This article was downloaded by: [New York University]

On: 04 February 2015, At: 05:28

Publisher: Taylor & Francis

Informa Ltd Registered in England and Wales Registered Number: 1072954 Registered office: Mortimer House, 37-41 Mortimer Street, London W1T 3JH, UK

Scandinavian Actuarial Journal

Publication details, including instructions for authors and subscription information:

<http://www.tandfonline.com/loi/sact20>

Note sur quelques inégalités et formules d'approximation

Birger Meidell

Published online: 22 Dec 2011.

To cite this article: Birger Meidell (1918) Note sur quelques inégalités et formules d'approximation, Scandinavian Actuarial Journal, 1918:1, 180-198, DOI: [10.1080/03461238.1918.10405308](https://doi.org/10.1080/03461238.1918.10405308)

To link to this article: <http://dx.doi.org/10.1080/03461238.1918.10405308>

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

Taylor & Francis makes every effort to ensure the accuracy of all the information (the "Content") contained in the publications on our platform. However, Taylor & Francis, our agents, and our licensors make no representations or warranties whatsoever as to the accuracy, completeness, or suitability for any purpose of the Content. Any opinions and views expressed in this publication are the opinions and views of the authors, and are not the views of or endorsed by Taylor & Francis. The accuracy of the Content should not be relied upon and should be independently verified with primary sources of information. Taylor and Francis shall not be liable for any losses, actions, claims, proceedings, demands, costs, expenses, damages, and other liabilities whatsoever or howsoever caused arising directly or indirectly in connection with, in relation to or arising out of the use of the Content.

This article may be used for research, teaching, and private study purposes. Any substantial or systematic reproduction, redistribution, reselling, loan, sub-licensing, systematic supply, or distribution in any form to anyone is expressly forbidden. Terms & Conditions of access and use can be found at <http://www.tandfonline.com/page/terms-and-conditions>

Note sur quelques inégalités et formules d'approximation.

Par Birger Meidell.

Les calculs pénibles et laborieux que nécessitent trop souvent les opérations d'assurance sur la vie, rendent fort désireux de trouver des formules d'approximation ou bien des inégalités *générales*, faisant connaître en chaque cas particulier, et avec le moins de travail possible, une limite supérieure ou inférieure des expressions dont on cherche la valeur numérique. Cela est évident surtout au cas où l'on désire seulement faire une évaluation «à peu près». Les exemples en abondent.

Au numéro précédent de ce journal M. STEFFENSEN a publié un mémoire remarquable où il démontre une inégalité très générale, importante sans doute pour l'analyse mathématique, et qui, en outre, paraît être d'une grande utilité pratique précisément dans le sens nommé. C'est l'inégalité suivante.

$$\int_{b-\lambda}^b f(t) dt \leq \int_a^b f(t) \varphi(t) dt \leq \int_a^{a+\lambda} f(t) dt; \quad (1)$$

$f(t)$ y désigne une fonction qui dans l'intervalle (a, b) n'est jamais croissante, tandis que $\varphi(t)$ dans ce même intervalle est positive et plus petite que l'unité. Pour abréger on a posé

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \lambda.$$

M. STEFFENSEN fait de cette inégalité des applications immédiates par exemple au calcul approché des rentes viagères. En donnant à la limite, trouvée ainsi de (1), une certaine correction, il arrive à des formules d'approximation très précises.

Ces applications au calcul des assurances reposent surtout sur le fait que la fonction $v^t \frac{l_{x+t} \cdot y + t \dots}{l_{x \cdot y \dots}}$, qui figure comme un élément fondamental en bon nombre des expressions des mathématiques d'assurance, est le produit de deux fonctions satisfaisant précisément aux conditions nommées plus haut.

Or, on remarque encore que v^t est une fonction convexe (d'en bas) dans tout intervalle et que $\frac{l_{x+t} \cdot y + t \dots}{l_{x \cdot y \dots}}$ est une quantité positive. Cette remarque met en évidence les applications nombreuses et immédiates que l'on peut faire à ces mêmes calculs d'assurance d'une autre inégalité bien connue, due à M. JENSEN.

Si $e(t)$ est une fonction positive dans un intervalle (a, b) , et si $\psi(t)$ est une fonction partout convexe dans l'intervalle (α_1, α_2) , α_1 et α_2 étant les limites inférieure et supérieure en (a, b) d'une fonction arbitraire $\alpha(t)$, on a

$$(2) \quad \int_a^b e(t) \cdot \psi(\alpha(t)) dt \geq \int_a^b e(t) dt \cdot \psi \left(\frac{\int_a^b e(t) \alpha(t) dt}{\int_a^b e(t) dt} \right)$$

Le signe inverse a lieu si ψ est concave.¹ Cette inégalité a également lieu quand on remplace le signe $\int$ par le signe $\sum$.²

On peut très souvent se servir avec avantage dans les calculs numériques de cette propriété très générale. Le but du présent travail est de montrer qu'il existe une parenthèse entre ces inégalités (1) et (2). Ensuite nous allons, pour mieux les comparer, appliquer (2) à l'un des exemples traités par M. STEFFENSEN, ainsi qu'à quelques cas analogues.

¹ Il est sousentendu que toutes les fonctions en question sont intégrables.

² JENSEN: Sur les fonctions convexes. Acta mathematica, XXX 1906.

Remarquons que $f(t)$ n'étant jamais croissante en (a, b) , la fonction

$$\psi(t) = \int_a^t f(\xi) d\xi$$

sera concave¹ dans cet intervalle, parce que $\psi''(t)$ ne sera, par définition, jamais positive en (a, b) . Également

$$\psi(t) = \int_t^b f(\xi) d\xi$$

sera convexe.

Considérons d'abord le premier de ces deux cas et partons de l'inégalité (2) pour le cas de concavité et pour $\alpha(t) = t$; (2) s'écrit alors

$$(2)' \quad \int_a^b e(t) \psi(t) dt \leq \int_a^b e(t) dt \cdot \psi \left[\frac{\int_a^b e(t) \cdot t \cdot dt}{\int_a^b e(t) dt} \right];$$

(le signe inverse au cas de convexité).

En introduisant en (2)' la première des deux fonctions $\psi(t)$ écrites, on trouve

$$(2)'' \quad \int_a^b e(t) \int_a^t f(\xi) d\xi dt \leq \int_a^b e(t) dt \int_a^{\frac{\int_a^b e(t) \cdot t \cdot dt}{\int_a^b e(t) dt}} f(\xi) d\xi.$$

¹ La définition de concavité et convexité introduite par M. JENSEN, est plus générale que la définition ordinaire, mais contient celle ci comme cas particulier.

Or, comme on a dans tout l'intervalle (a, b)

$$\int_a^t f(\xi) d\xi \geq (t-a)f(t),$$

l'on aura, puisque $e(t)$ est positive,

$$\int_a^b e(t) \int_a^t f(\xi) d\xi dt \geq \int_a^b e(t) (t-a) f(t) dt;$$

donc de (2)''

$$(2''') \quad \int_a^b e(t) (t-a) f(t) dt \leq \int_a^b e(t) dt \frac{\int_a^b e(t) \cdot t dt}{\int_a^b e(t) dt} \int_a^t f(\xi) d\xi.$$

Enfin, comme

$$\frac{\int_a^b e(t) t dt}{\int_a^b e(t) dt} \equiv a + \frac{\int_a^b e(t) (t-a) dt}{\int_a^b e(t) dt}$$

et en posant

$$(3) \quad \begin{cases} e(t)(t-a) = \varphi(t) \\ \text{ou} : \\ e(t) = \frac{\varphi(t)}{t-a} \end{cases}$$

on trouve finalement

$$(4) \quad \int_a^b f(t) \varphi(t) dt \leq \mu \int_a^{a+\frac{\lambda}{\mu}} f(\xi) d\xi$$

pourvu que les intégrales

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \int_a^b \varphi(t) dt \\ \text{et} \\ \mu = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-a} dt \end{array} \right.$$

aient un sens, et que $\varphi(t)$ soit positive en (a, b) , tandis que $f(t)$ ne soit jamais croissante en (a, b) .

On voit d'abord que φ doit s'annuler pour $t = a$.

Prenons maintenant le cas de convexité. L'inégalité (2)' devient après introduction de la deuxième des fonctions $\psi(t)$ écrites plus haut,

$$(6) \quad \int_a^b e_1(t) \int_t^b f(\xi) d\xi dt \geq \int_a^b e_1(t) dt \cdot \frac{\int_a^b e_1(t) t dt}{\int_a^b e_1(t) dt} \int_a^b f(\xi) d\xi.$$

Or, comme

$$\int_t^b f(\xi) d\xi \leq (b-t) f(t)$$

on aura

$$\int_a^b e_1(t) \int_t^b f(\xi) d\xi dt \leq \int_a^b e_1(t) (b-t) f(t) dt;$$

donc de (6)

$$(7) \quad \int_a^b e_1(t) (b-t) f(t) dt \geq \int_a^b e_1(t) dt \cdot \int_a^b f(\xi) d\xi \cdot \frac{\int_a^b e_1(t) t dt}{\int_a^b e_1(t) dt}.$$

Or

$$\frac{\int_a^b e_1(t) t dt}{\int_a^b e_1(t) dt} \equiv b - \frac{\int_a^b e_1(t) (b-t) dt}{\int_a^b e_1(t) dt}.$$

Posons

$$(3)' \quad \begin{cases} e_1(t) (b-t) = \varphi_1(t) \\ e_1(t) = \frac{\varphi_1(t)}{b-t} \end{cases}$$

on trouve donc de (7)

$$(8) \quad \nu \int_{b-\frac{\lambda}{\nu}}^b f(t) dt \leq \int_a^b f(t) \varphi_1(t) dt$$

pourvu que λ (de (5)) et ν aient un sens.

$$(5)' \quad \nu = \int_a^b \frac{\varphi_1(t)}{b-t} dt,$$

et que $\varphi_1(t)$ soit positive, tandis que $f(t)$ ne soit jamais croissante en (a, b) .

$\varphi_1(t)$ doit, on le voit, s'annuler pour $t=b$.

En choisissant pour $\varphi(t)$ la même fonction dans ces deux inégalités (4) et (8) on voit de (3) et (3)' qu'elle sera de la forme $(b-t)(t-a)C(t)$; où $C(t)$ sera positive. En joignant les deux inégalités on aura

$$(9) \quad \nu \int_{b-\frac{\lambda}{\nu}}^b f(t) dt \leq \int_a^b f(t) \varphi(t) dt \leq \mu \int_a^{a+\frac{\lambda}{\mu}} f(t) dt$$

pourvu que $\varphi(t)$ soit positive en (a, b) , s'annule pour $t=a$ et $t=b$, et que les intégrales λ , μ et ν définies par (5) et (5)' aient un sens; et enfin que la fonction $f(t)$ ne soit jamais croissante en (a, b) .

On voit la grande ressemblance entre l'inégalité (9) et celle de M. STEFFENSEN, (1). La restriction de la fonction φ est pourtant assez différente dans les deux cas. Ces inégalités, on le voit, coïncident quand on a $\mu = \nu = 1$.¹

¹ Il est facile de trouver des exemples où ces équations sont compatibles. Supposons pour simplifier que les limites sont $a=0$ et $b=1$. Nous allons choisir pour φ la fonction

$$\varphi(t) = c \cdot t \cdot (1-t) e^{-\rho^2(t-1/2)^2}.$$

Chacune des deux intégrales μ et ν se réduit, on le voit sans peine, en mettant $\rho(t-1/2) = \xi$, à

$$\frac{c}{2\rho} \int_{-\rho/2}^{+\rho/2} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{c}{\rho} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi\left(\frac{\rho}{2}\right);$$

où $\Phi(t)$ désigne la fonction bien connue $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\xi^2} d\xi$. En prenant pour valeur de la constante c

$$c = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi} \Phi\left(\frac{\rho}{2}\right)}$$

les intégrales se réduisent donc bien à l'unité. La constante ρ reste arbitraire. Pour $t=0$ et $t=1$ on a $\varphi=0$, mais pour $t=1/2$, φ prends la valeur

Remarquons que λ , μ et ν sont positives, que $\frac{\lambda}{\mu}$, et $\frac{\lambda}{\nu}$ sont plus petites que $b \div a$; ce que l'on voit tout de suite en se rappelant que $\varphi = e(t)(t-a) = e_1(t)(b-t)$ où e et e_1 sont des fonctions positives.

Si dans l'inégalité (1) on prend φ égale à une constante positive k_1 ou k_2 plus petite que l'unité, on a par exemple

$$(10) \quad k_1 \int_{a_1}^{b_1} f(t) dt < \int_{a_1}^{a_1+k_1(b_1-a_1)} f(t) dt,$$

et également

$$(11) \quad \int_{b_2-k_2(b_2-a_2)}^{b_2} f(t) dt < k_2 \int_{a_2}^{b_2} f(t) dt$$

si (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont compris dans (a, b) : Choisissons en (10), $k_1 = \mu \leq 1$, $a_1 = a$, $b_1 = a + \frac{\lambda}{\mu}$, on trouve

$$(10)' \quad \mu \int_a^{a+\frac{\lambda}{\mu}} f(t) dt \leq \int_a^{a+\lambda} f(t) dt.$$

Prenons ensuite en (11), $k_2 = \nu \leq 1$, $b_2 = b$ et $a_2 = b - \frac{\lambda}{\nu}$, on aura

$$\frac{c}{4} = \frac{\rho}{2 \sqrt{\pi} \Phi\left(\frac{\rho}{2}\right)}.$$

Ainsi, en choisissant pour ρ une valeur plus grande que celle définie par l'équation

$$\rho_1 = 2 \sqrt{\pi} \Phi\left(\frac{\rho_1}{2}\right)$$

on peut rendre $\varphi^{(1/2)}$ aussi grand que l'on désire, la limite de Φ étant égale à l'unité. La valeur de ρ_1 ne sera pas très différente de $2 \sqrt{\pi}$, comme on le voit en consultant une table de la fonction Φ .

$$\int_{b-\lambda}^b f(t) dt \leq \nu \int_{b-\frac{\lambda}{\nu}}^b f(t) dt. \quad (11)'$$

Nous voyons donc que si $\varphi(t)$ et $f(t)$ satisfont aux conditions déjà nommées sous (9), et que, si en outre

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-a} dt \leq 1 \\ \text{et} \\ \nu &= \int_a^b \frac{\varphi(t)}{b-t} dt \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

on a, en posant pour abréger l'écriture $\int_a^b f(t) \varphi(t) dt = \dot{I}$,

$$\int_{b-\lambda}^b f(t) dt \leq \nu \int_{b-\frac{\lambda}{\nu}}^b f(t) dt \leq \dot{I} \leq \mu \int_a^{a+\frac{\lambda}{\mu}} f(t) dt \leq \int_a^{a+\lambda} f(t) dt \quad (13)$$

et l'inégalité de M. STEFFENSEN a donc lieu, sauf pour le cas $0 < \varphi(t) \leq 1$, aussi au cas où φ est définie par (12).

Il est facile de transformer toutes ces inégalités pour le cas où l'on change le signe $\int$ par le signe Σ .

Nous sommes partis de l'inégalité (2)' pour trouver ces inégalités. Inversement nous verrons facilement que l'on peut déduire (2)' comme un cas particulier de l'inégalité de M. STEFFENSEN.

Soit $e(\xi)$ une fonction positive; et choisissons pour $\varphi(t)$ la fonction positive et plus petite que l'unité en (a, b) ,

$$\varphi(t) = \frac{\int_a^b e(\xi) d\xi}{\int_a^b e(\xi) d\xi}.$$

En introduisant φ en (1) on trouve après multiplication avec $\int_a^b e(\xi) d\xi$

$$\int_a^b f(t) \int_t^b e(\xi) d\xi dt \leq \int_a^b e(\xi) d\xi \int_a^{a+\lambda_1} f(t) dt \quad (14)$$

où

$$\begin{aligned} a + \lambda_1 &= a + \frac{\int_a^b \int_t^b e(\xi) d\xi dt}{\int_a^b e(\xi) d\xi} = a + \frac{\int_a^b e(\xi) \int_a^\xi dt d\xi}{\int_a^b e(\xi) d\xi} = a + \\ &+ \frac{\int_a^b e(\xi) (\xi - a) d\xi}{\int_a^b e(\xi) d\xi} = \frac{\int_a^b e(\xi) \xi d\xi}{\int_a^b e(\xi) d\xi}. \end{aligned}$$

Or, quand $f(t)$ et $e(t)$ sont finies en (a, b) on a d'après Dirichlet

$$\int_a^b f(t) \int_t^b e(\xi) d\xi dt = \int_a^b e(\xi) \int_a^\xi f(t) dt d\xi.$$

Si donc enfin on écrit $\int_a^\xi f(t) dt = \psi_1(\xi)$, (donc $f(\xi) = \psi_1'(\xi)$),

où ψ_1 sera — nous le rappelons — une fonction concave en (a, b) , on trouve en introduisant dans (14)

$$\int_a^b e(\xi) \psi_1(\xi) d\xi \leq \int_a^b e(\xi) d\xi \cdot \psi_1 \left(\frac{\int_a^b e(\xi) \xi d\xi}{\int_a^b e(\xi) d\xi} \right). \quad (15)$$

C'est bien la forme de l'inégalité (2)' au cas de concavité. La fonction ψ_1 est pourtant soumise à la restriction $\psi_1(a) = 0$. Or, en ajoutant à chaque membre de (15) la quantité $\int_a^b e(\xi) k d\xi$, k étant une constante quelconque, on voit que (15) reste encore valable pour la fonction concave $\psi_1(\xi) + k$. Prenons $k = \psi(a)$ et $f(\xi) = \psi'(\xi)$, alors cette fonction $\psi_1(\xi) + k$ devient égale à

$$\int_a^\xi \psi'(t) dt + \psi(a) = \psi(\xi) \quad (16)$$

et l'inégalité (15) sera donc valable tout généralement pour une fonction concave quelconque $\psi(\xi)$ qui se laisse exprimer par (16), et dont la dérivée $\psi'(\xi)$ est finie en (a, b) , ainsi que $e(\xi)$. Nous avons ainsi retrouvé l'inégalité (2)' de JENSEN pour le cas de concavité. Pour avoir le cas de convexité on n'a qu'à prendre

$$\varphi_1 = \frac{\int_a^t e_1(\xi) d\xi}{\int_a^b e_1(\xi) d\xi}.$$

e_1 étant une nouvelle fonction positive. En introduisant cette fonction φ_1 dans la première partie de (1) on voit tout de suite, en procédant précisément comme au cas de concavité, que l'on est ramené à (2)' pour le cas de convexité.

Après avoir ainsi montré cette parenthé entre les inégalités (1) de M. STEFFENSEN et (2)' de M. JENSEN, nous allons nous occuper de quelques exemples d'application de (2) ou (2)'.¹

Etant donné une intégrale $\int_a^b e(t) \alpha(t) dt$, où $e(t)$ est une fonction positive, ou bien $\sum_a^b e_t \alpha_t$, l'on peut évidemment s'arranger de différentes manières pour trouver une limite de cette expression à l'aide des inégalités (2).

Remarquons par exemple que l'on peut toujours pour $\alpha(t)$ écrire $\psi(\psi^{-1}(\alpha(t)))$ ou bien $\psi^{-1}(\psi(\alpha(t)))$, lorsque ψ et ψ^{-1} sont deux fonctions inverses, que l'on sache choisir telles que ψ ou ψ^{-1} soit concave ou convexe. Ce choix de ψ ou ψ^{-1} dépendra évidemment des circonstances particulières en chaque cas spécial. Comme les inégalités (2) tendent vers une égalité lorsque ψ s'approche à une droite, on tâchera de choisir pour ψ une fonction dont la courbure sera aussi petite que possible dans l'intervalle considéré. Mais aussi il faut avoir soin que la valeur de $\sum e_t \psi^{-1}(\alpha_t)$, ou bien de l'intégrale correspondante, soit ou bien connue d'avance ou bien plus facile à calculer que la somme dont en est parti. Il faut également supposer que $\sum e_t$ soit connue ou facile à calculer; c'est en vérité à ces deux sommes, ou intégrales, que l'on est conduit par l'emploi de l'inégalité (2).

On pourrait aussi par exemple essayer d'écrire directement

$$e(t) \alpha(t) = \frac{e(t) \alpha(t)}{\psi(t)} \cdot \psi(t) = C(t) \cdot \psi(t)$$

si l'on peut trouver une fonction $\psi(t)$ qui satisfait aux dites conditions, en même temps que $C(t)$ devient positive et que

¹ Nous ne nous occuperons pas ici des autres inégalités écrites mais j'espère trouver une occasion de revenir sur ce sujet plus tard.

$\sum C_t$ et $\sum C_t t$ ou bien les intégrales correspondantes, soient faciles à calculer ou connues d'avance.

De ces deux manières examinons un exemple. Cherchons une valeur approximative, une limite inférieure ou supérieure, d'une rente viagère $a_x^1 = \sum v_1^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$ pour un taux de la rente de $i_1\%$, lorsque l'on connaît déjà cette même rente viagère pour un taux de la rente de $i\%$, $\therefore a_x = \sum v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$.

Prenons d'abord les deux fonctions inverses $\psi_t = t^{1+\varepsilon}$ et $\psi_t^{-1} = t^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$, ou inversement. Alors on a par exemple $\psi(v^t) = v^{(1+\varepsilon)t} = v_1^t$ quand on met $v_1 = v^{1+\varepsilon}$, c'est-à-dire, $1 + \varepsilon = \frac{\log v_1}{\log v} = \frac{\delta_1}{\delta}$. Si i_1 n'est pas très différent de i , le rapport $\frac{\delta_1}{\delta}$ ne diffère que très peu de l'unité, ε sera petite, la courbure de ψ et de ψ^{-1} sera petite, comme elles s'approchent à la droite $\psi(t) = t$. On peut donc s'attendre à un résultat satisfaisant en calculant a_1 à l'aide de (2). Cette inégalité donne tout de suite, pour $i_1 > i$,

$$a_x^1 > \sum_1^{\infty} \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot \left(\frac{\sum_1^{\infty} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}}{\sum_1^{\infty} \frac{l_{x+t}}{l_x}} \right)^{\frac{\delta_1}{\delta}},$$

et nous retombons bien à $\sum v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} = a_x$, et à $\sum \frac{l_{x+t}}{l_x} = e_x$. On a donc pour $i_1 > i$

$$\frac{a_x^1}{e_x} > \left(\frac{a_x}{e_x} \right)^{\frac{\delta_1}{\delta}} \quad (17)$$

pour $i_1 < i$ le signe inverse. En écrivant

$$a_x^1 = e_x \left(\frac{a_x}{e_x} \right)^{\frac{\delta_1}{\delta}} \quad (18)$$

ou si l'on veut

$$\left(\frac{a_x^1}{e_x}\right)^\delta = \left(\frac{a_x}{e_x}\right)^{\delta_1} \quad (19)$$

l'erreur ne sera pas très grande, comme on le voit sur le tableau suivant, Tab. I, où l'on a calculé quelques valeurs de a_x^1 en supposant connues les valeurs de a_x pour 4 %. Le résultat paraît satisfaisant, vue la grande simplicité de la formule employée, qui ne nécessite point la connaissance des commutations ordinaires $D_x, N_x, \dots$

Tab. I. — Formule (18).

a_x^1 Text-Book HM								
x	3 %	Δ	3 1/2 %	Δ	4 1/2 %	Δ	5 %	Δ
20	22,73	- 0,66	20,58	- 0,34	16,91	0,37	15,34	0,73
40	17,44	- 0,26	16,28	- 0,18	14,11	0,15	13,16	0,31
60	10,28	- 0,06	9,85	- 0,03	9,06	0,04	8,69	0,08

On pourrait probablement améliorer ce résultat en ajoutant à la valeur trouvée de a_x^1 un terme de correction en suivant la voie indiquée par M. STEFFENSEN. Nous ne pourrions pas ce but; notre intention n'étant que de montrer avec quelle facilité on peut trouver des différentes formules d'approximation par un emploi *direct* des formules (2).

Reprenons ce même exemple en transformant la quantité sous le signe $\sum$ (ou $\int$) de la deuxième manière indiquée plus haut. Cherchons à trouver non le rapport entre a_x^1 et e_x , (voir (19)), mais — ce qui sera plus naturel — entre a_x^1 et a_x . Comme e_x est la valeur de a_x^1 quand le taux de la rente est de 0 %, c'est-à-dire que le taux de la rente est de i_1 % plus petite que dans a_x^1 , tandis que a_x correspond à une différence dans le taux de la rente de $h = (i_1 - i)$ % seulement, on devinerait

d'avance que nous devons trouver une meilleure approximation en comparant a_x^1 avec a_x au lieu de e_x , comme tout à l'heure. Ecrivons pour cela $v_1^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$ dans la forme $v_1^t (1 + hv)^t (1 + hv)^{-t} \frac{l_{x+t}}{l_x} = v_1^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot (1 + hv)^{-t}$. Et, en écrivant

$$a_x^1 = \sum_1^{\infty} v_1^t \frac{l_{x+t}}{l_x} (1 + hv)^{-t} \quad (20)$$

on n'a qu'à prendre $v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$ comme la fonction $C(t)$ et $(1 + hv)^{-t}$ comme $\psi(t)$ pour appliquer la formule (2)'. C'est précisément cette même forme pour a_x^1 que M. STEFFENSEN prend comme point de départ quand il cherche une valeur approximative de a_x^1 à l'aide de l'inégalité (1). Pour (1) h doit être positive; tandis que pour (2), on le voit, h peut être et positive et negative. Ce produit $C(t)\psi(t)$ satisfait pour $h > 0$ en même temps aux conditions exigées pour les inégalités (1) et (2)'. Cela peut évidemment arriver aussi en d'autres exemples analogues et l'on pourra dans ces cas appliquer l'une ou l'autre de ces deux inégalités.

Dans le cas présent, (2)' nous donne

$$a_x^1 > a_x (1 + hv)^1 \frac{\sum_1^{\infty} t D_{x+t}}{\sum_1^{\infty} D_{x+t}}$$

c'est-à-dire

$$a_x^1 > a_x \lambda^{-\frac{S_x}{N_x}}, \quad (\lambda = 1 + hv)^1 \quad (21)$$

¹ Dans tout ce qui suit nous ferons usage de la notation adoptée pour les valeurs de N_x en Text-Book: $N_x = \sum_1^{\infty} D_{x+t}$ enfin de nous servir di-

rectement de ces valeurs dans les exemples numériques. Les formules que nous trouvons se laisseront tout de suite transformer lorsque l'on désire employer la notation qui est maintenant plus ordinaire, à savoir $N_x =$

$$= \sum_0^{\infty} D_{x+t}.$$

tandis que l'on déduit de (1)

$$a_x^1 < \sum_1^{a_x} \lambda^{-t}$$

qui est valable pour $\lambda > 1$.¹

La formule approximative

$$a_x^1 = a_x \lambda^{-\frac{S_x}{N_x}} \quad (21)'$$

donne des valeurs très satisfaisantes, comme on le voit au tableau ci dessous (Tab. II) où l'on a calculé a_x^1 pour 3 % et 4 % supposant connue la valeur de a_x pour 3 1/2 %.

Tab. II. — Formule (21)'.

a_x^1 . — Text-Book HM					
x	3 %	Δ	4 %	Δ	x
20	22,06	0,04	18,63	0,03	20
30	19,86	0,04	17,13	0,03	30
40	17,16	0,02	15,12	0,02	40
50	13,87	0,01	12,51	0,01	50
60	10,22	0,00	9,45	0,00	60
70	6,65	0,00	6,29	0,00	70
80	3,70	0,00	3,57	0,00	80

¹ Les valeurs numériques de cette inégalité, prise comme égalité, donnerait a_x^1 un peu moins exactement que l'inégalité (21). Ainsi pour $x = 20$ on trouve la valeur 19,24 pour a_x^1 en augmentant le taux de la rente de 3,5 % à 4 % ($h = 0,005$) — quand la valeur exacte est 18,66. L'erreur est donc $\Delta = -0,58$ tandis que l'autre inégalité (21) donne la valeur 18,63 avec l'erreur $\Delta = +0,03$. Pourtant, après une transformation à laquelle nous avons fait allusion plus haut M. STEFFENSEN, construit de cette inégalité une formule d'approximation d'une grande précision.

La plus part des formules ordinaires d'assurance sur la vie pouvant s'exprimer très simplement à l'aide de $a_{x:\overline{n}|}$ il serait utile de construire des formules d'approximation $a_{x:\overline{n}|}^1$ de cette quantité pour un changement de h % dans le taux de la rente. De (2)' nous trouvons comme plus haut

$$\left. \begin{array}{l} \text{où} \quad a_{x:\overline{n}|}^1 > a_{x:\overline{n}|} \lambda^{-k} \\ k = \frac{\sum_{t=0}^n t D_{x+t}}{\sum_{t=0}^n D_{x+t}} = \frac{S_x - S_{x+n} - n N_{x+n-1}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}} \end{array} \right\} \quad (22)$$

Pour $n = 20$ les tableaux III et IV montrent pour quelques ages, respectivement les valeurs exactes de $a_{x:\overline{n}|}$ pour 3 % et 4 % et celles calculées par la formule

$$a_{x:\overline{n}|}^1 = a_{x:\overline{n}|} \lambda^{-k} \quad (23)$$

supposant connue la valeur exacte pour $3\frac{1}{2}$ %.

Tab. III.

$\frac{N_{(x+1)} - N_{(x+1)+20}}{D_x}$; Text-Book <i>H M</i>			
x	3 %	4 %	x
20	14,444	13,354	20
40	13,732	12,725	40
60	10,604	9,953	60

Tab. IV. Formule (23).

$a_{x 20}^1$ — Text-Book H M					
x	3 %	Δ	4 %	Δ	x
20	14,439	0,005	13,351	0,003	20
40	13,727	0,005	12,722	0,003	40
60	10,601	0,003	9,951	0,002	60

Pour la rente viagère, différée de m ans, temporaire de n ans ${}_m|a_{x+n}$ la valeur de k sera également

$$\frac{\sum_{m}^{n-m} t D_{x+t}}{\sum_{m}^{n-m} D_{x+t}} = \frac{m(N_{x+m-1} - N_{x+m+n-1}) + S_{x+m} - S_{x+m+n} - n N_{x+m+n-1}}{N_{x+m-1} - N_{x+m+n-1}}$$

Si l'on veut on peut encore écrire le numérateur

$$(m-1)(N_{x+m-1} - N_{x+m+n-1}) + S_{x+m-1} - S_{x+m+n-1} - n N_{x+m+n-1}.$$

Il est évident que l'on peut encore déduire directement les commutations $N_x^1, M_x^1, \dots$ de la même façon. On a par exemple

$$N_x^1 = \sum_1^{\infty} D_{x+t}^1 = \sum_1^{\infty} (1 + hv)^{-t} D_{x+t}$$

et l'on trouve de (2)'

$$\begin{aligned} N'_x &> N_x \lambda^{-(x+1) - \frac{S_{x+1}}{N_x}} \\ \text{ou:} \quad N_x^1 &> N_x \lambda^{-x - \frac{S_x}{N_x}} \end{aligned} \quad (24)$$

ce que l'on aurait évidemment pu déduire directement de (21)' en remarquant que $\frac{v^x}{v_1^x} = \lambda^x$.

En toutes ces formules on peut très bien développer $\lambda^{-k} = (1 + hv)^{-k}$ en série procédant suivant les puissances de hv . En s'arrêtant au deuxième terme on trouve sensiblement les mêmes valeurs que par un calcul exact de λ^{-k} à l'aide de logarithmes.

Ainsi la formule (21), nous donne la formule connue, un peu moins exacte¹

$$a_x^1 = a_x - hv \frac{S_x}{D_x}$$

tandis que (24) devient

$$N_x^1 = (1 - hvx) N_x - hv S_x.$$

On trouverait précisément de la même façon

$$M_x^1 > M_x \lambda^{-\left(x+1+\frac{R_x}{M_x}\right)} \quad (25)$$

ou en développant,

$$M_x^1 = (1 - hv(x+1)) M_x - hv R_x \quad (25)'$$

.

et ainsi de suite.

Remarquons que toutes les formules dont il a été question ici, gardent la même forme au cas de plusieurs têtes.

En somme, ces quelques exemples que nous avons traité pour le cas d'une variation dans le taux de la rente suffisent pour nous montrer avec quelle facilité et avec quel avantage on peut se servir des inégalités de M. JENSEN dans les calculs d'assurance sur la vie. Il sera possible de procéder d'une façon analogue au cas d'une variation de la mortalité; nous n'y insisterons pas.

Aussi ces inégalités de M. JENSEN peuvent être très utiles quand il s'agit de reconnaître la portée des approximations que souvent, nous jugeons avantageux à introduire dans des calculs divers, par exemple dans la théorie du risque.² Avec la remarquable inégalité de M. STEFFENSEN ces inégalités (2) nous donnent un excellent remède pour nous passer de bien de calculs pénibles.

¹ Voir par exemple pag. 97 dans le mémoire déjà cité de M. STEFFENSEN.

² Je m'en suis servi dans un mémoire «Sur la théorie du plein» présenté au congrès d'actuaire à Amsterdam 1912.