Einige Hauptsätze aus der Lehre von den Curven dritter Ordnung.

Von

ERNST KÖTTER in Berlin.

In einer früheren Abhandlung*) habe ich, auf einer eigenthümlichen Weiterbildung der trilinearen Zuordnungsweise fussend, rein geometrische Beweise für die unendlich vielfache projectivische Erzeugbarkeit der algebraischen ebenen Curven gegeben. Diese Entwickelung lässt sich für die Curven dritter Ordnung zu bemerkenswerther Einfachheit abkürzen; angesichts der zahlreichen, auch neueren Publicationen**) über diesen Gegenstand scheint es mir wohl am Platze zu sein, einige Worte auf diesen Beweis zu verwenden.

I.

Die unendlich vielfache Erzeugung der Curven dritter Ordnung durch projectivische Gebilde.

Den Ausgangspunkt bildet folgender Satz:

Ein Kegelschnittbüschel $K_1\, K_2\, K_3 \ldots$ mit den vier Grundpunkten A, B, C, D schneide auf einem beliebigen von A ausgehenden Strahle $a^{(2)}$

*) „Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven", Abhandlungen der Berliner Akademie, vom Jahre 1887.

**) Während Herr Schröter in seiner neuesten Publication {„Die ebenen Curven dritter Ordnung" etc. Leipzig, Teubner, 1888} die Definition als Tripelcurve zu Grunde legt, giebt Herr Küpper einen ganz neuen, nicht eben einfachen Beweis des Fundamentaltheorems, der auf eigenartiger Benutzung einer quadratisch-involutorischen Verwandtschaft beruht. Vergl.: „Einleitung in die projectivische Geometrie der Ebene, nach Vorträgen des Herrn C. Küpper herausgegeben von K. Bobek". Leipzig, Teubner 1889. Die eigentliche trilineare Verwandtschaft benutzt Herr Castelnuovo zum Beweise des Theorems. Vorzugsweise wird noch der Hülfssatz gebraucht und bewiesen, dass zwei Kegelschnittbüschel eine Curve dritter Ordnung erzeugen, wenn sie zwei Grundpunkte gemein haben, und die Geradenpaare einander entsprechen, in denen die Verbindungslinie derselben vorkommt. Vergl. den Aufsatz „Studio sulla omografia del seconda spezie" Ven. Jst. Atti (6) V. § 3.

die Punktreihe $E_1^{(\lambda)} E_2^{(\lambda)} E_3^{(\lambda)} \ldots$, *auf einem beliebigen durch* B, C, D *gelegten Kegelschnitte* $\mathfrak{K}$ *die Punktreihe* $P_1\, P_2\, P_3 \ldots$ *aus. Alsdann treffen sich die Geraden* $E_1^{(\lambda)} P_1$, $E_2^{(\lambda)} P_2$, $E_3^{(\lambda)} P_3$, ... *in einem Punkte* $R^{(\lambda)}$ *von* $\mathfrak{K}$. $a^{(\lambda)}$ und $R^{(\lambda)}$ *beschreiben projectivische Gebilde:*

$$a'\, a''\, a''' \ldots \barwedge R'\, R''\, R''' \ldots .$$

Andererseits ist natürlieh

$$K_1 K_2 K_3 \ldots \barwedge P_1 P_2 P_3 \ldots .$$

Der Satz ist einleuchtend, weil

$$P_\mu (E_\mu' E_\mu'' E_\mu''' \ldots) \barwedge P_\nu (E_\nu' E_\nu'' E_\nu''' \ldots)$$

ist, und beide Gebilde einen Kegelschnitt erzeugen, der B, C, D, P_μ, P_ν enthält und demgemäss mit $\mathfrak{K}$ identisch ist. Die Reihe $R'\, R''\, R''' \ldots$ hat also die Eigenschaft, dass die projectivischen Büschel

$$a' a'' a''' \ldots \barwedge P_\mu (R' R'' R''' \ldots)$$

den bestimmten Kegelschnitt K_μ erzeugen.*)

Eine Curve dritter Ordnung C sei nun das Erzeugniss der beiden projectivischen Büschel

$$K_1 K_2 K_3 \ldots \barwedge o_1 o_2 o_3 \ldots ;$$

das letztere Strahlbüschel habe das Centrum O. Sind P_1 und P_2 zwei Punkte des Erzeugnisses, die mit O nicht in gerader Linie und deshalb auf zwei verschiedenen Kegelschnitten K_1 und K_2 des Büschels liegen, so erhält man auf dem durch B, C, D, P_1, P_2 bestimmten Hülfskegelschnitt $\mathfrak{K}$ die beiden Reihen

$$R' R'' R''' \ldots \barwedge a' a'' a''' \ldots ,$$

$$P_1 P_2 P_3 \ldots \barwedge K_1 K_2 K_3 \ldots \barwedge o_1 o_2 o_3 \ldots .$$

Die Curve ist der Ort der Punkte, in denen sich Strahlenpaare o_μ, $a^{(\lambda)}$ mit den zugehörigen Geraden $P_\mu R^{(\lambda)}$ treffen. Bezeichnet man mit $L^{(\lambda)}$ das Erzeugniss der Büschel

$$R^{(\lambda)} (P_1 P_2 P_3 \ldots) \barwedge o_1 o_2 o_3 \ldots ,$$

so ist die Curve C das Erzeugniss der eindeutig auf einander bezogenen Reihen

$$a' a'' a''' \ldots \quad \text{und} \quad L' L'' L''' \ldots .$$

Da OP_1 mit o_1, OP_2 mit o_2 bezeichnet werden kann, so begegnen sich alle Kegelschnitte $L^{(\lambda)}$ in O, P_1 und P_2. Ist X der letzte Schnittpunkt von L' und L'', so entsprechen $R'X$ und $R''X$ bei der Erzeugung derselben dem Strahle OX. Daher liegt X auf $\mathfrak{K}$, entspricht OX in

*) Augenscheinlich liegt hier eine Verallgemeinerung der zweiten Steiner'schen Erzeugungsweise des Büschels vor. Diese selbst würde sich ergeben, wenn man $\mathfrak{K}$ in BC und eine von D ausgehende Gerade zerfallen liesse. Vergl. „Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie". Zweiter Theil, herausgegeben von H. Schröter. 2. Aufl. Leipzig, Teubner 1876, § 41.

der Reihe $P_1 P_2 P_3 \ldots$ und ist allen Kegelschnitten $L', L'', L''', \ldots$ gemeinsam, $L' L'' L''' \ldots$ ist mithin ein zu $a' a'' a''' \ldots$ projectivisches Büschel, und es gilt der Satz:

Ist eine Curve das Erzeugniss eines Strahlbüschels und eines dazu projectivischen Kegelschnittbüschels, so kann sie auch erzeugt werden mit Hülfe eines Strahlbüschels, das einen der Grundpunkte des alten Büschels zum Centrum hat, und eines Kegelschnittbüschels, welches das alte Centrum zum Grundpunkt hat, während zwei andere auf der Curve willkürlich sind, und der letzte dann unzweideutig bestimmt ist.

Durch dreimalige Anwendung dieses Satzes ergiebt sich augenblicklich:

Eine Curve dritter Ordnung kann erzeugt werden mit Hülfe eines Büschels, denen Grundpunkte auf der Curve willkürlich sind, und eines zu ihm projectivischen Strahlbüschels, das den Gegenpunkt der vier Grundpunkte zum Centrum hat.

Auf der Grundlage der v. Staudt'schen Imaginärentheorie bezieht sich das obige gleichmässig auf reelle und nicht reelle Punkte. Hält man aber an einer mehr elementaren Betrachtungsweise fest, so würde sich das Vorhergehende nur auf die reellen Punkte der vorliegenden Curve beziehen. Ich will zeigen, wie einfach auch bei diesem Standpunkte Paare imaginärer Punkte in die Betrachtung eintreten. Zwei Strahlbüschel, welche zwei ineinanderliegende projectivische Punktreihen projiciren, erzeugen bekanntlich einen Kegelschnitt, der beider Doppelpunkte enthält, auch dann, wenn die letzteren imaginär sein sollten. Da nun L' das Erzeugniss von

$$R'(E_1' E_2' E_3' \ldots) \equiv R'(P_1 P_2 P_3 \ldots) \quad \text{und} \quad o_1 o_2 o_3 \ldots$$

ist, so wird bei der obigen Ueberlegung, wie man auch P_1 und P_2 auf der vorliegenden Curve gewählt hat, dem Strahle a' ein Kegelschnitt zugeordnet, der mit ihm dieselben beiden reellen oder imaginären Punkte gemein hat, nämlich die Doppelpunkte der Reihen, die $o_1 o_2 o_3 \ldots$ und $K_1 K_2 K_3 \ldots$ auf a' ausschneiden. Macht man nun einmal den umgekehrten Schluss und dann ihn selbst, so folgt der Satz:

Ein Strahl habe nur einen reellen Punkt A mit der Curve gemein. Man wähle A als Centrum des Strahlbüschels und drei beliebige Punkte der Curve als Grundpunkte des zugehörigen Büschels. Bei der durch die reellen Curvenpunkte vermittelten projectivischen Zuordnung beider Büschel wird dem Strahle eine Curve zugewiesen, welche zwei ganz bestimmte imaginäre Punkte auf ihm ausschneidet. Rechnet man alle diese imaginären Punkte der Curve zu, so hat sie mit jeder Geraden drei Punkte gemein, da eine leichte Stetigkeitsbetrachtung mindestens einen reellen gemeinsamen Punkt ergiebt.

Dass conjugirt imaginäre Punkte in die Basis eines erzeugenden

Büschels aufgenommen werden können, zeigt man durch folgende Betrachtung. Die imaginären Punkte E^0, F^0 mögen mit dem Curvenpunkt S auf einer reellen Geraden s^0 liegen, die von S ausgehenden Strahlen s', s'', s''' mögen in Paaren reeller Punkte E', F'; E'', F''; E''', F''' schneiden. Die vier von einem Curvenpunkte O ausgehenden Geraden o_1, o_2, o_3, o_4 mögen in den Paaren C_1, D_1; C_2, D_2; C_3, D_3; C_4, D_4 reeller Punkte treffen. Mit dem letzten Schnittpunkt von OS mögen die reellen Punkte A, B von C in einer Geraden liegen. Fasst man S als Centrum des Strahlbüschels, A, B, C_μ, D_μ als Grundpunkte des zugehörigen Kegelschnittbüschels auf, so erkennt man nach dem vorigen, dass je sechs Punkte

$$A, B, C_\mu, D_\mu, E^{(\lambda)}, F^{(\lambda)} (\lambda = 0, 1, 2, 3; \mu = 1, 2, 3, 4)$$

auf je einem Kegelschnitt $K_\mu^{(\lambda)}$ liegen. Ferner ist

$$s^0 s' s'' s''' \barwedge K_1{}^0 K_1{}' K_1{}'' K_1{}''' \barwedge K_2{}^0 K_2{}' K_2{}'' K_2{}''' \barwedge K_3{}^0 K_3{}' K_3{}'' K_3{}''' \barwedge K_4{}^0 K_4{}' K_4{}'' K_4{}'''.$$

Da man aber auch O als Centrum wählen und die Basis aus jedem der Punktepaare E', F'; E'', F''; E''', F''' in Verbindung mit A, B zusammensetzen kann, so ist andererseits

$$o_1 o_2 o_3 o_4 \barwedge K_1{}' K_2{}' K_3{}' K_4{}' \barwedge K_1{}'' K_2{}'' K_3{}'' K_4{}'' \barwedge K_1{}''' K_2{}''' K_3{}''' K_4{}'''.$$

Ferner wissen wir, dass $K_1{}^0$, $K_2{}^0$, $K_3{}^0$, $K_4{}^0$ einem Büschel angehören. Wir nehmen nun von allen 16 Kegelschnitten die Polaren hinsichtlich eines festen Punktes P und benutzen, dass ein Büschel ein zu ihm selbst projectivisches Büschel von Polaren bedingt.*) Hiernach ergeben sich zweimal vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4; B^0, B', B'', B''' von der Art, dass $A_\mu B^{(\lambda)}$ die Polare von $K_\mu^{(\lambda)}$ ist. Da ferner

$$A_1(B^0 B' B'' B''') \barwedge A_2(B^0 B' B'' B''') \barwedge A_3(B^0 B' B'' B''') \barwedge A_4(B^0 B' B'' B''')$$

ist, so liegen alle 8 Punkte auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}'$; hiernach ist

$$B^0(A_1 A_2 A_3 A_4) \barwedge B'(A_1, A_2, A_3, A_4),$$

das heisst

$$K_1{}^0 K_2{}^0 K_3{}^0 K_4{}^0 \barwedge o_1 o_2 o_3 o_4.$$

Da o_4 ein beliebiger in reellen Punkten treffender Strahl des Büschels O ist, so kann die Curve, was ihre reellen Punkte anbelangt, mit Hülfe des Strahlbüschels $o_1 o_2 o_3 \ldots$ und des Kegelschnittbüschels mit den reellen Grundpunkten A, B und den imaginären E^0, F^0 erzeugt werden. Einem Strahle o_5, der in imaginären Punkten C_5, D_5 schneidet, mögen die Kegelschnitte $K_5{}^0$, $K_5{}'$, $K_5{}''$, $K_5{}'''$ projectivisch zugeordnet werden. Die Polaren derselben hinsichtlich P begegnen sich in dem Punkte A_5 von $\mathfrak{K}'$, für welchen

*) Vergl. Steiner-Schröter etc. § 47.

$$B^0(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) \;\overline{\wedge}\; B'(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) \;\overline{\wedge}\; \cdots \;\overline{\wedge}\; o_1 o_2 o_3 o_4 o_5$$

ist. Da nun P ein ganz beliebiger Punkt der Ebene ist, so gehören $K_5{}^0$, $K_5{}'$, $K_5{}''$, $K_5{}'''$ zu einem Büschel, und $K_5{}^0$ enthält C_5, D_5 ebenso wie die drei anderen Kegelschnitte. Die neuen Erzeugungsweisen ergeben also die schon vorhandenen reellen und imaginären Punkte. Die gemachten Schlüsse wiederholen sich nun Wort für Wort für zwei conjugirt imaginäre Punkte A, B und ergeben alsdann den Lehrsatz:

Hat ein Büschel seine vier Grundpunkte, unter denen zwei oder zweimal zwei conjugirt imaginäre vorkommen können, auf einer Curve dritter Ordnung, so erzeugt dasselbe mit einem projectivischen Strahlbüschel die Curve dritter Ordnung, was die reellen Punkte derselben anbelangt und die conjugirt imaginären Punkte, die mit dem Centrum des Strahlbüschels in (reellen) Geraden liegen.

Durch leichte indirecte Schlüsse gewinnt man folgende Umkehrung dieses Satzes:

Erzeugen ein Strahl- und ein Kegelschnittbüschel eine Curve dritter Ordnung, was ihre reellen Punkte anbelangt, so gehören ihr die Grundpunkte des letzteren Büschels auch dann an, wenn sie nicht reell sein sollten.

Von einem Kegelschnitt, der zwei Punkte mit der Curve gemein hat, kann gezeigt werden, dass er einem derartigen Büschel angehört und daher noch vier weitere Punkte mit der Curve gemein hat.

II.

Uebergang zu anderen Betrachtungsweisen der Curve.

Mit Leichtigkeit lässt sich mit Hülfe des benutzten Principes der Uebergang zu Herrn Reye's Definition der Curven dritter Ordnung vollziehen. Während Herr Reye*) selbst den Uebergang zu Chasles' Erzeugungsweise vollzogen hat, hat Herr Schur**) eine Construction für die Netze collinearer Strahlenebenen gegeben, durch die eine gegebene Curve dritter Ordnung erzeugt wird und nachgewiesen, dass es eine einfache Mannigfaltigkeit solcher Netze giebt. Gleichwohl dürfte die neue Vorschrift zur Construction solcher Netze nicht ohne Interesse sein, die aus unseren Entwickelungen folgen wird. Wir lassen hierzu den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ der obigen Betrachtung in die Gerade BC und in eine zweite von D ausgehende, aber A nicht enthaltende Gerade d zerfallen. Die Punktreihe $R'R''R''' \ldots$ liegt dann auf BC,

*) Vergl. „Vorlesungen über die Geometrie der Lage". II. Bd., II. Auflage, Hannover, 1880. (Vorlesung 25).

**) Vergl. § 3 des Aufsatzes „Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen". Habilitationsschrift. Leipzig 1881.

die Reihe $P_1 P_2 P_3 \ldots$ hingegen wird vom Büschel $K_1 K_2 K_3 \ldots$ auf d ausgeschnitten. Nunmehr gehört nicht nur zu einer Zusammenstellung $a^{(\lambda)} o_\mu$ eine Gerade $R^{(\lambda)} P_\mu$, sondern auch umgekehrt zu einem Strahl der Ebene im allgemeinen *ein* Paar $a^{(\lambda)}$, o_μ. Der Schnittpunkt G von BC und d wird als Punkt der Reihe $P_1 P_2 P_3 \ldots$ von dem Geradenpaar BC, AD des Büschels $K_1 K_2 K_3 \ldots$ ausgeschnitten. In dem Büschel $o_1 o_2 o_3 \ldots$ gehört daher zu G der Strahl o_0, der die letzten Schnittpunkte E und F von AD und BC mit der Curve enthält. Insofern G der Reihe $R' R'' R''' \ldots$ angehört, entspricht ihm der Strahl AD des Büschels $a' a'' a''' \ldots$. Denn um zu $R^{(\lambda)}$ das zugehörige $a^{(\lambda)}$ zu erhalten, haben wir $R^{(\lambda)} P_\mu$ zum zweiten Male mit K_μ zu schneiden; alle so erhaltenen Punkte liegen auf $a^{(\lambda)}$. Die Verbindungslinien decken sich für G mit d selbst, die zweiten Schnittpunkte mit D, und $a^{(\lambda)}$ mit AD. Jedem von G ausgehenden Strahl gehört mithin OE, $AE = AD$ als Zusammenstellung o_μ, $a^{(\lambda)}$ zu. Dreht man $R^{(\lambda)} P_\mu$ um einen festen Punkt, so treten dadurch $P_1 P_2 P_3 \ldots$ und $R' R'' R''' \ldots$ in projectivische Beziehung, und es bewegt sich der Punkt $(a^{(\lambda)}, o_\mu)$ projectivisch über einen Kegelschnitt, der ausser A und O auch E enthält, weil G in einem Strahle des Büschels vorkommt. A, O und E bleiben in ihren alten Bedeutungen fest, wenn d ein beliebiger von D ausgehender Strahl ist und B, C ein beliebiges Paar, deren Verbindungslinie durch F geht. Die bei verschiedenen Annahmen von d und BC entstehenden Strahlenebenen $R^{(\lambda)} P_\mu$ sind nicht nur eindeutig, sondern collinear auf einander bezogen; denn die homologen Strahlen dieser Ebenen beschreiben projectivische Strahlbüschel, sobald der Punkt $(a^{(\lambda)}, o_\mu)$ irgend einen A, O, E enthaltenden Kegelschnitt durchläuft. Beliebig viele dieser collinearen Ebenen senden durch jeden Punkt der Curve dritter Ordnung homologe Strahlen. Dieselbe kann daher als Ort der Punkte definirt werden, in denen je drei homologe Strahlen von drei willkürlich herausgegriffenen dieser Ebenen sich treffen.

Man erhält nun zu $a^{(\lambda)}$, o_μ den entsprechenden Strahl in einer der betrachteten Ebenen, wenn man den o_μ entsprechenden, also mit ihm auf der Curve sich schneidenden Kegelschnitt K_μ mit $a^{(\lambda)}$ und d zum zweiten Male schneidet und beide Punkte verbindet. Hieraus ergiebt sich folgende Vorschrift:

Es seien O, E, F drei beliebige in einer Geraden liegende Curvenpunkte, A, D feste, mit E in einer Geraden liegende Punkte, $B^{(\nu)}$, $C^{(\nu)}$; $H_\mu K_\mu$ veränderliche Punktepaare, die mit F bez. O in Geraden liegen. $K_\mu^{(\nu)}$ sei der A, D, $B^{(\nu)}$, $C^{(\nu)}$, H_μ, K_μ enthaltende Kegelschnitt; a, d seien von A bez. D ausgehende Strahlen. Die Verbindungslinie der beiden Punkte, in welchen a und d ausser in A und D $K_\mu^{(\nu)}$ schneiden, möge mit $(a, d)_\mu^{(\nu)}$ bezeichnet werden. Alsdann füllen die drei Strahlen

$$(a, d_1)_\mu^{(\nu')}, \ (a, d_2)_\mu^{(\nu'')}, \ (a, d_3)_\mu^{(\nu''')},$$

wenn a und $O H_\mu K_\mu$ unabhängig von einander alle möglichen Lagen annehmen, drei collineare Strahlenebenen aus, welche die Curve dritter Ordnung erzeugen.

Von der ganzen zweifachen Mannigfaltigkeit der Strahlenebenen, die sich bei den verschiedenen Annahmen von d_1 und $B^{(\nu)}$, $C^{(\nu)}$ ergeben, fasse man jetzt je die homologen Strahlen in je eine Ebene zusammen und betrachte in den gewonnenen Strahlenebenen solche Strahlen als homolog, die zu derselben Ebene der ersten Mannigfaltigkeit gehören. Ebenen dieser Art aber werden von den Strahlen

$$(a_1, d)_\mu^{(\nu)}; \ (a_2, d)_{\mu'}^{(\nu)}; \ (a_3, d)_{\mu''}^{(\nu)}; \ldots$$

erfüllt. Alle diese Ebenen sind also ebenfalls unter einander collinear, und irgend drei von ihnen erzeugen ebenfalls die Curve dritter Ordnung. Es folgt hieraus, dass wir es, nach Herrn Schur's Bezeichnung, mit zwei conjugirten Netzen collinearer Strahlenebenen zu thun haben. Jedes von beiden Netzen steht zu dem anderen in der beschriebenen Beziehung. Sucht man zu zwei festen Geraden einer Ebene die homologen in den anderen Ebenen des betreffenden Netzes, so beschreiben sie zwei collineare Ebenen des anderen Netzes.

Ist nun einmal das Netz gefunden, so können die Punkte A, O, E, auf denen seine Construction beruht, durch drei Punkte ersetzt werden, die zwei beliebigen Ebenen des Netzes entsprechend gemein sind und deshalb auf der Curve liegen. Man greife eine dritte Ebene, welche nicht zu dem Büschel aus den beiden ersten gehört, willkürlich heraus. Es seien L, M, N die entsprechend gemeinsamen Punkte der beiden ersten Ebenen; P_1, P_2, P_3 allgemein homologe Punkte der drei Ebenen. In P_1 schneiden sich zwei homologe Strahlen der beiden ersten Ebenen, nämlich die Gerade, welche $P_1 P_2$ in der ersten Ebene entspricht und $P_1 P_2$ selbst. Sucht man also zu $P_1 P_2$, betrachtet als Gerade der zweiten Ebene, den homologen Strahl p_3 in der dritten Ebene, so ist die Curve der Ort der Punkte P_1, die in den entsprechenden Geraden p_3 liegen. Bewegt sich nun P_1 über einen LMN umschriebenen Kegelschnitt, so ist dasselbe mit P_2 der Fall, und die entstehenden Punktreihen haben L, M, N entsprechend gemein. Nach einem bekannten Satze dreht sich daher $P_1 P_2$ um den letzten Schnittpunkt der beiden erhaltenen Kegelschnitte und p_3 durchmisst also ein Strahlbüschel, das zu der von P_1 beschriebenen Reihe projectivisch ist. Durchlaufen andererseits P_1 und P_2 zwei von M bez. N ausgehende Gerade, so dreht sich $P_1 P_2$ um einen auf LN bez. LM liegenden Punkt. Sind daher L_3, M_3, N_3 die zu L, M, N gehörigen Punkte, so erhält man zu den Strahlbüscheln $m' m'' m''' \ldots$ und $n_1 n_2 n_3 \ldots$ mit den Centren M und N projectivische Punktreihen $R' R'' R''' \ldots$

und $P_1 P_2 P_3 \ldots$ auf $L_3 N_3$ und $L_3 M_3$ von der Art, dass, wenn P_μ der Kreuzungspunkt von $m^{(\lambda)}$ und n_μ ist, p_3 die Verbindungslinie von $R^{(\lambda)}$ und P_μ ist. Jeder von L_3 ausgehenden Geraden aber gehört der Punkt L zu. Hier haben wir mit veränderten Bezeichnungen die Darstellung der Curve vor uns, mit deren Hülfe wir zu Herrn Reye's Definition kamen. Für A, O, E, G treten M, N, L, L_3 ein, für D der Schnittpunkt von ML und $M_3 L_3$.

Sehr einfach lässt sich übrigens der Nachweis gestalten, dass eine Curve dritter Ordnung das Erzeugniss halb-perspectivisch bezogener Strahleninvolutionen ist. O und A mögen denselben Tangentialpunkt P haben. Soll O das Centrum des Strahlbüschels sein, und sollen die Kegelschnitte des zugehörigen Büschels einander in A berühren, so liegen die beiden anderen Grundpunkte B, C mit O in einer Geraden r_2. Auf jedem Kegelschnitt des Büschels $K_1 K_2 K_3 \ldots$ liegt eine Involution mit dem Centrum O; von A aus werden dieselben durch andere und andere Anordnungen derselben Involution mit den Paaren AO, AP oder p', q' und AB, AC oder $p''q''$ projicirt. Nennt man OA als von O ausgehend r_1, so ist K_μ das Erzeugniss der beiden projectivischen Gebilde

$$p'q',\ p''q'',\ p'''q''',\ p^{(4)}q^{(4)}, \ldots \barwedge r_1, r_2, r_\lambda''', r_\lambda^{(4)}, \ldots.$$

Hieraus folgt zuerst, dass die Paare der Involution $p'q'$, $p''q''$ die Punktepaare der Curve dritter Ordnung projiciren, die mit O in gerader Linie liegen, und dass umgekehrt die mit A in gerader Linie liegenden Punktepaare von O aus durch Paare einer Involution projicirt werden. Dass diese Involutionen nicht nur eindeutig, sondern speciell projectivisch auf einander bezogen sind, erkennt man auf folgende Art. Projicirt man die Punktreihe, welche $K_1 K_2 K_3 \ldots$ auf $p^{(\lambda)}$ ausschneidet, von O aus und sucht die diesem Strahlbüschel $r_1^{(\lambda)} r_2^{(\lambda)} r_3^{(\lambda)} \ldots$ mit $o_1 o_2 o_3 \ldots$ gemeinsamen Strahlen, so erhält man das zu $p^{(\lambda)} q^{(\lambda)}$ gehörige Paar $o^{(\lambda)} r^{(\lambda)}$. Versteht man unter K_1 und K_2 die Geradenpaare AP, BC und AB, AC des Büschels, so werden $r_1^{(\lambda)}$ und $r_2^{(\lambda)}$ mit r_2 und r_1 identisch, o_1 und o_2 hingegen sind dann die Strahlen OP und OB_1C_1, wenn B_1 und C_1 die letzten Schnittpunkte von AB und AC sind. Als Doppelstrahlen der Büschel

$$o_1 o_2 o_3 o_4 \ldots \barwedge r_2 r_1 r_3^{(\lambda)} r_4^{(\lambda)} \ldots$$

bilden also $o^{(\lambda)}$ und $r^{(\lambda)}$ ein Paar der Involution $o_1 r_1$, $o_2 r_2$ oder OP, OA; OB, OB_1. Wählt man einen beliebigen von o_1 und o_2 verschiedenen Strahl des ersten Büschels, etwa o_3, beliebig aus, so fixirt der zugeordnete Strahl eindeutig das betrachtete Involutionspaar, und zwar bewegt sich letzteres zu jenem Strahl projectivisch. Da nun $r_3^{(\lambda)}$ und $p^{(\lambda)} q^{(\lambda)}$ bei ihrer Bewegung K_3 erzeugen, so bewegen sich

$$p^{(\lambda)} q^{(\lambda)}, r_3^{(\lambda)} \quad \text{und} \quad r^{(\lambda)} o^{(\lambda)}$$

zu einander projectivisch*). Den Lagen $p'q'$ und $p''q''$ entsprechen die Lagen r_1 und r_2 von $r_3^{(\lambda)}$. In beiden Fällen artet die projectivische Beziehung, die $r^{(\lambda)} o^{(\lambda)}$ liefert, aus; es ergiebt sich im ersten Fall $o_1 r_1$, im zweiten Fall $o_2 r_2$, so dass die Involutionen

$$o_1 r_1, \; o_2 r_2, \; o''' r''', \; o^{(4)} r^{(4)}, \ldots \overline{\wedge} \; p'q', \; p''q'', \; p'''q''', \; p^{(4)} q^{(4)}, \ldots,$$

die zur Erzeugung der Curve erhalten werden, in der That in halbperspectivischer Lage sind $\{r_1 \equiv p'\}$.

III.

Rationale Curven dritter Ordnung.

Die verschiedenen Erzeugungsweisen, die für eine Curve mit einem Doppelpunkte A gelten, lassen sich ebenfalls mit Hülfe unseres Principes in Zusammenhang bringen. Wir gehen davon aus, dass jede A enthaltende Gerade nur einmal, ausser in A, die Curve trifft. Da unser allgemeiner Satz auch hier gilt, können wir das Centrum des Strahlbüschels auf der Curve beliebig wählen, zu Basispunkten aber ausser A zwei beliebige Punkte B, C der Curve wählen. Wäre nun der vierte Grundpunkt D von A verschieden, so kämen AB und AC in zwei verschiedenen Geradenpaaren von $K_1 K_2 K_3 \ldots$ vor. Da nur einem von beiden der Strahl OA oder o_1 entsprechen könnte, müsste entweder AB oder AC in zwei Punkten ausserhalb A schneiden, was ausgeschlossen ist. Daher müssen K_1, K_2, K_3, ... einander bis A längs einer Tangente berühren, deren letzter Schnittpunkt mit dem von BC und mit O in einer Geraden liegt. Der Geraden o_1 oder OA gehört als K_1 das Geradenpaar AB, AC zu. Dass eine auf die beschriebene Art entstandene Curve wirklich einen Doppelpunkt A hat, zeigt man durch Uebergang zu einer anderen Erzeugungsweise. Den Hülfskegelschnitt $\mathfrak{K}$ haben wir hier durch $A = D$, B, C und zwei beliebige mit O *nicht* in *einer* Geraden liegende Punkte P_2 und P_3 zu legen. Hier entsteht die von $K_1 K_2 K_3 \ldots$ ausgeschnittene Punktreihe $P_1 P_2 P_3 \ldots$, und zwar ist P_1 als letzter Schnittpunkt von AB, AC mit A identisch. Die zweite Reihe $R' R'' R''' \ldots$ hat wieder die Eigenschaft, dass die Büschel

$$P_\mu (R' R'' R''' \ldots) \; \overline{\wedge} \; a' a'' a''' \ldots$$

K_μ erzeugen. Nennt man $L^{(2)}$ das Erzeugniss der Büschel

$$R^{(\lambda)} (P_1 P_2 P_3 \ldots) \; \overline{\wedge} \; o_1 o_2 \bar{o}_3 \ldots,$$

*) Dass die beiden Methoden der projectivischen Beziehungen von Involutionen, die hier in Frage kommen, auseinander folgen, habe ich ausführlich bewiesen. Vergl. a. a. O. §§ 24—26.

so erzeugen die beiden Büschel

$$a' a'' a''' \ldots \overline{\wedge}\, L' L'' L'''$$

ebenfalls die vorliegende Curve. Da nun o_1, o_2, o_3 die Punkte A oder P_1, P_2, P_3 enthalten, so sind A, P_2, P_3 und O die Grundpunkte des zweiten Büschels. Da umgekehrt ein Punkt, der Centrum des Strahlbüschels und Grundpunkt des Kegelschnittbüschels zugleich ist, ein Doppelpunkt der erzeugten Curve sein muss, so folgt:

Eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte A entsteht, wenn einem beliebigen Strahlbüschel ein Büschel in A sich berührender Kegelschnitte zugehört, und dem Strahle OA das Geradenpaar mit dem Kreuzungspunkt A zugehört. Die beiden anderen Grundpunkte sind auf der Curve beliebig. Andererseits erzeugt das Strahlbüschel A die Curve zusammen mit einem Büschel, das neben A drei beliebige Curvenpunkte B, C, D zu Grundpunkten hat.

Um zu einer anderen Erzeugungsweise zu kommen, bezeichne man mit L', L'' die Geradenpaare AB, CD und AC, BD, mit a' und a'' die zugehörigen Strahlen, die sich mit CD und BD in den Curvenpunkten C_1 und B_1 schneiden. Um die Curvenpunkte auf dem beliebigen von D ausgehenden Strahle d_μ zu finden, haben wir die Punktreihe, welche $L' L'' L''' \ldots$ auf d_μ ausschneidet, von A aus zu projiciren. Dieses Strahlbüschel $e'_\mu e''_\mu e'''_\mu \ldots$ hat mit $a' a'' a''' \ldots$ Doppelstrahlen, welche die gesuchten Punkte projiciren. Sie bilden aber ein Paar $a_\mu e_\mu$ der Involution $a' e''_\mu$, $a'' e'_\mu$, oder da e''_μ mit e' oder AB, e'_μ mit e'' oder AC identisch ist, ein Paar der Involution AC, AC_1; AB, AB_1. Das Paar ändert sich projectivisch z. B. zu e'''_μ oder, da e'''_μ und d_μ sich stets auf L''' schneiden, zu d_μ. Dies ergiebt den bekannten Satz:

Eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt A ist das Erzeugniss eines Strahlbüschels, dessen Centrum auf der Curve beliebig ist und einer Strahleninvolution, die den Doppelpunkt zum Centrum hat.

Zu einer letzten bekannten Erzeugungsweise der Curve gelangt man, wenn man eine zweite von $a' a'' a''' \ldots$ unabhängige Anordnung $a_1 a_2 a_3 \ldots$ der von A ausgehenden Strahlen benutzt. Man schneide $L' L'' L''' \ldots$ mit einem B, C, D enthaltenden Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ in der Reihe $R' R'' R''' \ldots$ und construire auf ihm die Reihe $P_1 P_2 P_3 \ldots$ von der Art, dass

$$a_1 a_2 a_3 \ldots \overline{\wedge}\, R^{(\lambda)}(P_1 P_2 P_3 \ldots)$$

$L^{(\lambda)}$ erzeugen. Wieder gehören nur die Punkte der Curve an, in denen drei Strahlen $a^{(\lambda)}$, a_μ, $R^{(\lambda)} P_\mu$ sich begegnen. Hierzu ist es aber, von A abgesehen, nothwendig und hinreichend, wenn wir a_1 mit a', a_2 mit a'', a_3 mit a''', ... zusammenfallen lassen und unter dieser Voraussetzung a_1 mit $R' P_1$, a_2 mit $R'' P_2$, a_3 mit $R''' P_3$, ... schneiden. Nunmehr ist aber

$$P_1 P_2 P_3 \ldots \overline{\wedge}\, R' R'' R''' \ldots$$

geworden, es umhüllen also P_1R', P_2R'', P_3R''', ... einen $\mathfrak{K}$ zweipunktig berührenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ und diese Tangentenreihe $t_1t_2t_3\ldots$ ist zu $a_1a_2a_3\ldots$ projectiviseh. Also folgt der Satz:

Eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt A ist das Erzeugniss des Strahlbüschels A mit einem hierzu projectivischen Strahlbüschel zweiter Ordnung.

Die Schnittpunkte der Curve mit $\mathfrak{K}$ sind die zweimal drei Punkte, welche das Gebilde

$$a_1a_2a_3\ldots \quad \text{mit} \quad P_1P_2P_3\ldots \quad \text{bez.} \quad R'R''R'''\ldots$$

gemein hat. Nun bedingt ein einmal gewonnenes $\mathfrak{K}_1$ auf jedem ihn zweipunktig berührenden $\mathfrak{K}$ zwei Reihen $P_1P_2P_3\ldots$ und $R'R''R'''\ldots$ von der Art dass $P_1R' = t_1$, $P_2R'' = t_2$, $P_3R''' = t_3$, ... ist und es wird dann

$$P_1P_2P_3\ldots \barwedge R'R''R'''\ldots \barwedge t_1t_2t_3\ldots.$$

Lässt man $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K}_1$ zusammenfallen, so arten beide Reihen in die der Berührungspunkte, $T_1T_2T_3\ldots$, aus; daher berührt $\mathfrak{K}$ die Curve dritter Ordnung in den drei Punkten T_λ, die in ihren zugehörigen t_λ liegen. Umgekehrt wird jeder Kegelschnitt, der die Grundcurve dreipunktig berührt, ein Strahlbüschel zweiter Ordnung liefern, das mit $a_1a_2a_3\ldots$ die Curve erzeugt. Die projectivische Abhängigkeit wird mit Hülfe der drei Berührungspunkte fixirt. Aus diesen Erwägungen folgt aber das Resultat:

Berührt von zwei Kegelschnitten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ in zweifacher Berührung der eine eine rationale Curve dritter Ordnung, wo er ihr begegnet, so kommt die Auffindung der Schnittpunkte des anderen auf Aufgaben zweiten und dritten Grades zurück.

Berlin, im September 1890.