(n)} |\xi_n^{(n)}|^2,$$

während

$$|x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 = |\xi_0^{(n)}|^2 + |\xi_1^{(n)}|^2 + \ldots + |\xi_n^{(n)}|^2$$

ist. Hier bezeichnen

$$(19) \qquad \lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

eindeutig bestimmte reelle Konstanten, die ich als die „*zu* $f(\theta)$ *gehörigen Eigenwerte*" bezeichne. Sie ergeben sich bekanntlich als die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$D_n(f - \lambda) = [c_{p-q} - \varepsilon_{pq} \lambda]_0^n = \begin{vmatrix} c_0 - \lambda & c_{-1} & c_{-2} & \ldots & c_{-n} \\ c_1 & c_0 - \lambda & c_{-1} & \ldots & c_{-n+1} \\ c_2 & c_1 & c_0 - \lambda & \ldots & c_{-n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

(Die Bezeichnung $[a_{pq}]_0^n$ für die zugehörige Determinante wird im folgenden überall benutzt werden.)

Daraus folgt, daß, wenn $a$ und $b$ reelle Konstanten bezeichnen, so gehören zu $a + b f(\theta)$ die Eigenwerte

$$a + b \lambda_\varkappa^n \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n; \ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ferner ist

$$D_n(f) = \lambda_0^{(n)} \lambda_1^{(n)} \ldots \lambda_n^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Es sei nun das kleinste bzw. größte unter den Zahlen (19) $\lambda^{(n)}$ bzw. $\Lambda^{(n)}$; aus (T′) folgt

$$\lambda^{(n)} = \operatorname{Min} T_n(f; x_0, x_1, \ldots, x_n),$$
$$\Lambda^{(n)} = \operatorname{Max} T_n(f; x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

während

$$|x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 = 1$$

ist. Ist also (mit Ausnahme einer 0-Menge) $m \leqq f(\theta) \leqq M$, so ist

$$(20) \qquad m \leqq \lambda_\varkappa^{(n)} \leqq M \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n; \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots);$$

Gleichheit besteht hier nur dann, wenn (mit Ausnahme einer 0-Menge) $f(\theta) = \text{const.}$ ist.

## § 7.

## Sätze über die Toeplitzschen Determinanten.

19. Ich gebe jetzt der im II. Teil behandelten Minimum-Aufgabe folgende Formulierung. Ich setze

$$P_n(z) = x_0 + x_1(z-\alpha) + \dots + x_n(z-\alpha)^n,$$

dann ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|P_n(z)|^2\,d\theta = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} k_{pq}\,x_p\,\bar{x}_q \qquad (z = e^{i\theta}),$$

wo

$$k_{pq} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,(z-\alpha)^p\,(\bar{z}-\bar{\alpha})^q\,d\theta \qquad (z = e^{i\theta};\;\; p, q = 0, 1, 2, \dots)$$

ist. Diese Hermitesche Form ist positiv definit, d. h. ihr Wert ist immer nichtnegativ und verschwindet nur für $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Die Bedingung $P_n(\alpha) = 1$ ist damit äquivalent, daß $x_0 = 1$ ist.

Es gilt nun der elementare Satz:

*Ist die Hermitesche Form*

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} a_{pq}\,x_p\,\bar{x}_q$$

*positiv definit, so ist*

$$\operatorname*{Min}_{x_0=1} \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} a_{pq}\,x_p\,\bar{x}_q = \frac{[a_{pq}]_0^n}{[a_{pq}]_1^n}\text{ [33]}.$$

Daraus folgt

$$\mu_n(\alpha; f) = \frac{[k_{pq}]_0^n}{[k_{pq}]_1^n}.$$

Ich betrachte jetzt die lineare Transformation, definiert durch die Identität in $z$

$$x_0 + x_1(z-\alpha) + \dots + x_n(z-\alpha)^n = y_0 + y_1 z + \dots + y_n z^n,$$

d. h.

$$\begin{aligned}
x_0 &= y_0 + y_1\alpha + \dots + y_n\alpha^n \\
x_1 &= \phantom{y_0 + {}} y_1 \phantom{\alpha} + \dots + n\,y_n\,\alpha^{n-1} \\
&\;\;\dots \\
x_n &= \phantom{y_0 + y_1\alpha + \dots + n\,{}} y_n .
\end{aligned}$$

[33]) S. etwa J. A. Serret, Handbuch der höheren Algebra. Zweite Auflage, 1878, I. Bd. S. 460.

Diese Transformation hat die Determinante 1; ferner hat die Form

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|y_0 + y_1 z + \cdots + y_n z^n|^2\, d\theta \qquad (z = e^{i\theta})$$

die Determinante $D_n(f)$. Also

$$[k_{pq}]_0^n = D_n(f).$$

Ähnlich

$$[k_{pq}]_1^n = D_{n-1}[f(.)\,|z-\alpha|^2] \qquad (z = e^{i\cdot}),$$

weil ja

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} k_{pq}\, x_p\, \bar{x}_q$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|z-\alpha|^2\,|x_1 + x_2(z-\alpha) + \cdots + x_n(z-\alpha)^{n-1}|^2\, d\theta \qquad (z = e^{i\theta})$$

ist. Also

(21) $$\mu_n(\alpha; f) = \frac{D_n(f)}{D_{n-1}[f(.)\,|z-\alpha|^2]} \qquad (z = e^{i\cdot};\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ist z. B. $\alpha = 0$, so folgt

(22) $$\mu_n(0; f) = \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es gilt also der

Satz XIII. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und $(L)$ integrabel, $A(f) > 0$. Die Toeplitzschen Determinanten $D_n(f)$ sind dann sämtlich positiv und*

$$\mu_n(0; f) = \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

20. Als unmittelbare Folge der §§ 4 und 5 ergibt sich jetzt eine Reihe von Sätzen über Toeplitzsche Determinanten.

Satz XIV. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und $(L)$ integrabel, $A(f) > 0$. Die Folge der positiven Zahlen*

$$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

*ist monoton abnehmend; es existiert also der Grenzwert*

$$\lim_{n=\infty}\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} = \lim_{n=\infty}\sqrt[n+1]{D_n(f)} = D(f) \leqq A(f).$$ [34]

Daraus folgt, daß

$$D(f) \leqq \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \leqq A(f) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

[34]) Diesen Satz hat zuerst Herr M. Fekete mit Hilfe eines Determinantensatzes bewiesen.

ist. Man hat nun

$$D_n(f) = A(f) \prod_{\varkappa=1}^{n} \frac{D_\varkappa(f)}{D_{\varkappa-1}(f)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

also

$$(23) \qquad \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \leqq \sqrt[n+1]{D_n(f)}$$

und

$$D(f) \leqq \sqrt[n+1]{D_n(f)} \leqq A(f) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ferner ist

$$(24) \qquad \sqrt[n+1]{D_n(f)} \leqq \sqrt[n]{D_{n-1}(f)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

weil [ich schreibe kurz $D_n$ statt $D_n(f)$]

$$\sqrt[n+1]{D_n} = \sqrt[n+1]{\frac{D_n}{D_{n-1}} D_{n-1}} \leqq \sqrt[n+1]{\frac{D_{n-1}}{D_{n-2}} D_{n-1}} \leqq \sqrt[n+1]{D_{n-1}^{\frac{1}{n}} D_{n-1}} = \sqrt[n]{D_{n-1}}.$$

Satz XV. *Es sei $f(\theta) \leqq g(\theta)$ und $g(\theta)$ auch (L) integrabel. Dann ist*

$$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \leqq \frac{D_n(g)}{D_{n-1}(g)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$D(f) \leqq D(g).$$

Ist ferner $0 \leqq m \leqq f(\theta) \leqq M$, so ergibt sich aus Satz XV [35])

$$(25) \qquad m \leqq \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \leqq M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

und

$$(25') \qquad m \leqq \sqrt[n+1]{D_n(f)} \leqq M \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

endlich

$$m \leqq D(f) \leqq M.$$

Aus (11) folgt

$$(26) \qquad G(f) \leqq \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

und also

$$G(f) \leqq D(f).$$

Nach Satz XI gilt ferner der

Satz XVI. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, $A(f) > 0$, $n$ eine feste positive Zahl. In der Ungleichung (26) besteht dann und nur dann das Gleichheitszeichen, wenn (mit Ausnahme einer 0-Menge)*

$$f(\theta) = \frac{1}{\varphi(\theta)}$$

[35]) Ist $c > 0$, so ist $D_n(c) = c^{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

*ist, wo $\varphi(\theta)$ ein positives trigonometrisches Polynom $n$-ter Ordnung bezeichnet.*

Ist also $\varphi(\theta)$ ein positives trigonometrisches Polynom $p$-ter Ordnung und

$$f(\theta) = \frac{1}{\varphi(\theta)},$$

so ist

$$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} = G(f) \qquad (n \geqq p),$$

also

$$D(f) = G(f).$$

Es gilt allgemein der

Satz XVII. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und $(L)$ integrabel, $A(f) > 0$. Die Folge der positiven Zahlen*

$$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

*ist monoton abnehmend und hat den Grenzwert*

$$\lim_{n=\infty} \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} = \lim_{n=\infty} \sqrt[n+1]{D_n(f)} = G(f).$$ [36])

§ 8.

## Ein Satz über die Eigenwerte der Toeplitzschen Formen.

21. Satz XVIII. *Es sei $f(\theta)$ $(L)$ integrabel und $m \leqq f(\theta) \leqq M$. Es seien ferner*

$$\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

*die zu $f(\theta)$ gehörigen Eigenwerte. Dann ist*

$$m \leqq \lambda_\varkappa^{(n)} \leqq M \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

*und wenn $F(\lambda)$ eine für $m \leqq \lambda \leqq M$ definierte stetige Funktion bezeichnet,*

$$\lim_{n=\infty} \frac{F(\lambda_0^{(n)}) + F(\lambda_1^{(n)}) + \ldots + F(\lambda_n^{(n)})}{n+1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F[f(\theta)]\, d\theta.$$ [37])

Der erste Teil dieses Satzes wurde bereits in § 6 bewiesen. Hier muß ich also nur den zweiten Teil beweisen.

---

[36]) Diesen Satz hat Herr G. Pólya vermutet. Sein erster Beweis rührt von mir her und ist für stetige Funktionen in meiner Arbeit enthalten: Ein Grenzwertsatz über die Toeplitzschen Determinanten einer reellen positiven Funktion [Mathematische Annalen, 76 (1915), S. 490–503].

[37]) A. a. O. [6]).

Zunächst ist es klar, daß der Spezialfall $m > 0$, $F(\lambda) = \log\lambda$ in Satz XVII enthalten ist. Dann ist nämlich

$$G(f) = e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log f(\Theta)\,d\Theta}$$

und also

$$\lim_{n=\infty}\frac{\log D_n(f)}{n+1} = \lim_{n=\infty}\frac{\log\lambda_0^{(n)}+\log\lambda_1^{(n)}+\ldots+\log\lambda_n^{(n)}}{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log f(\theta)\,d\theta.$$

Aus diesem Spezialfall folgt aber, wie ich nun zeigen will, der Satz XVIII.

In der Tat sei $|f(\theta)| \leqq \sigma$. Den Fall $A(|f|) = 0$ schließe ich aus, also $\sigma > 0$. Es bezeichne nun $\alpha$ eine reelle Veränderliche und sei $|\alpha| < \frac{1}{\sigma}$. Dann ist die Funktion $1 + \alpha f(\theta)$ positiv, also nach Satz XVII

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[n+1]{D_n(1+\alpha f)} = e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log[1+\alpha f(\Theta)]\,d\Theta},$$

oder

$$\lim_{n=\infty}\frac{\log(1+\alpha\lambda_0^{(n)})+\ldots+\log(1+\alpha\lambda_n^{(n)})}{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log[1+\alpha f(\theta)]\,d\theta \qquad \left(|\alpha| < \frac{1}{\sigma}\right).$$

Die Potenzreihe

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$

konvergiert aber für $|x| < 1$; wenn ich also

$$s_n^{(k)} = \lambda_0^{(n)k} + \lambda_1^{(n)k} + \ldots + \lambda_n^{(n)k} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, 3, \ldots)$$

setze, so ist die letzte Gleichung folgendermaßen zu schreiben:

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{s_n^{(k)}}{n+1}\alpha^k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}[f(\theta)]^k\alpha^k\right\}d\theta \qquad \left(|\alpha| < \frac{1}{\sigma}\right);$$

die Reihe in der geschweiften Klammer konvergiert aber (für festes $\alpha$) in $\theta$ gleichmäßig, also ist

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{s_n^{(k)}}{n+1}\alpha^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[f(\theta)]^k\,d\theta\cdot\alpha^k \qquad \left(|\alpha| < \frac{1}{\sigma}\right).$$

Ich benutze jetzt den folgenden Satz von Vitali[38]):

[38]) Auf die Anwendbarkeit des Vitalischen Satzes hat mich Herr G. Pólya aufmerksam gemacht.

*Es seien $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ regulär-analytische Funktionen für $|z| \leqq R$ und*

$$|f_n(z)| \leqq M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots;\ |z| \leqq R).$$

*Es existiere ferner $\lim\limits_{n=\infty} f_n(z) = f(z)$ für unendlich viele $z$, die im Innern des Kreises $|z| \leqq R$ mindestens einen Häufungspunkt besitzen. Dann existiert $\lim\limits_{n=\infty} f_n(z) = f(z)$ für jedes $|z| < R$, und zwar gleichmäßig für $|z| \leqq \varrho < R$; $f(z)$ ist somit regulär für $|z| < R$.*

Es ist hier

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{s_n^{(k)}}{n+1} z^k, \qquad f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(\theta)]^k \, d\theta \cdot z^k;$$

ferner kann ich

$$R = \frac{1}{2\sigma}, \quad M = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

setzen. Man hat dann $\lim\limits_{n=\infty} f_n(z) = f(z)$ für jedes $z$, welches reell ist und im Intervalle $(-R, R)$ liegt. Man hat also gleichmäßig für $|z| \leqq \varrho < R$

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = f(z)$$

und folglich

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(k)}}{n+1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(\theta)]^k \, d\theta \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Das bedeutet aber soviel, daß der Satz XVIII für $F(\lambda) = \lambda^k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ gültig ist. Da er nun für $F(\lambda) = 1$ trivial ist, so bleibt er auch dann richtig, wenn $F(\lambda)$ ein beliebiges Polynom bezeichnet.

Jetzt gelangt man schon leicht zum Ziele. Es sei nämlich $F(\lambda)$ stetig für $m \leqq \lambda \leqq M$ und $\varepsilon > 0$ beliebig; man kann dann ein Polynom $P(\lambda)$ finden, das die Eigenschaft

$$|F(\lambda) - P(\lambda)| > \varepsilon \qquad (m \leqq \lambda \leqq M)$$

besitzt. Dann ist für jedes $n$

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{\varkappa=0}^{n} F(\lambda_\varkappa^{(n)}) - \frac{1}{n+1} \sum_{\varkappa=0}^{n} P(\lambda_\varkappa^{(n)}) \right| < \varepsilon,$$

also

$$\limsup_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\varkappa=0}^{n} F(\lambda_\varkappa^{(n)}) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P[f(\theta)] \, d\theta + \varepsilon \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F[f(\theta)] \, d\theta + 2\varepsilon.$$

Ähnlich folgt

$$\liminf_{n=\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{\varkappa=0}^{n} F(\lambda_\varkappa^{(n)}) \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F[f(\theta)]\,d\theta - 2\varepsilon,$$

d. h. da $\varepsilon$ beliebig klein ist,

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{\varkappa=0}^{n} F(\lambda_\varkappa^{(n)}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F[f(\theta)\,d\theta, \qquad \text{q. e. d.}$$

## § 9.

## Verallgemeinerungen.

22. Satz XVIII gestattet einige Verallgemeinerungen. Zunächst zitiere ich folgenden bekannten Hilfssatz:

*Es sei*

$$A_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} a_{pq} x_p \bar{x}_q \qquad (a_{pq} = \bar{a}_{qp})$$

*eine beliebige Hermitesche Form und*

$$\mathsf{A}_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} \alpha_{pq} x_p \bar{x}_q \qquad (\alpha_{pq} = \bar{\alpha}_{qp})$$

*positiv definit. Dann gibt es eine lineare Transformation der Variablen* $x_0, x_1, \ldots, x_n$, *so daß*

$$A_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \lambda_0 |\xi_0|^2 + \lambda_1 |\xi_1|^2 + \ldots + \lambda_n |\xi_n|^2$$

*und*

$$\mathsf{A}_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = |\xi_0|^2 + |\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_n|^2$$

*ist;* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *sind hier eindeutig bestimmte reelle Konstanten, die der „charakteristischen Gleichung“*

$$[a_{pq} - \lambda \alpha_{pq}]_0^n = 0$$

*genügen.*

Die Konstanten $\lambda_\varkappa$ kann ich als *die zu* $A_n(x)$ *gehörigen Eigenwerte* (*im weiteren Sinne*), oder als *die Eigenwerte mit der Nebenbedingung* $\mathsf{A}_n(x) = 1$ bezeichnen. Ist

$$\mathsf{A}_n(x) = |x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2,$$

so stimmen diese mit den gewöhnlichen Eigenwerten (Pkt. 18) überein.

Es sei nun $\lambda$ die kleinste, $\Lambda$ die größte unter diesen Konstanten; dann hat man

$$\lambda = \operatorname{Min} A_n(x),$$
$$\Lambda = \operatorname{Max} A_n(x),$$

während $\mathsf{A}_n(x) = 1$ ist. Ist also $m \leqq A_n(x) \leqq M$, während $\mathsf{A}_n(x) = 1$ ist, so hat man

$$m \leqq \lambda_\varkappa \leqq M \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n).$$

Ferner ist es klar, daß wenn $a$ und $b$ beliebige reelle Konstanten bezeichnen, so gehören zu der Form

$$a A_n(x) + b \mathsf{A}_n(x)$$

die Eigenwerte

$$a \lambda_\varkappa + b \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n).$$

23. Diese Sätze benutze ich zur Lösung der folgenden Aufgabe: *Es seien* $f(\theta)$, $g(\theta)$ $(L)$ *integrabel*, $0 < \mu \leqq g(\theta) \leqq \mathsf{M}$ *und*

$$m \leqq \frac{f(\theta)}{g(\theta)} \leqq M.$$

*Ich frage nach dem Minimum bzw. Maximum der Form*

$$T_n(f; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n|^2 \, d\theta \qquad (z = e^{i\theta})$$

*unter der Nebenbedingung*

$$T_n(g; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\,|x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n|^2 \, d\theta = 1 \ (z = e^{i\theta}).$$

Nach den vorigen betrachte ich einfach die charakteristische Gleichung in $\varrho$

$$D_n(f - \varrho g) = 0,$$

die $n+1$ reelle Wurzeln

$$\varrho_0^{(n)}, \varrho_1^{(n)}, \ldots, \varrho_n^{(n)}$$

besitzt. Das kleinste bzw. größte unter diesen liefert das gesuchte Minimum bzw. Maximum.

Es ist also

$$m \leqq \varrho_\varkappa^{(n)} \leqq M \quad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und nur dann kann hier Gleichheit bestehen, wenn (mit Ausnahme einer 0-Menge) $f(\theta) = \text{const.}\, g(\theta)$ ist.

Ferner ist

$$\varrho_0^{(n)} \varrho_1^{(n)} \ldots \varrho_n^{(n)} = \frac{D_n(f)}{D_n(g)},$$

also für $m > 0$

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n+1]{\varrho_0^{(n)} \varrho_1^{(n)} \ldots \varrho_n^{(n)}} = G\left(\frac{f}{g}\right).$$

Daraus ergibt sich mit wörtlicher Wiederholung des Verfahrens in § 8 die folgende Verallgemeinerung des dort bewiesenen Satzes:

Satz XIX. *Es seien $f(\theta), g(\theta)\,(L)$ integrabel, $0 < \mu \leqq g(\theta) \leqq M$ und*

$$m \leqq \frac{f(\theta)}{g(\theta)} \leqq M.$$

*Ferner*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, z^n\, d\theta,$$

$$d_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta) z^n\, d\theta \qquad (z = e^{i\Theta};\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

*Dann hat die Gleichung*

$$[c_{p-q} - \varrho\, d_{p-q}]_0^n = 0$$

*lauter reelle Wurzeln*

$$\varrho_0^{(n)}, \varrho_1^{(n)}, \ldots, \varrho_n^{(n)},$$

*für welche*

$$m \leqq \varrho_\varkappa^{(n)} \leqq M \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

*ist und wenn $F(\varrho)$ eine für $m \leqq \varrho \leqq M$ definierte stetige Funktion bezeichnet,*

$$\lim_{n=\infty} \frac{F(\varrho_0^{(n)}) + F(\varrho_1^{(n)}) + \ldots + F(\varrho_n^{(n)})}{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\left[\frac{f(\theta)}{g(\theta)}\right] d\theta.$$

24. Ich beweise jetzt folgende Verallgemeinerung des Satzes XVIII:

Satz XX. *Satz* XVIII *gilt auch dann, wenn $F(\lambda)$ eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten erster Art besitzt, angenommen, daß $f(\theta)$ die folgende Bedingung erfüllt: Ist $\lambda_0$ irgendeine dieser Unstetigkeitsstellen, so ist*

$$\operatorname{mes} E\,[f(\theta) = \lambda_0] = 0.$$

Ist z. B. $f(\theta)$ ein Polynom oder ein trigonometrisches Polynom, welches nicht identisch verschwindet, so ist diese Bedingung immer erfüllt.

Es genügt offenbar, den Satz für eine solche Funktion $F(\lambda)$ zu beweisen, welche die einzige Unstetigkeitsstelle erster Art $\lambda_0$ besitzt. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig; ich bezeichne mit $G_1(\lambda)$ und $G_2(\lambda)$ zwei stetige Funktionen, die den Bedingungen genügen:

a) $G_1(\lambda) = G_2(\lambda) = F(\lambda)$ für $|\lambda - \lambda_0| \geqq \varepsilon$.

b) $G_1(\lambda) \leqq F(\lambda)$ für $|\lambda - \lambda_0| \leqq \varepsilon$.

c) $G_2(\lambda) \geqq F(\lambda)$ für $|\lambda - \lambda_0| \leqq \varepsilon$.

Es seien ferner

$$|F(\lambda)| \text{ und } |G_\varkappa(\lambda)| < g \qquad (\varkappa = 1, 2;\ m \leqq \lambda \leqq M),$$

wo $g$ von $\varepsilon$ unabhängig ist. Man hat dann

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\varkappa=0}^{n} F(\lambda_\varkappa^{(n)}) \leqq \frac{1}{n+1}\sum_{\varkappa=0}^{n} G_2(\lambda_\varkappa^{(n)}),$$

also

$$\limsup_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\varkappa=0}^{n} F(\lambda_\varkappa^{(n)}) \leqq \lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\varkappa=0}^{n} G_2(\lambda_\varkappa^{(n)}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_2[f(\theta)]\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{|f(\Theta)-\lambda_0|\geqq\varepsilon} F[f(\theta)]\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{|f(\Theta)-\lambda_0|<\varepsilon} G_2[f(\theta)]\,d\theta$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F[f(\theta)]\,d\theta + \frac{g}{\pi}\int_{|f(\Theta)-\lambda_0|<\varepsilon} d\theta.$$

Ähnlich ergibt sich

$$\liminf_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\varkappa=0}^{n} F(\lambda_\varkappa^{(n)}) \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F[f(\theta)]\,d\theta - \frac{g}{\pi}\int_{|f(\Theta)-\lambda_0|<\varepsilon} d\theta.$$

Es ist aber

$$\lim_{\substack{\varepsilon=+0}} \int_{|f(\Theta)-\lambda_0|<\varepsilon} d\theta = \operatorname{mes} E[f(\theta)=\lambda_0] = 0,$$

woraus die Behauptung folgt.

Satz XIX läßt eine analoge Verallgemeinerung zu.

## § 10.

## Anwendungen.

25. Als Anwendung der Vorhergehenden beweise ich den

Satz XXI. *Es sei $f(\theta)$ beschränkt und $(L)$ integrabel, ihre Eigenwerte*

(19) $$\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

*Es seien $\alpha < \beta$ beliebige reelle Zahlen, für welche*

$$\operatorname{mes} E[\alpha < f(\theta) < \beta] > 0$$

*ist, so fällt für genügend große $n$ wenigstens eine der Zahlen* (19) *in das Intervall $\alpha < \lambda < \beta$.*

Andernfalls könnte ich nämlich eine stetige Funktion $F(\lambda)$ folgendermaßen definieren. Ich wähle zunächst die Zahlen $\alpha'$, $\beta'$ so, daß $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$ und

$$\operatorname{mes} F[\alpha' < f(\theta) < \beta'] > 0$$

sei. (Das ist immer möglich.) Ich setze dann

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{\lambda-\alpha}{\alpha'-\alpha} \\ 1 \\ \dfrac{\beta-\lambda}{\beta-\beta'} \\ 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{cases} \lambda \leqq \alpha \\ \alpha \leqq \lambda \leqq \alpha' \\ \alpha' \leqq \lambda \leqq \beta'. \\ \beta' \leqq \lambda \leqq \beta \\ \beta \leqq \lambda \end{cases}$$

Laut Voraussetzung gibt es beliebig große $n$, für welche

$$\frac{F(\lambda_0^{(n)})+F(\lambda_1^{(n)})+\ldots+F(\lambda_n^{(n)})}{n+1}=0,$$

während

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F[f(\theta)]\,d\theta \geqq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\alpha'<f(\Theta)<\beta'} F[f(\theta)]\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\operatorname{mes} E[\alpha'<f(\theta)<\beta'] > 0$$

ist und das widerspricht dem Satze XVIII.

26. Eine Folgerung des vorigen Satzes ist der

Satz XXII. *Es sei $f(\theta)(L)$ integrabel und (mit Ausnahme einer 0-Menge) $m \leqq f(\theta) \leqq M$; es gebe dabei keine Zahl $m' > m$ bzw. $M' < M$ mit derselben Eigenschaft. Ich setze*

$$\lambda^{(n)} = \operatorname{Min} \lambda_\varkappa^{(n)} \qquad (0 \leqq \varkappa \leqq n),$$

$$\Lambda^{(n)} = \operatorname{Max} \lambda_\varkappa^{(n)} \qquad (0 \leqq \varkappa \leqq n),$$

*dann ist*

$$\lim_{n=\infty} \lambda^{(n)} = m \quad \textit{und} \quad \lim_{n=\infty} \Lambda^{(n)} = M\text{ [39]}.$$

Ferner:

*Es sei $f(\theta)$ stetig, ihr Minimum $m$, ihr Maximum $M$. Ihre Eigenwerte sind dann im Intervalle $(m, M)$ überall dicht.*

Ähnliche Sätze gelten für die im Satze XIX definierten Eigenwerte $\varrho_\varkappa^{(n)}$.

27. Als Anwendung des Satzes XIX beweise ich nun den

Satz XXIII. *Es sei*

$$\chi(z) = \frac{1}{2} + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots$$

*für $|z| \leqq 1$ regulär und $\Re\chi(z) \geqq 0$. (Den Fall $\chi(z) = \frac{1}{2}$ schließe ich aus.) Dann ist $|\alpha_1| < 1$ und wenn ich*

$$|\alpha_1| = \sin\varphi \qquad \left(0 \leqq \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

*setze, so kann die Kurve*

$$w = \chi(z) \qquad (z = e^{i\Theta})$$

*nicht ganz im Winkelraume*

$$-\varphi \leqq \operatorname{Arg} w \leqq \varphi$$

*liegen.*

Ich setze

$$\chi(z) = g(\theta) + i f(\theta) \qquad (z = e^{i\Theta}),$$

[39]) S. F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris (Gauthier-Villars), 1913, S. 177—178.

wo $g(\theta) \geqq 0$ ist. Man kann offenbar voraussetzen, daß $g(\theta) \geqq \mu > 0$ ist, da sonst die Behauptung trivial ist. Ich betrachte den Quotienten

$$\operatorname{tg} \Phi(\theta) = \frac{f(\theta)}{g(\theta)},$$

wo $\Phi(\theta) = \operatorname{Arg} \chi(e^{i\theta})$ der Bedingung

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \Phi(\theta) \leqq \frac{\pi}{2}$$

unterworfen ist. Man hat nun mit Hilfe der vorigen Bezeichnungen

$$c_0 = 0, \qquad d_0 = \tfrac{1}{2}$$
$$c_1 = \frac{i\alpha_1}{2}, \qquad d_1 = \frac{\alpha_1}{2};$$

aus

$$D_1(g) = \begin{vmatrix} d_0 & \bar{d}_1 \\ d_1 & d_0 \end{vmatrix} = \frac{1 - |\alpha_1|^2}{4} > 0$$

folgt also $|\alpha_1| < 1$. Ferner ist die charakteristische Gleichung für $n = 1$

$$\frac{\varrho^2}{4} = \frac{|\alpha_1|^2}{4} |\varrho - i|^2 = \frac{|\alpha_1|^2}{4} (\varrho^2 + 1),$$

woraus

$$\varrho = \pm \frac{|\alpha_1|}{\sqrt{1 - |\alpha_1|^2}} = \pm \operatorname{tg} \varphi$$

folgt. Also ist

$$\operatorname{Min} \Phi(\theta) < -\varphi,$$
$$\operatorname{Max} \Phi(\theta) > \varphi \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi),$$

q. e. d.

28. Aus Satz XX folgt unmittelbar der

Satz XXIV. *Es sei $f(\theta)$ beschränkt und $(L)$ integrabel, ferner*

$$\operatorname{mes} E[f(\theta) = 0] = 0.$$

*Ich bezeichne die Anzahl der nichtnegativen Elemente in der Folge*

$$\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)},$$

*oder, was dasselbe ist, in der Folge*

$$D_0(f), D_1(f), \ldots, D_n(f)$$

*mit $p(n)$; ferner sei*

$$\operatorname{mes} E[f(\theta) \geqq 0] = p.$$

*Dann ist*

$$\lim_{n=\infty} \frac{p(n)}{n+1} = \frac{p}{2\pi}.$$ [40]

Hiermit schließe ich die Reihe der Anwendungen.

---

[40]) Man vgl. O. Toeplitz, a. a. O. [4]) b) S. 506 und [4]) c) S. 368.

(Eingegangen am 26. Februar 1919.)