4. *Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie;* *von H. Reissner.*

Nachdem Hr. Einstein durch die Erklärung der Perihelbewegung des Merkur die Fruchtbarkeit seiner neuen kovarianten Feldgleichungen der Gravitation und damit des Postulats der allgemeinsten Relativität gezeigt und an anderer Stelle die allgemein kovariante Fassung der Maxwell-Lorentzschen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes gegeben hat, erschien es mir als nächste Aufgabe, den Einfluß der Eigengravitation des elektrischen Feldes von Kugelsymmetrie an einem einfachen Beispiel zu untersuchen. Ich ging dabel allerdings von der Hoffnung aus, einen statischen Zusammenhalt von Elementarladungen durch deren Eigengravitation zu finden, ohne den Boden der Maxwellschen Theorie verlassen zu brauchen, konnte aber im Verlauf der Arbeit zunächst nur feststellen, daß die Einsteinsche Gravitation zwar das Feld der elektrischen Elementarladung in bestimmter, übrigens ungeheuer geringer Weise verzerrt, aber ihrem Wesen nach die gegenseitige elektrostatische Abstoßung der Ladungselemente nicht aufheben kann.

Der Aufbau der Elementarladung wird also nur durch Zuziehung einer weiteren Grundannahme hergestellt werden können, sei es durch Abänderung der Maxwellschen Gleichungen im Sinne von Mie, sei es durch Zufügung eines möglichst einfachen Spannungstensors zum Maxwellschen oder sei es schließlich durch nicht statische, sondern elektrodynamisch stationäre Auffassung des Elektrons.

In bezug auf die rechnerische Durchführung der Aufgabe, bei der mich Herr Einstein durch mancherlei Aufklärung und Kritik unterstützt hat, möge vorher folgendes bemerkt werden:

Zur Aufstellung der Feldgleichungen ist keine Beschränkung in bezug auf die Wahl des Koordinatenysstems, ins-

besondere des Wertes der Substitutionsdeterminante, gemacht worden. Es konnte deshalb das übliche räumliche Polarkoordinatensystem eingeführt werden, während Schwarzschild zwecks Beibehaltung des Wertes 1 der Diskriminante $\sqrt{-g}$ des Linienelements ein besonders geschickt gewähltes Koordinatensystem benutzt hat.

Trotzdem scheint mir in diesem Falle das allgemeinste Koordinatensystem, abgesehen von dem schönen Einblick in die völlige Kovarianz der ganzen Theorie, eher vorteilhafter als ein besonderes Koordinatensystem für die Aufstellung und Integration der Feldgleichungen zu sein.

Das von Einstein selbst und von Schwarzschild dargestellte Feld eines ungeladenen Massenpunktes erweist sich als ein besonderer Fall des hier berechneten Feldes einer kugelförmigen Ladung, und es mag als Prüfung der Richtigkeit der hier gegebenen Lösung dienen, daß sie in die Schwarzschildsche Lösung übergeht, wenn man auf das spezielle Schwarzschildsche Koordinatensystem transformiert und die Ladung verschwinden läßt.

Die hier gestellte Aufgabe lautet also: Welches ist das allgemeinste, im Gleichgewicht befindliche elektrostatische Feld von Kugelsymmetrie, wenn man weiter nichts voraussetzt als den Maxwellschen Spannungsenergietensor in kovarianter Gestalt und die Einsteinschen allgemein kovarianten Feldgleichungen der Gravitation?

Die Symmetrievoraussetzung hat eine Vereinfachung der Form des Linienelements des im allgemeinen nichteuklidischen Raumes zur Folge, so daß dieses sich in räumlichen (orthogonal bleibenden) Polarkoordinaten schreiben läßt:

$$d s^2 = g_1 \, d r^2 + g_2 \, d \vartheta^2 + g_3 \, d \varphi^2 + g_4 \, d t^2 ,$$

wo wir statt der Doppelindizes nur einfache Indizes schreiben, also:

$$g_{\nu\nu} = g_\nu , \quad g_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu$$

und wo für den euklidischen, d. h. keinen Spannungsenergietensor enthaltenden Raum die g_ν die Werte haben:

$$g_1 = -1 , \quad g_2 = -r^2 , \quad g_3 = g_2 \sin^2 \vartheta , \quad g_4 = c^2 ,$$

und c die normale Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

Hr. Einstein hat allgemein gezeigt, wie die Werte der $g_{\mu\nu}$ die Eigenschaften von Maßstäben und Uhren, die Gestalt der kürzesten Linien, die Bahnen der Massenpunkte und Lichtstrahlen, die Lichtgeschwindigkeit und das Gravitationspotential bestimmen.

Der Tensor des elektrostatischen Feldes.

Der für die Feldgleichungen der Gravitation und die Gleichgewichtsbedingung des elektrostatischen Feldes benötigte Energietensor kann wie folgt ermittelt werden.[1])

Von den Komponenten des ersten kovarianten Sechservektors $F_{\alpha\beta}$ bleibt in dem Falle der Ruhe und polarer Symmetrie nur eine, etwa $F_{14} = \mathfrak{E}$, übrig. Der aus diesem abgeleitete zweite kontravariante V-Sechservektor $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$ hat in diesem Falle ebenfalls nur eine Komponente, nämlich:

$$\mathfrak{F}^{14} = \mathfrak{E}\frac{\sqrt{-g}}{g_1 g_4}.$$

Der kontravariante V-Vierervektor der elektrischen Vakuumstromdichte hat ebenfalls nur eine, nicht verschwindende Komponente, nämlich:

$$\mathfrak{J}^4 = \varrho\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{g_4}} = \frac{\partial \mathfrak{F}^{14}}{\partial x_1} = \frac{d}{dr}\left(\mathfrak{E}\frac{\sqrt{-g}}{g_1 g_4}\right) \tag{1}$$

wo ϱ die Ladungsdichte.

Der kovariante V-Vierervektor der mechanischen Kraftdichte wird für den allgemeinen statischen Fall:

$$\mathfrak{K}_\sigma = F_{\sigma 4}\mathfrak{J}^4$$

und für allseitige Symmetrie:

$$\mathfrak{K}_r = \mathfrak{F}_{14}\mathfrak{J}^4 = \mathfrak{E}\frac{d}{dr}\left(\mathfrak{E}\frac{\sqrt{-g}}{g_1 g_4}\right).$$

Dieser allgemeine statische Ansatz zeigt, daß die resultierende Kraftdichte nur verschwinden kann, wenn entweder die Ladungsdichte oder die Feldstärke $\mathfrak{E}$ verschwindet. Diese aber können wiederum in einem endlichen Intervall nur gleichzeitig den Wert Null annehmen, ausgenommen den Fall, daß g_1 oder g_4 in demselben endlichen Intervall verschwinden. Man kann also folgendes aussagen:

1) A. Einstein, Eine neue formale Deutung der Maxwellschen Feldgleichungen der Elektrodynamik. Berl. Ak. Ber. p. 184—188. 1916.

Ein Maxwellsches elektrostatisches Feld kann auch unter dem Einfluß seiner Eigengravitation nur dort im Gleichgewicht sein, wo keine Ladungsdichte vorhanden ist, sofern man den Fall, daß ein Linienelement oder die Lichtgeschwindigkeit gleich Null wird, ausschließt.[1])

Da diese Ausnahmefälle keine physikalische Bedeutung zu haben scheinen, muß, wenn man den reinen Maxwellschen Spannungsenergietensor und Kugelsymmetrie zugrunde legen will, die Untersuchung beschränkt werden auf das Feld einer kugelförmigen Ladung unter dem Einfluß seiner Eigengravitation im leeren Raum.

Für diesen Fall muß also $\mathfrak{J}^4 = 0$ sein und demnach:

$$\mathfrak{E} = \text{const}\,\frac{\sqrt{-g_1 g_4}}{-g_2}.$$

Die Integrationskonstante läßt sich sofort aus der Bedingung im Unendlichen bestimmen, wo wir, wenn e die Gesamtladung im Mittelpunkt ist, setzen müssen:

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{4\pi r^2}, \quad g_1 = -1, \quad g_4 = c^2, \quad g_2 = -r^2,$$

also

$$\text{const} = \frac{e}{4\pi c}.$$

Daraus erhält man:

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathfrak{E} = F_{14} = -\dfrac{e}{4\pi c}\dfrac{\sqrt{-g_1 g_4}}{g_2} \\[2ex] \mathfrak{J}^{14} = F_{14}\dfrac{\sqrt{-g}}{g_1 g_4} = -\dfrac{e}{4\pi c}. \end{cases}$$

Diese Werte können wir in den von Einstein gegebenen Ausdruck (9) der oben zitierten Einsteinschen Arbeit des gemischten Energietensors setzen und erhalten:

$$T_1^{\,1} = -\frac{\mathfrak{E}^2}{2 g_1 g_4}, \quad T_2^{\,2} = T_3^{\,3} = +\frac{\mathfrak{E}^2}{2 g_1 g_4}, \quad T_4^{\,4} = -\frac{\mathfrak{E}^2}{2 g_1 g_4}.$$

Der kovariante entsprechende Tensor nimmt nach der Formel

$$T_{\sigma\sigma} = T_\sigma^{\,\sigma}\, g_{\sigma\sigma}$$

den Wert an:

1) Die Annahme $g_4 = 0$ führt allerdings zu einer bestimmten Verteilung der Feldstärke in der Ladung, jedoch ist mir ein Anschluß an den Außenraum, indem $g_4 \neq 0$ ist, nicht gelungen.

$$T_{11} = -\mathfrak{E}^2 \frac{g_1}{2 g_1 g_4}, \quad T_{22} = \mathfrak{E}^2 \frac{g_2}{2 g_1 g_4},$$

$$T_{33} = \mathfrak{E}^2 \frac{g_3}{2 g_1 g_4}, \quad T_{44} = -\mathfrak{E}^2 \frac{g_4}{2 g_1 g_4}.$$

Dies ist der elektrostatische Energietensor, aber ohne Rücksicht auf das Gleichgewicht des Feldes. Den Gleichgewichtstensor erhält man durch Einsetzen des obigen Wertes der Gleichung (2) für $\mathfrak{E}$, nämlich:

$$T_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{4\pi c}\right)^2 \frac{g_1}{g_2^2}, \quad T_{22} = -\frac{1}{2}\left(\frac{e}{4\pi c}\right)^2 \frac{g_2}{g_2^2},$$

$$T_{33} = -\frac{1}{2}\left(\frac{e}{4\pi c}\right)^2 \frac{g_3}{g_2^2}, \quad T_{44} = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{4\pi c}\right)^2 \frac{g_4}{g_2^2}.$$

Die Feldgleichungen.

Die Einsteinschen allgemein kovarianten Differentialgleichungen eines Gravitationsfeldes in ihrer letzten und konsequentesten Fassung lassen sich für orthogonale Koordinaten und verschwindendem Laueschen Skalar $\Sigma T_m^{\ m}$ schreiben:

$$\sum_k \{m\,k\,k\,m\} = -\varkappa T_{mm}, \tag{8}$$

wo $\varkappa$ eine universelle, mit der Gravitationskonstante zusammenhängende Konstante ist und das Christoffelsche Vierindizessymbol zweiter Art den Wert hat:

$$\{m\,k\,k\,m\} = \frac{\partial \begin{Bmatrix} m\,k \\ k \end{Bmatrix}}{\partial x_m} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} m\,m \\ k \end{Bmatrix}}{\partial x_k} + \sum_\varrho \begin{Bmatrix} m\,k \\ \varrho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varrho\,m \\ k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} m\,m \\ \varrho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varrho\,k \\ k \end{Bmatrix},$$

worin

$$\begin{Bmatrix} m\,k \\ \varrho \end{Bmatrix}$$

das Christoffelsche Dreiindizessymbol zweiter Art ist, welches bei orthogonalen Koordinaten nur bei mindestens zwei gleichen Indizes von Null verschieden ist und die Werte annimmt:

$$\begin{Bmatrix} m\,k \\ k \end{Bmatrix} = \frac{1}{2 g_k} \frac{\partial g_k}{\partial x_m}, \quad \begin{Bmatrix} m\,m \\ \varrho \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2 g_\varrho} \frac{\partial g_m}{\partial x_\varrho}, \quad \begin{Bmatrix} m\,m \\ m \end{Bmatrix} = \frac{1}{2 g_m} \frac{\partial g_m}{\partial x_m}.$$

Hingegen wird das Vierindizessymbol Null für $m = k$.

Die ersten beiden Glieder von (8) machen keine Mühe; bei der $\sum_\varrho$ des dritten Gliedes summiere man erstens über $\varrho = m$, dann über $\varrho = k$ und schließlich über alle $\varrho \neq m \neq k$.

Nach einer etwas mühsamen Rechnung bei der man einiger Übung bedarf, um Rechenfehler zu vermeiden, gelangt man zu folgenden Differentialinvarianten zweiter Ordnung, die, wie eine leichte Nachprüfung zeigt, den Forderungen der Kovarianz bei Innehaltung der Symmetrie und des Verschwindens im euklidischen Raum genügen:

$$\text{I}\quad \begin{cases} G_{11} = \frac{d^2}{dr^2}\left(\ln\left(g_2\sqrt{g_4}\right)\right) - \frac{d}{dr}\ln\sqrt{g_1}\,\frac{d}{dr}\left(\ln\left(g_2\sqrt{g_4}\right)\right) \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{d\ln g_2}{dr}\right)^2 + \left(\frac{d\ln\sqrt{g_4}}{dr}\right)^2 = -\varkappa T_{11}, \end{cases}$$

$$\text{II}\quad \begin{cases} G_{22} = -1 + \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2g_1}\frac{dg_2}{dr}\right) + \frac{1}{4g_1^2}\frac{dg_1}{dr}\frac{dg_2}{dr} + \frac{1}{4g_1g_4}\frac{\partial g_2}{dr}\frac{\partial g_4}{\partial r} \\ \qquad\qquad = -\varkappa T_{22}, \end{cases}$$

$$\text{III}\quad G_{33} = G_{22}\sin^2\vartheta = -\varkappa T_{33} = -\varkappa T_{22}\sin^2\vartheta,$$

$$\text{IV}\quad \begin{cases} G_{44} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2g_1}\frac{dg_4}{dr}\right) - \frac{1}{4g_1g_4}\left(\frac{dg_4}{dr}\right)^2 + \frac{1}{4g_1^2}\frac{dg_4}{dr}\frac{dg_1}{dr} \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2g_1g_2}\frac{dg_2}{dr}\frac{dg_4}{dr} = -\varkappa T_{44}. \end{cases}$$

Unter den unendlich vielen möglichen Koordinatensystemen dürfen wir nun offenbar eines folgendermaßen bevorzugen: Es bedeute dr nicht nur den Koordinatenunterschied, sondern auch die mit Hilfe eines unendlich kleinen festen Maßstabes gemessene Entfernung in radialer Richtung; dann ist mit diesem Übereinkommen $g_1 = -1$ gesetzt.

Schreibt man noch für $\varkappa e^2 / 32\pi^2 c^2$ zur Abkürzung λ^2 und setzt man $\bar{g}_2 = -g_2$, dann nehmen die Gleichungen (8) die Gestalt an:

$$\text{(I)}\qquad \frac{d^2}{dr^2}\ln\left(\bar{g}_2\sqrt{g_4}\right) + \frac{1}{2\bar{g}_2^2}\left(\frac{d\bar{g}_2}{dr}\right)^2 + \frac{1}{4\bar{g}_4^2}\left(\frac{dg_4}{dr}\right)^2 = +\frac{\lambda^2}{\bar{g}_2^2},$$

$$\text{(II)}\qquad -1 + \frac{1}{2}\frac{d^2\bar{g}_2}{dr^2} + \frac{1}{4g_4}\frac{dg_4}{dr}\frac{d\bar{g}_2}{dr} = -\frac{\lambda^2}{\bar{g}_2},$$

$$\text{(IV)}\qquad \frac{1}{2}\frac{d^2g_4}{dr^2} - \frac{1}{4g_4}\left(\frac{dg_4}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2\bar{g}_2}\frac{d\bar{g}_2}{dr}\frac{dg_4}{dr} = +\frac{\lambda^2 g_4}{\bar{g}_2^2}.$$

Durch die Beschränkung $g_1 = -1$ der Wahl des Koordinatensystems haben sich also 3 Gleichungen mit nur 2 Un-

bekannten $\bar{g}_2$ und g_4 ergeben, und es sieht zunächst so aus, als ob der Lösungsversuch zu Widersprüchen führen könnte. Es wird sich jedoch zeigen — und das ist außerordentlich bemerkenswert —, daß die allgemeine Lösung von zweien der Gleichungen die dritte identisch befriedigt.

Man hätte also das Hilfsmittel des Erhaltungssatzes, d. h. des Spannungsgleichgewichtes der Gleichung (2) im nichteuklidischen Raum für die Bestimmung des Spannungenergietensors gar nicht anzuwenden brauchen, sondern die Feldgleichungen der Gravitation allein hätten schon genügt, um diejenige Feldstärke $\mathfrak{E}$ in Funktion der $g_{\mu\nu}$ zu berechnen, die ein Gleichgewicht des Feldes erlaubt. Die einzige Voraussetzung bei dem ganzen Ansatz brauchte also nur die Kenntnis von der Ausdrückung des Spannungsenergietensors T_r^{ν} durch den Sechservektor der Feldstärke $\mathfrak{E}$ zu sein.

Hr. Einstein hat mir bei Besprechung dieses überraschenden Zusammenhanges mitgeteilt, daß er jetzt in der Lage sei, allgemein zu zeigen, daß die Erhaltungssätze der Energie und der Spannungen in seinen letzten Feldgleichungen enthalten sind und also bei keinem Problem besonders angesetzt zu werden brauchen. Dies Ergebnis, welches der hier behandelte Sonderfall bestätigt, ist besonders wichtig, weil einesteils die Feldgleichungen gar nicht aus Energiebetrachtungen, sondern nur aus Kovarianzbetrachtungen gewonnen sind und andererseits die Feldgleichungen doch viel mehr aussagen als nur die Erhaltungssätze.[1])

Die Integration der Feldgleichungen.

Die drei Gleichungen (I), (II) und (IV) mit den zwei Unbekannten $\bar{g}_2$ und g_4 werden also eine widerspruchsfreie, gegenseitig unbeschränkte Lösung zulassen, und zwar in geschlossener Form, wie man folgendermaßen einsieht:

Man setze zur Abkürzung $\ln \sqrt{g_4} = \gamma$ und bezeichne die Ableitungen nach r durch Striche; dann schreiben sich die Gleichungen (I), (II) und (IV) wie folgt:

---

1) Inzwischen ist dieser Zusammenhang genauer von D. Hilbert und A. Einstein selbst aufgeklärt worden. Vgl. Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. Gött. Math.-Phys. Kl. 1915 p. 3 und Ann. d. Phys. 49. p. 809. 1916.

$$\text{(I)} \qquad \gamma'' + \gamma'^2 + \frac{\bar{g}_2''}{\bar{g}_2} - \frac{\bar{g}_2'^2}{2\,\bar{g}_2^2} = + \frac{\lambda^2}{\bar{g}_2^2},$$

$$\text{(IV)} \qquad \gamma'' + \gamma'^2 + \gamma' \frac{\bar{g}_2'}{\bar{g}_2} = + \frac{\lambda^2}{\bar{g}_2^2},$$

$$\text{(II)} \qquad - \bar{g}_2 + \tfrac{1}{2}\bar{g}_2\bar{g}_2'' + \tfrac{1}{2}\gamma'\bar{g}_2'\bar{g}_2 = - \lambda^2.$$

(IV) minus (I) ergibt:

$$\text{(a)} \qquad \gamma' = \frac{\bar{g}_2''}{\bar{g}_2'} - \frac{\bar{g}_2'}{2\,\bar{g}_2}$$

und daraus:

$$\gamma = \ln\left(\delta \frac{\bar{g}_2'}{\sqrt{\bar{g}_2}}\right),$$

wo δ eine Integrationskonstante. Oder:

$$\sqrt{g_4} = \delta \frac{\bar{g}_2'}{\sqrt{\bar{g}_2}}.$$

Der Wert der Integrationskonstante δ kann nun aus der Grenzbedingung im Unendlichen ermittelt werden, da dort $\sqrt{\bar{g}_4} = c$, d. h. gleich der normalen Lichtgeschwindigkeit sein soll. Deswegen kann man schreiben:

$$\text{(9)} \qquad \sqrt{g_4} = c \frac{d}{d\,r} \sqrt{\bar{g}_2}.$$

Gleichung (a), in (II) eingesetzt, liefert weiter:

$$\frac{4}{3} \frac{d^2}{d\,r^2} \left(\bar{g}_2^{\,3/4}\right) = \bar{g}_2^{\,-1/2} - \bar{g}_2^{\,-5/4} \lambda^2.$$

Nennt man zwei weitere Integrationskonstanten α und β, und setzt man zur Abkürzung $\sqrt{\bar{g}_2} = h$, so läßt sich das erste Integral der obigen Gleichung ermitteln zu:

$$\text{(10)} \qquad h\,h' = \sqrt{(h - \alpha)^2 + (\lambda^2 - \alpha^2)}.$$

und die vollständige Lösung:

$$\text{(11)} \qquad \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} \sqrt{\left(\frac{h - \alpha}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}}\right)^2 + 1} + \alpha\, \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin} \frac{h - \alpha}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}} = r + \beta.$$

welche Gleichung sich mit Hilfe der Substitution:

$$\frac{h - \alpha}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}} = \mathfrak{Sin}\, u$$

oder

$$h = \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}\,\mathfrak{Sin}\,u + \alpha \tag{10a}$$

auch schreiben läßt:

$$\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}\,\mathfrak{Cos}\,u + \alpha u = r + \beta\,. \tag{11a}$$

Aus Gleichung (11) erkennt man zunächst, daß die Bedingung für $g_2 = h^2$, im Unendlichen gleich r^2 zu werden, von selbst erfüllt ist.

Es wird ferner nach (9):

$$\sqrt{g_4} = c\frac{dh}{dr} = c\,\frac{\mathfrak{Cos}\,u}{\mathfrak{Sin}\,u + \dfrac{\alpha}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}}}\,. \tag{9a}$$

Die Integrationskonstanten.

Weiter läßt sich nun zeigen, daß der Wert von α mit der gravitierenden Masse der Ladung e, der Wert von β mit der Bedingung für g_2 im Mittelpunkt zusammenhängt.

Nach dem allgemeinen Zusammenhang der Einsteinschen Theorie muß nämlich im Unendlichen eine Ladung gerade so wie ein gravitierender Massenpunkt von der Masse m_e der Ladung wirken. Die ponderomotorische Kraft im Unendlichen kann also jedenfalls in der Form geschrieben werden:

$$K = -\,k\frac{m_e}{r^2},$$

wo $k = 6{,}7\,.\,10^{-8}$ (cm/gr/sec) die übliche Gravitationskonstante bedeutet.

In einer anderen Form folgt nun dieselbe radiale ponderomotorische Kraft aus der kovarianten Gleichung der geodätischen Linie in einem polarsymmetrischen Felde, nämlich in der Form[1]):

$$K = -\,\frac{1}{2}\frac{dg_4}{dr} \tag{12}$$

also durch Benutzung der Gleichung (9a):

1) A. Einstein, Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Berl. Akad. Ber. p. 1046. Gl. 23b. 1914.

$$K = \frac{c^2}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}} \frac{\mathfrak{Cof}\, u \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}} \mathfrak{Sin}\, u\right)}{\left(\mathfrak{Sin}\, u + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}}\right)^4}.$$

Für große u wird

$$\mathfrak{Cof}\, u = \mathfrak{Sin}\, u = \frac{r}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}} \text{ nach (11 a)}.$$

Also wird dort:

$$K = -\frac{c^2 \alpha}{r^2}.$$

Die Gleichsetzung beider Werte von K ergibt für α den Wert

$$\alpha = \frac{m_e k}{c^2}.$$

Nimmt man z. B. die Masse des Elektrons

$$m_e = \frac{10^{-27}}{1{,}82},$$

so erhält man:

$$\alpha = \frac{10^{-27} \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-8}}{1{,}82 \cdot 9 \cdot 10^{20}} = 0{,}408 \cdot 10^{-55}.$$

Die Konstante α^2 wird also im Falle der Elementarladung außerordentlich klein, und zwar, wie unten gezeigt, auch außerordentlich klein gegen die mit ihr subtraktiv verbundene Konstante λ^2. Aber sie hat eine prinzipielle Bedeutung und darf nicht verschwinden, wenn die elektrische Ladung eine gravitierende, träge Masse haben soll. Jede künftige Gleichgewichtstheorie des geladenen Feldes, d. h. des Elektrons, muß ein Verschwinden der Integrationskonstante α schon im ersten Ansatz ausschließen.

Die allein vorhandene Komponente des primären Sechservektors wird im allgemeinen Fall:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} F_{14} = \mathfrak{E} &= \frac{e}{4\pi c} \frac{\sqrt{g_4}}{g_2} = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{g_2} \frac{d\sqrt{g_2}}{dr} \\ &= \frac{e}{4\pi(\lambda^2 - \alpha^2)} \frac{\mathfrak{Cof}\, u}{\left(\mathfrak{Sin}\, u + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}}\right)^3} \end{aligned} \right.$$

und ist nach den Gleichungen (11a) und (9a) leicht zu berechnen.

Das elektrostatische Potential wird:

$$\varphi_4 = -\frac{e}{4\pi\sqrt{g_2}}\,.$$

Die Lösung (11) wird für $a = 0$ besonders einfach, und da diese Lösung sich merklich gar nicht von derjenigen für den obigen Wert von a unterscheidet, möge sie hier noch angegeben werden.

Aus (11) folgt mit $a = 0$ sofort:

$$g_2 = (r + \beta)^2 - \lambda^2\,. \tag{11b}$$

$$g_4 = c^2 \frac{(r + \beta)^2}{(r + \beta)^2 - \lambda^2}\,. \tag{9b}$$

In diesem besonderen, nahezu verwirklichten Fall $a = 0$ ergibt sich ferner:

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{4\pi} \frac{r + \beta}{\left((r + \beta)^2 - \lambda^2\right)^{3/2}}$$

Es kann nun noch der Wert der universellen Einsteinschen Konstante $\varkappa$ und dann derjenige der Konstante λ wie folgt ausgerechnet werden:

Zunächst müssen die Feldgleichungen (I), (II) und (IV) das unendlich schwache, polarsymmetrische Gravitationsfeld einer ungeladenen, inkohärenten Massenverteilung als Sonderfall enthalten.

Der kovariante Energietensor einer inkohärenten Massenverteilung von der Dichte ϱ_m ist für den statischen Fall und orthogonales System[1]) nach Einstein:

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0 \qquad T_{44} = \varrho_m g_4\,.$$

Der zugehörige Skalar $T = \Sigma T_\nu^\nu$ nimmt den Wert ϱ_m an. Es wird also die rechte Seite der Feldgleichungen[2]):

1) Berl. Akad. Ber. p. 1059. Gl. 48. 1914.
2) Desgl. p. 845. Gl. 2a. 1915.

$$G_{\nu\nu} = -\varkappa\left(T_{\nu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\nu\nu} T\right),$$

d. h.

$$G_{11} = +\frac{\varkappa}{2} g_1 \varrho_m, \qquad G_{22} = +\frac{\varkappa}{2} g_2 \varrho_m,$$

$$G_{33} = +\frac{\varkappa}{2} g_3 \varrho_m, \qquad G_{44} = -\frac{\varkappa}{2} g_4 \varrho_m.$$

Gleichung (IV) auf p. 113 wird nun, wenn wir $g_1 = -1$, $g_2 = -r^2 + \delta g_2$, $g_4 = c^2 + \delta g_4$ setzen, wo δg_2 und δg_4 klein sein sollen, bis auf kleine Größen erster Ordnung:

$$\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{g_4}{2}\right) + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{g_4}{2}\right) = \frac{\varkappa}{2} c^2 \varrho_m.$$

Man sieht, daß man hier wie schon in (Gleichung 12) $g_4/2$ als Gravitationspotential ansehen und setzen darf:

$$\frac{\varkappa}{2} = \frac{4\pi k}{c^2} = \frac{4\pi\, 6{,}7 \cdot 10^{-8}}{9 \cdot 10^{20}} = 0{,}936 \cdot 10^{-29}.$$

Daraus ergibt sich:

$$\lambda^2 = \frac{\varkappa}{2}\left(\frac{e}{4\pi c}\right)^2 = \frac{k e^2}{4\pi c^4} = \frac{6{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 4{,}65^2 \cdot 10^{-20} \cdot 4\pi}{4\pi \cdot 81 \cdot 10^{40}}$$
$$= 1{,}79 \cdot 10^{-68},$$

oder

$$\lambda = 1{,}337 \cdot 10^{-34}.$$

Also wird λ trotz seiner Kleinheit immer noch hundertmilliardenmal so groß als α.

Die Konstante β kann man nun aus der Bedingung gewinnen, daß mit abnehmendem Radius auch der Kreisumfang auf Null herabgehen, d. h. daß für $r = 0$ auch $h = 0$ sein soll. Dies gibt nach Gleichung (10a), wenn man mit u_0 den Wert von u für $r = 0$ bezeichnet:

$$\mathfrak{Sin}\, u_0 = -\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}}$$

und nach (11a):

$$\beta = \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}\, \mathfrak{Cos}\, u_0 + \alpha u_0,$$

oder wegen der Kleinheit von α/λ:

$$\beta = \lambda - \frac{\alpha^2}{\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}} = \lambda.$$

Für $r = 0$ wird dann auch nach Gleichung (14) die Feldstärke $\mathfrak{E} = \infty$.

Man sieht, daß die Lösung bei ihrer Fortsetzung bis zum Mittelpunkt, entsprechend der Tatsache, daß um den Mittelpunkt eine Ladung verteilt sein muß, deren Gleichgewicht die Maxwellsche Theorie nicht wiedergibt, zu einer Unmöglichkeit führt.

Wollte man für die Feldstärke $\mathfrak{E}$ einen Zeichenwechsel etwa für $r = r_0$ dadurch erzwingen, daß man $\beta = \lambda - r_0$ setzt, so erhielte man dort die Unendlichkeitstelle für $\mathfrak{E}$ und die Nullstelle für g_2, eine Folgerung, der man das Längenelement $\sqrt{g_2}\, d\vartheta$ wohl nicht unterwerfen darf. Übrigens wäre damit zwar eine gegenseitige Anziehung gleichsinniger Ladungsdichte, aber kein Gleichgewicht erzielt, zu dessen Erzwingung man vielleicht einen weiteren Spannungstensor hinzufügen müßte.

Außerhalb des geladenen Raumes wird aber das Feld der Ladung widerspruchsfrei dargestellt und gezeigt, daß die Werte der Feldstärke $\mathfrak{E}$ und der Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ sich von denen des euklidischen Raumes nur dort merklich unterscheiden, wo der Radius von der Größenordnung von λ, d. h. von 10^{-34} cm ist. Da der Radius des Elektrons zu etwa 10^{-13} angenommen wird, ist demnach in dem Bereich der Lösung, der sich auf das Feld bezieht, der Einfluß der Eigengravitation jeder Feststellung entzogen.

Die Entartung für $g_4 = 0$.

Auf p. 109 war auf die formale Möglichkeit eines Ladungsgleichgewichtes aufmerksam gemacht, wenn man Feldstärke und Lichtgeschwindigkeit verschwinden läßt, jedoch so, daß $\mathfrak{E}/\sqrt{g_4}$ endlich bleibt. Setzt man

$$\frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{g_4}} = \mathfrak{C}$$

so wird die Zeitkomponente des Viererstromes:

$$\mathfrak{J}_4 = \sin\vartheta\, \varrho\, \bar{g}_2 \sqrt{-g_1} = \frac{d}{dr}\left(\mathfrak{C}\frac{\bar{g}_2}{\sqrt{-g_1}}\right)\sin\vartheta,$$

wo ϱ die Ladungsdichte.

Der Kuriosität wegen möge hier ohne Ableitung mitgeteilt werden, wohin diese Sackgasse führt. Der Energietensor nimmt die Werte an:

$$T_{11} = -\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{1}{g_1}, \quad T_{22} = \frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{g_2}{g_1}, \quad T_{33} = \frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{g_3}{g_1}, \quad T_{44} = -\frac{\mathfrak{C}^2}{2}\frac{g_4}{g_1} = 0,$$

während der gemischte V-Tensor $\mathfrak{T}_\mu^\nu$ verschwindet.

Die Feldgleichungen erlauben mit $g_1 = -1$ die Lösung:

$$\frac{27}{32}\left(\frac{8}{g}\bar{g}_2^{\,1/3} - \alpha\right)\sqrt{\frac{16}{g}\bar{g}_2^{\,1/3} + \alpha} = r + \beta,$$

wo α und β Integrationskonstanten sind.

Ferner ergibt sich:

$$\frac{k\,\mathfrak{C}^2}{2} = \frac{1}{4\,\bar{g}_2} - \frac{3\,\alpha}{8\,\bar{g}_2^{\,4/3}},$$

$$\varrho = \frac{3}{4\sqrt{2\,\varkappa}}\,\frac{(\bar{g}_2^{\,1/3} - \alpha)\sqrt{\frac{16}{9}\,\bar{g}_2^{\,1/3} + \alpha}}{\bar{g}_2^{\,4/3}\sqrt{\bar{g}_2^{\,1/3} - \frac{3}{2}\alpha}},$$

$$e = \frac{\pi\sqrt{8}}{\sqrt{\varkappa}}\,\bar{g}_2^{\,1/3}\sqrt{\bar{g}_2^{\,1/3} - \tfrac{3}{2}\alpha}\,\Big/_{0}^{r_a}$$

Es scheint aber nicht, als ob diese Lösung irgend welche physikalische Bedeutung erlangen könnte.

Das unelektrische Feld.

Das Gravitationsfeld einer ungeladenen kugelförmigen, ruhenden Masse muß sich als Sonderfall aus der allgemeinen oben mitgeteilten Lösung ergeben, wenn man die Ladung und damit $\lambda = 0$ setzt. Man muß dann auf die Schwarzschildsche Lösung zurückkommen, was sich auch deswegen zu zeigen lohnt, weil Schwarzschild das Koordinatensystem mit der Bedingung $\sqrt{-g_1 g_2 g_2 g_4} = 1$ von vornherein festlegt, während wir zunächst unbeschränkt kovariant und dann mit der Bedingung $g_1 = -1$ gerechnet haben.

Bei Schwarzschild[1]) werden die Koeffizienten:

$$-g_1^* = \frac{r_1^{\,4}}{R^4(1 - \alpha_1/R)}, \quad -g_2^* = R^2, \quad g_4^* = 1 - \alpha_1/R,$$

wo $R^3 = r_1^{\,3} + \alpha_1$ und α_1 eine Konstante.

1) K. Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, Berl. Ak. Ber. p. 189—196. 1916.

Hier ergab sich mit $c = 1$

$$-g_1 = 1, \qquad -g_2 = h^2, \qquad g_4 = \left(\frac{dh}{dr}\right)^2,$$

wo

$$\left(\frac{dh}{dr}\right)^2 = \frac{h^2 - 2h\alpha}{h^2}.$$

Es ist also dort ein anderes Längenmaß für den Radius gewählt, da:

$$dr^2 = dr_1^2 \frac{r_1^4}{R^4(1 - \alpha_1/R)},$$

während

$$g_2 = g_2^*, \qquad g_4 = g_4^*$$

sein muß, da nur in r transformiert ist. Man erhält:

$$h = R, \qquad g_4 = 1 - 2\alpha/R,$$

$$dr^2 = \frac{dh^2}{1 - 2\alpha/h} = \frac{dR^2}{1 - \alpha_1/R}.$$

Die beiden Lösungen gehen also ineinander über, wenn man $2\alpha = \alpha_1$ setzt.

Charlottenburg, März 1916.

(Eingegangen 20. März 1916.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.