LE THÉORÈME DE M. PICARD ET LES FONCTIONS ALGÉBROÏDES.

Par M. **Georges Rémoundos** (Athènes).

Adunanza del 22 dicembre 1912.

INTRODUCTION.

1. Dans une Note publiée récemment [1]), nous avons fait connaître un théorème général qui constitue une extension d'un théorème bien connu de M. LANDAU (généralisation du théorème classique de M. PICARD) au cas d'une fonction non régulière en $z = 0$. L'application de cette méthode aux fonctions algébroïdes et aux fonctions algébriques m'a conduit à d'autres résultats, que je me propose d'exposer dans ce travail. Ces résultats concernent l'ensemble des branches régulières ou *irrégulières* en $z = 0$.

Nous appelons *algébroïde* toute fonction ayant un nombre fini de branches dans tout le plan et ne possédant à distance finie aucun point singulier *transcendant.*

Nous utiliserons la fonction $\varphi(a_0, a_1)$ indiquée par M. LANDAU dans ses travaux [2]).

Une limite supérieure de $\varphi(a_0, a_1)$ a été trouvée par M. HURWITZ [3]) et par M. SCHOTTKY [4]).

La fonction $\varphi(a_0, a_1)$ a été déterminée complètement par M. CARATHÉODORY [5]).

---

[1]) G. RÉMOUNDOS, *Le théorème de M.* PICARD *et les fonctions multiformes* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CLV (2^e^ semestre 1912), pp. 818-820].

[2]) E. LANDAU : *a*) *Über eine Verallgemeinerung des* PICARD*schen Satzes* [Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1904, S. 1118-1133] ; *b*) *Über den* PICARD*schen Satz* [Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. LI (1906), S. 252-318].

[3]) A. HURWITZ, *Über die Anwendung der elliptischen Modulfunktionen auf einen Satz der allgemeinen Funktionentheorie* [Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. XLIX (1904), S. 242-253].

[4]) F. SCHOTTKY, *Über den* PICARD*schen Satz und die* BOREL*schen Ungleichungen* [Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1904, S. 1244-1263].

[5]) C. CARATHÉODORY, *Sur quelques généralisations du théorème de M.* PICARD [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CXLI (2e semestre 1905), pp. 1213-1215]. Voir aussi : P. BOUTROUX, *Propriétés d'une fonction holomorphe dans un cercle où elle ne prend pas les valeurs zéro et un* [Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XXXIV (1906), pp. 30-39].

I.

Théorème général sur les fonctions algébroïdes.

2. Soit une fonction algébroïde $u = \mathrm{a}(z)$ définie par l'équation:

$$(1)\qquad u^n + A_1(z)u^{n-1} + A_2(z)u^{n-2} + \cdots + A_{n-1}(z)u + A_n(z) = 0,$$

les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant des fonctions entières.

Si, à l'intérieur du cercle

$$(2)\qquad |z| < r$$

la fonction $\mathrm{a}(z)$ ne prend ni la valeur *zéro* ni la valeur u_1, la fonction

$$(3)\qquad \sum(z, u_1) = \sigma(z) = -\frac{A_n(z)}{u_1[u_1^{n-1} + A_1(z)u_1^{n-2} + \cdots + A_{n-2}(z)u_1 + A_{n-1}(z)]}$$

ne prend pas, dans le même cercle, les valeurs *zéro* et *un*. Soient:

$$(4)\qquad \begin{cases} A_1(z) = a_1 + b_1 z + c_1 z^2 + \cdots \\ A_2(z) = a_2 + b_2 z + c_2 z^2 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n(z) = a_n + b_n z + c_n z^2 + \cdots . \end{cases}$$

Si le nombre u_1 n'est pas une racine de l'équation

$$(5)\qquad P(u) = u^{n-1} + a_1 u^{n-2} + a_2 u^{n-3} + \cdots + a_{n-2} u + a_{n-1} = 0,$$

l'expression (3) représente une fonction régulière en $z = 0$. Désignons par (E) l'ensemble des racines de l'équation (5).

Nous avons

$$(6)\quad \sigma'(0) = -\frac{b_n u_1^{n-1} + (a_1 b_n - a_n b_1)u_1^{n-2} + \cdots + (a_{n-2}b_n - a_n b_{n-2})u + (a_{n-1}b_n - a_n b_{n-1})}{u_1(u_1^{n-1} + a_1 u_1^{n-2} + \cdots + a_{n-2}u_1 + a_{n-1})^2}$$

et nous voyons que le nombre $\sigma'(0)$ est différent de zéro lorsque le nombre u_1 n'est pas une racine de l'équation:

$$(7)\qquad \begin{cases} Q(u) = b_n u^{n-1} + (a_1 b_n - a_n b_1)u^{n-2} + \cdots \\ \cdots + (a_{n-2} b_n - a_n b_{n-2})u + (a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1}) = 0. \end{cases}$$

Désignons par (E_1) l'ensemble des racines de cette équation.

Nous sommes ainsi conduits à la conclusion que, si le nombre u_1 n'appartient pas aux ensembles (E) et (E_1), la fonction

$$(8)\qquad \sigma(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \cdots$$

est régulière en $z = 0$ et nous avons $(\gamma_1 \neq 0)$:

$$(9)\qquad \gamma_0 = -\frac{a_n}{u_1 P(u_1)}, \quad \gamma_1 = -\frac{Q(u_1)}{u_1[P(u_1)]^2}.$$

Dès lors, nous n'avons qu'à appliquer le théorème de M. Landau à cette fonction $\sigma(z)$ pour obtenir la conclusion suivante: ou bien le rayon r du cercle (2) est inférieur ou égal au nombre $\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$ de M. LANDAU, ou bien à l'intérieur de ce cercle il existe un, au moins, zéro de la fonction

$$f_1(z, u) = u_1^{n-1} + A_1 u_1^{n-2} + \cdots + A_{n-2} u_1 + A_{n-1},$$

c'est-à-dire, un, au moins, point où la fonction algébroïde $\mathrm{a}_1(z)$ définie par l'équation

$$f_1(z, u) = u^{n-1} + A_1(z) u^{n-2} + \cdots + A_{n-2}(z) + A_{n-1}(z) = 0$$

prend la valeur u_1.

Les formules (9) nous montrent que la fonction $\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$ ne dépend que des nombres n, u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n et nullement des autres coefficients des séries (4). Nous avons ainsi obtenu le théorème suivant:

THÉORÈME I. — *Soit $u = \mathrm{a}(z)$ une fonction algébroïde finie à distance finie et déterminée par l'équation:*

$$f(z, u) = u^n + A_1(z) u^{n-1} + A_2(z) u^{n-2} + \cdots + A_{n-1}(z) u + A_n(z) = 0 \tag{10}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A_1(z) = a_1 + b_1 z + c_1 z^2 + \cdots \\ A_2(z) = a_2 + b_2 z + c_2 z^2 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n(z) = a_n + b_n z + c_n z^2 + \cdots \end{array}\right. \tag{11}$$

et u_1 un nombre n'appartenant pas à l'ensemble (E_1). Si nous envisageons aussi la fonction algébroïde $u = \mathrm{a}_1(z)$ définie par l'équation

$$f_1(z, u) = u^{n-1} + A_1(z) u^{n-2} + A_2(z) u^{n-3} + \cdots + A_{n-1}(z) = 0, \tag{11'}$$

il existe un cercle

$$|z| < R = R(n, u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n) \tag{12}$$

dont le rayon dépend seulement des nombres n, u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n [et nullement des autres coefficients des séries (11)] *à l'intérieur duquel ou bien l'algébroïde $\mathrm{a}_1(z)$ prend la valeur u_1 ou bien la fonction $\mathrm{a}(z)$ prend au moins une fois l'une des valeurs zéro et u_1. Le rayon R est plus grand* [6]) *que $\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$, les γ_0 et γ_1 ayant les valeurs indiquées par les formules* (9). Remarquons que l'équation (11'), qui définit l'algébroïde $\mathrm{a}_1(z)$ se déduit de l'équation donnée (10), si nous diminuons d'une unité tous les exposants de u en supprimant le dernier terme. Si, à l'intérieur du cercle (12), aucune des fonctions $\mathrm{a}(z)$ et $\mathrm{a}_1(z)$ ne prend la valeur u_1, nous dirons que cette valeur u_1 est *exceptionnelle*. D'après cette définition, les valeurs de l'ensemble (E) ne sont pas exceptionnelles, puisque la fonction $\mathrm{a}_1(z)$ prend ces valeurs pour $z = 0$; les valeurs de l'ensemble (E_1) peuvent être exceptionnelles. Si les nombres

$$b_n, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_n & b_n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_n & b_n \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{n-2} & b_{n-2} \\ a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_n & b_n \end{vmatrix}$$

---

[6]) Si nous excluons le cas où u_1 est une racine du polynôme $P(u)$. Dans ce cas nous prenons $R = 0$.

ne sont pas tous nuls, l'équation (7) n'est pas une identité et, par conséquent, le nombre des valeurs distinctes de l'ensemble (E_1) est au plus égal à $n - 1$.

Ce Théorème I ramène l'étude des valeurs de la fonction donnée à celle des valeurs de la fonction $\mathrm{a}_1(z)$ qui possède un nombre moindre de branches et peut être beaucoup plus simple que la fonction donnée; il peut se faire, par exemple, que la fonction $\mathrm{a}_1(z)$ soit algébrique, la fonction $\mathrm{a}(z)$ étant transcendante. Dans la suite, la fonction $\mathrm{a}_1(z)$ sera appelée *adjointe* de l'algébroïde donnée $\mathrm{a}(z)$. Le Théorème I peut s'énoncer aussi de la façon suivante:

Étant donnés n couples de nombres

$$(a_1, b_1),\quad (a_2, b_2),\ \ldots,\ (a_{n-1}, b_{n-1}),\quad (a_n, b_n)$$

tels que les nombres

$$b_n,\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_n & b_n \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_n & b_n \end{vmatrix},\ \ldots,\ \begin{vmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_n & b_n \end{vmatrix}$$

ne soient pas tous nuls, et un autre nombre u_1 différent des racines de l'équation

$$(13)\qquad b_n u^{n-1} + (a_1 b_n - a_n b_1) u^{n-2} + \cdots + (a_{n-2} b_n - a_n b_{n-2}) + (a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1}) = 0,$$

il existe un nombre $R(n, u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n)$ dépendant seulement des $n, u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ tel que, à l'intérieur du cercle

$$|z| < R$$

toute algébroïde $u = \mathrm{a}(z)$ définie par une équation de la forme

$$(14)\qquad \begin{cases} u^n + (a_1 + b_1 z + \cdots) u^{n-1} + (a_2 + b_2 z + \cdots) u^{n-2} + \cdots \\ \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1} z + \cdots) u + (a_n + b_n z + \cdots) = 0 \end{cases}$$

jouisse de la propriété suivante: ou bien cette fonction $\mathrm{a}(z)$ prend au moins une fois l'une des valeurs 0 *et u_1 ou bien son adjointe $\mathrm{a}_1(z)$ prend la valeur u_1. Les fonctions $a_1 + b_1 z + \cdots$, $a_2 + b_2 z + \cdots$, $a_n + b_n z + \cdots$ sont supposées entières et leurs coefficients non écrits peuvent être tout à fait quelconques.*

Il s'en suit que, étant donnés les n couples

$$(a_1, b_1),\quad (a_2, b_2),\ \ldots,\ (a_n, b_n),$$

tels que les nombres

$$b_n,\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_n & b_n \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_n & b_n \end{vmatrix},\ \ldots,\ \begin{vmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_n & b_n \end{vmatrix}$$

ne soient pas tous nuls, et un nombre quelconque u_1 ne satisfaisant pas à l'équation (13), il existe un nombre positif fini,

$$\Phi(n, u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n),$$

ayant les propriétés suivantes:

1° Étant donné un nombre positif quelconque δ, à l'intérieur du cercle

$$|z| < \Phi + \delta,$$

toute algébroïde, définie par une équation (14), prend au moins une fois l'une des valeurs 0 et u_1 ou bien son adjointe prend la valeur u_1.

2° Si δ désigne un nombre positif quelconque plus petit que Φ, il existe une fonction algébroïde, définie par une équation (14), qui ne prend, à l'intérieur du cercle

$$|z| < \Phi - \delta,$$

ni la valeur o ni la valeur u_1; l'algébroïde adjointe ne prend pas aussi, dans le même cercle, la valeur u_1.

Dans le cas où le nombre u_1 est une racine de l'équation

$$P(u) = u^{n-1} + a_1 u^{n-2} + a_2 u^{n-3} + \cdots + a_{n-1} = 0, \tag{15}$$

le nombre Φ est égal à zéro, puisque l'adjointe de toute algébroïde donnée par une équation (14) prend pour $z = 0$ la valeur u_1. Si u_1 n'est pas une racine de l'équation (15), nous avons

$$\Phi(n, u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n) = \varphi(\gamma_0, \gamma_1), \tag{16}$$

où

$$\gamma_0 = -\frac{a_n}{u_1 P(u_1)}, \quad \gamma_1 = -\frac{Q(u_1)}{u_1 [P(u_1)]^2},$$

$$Q(u) = b_n u^{n-1} + (a_1 b_n - a_n b_1) u^{n-2} + \cdots + (a_{n-2} b_n - b_{n-2} a_n) u + (a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1}).$$

Les nombres γ_0 et γ_1 ainsi déterminés sont finis et $\gamma_1 \neq 0$.

3. On démontre l'égalité (16) en remarquant que, lorsque dans un cercle

$$|z| < r \tag{17}$$

l'algébroïde (14) ne prend pas les valeurs o et u_1 et son adjointe ne prend pas la valeur u_1, alors, dans le même cercle, la fonction

$$-\frac{A_n(z)}{u_1 f_1(z, u_1)} = \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots \tag{18}$$

est régulière et ne prend ni la valeur o ni la valeur 1.

Inversement, si la fonction (18) est régulière et ne prend pas les valeurs o et 1 à l'intérieur d'un cercle (17), l'algébroïde (14) ne prend pas, dans le même cercle, les valeurs o et u_1 et son adjointe $a_1(z)$ ne prend pas la valeur u_1. On s'en rend mieux compte par les raisonnements suivants: A l'intérieur du cercle

$$|z| < \varphi + \delta$$

la fonction (18) prend l'une des valeurs o et 1 [7]), quelques soient les coefficients γ_2, γ_3, ... Par conséquent, à l'intérieur du même cercle, ou bien l'algébroïde (14) prend l'une des valeurs o et u_1 ou bien son adjointe prend la valeur u_1 quelques que soient les coefficients non écrits des séries:

$$a_1 + b_1 z + \cdots, \quad a_2 + b_2 z + \cdots, \quad a_n + b_n z + \cdots. \tag{19}$$

Étant donné un cercle

$$|z| < \varphi - \delta, \tag{20}$$

il existe une fonction

$$g(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots$$

régulière et ne prenant pas les valeurs o et 1 à l'intérieur de ce cercle.

---

7) Si elle est régulière dans le cercle.

Nous pouvons maintenant choisir les coefficients non écrits des séries:

$$a_1 + b_1 z + \cdots, \quad a_2 + b_2 z + \cdots, \quad a_{n-1} + b_{n-1} z + \cdots$$

de façon que l'on ait

$$u_1 f_1(z, u_1) = e^{H(z)}, \quad H(z) = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots,$$

$H(z)$ étant une fonction entière dont les coefficients q_0 et q_1 sont déterminés à l'aide des nombres donnés n, u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_{n-1}, b_{n-1}. Nous choisirons enfin les coefficients non écrits de la série $a_n + b_n z + \cdots$ de façon que l'on ait

$$- A_n(z) = e^H . g(z).$$

Grâce à cette détermination des séries (19), la fonction (18) est régulière et ne prend pas les valeurs 0 et 1 à l'intérieur du cercle (20). Nous en concluons immédiatement que l'algébroïde définie par l'équation (14), dont les coefficients sont choisis de la façon ci-dessus indiquée, ne prend pas, dans le cercle (20), les valeurs 0 et u_1 et son adjointe $a_1(z)$ ne prend pas la valeur u_1.

L'égalité (16) se trouve ainsi complètement démontrée par les raisonnements précédents.

II.

Les fonctions algébriques et les inverses des fonctions algébroïdes.

4. Parmi les nombreux théorèmes qui se trouvent exposés dans le travail de M. Landau [loc. cit. [2]), *b*] il y en a un, le Théorème XXVI, qui nous permettra d'établir facilement une proposition concernant les fonctions algébriques et les inverses des fonctions algébroïdes.

Le Théorème XXVI du travail de M. Landau s'énonce comme il suit:

« Si une fonction analytique

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$$

est pour $|z| < r$ régulière et différente de zéro et ne prend la valeur 1 que en m points au plus, son module sur la circonférence $\frac{3}{4} r$ est plus petit qu'une quantité dépendant seulement de a_0 et m ».

Considérons d'abord une fonction algébrique $u = g(z)$ définie par l'équation

$$(21) \begin{cases} Q(z, u) = u^n + P_1(z) u^{n-1} + P_2(z) u^{n-2} + \cdots + P_{n-1}(z) u + P_n(z) = 0 \\ P_1(z) = a_1 + b_1 z + \cdots, \quad P_2(z) = a_2 + b_2 z + \cdots, \quad P_n(z) = a_n + b_n z + \cdots \end{cases}$$

et soit m le degré par rapport à z de cette équation (21). Si, à l'intérieur du cercle

$$(22) \qquad |z| < r,$$

la fonction $g(z)$ ne prend pas la valeur u_1, le polynôme $Q(z, u_1)$ ne possède pas des zéros dans le cercle (22); d'autre part, ce polynôme ne saurait prendre la valeur *un* que en m au plus points à l'intérieur du cercle (22). Si, donc, nous posons

$$Q(z, u_1) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots,$$

nous aurons

$$M\left(\tfrac{3}{4}r\right) < \Omega(\gamma_0, m),$$

$M\left(\frac{3}{4}r\right)$ désignant le module maximum de $Q(z, u_1)$ sur la circonférence $\frac{3}{4}r$, et $\Omega(\gamma_0, m)$ une quantité ne dépendant que de γ_0 et m. On en déduit

$$|\gamma_1| < \frac{\Omega(\gamma_0, m)}{\frac{3}{4}r}, \quad r < \frac{4}{3|\gamma_1|}\Omega(\gamma_0, m).$$

Comme nous avons

$$\gamma_0 = u_1^n + a_1 u_1^{n-1} + a_2 u_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1} u_1 + a_n,$$
$$\gamma_1 = b_1 u_1^{n-1} + b_2 u_1^{n-2} + \cdots + b_{n-1} u_1 + b_n,$$

le nombre γ_1 sera différent de zéro, si u_1 n'est pas une racine de l'équation

$$(23) \qquad b_1 u^{n-1} + b_2 u^{n-2} + \cdots + b_{n-1} u + b_n = 0.$$

Pour qu'elle ne soit pas une identité, il suffit de supposer que les coefficients b_1, $b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n$ ne soient pas tous nuls. En ce qui concerne la détermination de $\Omega(\gamma_0, m)$, je renvois le lecteur au travail de M. Landau [loc. cit. [a]), b]. Nous obtenons ainsi le théorème suivant:

Théorème II. — *Étant donnée une fonction algébrique $u = g(z)$, définie par l'équation*

$$u^n + P_1(z)u^{n-1} + P_2(z)u^{n-2} + \cdots + P_{n-1}(z)u + P_n(z) = 0,$$

où

$$P_1(z) = a_1 + b_1 z + \cdots, \quad P_2(z) = a_2 + b_2 z + \cdots, \quad P_n(z) = a_n + b_n z + \cdots,$$

de degré m par rapport à z, telle que les coefficients $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n$ ne soient pas tous nuls, soit u_1 un nombre quelconque différent des racines de l'équation

$$b_1 u^{n-1} + b_2 u^{n-2} + \cdots + b_{n-1} u + b_n = 0.$$

Il existe un cercle

$$|z| < R = R(n, m, u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n)$$

dépendant seulement des degrés

$$n, m \text{ et des } u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$$

[*et nullement des autres coefficients des polynômes $P_1(z)$, $P_2(z)$, $\ldots$, $P_n(z)$*] *à l'intérieur duquel la fonction algébrique donnée prend au moins une fois la valeur u_1.*

On a un théorème analogue pour les inverses des fonctions algébroïdes, c'est-à-dire pour les fonctions $u = G(z)$ définies par une équation de la forme

$$A_0(u) + A_1(u)z + A_2(u)z^2 + \cdots + A_{n-1}(u)z^{n-1} + A_n(u)z^n = 0,$$

les $A_0(u)$, $A_1(u)$, $\ldots$, $A_n(u)$ étant des fonctions entières de u. Le rayon R ne dépend ici que du degré n et des nombres $A_0(u_1)$ et $A_1(u_1)$ [et nullement des nombres $A_2(u_1)$, $\ldots$, $A_n(u_1)$]; il faut, bien entendu, exclure ici les zéros de la fonction entière $A_1(u)$.

5. Nous terminons ce travail par la remarque suivante:

Nous pourrions établir aussi d'autres théorèmes analogues au Théorème I, comportant toujours une algébroïde adjointe, mais celui-ci présente les avantages suivants: 1° L'adjointe envisagée est d'un nombre moindre de branches que l'algébroïde donnée. 2° L'équation de l'adjointe ne contient plus le dernier coefficient $A_n(z)$. Il serait cependant très intéressant de pouvoir se dispenser de la considération de l'adjointe et j'espère qu'il sera possible d'y arriver par un cercle, dont le rayon dépend aussi d'autres coefficients des $A_1(z)$, $A_2(z)$, $\ldots$, $A_n(z)$ et moyennant un *nombre plus grand de valeurs exceptionnelles*.

Athènes, le 3 décembre 1912.

GEORGES RÉMOUNDOS.