ÜBER DIE GIBBS'SCHE ERSCHEINUNG UND VERWANDTE KONVERGENZPHÄNOMENE.

Von **Hermann Weyl** (Göttingen).

Adunanza del 12 giugno 1910.

EINLEITUNG.

In einer kürzlich in diesen Rendiconti erschienenen Note [1]) habe ich die aus der Theorie der FOURIER'schen Reihe bekannte GIBBS'sche Erscheinung auf die Entwicklung einer unstetigen Funktion f nach zweidimensionalen Kugelfunktionen übertragen. Unter Benutzung des in I § 1 erklärten Koordinatensystems (s, t), das sich an die als « glatt » (d. h. ohne Ecken und Spitzen) vorausgesetzte Unstetigkeitskurve $\mathfrak{C}$ anlehnt, lässt sich das Resultat in der Formel

$$f_n(s, t) = \begin{cases} f(s, t) - h(s)\,\mathrm{Si}(nt) + R_n(s, t) & (t > 0) \\ f(s, t) + h(s)\,\mathrm{Si}(-nt) + R_n(s, t) & (t < 0) \end{cases}$$

niederlegen, in der f_n die aus der Kugelfunktionen-Reihe von f gewonnene Annäherungsfunktion n^{ter} Ordnung bedeutet, $\mathrm{Si}(x)$ für den Integralsinus $\frac{1}{\pi}\int_x^\infty \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi$ geschrieben ist, $h(s)$ die Sprunghöhe und R_n ein Restglied vorstellt, das mit wachsendem n gleichmässig inbezug auf s und t gegen 0 konvergiert.

Um uns das aus dieser Formel folgende Verhalten von f_n in der Umgebung eines auf $\mathfrak{C}$ gelegenen Punktes $C(s = s_0,\ t = 0)$ deutlich zu machen, denken wir uns die Niveaulinien $f_n = \text{const.}$ auf die Kugel aufgezeichnet, projizieren darauf, indem wir C als Südpol ansehen, das erhaltene Bild (soweit es auf der südlichen Halbkugel gelegen ist) vom Mittelpunkt der Kugel aus auf die Tangentialebene der Kugel in C und vergrössern dann endlich, um die Erscheinung zur Entfaltung zu bringen, die ganze Figur unter Festhaltung des Punktes C im Masstab $n:1$. Denken wir uns diesen Prozess für jedes n ausgeführt, so ergeben die gewonnenen Bilder im Limes für $n = \infty$ eine *Grenzfigur,* in welcher die Kurve $\mathfrak{C}$ durch eine gerade Linie $\overline{\mathfrak{C}}$ repräsentiert ist und

[1]) *Die* GIBBS'*sche Erscheinung in der Theorie der Kugelfunktionen* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXIX (1. Semester 1910), S. 308-323]. Ich citiere diese Arbeit im folgenden kurz mit « I ».

die uns im übrigen einen Wellenzug veranschaulicht, dessen Kämme (und allgemeiner: dessen Niveaulinien) zu $\overline{\mathfrak{C}}$ parallele Gerade sind und dessen senkrecht zu der Kammrichtung geführter Querschnitt die Kurve $y = \mathrm{Si}(x)$ ergibt (« *gerade* Si-*Welle* »).

§ 1.

Behandlung der Spitze.

Wir wollen jetzt den Fall, dass die Unstetigkeitslinie $\mathfrak{C}$, welche die Kugeloberfläche in zwei Stücke, das « Innere » $\mathfrak{J}$ und das « Aeussere » $\mathfrak{A}$, zerlegt, eine nach innen gekehrte Spitze O besitzt, näher untersuchen. Statt von einer beliebigen Funktion auf der Kugel zu handeln, für welche $\mathfrak{C}$ Unstetigkeitslinie ist, können wir uns von vornherein auf diejenige spezielle Funktion $1^{\mathfrak{C}}$ beschränken, welche in $\mathfrak{J}$ den Wert 0, in $\mathfrak{A}$ den Wert 1, auf der Kurve mit Ausnahme der Spitze den Wert $\frac{1}{2}$ und in der Spitze den Wert 0 hat. Die in *I* § *3* durchgeführten infinitesimal-geometrischen Betrachtungen, bei denen es sich um eine glatte Kurve und den diese Kurve in einem Punkte C berührenden grössten Kreis, also um zwei in C befindliche gegeneinander gekehrte Spitzen handelt, liefert, auf den Fall einer einzigen Spitze angewandt, den

SATZ I *(« 1. Satz über die Spitze »): Hat die Sprungkurve* $\mathfrak{C}$ (ohne die übrigen, in *I* § 1 formulierten Voraussetzungen zu verletzen) *an einer Stelle O eine nach innen gekehrte Spitze* und sind ϑ (« Poldistanz »; variiert zwischen 0 und π) und φ (« geographische Länge »; variiert zwischen 0 und 2π) die Polarkoordinaten auf der Kugel mit dem Pol O, wobei der Nullmeridian $\varphi = 0$ im Punkte O mit der Richtung zusammenfallen möge, in der die Kurve $\mathfrak{C}$ die Spitze O verlässt, *so gilt, wenn* ε *eine beliebige positive Grösse* $< \pi$ *ist, gleichmässig für* $\varepsilon \leqq \varphi \leqq 2\pi - \varepsilon$ *die Limesgleichung*

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ \vartheta=0}} 1_n^{\mathfrak{C}} = 0.$$

Um genaueren Aufschluss über das Spitzenphänomen zu erhalten, bedienen wir uns folgender einfachen Ueberlegung: Wir verändern die aus der Kugelfunktionen-Reihe von $1^{\mathfrak{C}}$ gewonnene Annäherungsfunktion n^{ter} Ordnung $1_n^{\mathfrak{C}}$ nur um ein für das Verhalten in der Nähe von O unwesentliches Glied, wenn wir die Kurve $\mathfrak{C}$, ohne ein festes, den Punkt O enthaltendes Stück derselben zu modifizieren, in ihrem weiteren Verlauf beliebigen Abänderungen unterwerfen; unter einem « unwesentlichen » Glied ist dabei ein solches zu verstehen, dessen Limes für $\begin{matrix} n = \infty \\ \vartheta = 0 \end{matrix}$ gleichmässig inbezug auf φ verschwindet. Demgemäss können wir voraussetzen, dass die Kurve $\mathfrak{C}$ ausser O noch eine weitere nach innen gekehrte Spitze O' besitzt, im übrigen aber einen glatten Verlauf zeigt. Wir verbinden dann O mit O' durch die in der Figur 1 angedeutete gestrichelte Kurve, welche ganz in $\mathfrak{J}$ verläuft und so beschaffen ist, dass durch ihre Hinzufügung aus $\mathfrak{C}$ zwei geschlossene Kurven $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ entstehen, die längs des gestrichelten Kurvenstücks zusammenfallen und von denen keine eine Ecke oder Spitze aufweist.

Da sich das Innere $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{C}$ aus dem Inneren von $\mathfrak{C}_1$, dem Inneren von $\mathfrak{C}_2$ und dem gestrichelten Kurvenstück zusammensetzt, gelten die Gleichungen

$$1^{\mathfrak{C}} = 1^{\mathfrak{C}_1} + 1^{\mathfrak{C}_2} - 1; \qquad 1^{\mathfrak{C}}_n = 1^{\mathfrak{C}_1}_n + 1^{\mathfrak{C}_2}_n - 1,$$

und damit ist das Studium von $1^{\mathfrak{C}}_n$ auf das von $1^{\mathfrak{C}_1}_n$, $1^{\mathfrak{C}_2}_n$ zurückgeführt, deren Verhalten in der Umgebung von O uns bekannt ist. So zeigt sich, dass das Konvergenzphänomen, welches sich in der Umgebung der Spitze abspielt, aus der Superposition zweier Si-Wellen hervorgeht, deren Niveaulinien den in der Spitze zusammenstossenden Kurvenzügen folgen.

Wir ziehen aus diesen allgemeinen Auseinandersetzungen einige Folgerungen. Bezeichnen wir den Wert, welchen $1^{\mathfrak{C}}_n$ in dem Punkt mit den Polarkoordinaten $\mathfrak{r}$, φ hat, durch $1^{\mathfrak{C}}_n(\mathfrak{r}, \varphi)$, so besteht der

SATZ II (« 2. *Satz über die Spitze* »): *Ist R irgend eine positive Zahl, so gilt gleichmässig für* $0 \leqq r \leqq R$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$

$$\lim_{n=\infty} 1^{\mathfrak{C}}_n\left(\frac{r}{n}, \varphi\right) = 0.$$

Der Sinn dieses Satzes ist, dass bei dem in der Einleitung erwähnten Entfaltungsprozess das Spitzenphänomen identisch in 0 übergeht. Um ein zureichendes geometrisches Bild der obwaltenden Verhältnisse zu gewinnen, werden wir uns demnach hier anderer, von der Art, wie sich die beiden in der Spitze zusammenstossenden Kurvenäste daselbst berühren, abhängiger Entfaltungsweisen zu bedienen haben.

Wir wollen den einfachsten Fall der gewöhnlichen 2-punktigen Berührung noch etwas näher betrachten. Wir denken uns die Punkte der Kugel wieder vom Mittelpunkt aus auf eine in O berührende Ebene projiziert und nehmen an, dass die beiden Aeste der projizierten Kurve stetige Krümmung besitzen und die für die beiden Aeste in O stattfindenden Krümmungswerte voneinander verschieden sind. Die Entfaltung geschieht dann am einfachsten so, dass wir in der Projektionsebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y zugrunde legen mit O als Nullpunkt und der Spitzentangente als y-Axe, darauf $1^{\mathfrak{C}}_n$, das sich zufolge der Projektion auch als eine Funktion in der Ebene auffassen lässt, der affinen Transformation

$$x = \frac{\mathfrak{x}}{n}, \qquad y = \frac{\mathfrak{y}}{\sqrt{n}}$$

unterwerfen und, nachdem dies geschehen, zur Grenze $n = \infty$ übergehn. Die beiden Kurvenäste werden dadurch, im rechtwinkligen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$-System gedeutet, zu zwei gewöhnlichen Parabelästen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, die sich im Punkte O mit der Tangente $\mathfrak{x} = 0$ berühren. Die für das Spitzenphänomen charakteristische « Absturzfunktion », welche bei dem geschilderten Prozess aus $1^{\mathfrak{C}}_n$ entsteht, ist im Gebiet $\mathfrak{y} \leqq 0$ identisch $= 0$. Für $\mathfrak{y} > 0$ entsteht sie durch Superposition zweier Si-Wellen, deren Niveaulinien jedoch parabolisch gekrümmt sind, und zwar so, dass die Niveaulinien der einen Si-Welle lauter zu $\mathfrak{P}_1$, die der anderen lauter zu $\mathfrak{P}_2$ kongruente halbe Parabeln sind. Das Resultat der Superposition lässt sich graphisch (mittels Zeichnung der Niveaulinien) leicht überblicken.

Wir gehen darauf nicht näher ein. — Die soeben zur Anwendung gebrachte Entfaltungsweise scheint einen Uebelstand zu besitzen: jede feste, von derjenigen der Spitze verschiedene Richtung wird durch unsern Prozess in die Axe $\mathfrak{y} = 0$ geworfen. Dieses schadet aber deshalb nicht, weil die Werte der Absturzfunktion in der oberen Halbebene $\mathfrak{y} > 0$ sich trotzdem längs $\mathfrak{y} = 0$ stetig an den in der unteren Halbebene herrschenden Wert 0 anschliessen. Wir erkennen in diesem Umstande die Aussage des 1. Satzes über die Spitze wieder. — Der grösste Wert, den die Absturzfunktion annimmt, beträgt $1 + 2\,|\mathrm{Si}(\pi)|$, der kleinste $-|\mathrm{Si}(\pi)| - |\mathrm{Si}(2\pi)|$. (Die letzte Bemerkung gilt übrigens allgemein für jede Spitze, nicht bloss für die, deren Aeste sich 2-punktig berühren).

Im ganzen genommen, bietet das Konvergenzphänomen der Spitze wohl seiner äusseren Form, nicht aber seiner inneren Struktur nach etwas Neues.

§ 2.

Aufstellung der Formeln für die Ecke.

Von weit hervorragenderem Interesse ist die Erscheinung, welche eintritt, falls die Sprungkurve $\mathfrak{C}$ an einer Stelle O eine *Ecke* besitzt, d. h. falls an dieser Stelle zwei Aeste von $\mathfrak{C}$ unter einem von 0 verschiedenen Winkel zusammenlaufen. Die Grösse des sich nach $\mathfrak{A}$ hin öffnenden Winkels betrage α und werde (was natürlich keine Einschränkung ist) $< \pi$ vorausgesetzt; $1^{\mathfrak{C}}$ ist jetzt in $\mathfrak{A}$ gleich 1, in $\mathfrak{J}$ gleich 0, auf $\mathfrak{C}$ abgesehen von O gleich $\frac{1}{2}$, im Eckpunkt selbst aber gleich $\frac{\alpha}{2\pi}$. In diesem Falle treten zunächst wieder die beiden, in ihrer Streichrichtung den Kurvenästen folgenden Si-Wellenzüge auf. Darüber aber lagert sich, vom Eckpunkt O ausgehend, eine neue Welle, die in erster Annäherung als kreisförmig angesehen werden kann und einem ziemlich komplizierten Gesetz gehorcht.

Bei der Behandlung der Ecke dürfen wir uns zunächst darauf beschränken, für $\mathfrak{C}$ die aus zwei unter dem Winkel α im Nord- und Südpol zusammenstossenden Meridianen gebildete Kurve zu wählen. Dem allgemeinen Fall kann man dann offenbar durch Hinzufügung zweier Spitzen in O gerecht werden, und die durch diese veranlasste Modifikation beherrschen wir nach § 1 vollständig. Bei der Behandlung des *aus zwei Meridianen $\mathfrak{C}$ gebildeten Zweiecks* wird sich, wenn ϑ, φ die auf den Südpol O bezüglichen sphärischen Polarkoordinaten und $1_n^{\mathfrak{C}}(\vartheta, \varphi)$ den Wert der Funktion $1_n^{\mathfrak{C}}$ im Punkte (ϑ, φ) bezeichnet, das folgende Resultat herausstellen:

SATZ III *(« 1. Satz über die Ecke »): Für die aus der Kugelfunktionen-Reihe von $1^{\mathfrak{C}}$ gewonnene Annäherungsfunktion n^{ter} Ordnung $1_n^{\mathfrak{C}}$ gilt die Formel*

$$1_n^{\mathfrak{C}}(\vartheta, \varphi) = \mathrm{Ang}^{(\alpha)}(n\vartheta, \varphi) + R_n(\vartheta, \varphi).$$

Dabei ist $\mathrm{Ang}^{(\alpha)}(r, \varphi)$ *eine bestimmte (von n unabhängige) eindeutige stetige Funktion in einer auf die Polarkoordinaten r* (Radius vector) *und φ* (Azimut) *bezogenen Ebene,*

R_n *aber ein « unwesentliches » Restglied,* d. h. ein Term, für welchen die Limesgleichung

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ \vartheta=0}} R_n(\vartheta, \varphi) = 0$$

gleichmässig inbezug auf φ $(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$ besteht.

Demzufolge hat die Entfaltung des Eckenphänomens so zu geschehen, dass wir das Bild, welches $1_n^{\mathfrak{G}}$ in der Umgebung der Ecke O zeigt, nachdem es durch Mittelpunktsprojektion auf die Ebene übertragen ist, von O aus allseitig im Verhältnis $n:1$ vergrössern. Bei diesem Process aber geht die von einer in O befindlichen Spitze herrührende Erscheinung in der Grenze für $n = \infty$ identisch in o über, und also ergibt die Entfaltung als charakteristische Absturzfunktion, wenn wir r, φ als ebene Polarkoordinaten mit O als Pol betrachten, stets jene Funktion $\mathrm{Ang}^{(\alpha)}$ — einerlei, ob die Ecke durch zwei Meridiane oder durch zwei andere unter demselben Winkel zusammenstossende Kurven gebildet wird: unser Entfaltungsprozess liefert denjenigen Teil des Phänomens, der von dem besonderen Verhalten der in der Ecke zusammenlaufenden Kurvenäste unabhängig ist.

Indem wir jetzt zur Bestimmung der Absturzfunktion $\mathrm{Ang}^{(\alpha)}$ übergehen, wollen wir uns einer Bezeichnung $g'_n \backsimeq g''_n$ bedienen, welche besagen soll, dass sich die beiden Funktionen g'_n und g''_n von n; ϑ, φ nur um ein « unwesentliches » Glied voneinander unterscheiden. Zunächst mögen die geometrischen Verhältnisse an der Figur 2 (in der grösste Kreise durchweg als gerade Linien gezeichnet sind) erläutert werden. OC_1, OC_2 sind die Seiten des Zweiecks, welche den Winkel α einschliessen, OF_1, OF_2 deren Verlängerungen über O hinaus. OD_1 bedeutet denjenigen Meridian durch O, welcher auf OC_1 senkrecht steht und durch den Vollkreis C_1F_1 von der zweiten Seite OC_2 des Zweiecks getrennt wird; OD_2 ist von analoger Bedeutung. A ist der variable Punkt, in welchem $1_n^{\mathfrak{G}}$ berechnet werden soll; wir setzen bis auf weiteres voraus, dass A in dem Winkelraum D_1OD_2 gelegen ist und sein Winkelabstand ϑ von der Ecke O, der schliesslich gegen o konvergieren soll, bereits kleiner ist als eine beliebig $\left(<\frac{\pi}{4}\right)$ vorgegebene Grösse ϑ_0. Die geographische Länge des Punktes A, von OF_1 als Nullmeridian aus in dem nach OF_2 zu gelegenen Sinne gerechnet, heisse φ_1; der Winkel φ_2, von analoger Bedeutung für OF_2 als Nullmeridian, steht zu φ_1 in der Beziehung

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \alpha \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

Die senkrechten Abstände AF_1, AF_2 seien ihrer Grösse nach bezw. $= \eta_1$, η_2:

$$(1) \qquad \sin\eta_1 = \sin\vartheta.\sin\varphi_1, \qquad \sin\eta_2 = \sin\vartheta.\sin\varphi_2.$$

Wir führen ferner diejenigen Polarkoordinaten λ (Poldistanz), μ (Länge) ein, für welche A der Pol ist, und setzen $u = \cos\lambda$. Indem wir uns $1^{\mathfrak{G}}$ in diesen Koordinaten ausgedrückt denken, bekommen wir dann als Wert von $1_n^{\mathfrak{G}}$ im Punkte A:

$$1_n^{\mathfrak{G}}(A) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{dP_n(u)}{du} + \frac{dP_{n+1}(u)}{du}\right)1^{\mathfrak{G}}\,du\,d\mu;$$

$P_0(u)$, $P_1(u)$, $P_2(u)$, ... ist die Reihe der bekannten LEGENDREschen Polynome (zonale Kugelfunktionen). Unter Vernachlässigung eines unwesentlichen Gliedes können wir schreiben:

$$(2)\qquad \mathrm{I}_n^{\mathfrak{C}} \backsimeq \frac{1}{4\pi}\int_{\cos\vartheta_0}^{\cos\vartheta}\left(\frac{dP_n(u)}{du}+\frac{dP_{n+1}(u)}{du}\right)\rho\,du,$$

wenn $\rho=\rho(u)$ die Winkelöffnung desjenigen Kreisbogens $C_1 C_2$ bedeutet, den das sphärische Zweieck $C_1 O C_2$ aus dem um A mit der Winkeldistanz λ beschriebenen Kreise ausschneidet:

$$\rho = \sphericalangle\, C_1 A C_2. \qquad \text{(s. Fig. 2).}$$

ρ setzt sich, wenn wir den grössten Kreis AO bis zum Schnitt B mit dem Breitenkreis λ um A durchlegen, aus den beiden Winkeln

$$\rho_1 = \sphericalangle\, C_1 A B, \qquad \rho_2 = \sphericalangle\, B A C_2$$

additiv zusammen. Nun ist

$$\rho_1 = \sphericalangle\, C_1 A F_1 - \sphericalangle\, O A F_1,$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck $C_1 A F_1$ erhalten wir

$$\cos(\sphericalangle\, C_1 A F_1) = \frac{\operatorname{tg}\eta_1}{\operatorname{tg}\lambda};$$

der Winkel OAF_1 hingegen ist von λ unabhängig; daraus folgt

$$d\rho_1 = \frac{\sin\eta_1}{\sin\lambda}\frac{d\lambda}{\sqrt{\sin(\lambda-\eta_1).\,\sin(\lambda+\eta_1)}}.$$

Entsprechendes gilt für ρ_2. Aus (2) schliessen wir durch partielle Integration

$$\mathrm{I}_n^{\mathfrak{C}} \backsimeq \frac{1}{4\pi}\int_{\vartheta}^{\vartheta_0}\Big[P_n(\cos\lambda)+P_{n+1}(\cos\lambda)\Big]\frac{d\rho}{d\lambda}d\lambda$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta}^{\vartheta_0}\frac{\sin\eta_i}{\sin\lambda}\frac{[P_n(\cos\lambda)+P_{n+1}(\cos\lambda)]\,d\lambda}{\sqrt{\sin(\lambda-\eta_i).\,\sin(\lambda+\eta_i)}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1,2}L_{n,i}.$$

Wir beschäftigen uns weiterhin nur mit einem der beiden Summanden $L_{n,i}$ und lassen dabei in den Bezeichnungen φ_i, η_i, $L_{n,i}$ ($i=1$ oder 2) den Index i ganz fort.

P_n und P_{n+1} drücken wir mittels der Mehlerschen Formel aus:

$$P_n(\cos\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_{\lambda}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sqrt{4\sin\frac{t+\lambda}{2}\sin\frac{t-\lambda}{2}}}\,dt.$$

Indem wir uns dann derselben Abschätzungen bedienen, welche ich in I § 2 ausgeführt habe [2]), gelangen wir, wiederum unter Vernachlässigung unwesentlicher Terme, zu

[2]) Hätte ich nicht die Abschätzungen und Ueberlegungen in I § 2 so anstellen wollen, dass sie sich jetzt unmittelbar auf den Fall der Ecke übertragen, so würde eine andere Methode etwas rascher zu dem Ergebnis jenes § 2 geführt haben: sie besteht darin, die Funktion

$$F(x) = 1 \quad \text{für} \quad -1 \leqq x < 0, \qquad = 0 \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq 1$$

der Formel

$$L_n \cong \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{(\vartheta \leqq \lambda \leqq t \leqq \vartheta_0)} \frac{\eta}{\lambda} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t + \sin\left(n+\frac{3}{2}\right)t}{\sqrt{(\lambda+\eta)(\lambda-\eta) \cdot 4\frac{t+\lambda}{2} \cdot \frac{t-\lambda}{2}}} \, dt \, d\lambda,$$

und wir dürfen, ohne dass diese Beziehung aufhört, richtig zu bleiben, auch noch voraussetzen, dass η, anstatt durch (1), durch die Formel

$$\eta = \vartheta . \sin \varphi$$

definiert sei, und ferner die im Integranden auftretende Summe

$$\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t + \sin\left(n+\tfrac{3}{2}\right)t \quad \text{durch} \quad 2 \sin n t$$

ersetzen.

Führen wir dann zunächst die Integration nach λ aus, so erhalten wir

$$\int_\vartheta^t \frac{\eta}{\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-\eta^2)(t^2-\lambda^2)}} = \frac{\Theta_\varphi\left(\frac{t}{\vartheta}\right)}{t};$$

dabei ist die Funktion

$$\Theta = \Theta_\varphi(y) \qquad (y \geqq 1)$$

erklärt durch

$$\operatorname{tg} \Theta = \operatorname{tg} \varphi . \sqrt{1-\frac{1}{y^2}}; \quad -\frac{\pi}{2} < \Theta < \frac{\pi}{2}. \text{ [3]}$$

---

in eine Reihe nach LEGENDRE'schen Polynomen zu entwickeln:

(3) $$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{n+1}(0) - P_{n-1}(0)}{2} P_n(x)$$

und für $P_n(\sin\alpha)$ in der Umgebung von $\alpha = 0$ die für grosse n gültige asymptotische Darstellung

$$P_n(\sin\alpha) \sim \sqrt{\frac{2}{n\pi\cos\alpha}} . \cos\left(\frac{n\pi}{2} - \alpha\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)$$

zur Anwendung zu bringen. Abgesehen von Zusatzgliedern, die in der Umgebung von $\alpha = 0$ gleichmässig konvergieren, verwandelt sich dadurch die Reihe (3) in

(4) $$-\frac{1}{\pi\sqrt{\cos\alpha}} . \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(2m-\frac{1}{2}\right)\alpha}{m} \qquad (x = \sin\alpha).$$

Die FOURIERreihe der Funktion

$$\overset{\circ}{1}(\alpha) = 1 \, (-\pi \leqq \alpha < 0), \qquad = 0 \, (0 < \alpha \leqq \pi)$$

lautet:

(5) $$\overset{\circ}{1}(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)\alpha}{m-\frac{1}{2}}.$$

Der Vergleich von (4) und (5), zusammen mit der für die FOURIERreihe (5) bekannten GIBBS'schen Erscheinung führt bereits zu dem Resultat von I § 2. Der l. c. gegebene Beweis (der genau dem üblichen Konvergenzbeweis für Kugelfunktionenreihen folgt) scheint mir aber doch, auch abgesehen von seiner grösseren Tragweite, der Natur der Sache besser gerecht zu werden als der eben dargelegte.

[3] Dabei ist auch $\varphi > -\frac{\pi}{2}$ und $< \frac{\pi}{2}$ angenommen.

Diese Abhängigkeit schreibt sich, wenn wir die Benennung

$$\frac{1}{y} = \sin\omega \qquad \left(0 < \omega \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

einführen, in der Form

$$\operatorname{tg}\Theta = \operatorname{tg}\varphi \cdot \cos\omega,$$

die sich in sehr einfacher Weise an einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck deuten lässt.

Benutzen wir $y = \frac{t}{\mathfrak{z}}$ als Integrationsvariable und setzen $n\mathfrak{z} = r$, so kommt

$$L_n \backsimeq \frac{2}{\pi^2}\int_1^{n\mathfrak{z}_0} \frac{\sin(ry)}{y}\,\Theta_\varphi(y)\,dy$$

und daraus mittels einer leichten Abschätzung

$$L_n \backsimeq \frac{2}{\pi^2}\int_1^{\infty} \frac{\sin(ry)}{y}\,\Theta_\varphi(y)\,dy.$$

Wir setzen

$$(6) \qquad \mathrm{A}(r,\varphi) = \frac{2}{\pi}\int_1^{\infty} \frac{\sin(ry)}{y}\,\Theta_\varphi(y)\,dy$$

$$\left(r > 0;\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}\right).$$

Dann hat also im Winkelraum $D_1 O D_2$ die Gleichung statt:

$$\mathrm{Ang}^{(\alpha)} = \frac{1}{2\pi}\Big[\mathrm{A}(r,\varphi_1) + \mathrm{A}(r,\varphi_2)\Big],$$

und dabei ist die Funktion A von dem Winkel α überhaupt nicht abhängig.

A ist in der Halbebene $r > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$ überall stetig und schliesst sich am Rande (wenn wir von dem Nullpunkt absehen) stetig an die Werte

$$\pi\,\mathrm{Si}(r)\ \left(\text{für } \varphi = +\frac{\pi}{2}\right), \quad \text{bezw.} \quad -\pi\,\mathrm{Si}(r)\ \left(\text{für } \varphi = -\frac{\pi}{2}\right)$$

an. Im Nullpunkte hingegen ist sie unbestimmt, indem aus

$$\lim_{y=\infty} \Theta_\varphi(y) = \varphi$$

die Gleichung

$$\lim_{r=0} \mathrm{A}(r,\varphi) = \varphi$$

geschlossen werden kann. A ist eine ungerade Funktion von φ:

$$\mathrm{A}(r,-\varphi) = -\mathrm{A}(r,\varphi).$$

Bisher haben wir uns mit $1_n^{\mathfrak{G}}$ nur in dem Gebiet $\binom{+}{+}$ beschäftigt, in welchem gleichzeitig

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi_1 \leqq +\frac{\pi}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi_2 \leqq +\frac{\pi}{2}$$

ist und dessen Begrenzung also aus den beiden Meridianen $\varphi_1 = +\frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = +\frac{\pi}{2}$ besteht. Um aber diese Funktion z. B. in dem durch die Meridiane $\varphi_1 = +\frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$ begrenzten Winkelraum $\left(\frac{+}{-}\right)$ zu berechnen, bediene man sich der Funktion $1^{\mathfrak{K}}$, welche auf der Halbkugel $0 < \varphi_1 < \pi$ $(0 < \vartheta < \pi)$ den Wert 0, auf der Halbkugel $-\pi < \varphi_1 < 0$ $(0 < \vartheta < \pi)$ den Wert 1 und auf dem trennenden Vollkreis $\mathfrak{K} = F_1 O C_1$ den Wert $\frac{1}{2}$ hat. Indem wir die obigen Betrachtungen auf das Zweieck $C_2 O F_1$ statt auf $C_1 O C_2$ anwenden, erhalten wir eine bis auf unwesentliche Glieder richtige Darstellung von

$$1_n^{\mathfrak{K}} - 1_n^{\mathfrak{S}}$$

mittels der Funktion A im Gebiet $\left(\frac{+}{-}\right)$, und da wir $1_n^{\mathfrak{K}}$ angenähert mittels der Si-Funktion ausdrücken können, eine Darstellung von $1_n^{\mathfrak{S}}$ für jenen Winkelraum $\left(\frac{+}{-}\right)$. In ähnlicher Weise beherrschen wir die übrigen Felder $\left(\frac{-}{+}\right)$, $\left(\frac{-}{-}\right)$. Ich gebe hier sogleich das Resultat an:

In der Ebene mit den Polarkoordinaten r, φ führen wir rechtwinklige Koordinaten durch die Gleichungen

$$x = r\sin\varphi, \qquad y = -r\cos\varphi$$

ein und definieren in dieser Ebene eine Funktion Te durch die folgenden Bedingungen: In der unteren Halbebene $y < 0$ werde

$$\mathrm{Te}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{A}(r, \varphi) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right) \tag{7}$$

gesetzt, in der oberen $y > 0$ hingegen

$$\mathrm{Te}(x, y) = \mathrm{S\grave{i}}(x) - \frac{1}{2\pi} \mathrm{A}(r, \pm\pi - \varphi) \left(\begin{array}{c} \frac{\pi}{2} < \varphi \leqq \pi, \\ \text{bezw.} \\ -\pi \leqq \varphi < -\frac{\pi}{2} \end{array}\right); \tag{7'}$$

dabei ist

$$\mathrm{S\grave{i}}(x) = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{\sin(x\zeta)}{\zeta}\, d\zeta = \begin{cases} \mathrm{Si}(x) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -\mathrm{Si}(-x) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Dann schliessen sich die in der oberen und unteren Halbebene herrschenden Werte längs der x-Axe (wenn wir vom Nullpunkt absehen) stetig aneinander an, und die Funktion Te wird überall stetig, ausgenommen die auf der positiven y-Axe: $x = 0$, $y \geqq 0$ gelegenen Punkte, wenn wir die Definitionen (7), (7') noch durch

$$\mathrm{Te}(x, 0) = \tfrac{1}{2}\, \mathrm{S\grave{i}}(x) \tag{7''}$$

ergänzen. Auf der y-Axe (einschliesslich des Nullpunktes) ist dann $\mathrm{Te} = 0$; dagegen hat Te längs der positiven y-Axe auf dem rechten Ufer ($x > 0$) den Wert $\frac{1}{2}$ [4]), auf dem linken den Wert $-\frac{1}{2}$. Im Nullpunkte ist sie unstetig nach Art einer linksgewundenen Schraube, welche sich, von dem linken Ufer der positiven y-Axe ausgehend, durch eine volle Umdrehung hindurch von $-\frac{1}{2}$ bis $+\frac{1}{2}$ emporwindet. Es besteht die Identität

$$\mathrm{Te}(-x, y) = -\mathrm{Te}(x, y). \tag{8}$$

Indem wir unter φ entweder φ_1 oder φ_2 verstehen, erhalten wir zwei verschiedene rechtwinklige Koordinatensysteme $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ in der Ebene mit gemeinsamem Nullpunkt, die zueinander symmetrisch (nicht direkt-kongruent) sind und deren pos. y-Axen den Winkel α miteinander einschliessen; es liegen dabei die pos. x_1- und die pos. y_2-Axe auf verschiedenen Seiten der y_1-Axe, ebenso die pos. x_2-und die pos. y_1-Axe auf verschiedenen Seiten der y_2-Axe.

Das Resultat, welches unsere Betrachtungen ergeben, lautet dann dahin, dass sich der Satz III in vollem Umfange bestätigt und für $\mathrm{Ang}^{(\alpha)}$ die Formel

$$\mathrm{Ang}^{(\alpha)} = 1^{\mathfrak{E}} + \mathrm{Te}(x_1 y_1) + \mathrm{Te}(x_2 y_2)$$

zum Vorschein kommt [5]). Die Funktion Te zeigt, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, einen wellenförmigen Verlauf, der freilich viel komplizierter ist als der einer geraden Si-Welle. Ausser Satz III haben wir daher noch das folgende Ergebnis gewonnen.

SATZ IV *(« 2. Satz über die Ecke »): Die Funktion*

$$\mathrm{Ang}^{(\alpha)} - 1^{\mathfrak{E}}$$

entsteht durch Superposition zweier Te-Wellen, deren Gestalt von α völlig unabhängig ist; nur ihre relative Lage hängt von diesem Winkel ab, indem die eine Welle zu der anderen symmetrisch ist und ihre Unstetigkeitslinien (zwei von O ausgehende Halbgerade, das Bild der Seiten des Zweiecks $C_1 O C_2$) *den Winkel α miteinander einschliessen.*

§ 3.

Gestalt der Te-Welle.

Um die Te-Funktion zu diskutieren, beschäftigen wir uns zunächst mit der Funktion $A(r, \varphi)$ im Gebiet $r > 0$, $0 \leqq \varphi < \frac{\pi}{2}$, und setzen

$$\sin\varphi = \xi, \quad \cos\varphi = \left|\sqrt{1-\xi^2}\right| = \upsilon.$$

---

4) D. h. $\lim\limits_{x=+0} \mathrm{Te}(x, y) = \frac{1}{2}$ (für $y > 0$).

5) $1^{\mathfrak{E}}$ bedeutet hier natürlich diejenige Funktion, welche innerhalb des von der pos. y_1-und y_2-Axe begrenzten Winkelraums $= 1$, ausserhalb desselben $= 0$ ist, längs der pos. y-Axen den Wert $\frac{1}{2}$ und im Nullpunkte O den Wert $\frac{\alpha}{2\pi}$ besitzt.

Eine partielle Integration liefert auf Grund der Formel (6) für A die Darstellung

$$\mathrm{A} = 2\int_1^\infty \mathrm{Si}(ry)\frac{d\Theta_\varphi(y)}{dy}dy.$$

Bilden wir also durch Differentiation

$$\mathrm{B} = -r\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial r},$$

so folgt

$$\mathrm{B} = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \sin(ry)\frac{d\Theta_\varphi(y)}{dy}dy.$$

Durch Rechnung findet man

$$\frac{d\Theta_\varphi}{dy} = \xi\upsilon\frac{1}{(y^2-\xi^2)\sqrt{y^2-1}} = \frac{\upsilon}{2}\left[\frac{1}{(y-\xi)\sqrt{y^2-1}} - \frac{1}{(y+\xi)\sqrt{y^2-1}}\right].$$

Ersetzen wir $\sin(ry)$ durch e^{iry} (i = imaginäre Einheit), so handelt es sich, um B zu berechnen, zunächst um die Bestimmung von

$$\mathrm{T}_+ = \int_1^\infty \frac{e^{iry}\,dy}{(y-\xi)\sqrt{y^2-1}}.$$

Es ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial r}(e^{-ir\xi}\mathrm{T}_+) = i\int_1^\infty \frac{e^{ir(y-\xi)}\,dy}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{\pi i}{2}e^{-ir\xi}[K(r)+iJ(r)],$$

wobei wir

$$K(r) = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\cos ry\,dy}{\sqrt{y^2-1}},$$

$$J(r) = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\sin ry\,dy}{\sqrt{y^2-1}}$$

gesetzt haben; $J(r)$ ist dann nichts anderes als die bekannte Bessel'sche Funktion [6]). Für

$$\mathrm{T}_- = \int_1^\infty \frac{e^{-iry}\,dy}{(y+\xi)\sqrt{y^2-1}}$$

erhalten wir analog

$$\frac{\partial}{\partial r}(e^{-ir\xi}\mathrm{T}_-) = -i\int_1^\infty \frac{e^{-ir(y+\xi)}\,dy}{\sqrt{y^2-1}} = -\frac{\pi i}{2}e^{-ir\xi}[K(r)-iJ(r)];$$

mithin

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{e^{-ir\xi}(\mathrm{T}_+ + \mathrm{T}_-)\right\} = -\pi e^{-ir\xi}J(r),$$

$$\mathrm{T}_+ + \mathrm{T}_- = \pi\int_r^\infty e^{i\xi(r-\rho)}J(\rho)\,d\rho.$$

Indem wir von dieser Gleichung nur den Imaginärteil beibehalten, gelangen wir zu der

---

[6]) Vergl. z. B. Riemann-Weber, *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik* (IV. Aufl.) (Braunschweig, Vieweg u. Sohn, 1900), Bd. I, S. 175.

Darstellung

$$\text{(9)} \qquad B = \upsilon \int_r^\infty \sin \xi (r-\rho) J(\rho)\, d\rho.$$

Nach bekannten Formeln [7] ist

$$\int_0^\infty \cos(\xi\rho) J(\rho)\, d\rho = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{\upsilon}, \qquad \int_0^\infty \sin(\xi\rho) J(\rho)\, d\rho = 0;$$

infolgedessen können wir auch schreiben

$$\text{(10)} \qquad B = \sin \xi r - \upsilon \int_0^r \sin \xi (r-\rho) J(\rho)\, d\rho.$$

Damit haben wir die Grundlage für die Diskussion des Eckenphänomens gewonnen.

Zunächst betrachten wir A in dem Gebiet $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, wo ε eine fest vorgegebene Grösse $\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ bedeutet, und wollen eine in diesem Winkelraum für sehr grosse Werte von r gültige asymptotische Darstellung von A angeben. Wir führen zu diesem Zweck die Annäherung

$$J(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

ein und finden damit

$$\text{(11)} \left\{\begin{aligned} B &\sim \upsilon \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_r^\infty \frac{\sin \xi (r-\rho) . \cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\rho}} d\rho \\ &= \frac{\upsilon}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_r^\infty \frac{\sin\left(\xi r - \frac{\pi}{4} + (1-\xi)\rho\right)}{\sqrt{\rho}} d\rho - \int_r^\infty \frac{\sin\left(-\xi r - \frac{\pi}{4} + (1+\xi)\rho\right)}{\sqrt{\rho}} d\rho \right], \end{aligned}\right.$$

und, unter abermaliger Vernachlässigung von Gliedern, die im Bereich $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ gleichmässig von derselben Ordnung Null werden wie $\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}$:

$$B \sim \frac{\upsilon}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\cos\left(r - \frac{\pi}{4}\right)}{(1-\xi)\sqrt{r}} - \frac{\cos\left(r - \frac{\pi}{4}\right)}{(1+\xi)\sqrt{r}} \right] = \frac{2\xi\upsilon}{(1-\xi^2)\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\cos\left(r - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{r}}.$$

Daraus folgt endlich für A die asymptotische Darstellung

$$A \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{\sin\left(r - \frac{\pi}{4}\right)}{r^{\frac{3}{2}}}.$$

2π Te stimmt in dem Quadranten $y < 0$, $x > 0$ mit A überein; im Gebiete

---

[7] Siehe z. B. Riemann-Weber, l. c. [6]), S. 187.

$y > 0$, $x > 0$ gilt

$$2\pi\,\mathrm{Te} = 2\pi\,\mathrm{Si}(x) - A(r, \pi - \varphi),$$

und folglich gemäss der asymptotischen Gleichung

$$2\pi\,\mathrm{Si}(x) \backsim \frac{2\cos x}{x}$$

und weil nach der eben aufgestellten Formel A für grosse r gegenüber $\mathrm{Si}(x)$ zu vernachlässigen ist,

$$\pi\,\mathrm{Te} \backsim \frac{\cos x}{x} \qquad (\text{für } y > 0)$$

$$\pi\,\mathrm{Te} \backsim \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\cos\left(r + \frac{\pi}{4}\right)}{r^{\frac{3}{2}}} \qquad (\text{für } y < 0) \qquad [x > 0].$$

Die für $y > 0$ gültige Formel bedeutet eine Folge *gerader* Wellen, deren Niveaulinien sämtlich der y-Axe parallel laufen. Die Amplitude jeder Welle ist längs des ganzen Wellenrückens (oder längs des ganzen Wellentals) konstant, dagegen nimmt sie, wenn wir die einzelnen Wellen nach ihrer Entfernung von der y-Axe als 1., 2., 3. u. s. f. numerieren, mit der Ordnungszahl der Welle so ab, dass die Amplitude der n^{ten} Welle nur $\frac{1}{n}$ von derjenigen der ersten beträgt. Als « einzelne Welle » wird dabei der zwischen zwei aufeinander folgenden Linien $\mathrm{Te} = 0$ gelegene Teil bezeichnet; die « Wellenlänge » beträgt demnach π. — Die für $y < 0$ gültige Formel andererseits bedeutet eine Folge von *Kreiswellen* gheichfalls von der « Länge » π, die aber gegenüber den geraden Wellen durchweg einen *Phasenrückgang von* $\frac{\pi}{4}$ aufweisen $\left(\text{das Argument von } \cos \text{ ist nicht } r, \text{ sondern } r + \frac{\pi}{4}!\right)$; die Amplitude der einzelnen Welle ist nicht konstant, sondern nimmt, wenn φ sich von $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ bis 0 dreht, nach dem Gesetz $\operatorname{tg}\varphi$ ab. Auch beträgt die Stärke der n^{ten} Welle nicht den n^{ten}, sondern nur den $n^{\frac{3}{2}\text{ten}}$ Teil der Stärke der ersten. Alles dieses gilt asymptotisch für grosse Werte von n, wenn wir einen beliebig kleinen, die positive x-Axe enthaltenden Winkelraum $\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ ausschliessen.

In diesem Winkelraum vollzieht sich der Uebergang von der geraden zur Kreis-Welle, und es ist daher von höchstem Interesse, asymptotische Formeln für dieses Uebergangsgebiet zu gewinnen. Wir gehen dabei von der asymptotischen Gleichung (11) aus, die im ganzen Bereich $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ zutrifft, und erhalten, indem wir

$$A = \int_r^\infty \frac{B(r', \varphi)}{r'}\,dr'$$

bilden, darin

$$\int_r^\rho \frac{\sin\xi(r' - \rho)}{r'}\,dr'$$

durch den asymptotischen Ausdruck $\frac{\cos\xi(r-\rho)}{\xi r}-\frac{1}{\xi\rho}$ ersetzen — wir dürfen ja jetzt etwa $\xi\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ annehmen — und die Abkürzung

$$\iota=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\upsilon}{\xi}\cdot\frac{\cos\left(r+\frac{\pi}{4}\right)}{r^{\frac{3}{2}}}$$

einführen, die Formel

$$A+\iota\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\upsilon}{r\xi}\int_r^\infty\frac{\cos\xi(r-\rho)\cos\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\rho}}d\rho$$

$$=\frac{\upsilon}{r\xi\sqrt{2\pi}}\int_r^\infty\frac{\cos\left(\xi r+(1-\xi)\rho-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\xi r+(1+\xi)\rho-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\rho}}d\rho.$$

Nun ist

$$\cos\left(\xi r+(1-\xi)\rho-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\cos\left(r-\frac{\pi}{4}\right).\cos[(1-\xi)(\rho-r)]-\sin\left(r-\frac{\pi}{4}\right).\sin[(1-\xi)(\rho-r)],$$
$$\cos\left(-\xi r+(1+\xi)\rho-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\cos\left(r-\frac{\pi}{4}\right).\cos[(1+\xi)(\rho-r)]-\sin\left(r-\frac{\pi}{4}\right).\sin[(1+\xi)(\rho-r)],$$

ferner, indem wir $(1\pm\xi)(\rho-r)$ als neue Integrationsvariable t einführen,

$$\int_r^\infty\frac{\cos[(1\pm\xi)(\rho-r)]}{\sqrt{\rho}}d\rho=\frac{1}{\sqrt{1\pm\xi}}\int_0^\infty\frac{\cos t}{\sqrt{t+(1\pm\xi)r}}dt,$$
$$\int_r^\infty\frac{\sin[(1\pm\xi)(\rho-r)]}{\sqrt{\rho}}d\rho=\frac{1}{\sqrt{1\pm\xi}}\int_0^\infty\frac{\sin t}{\sqrt{t+(1\pm\xi)r}}dt.$$

Schreiben wir also

$$\mathrm{Cs}(p)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{\cos t\,dt}{\sqrt{p+t}},\qquad \mathrm{Ss}(p)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{\sin t\,dt}{\sqrt{p+t}},$$

so folgt schliesslich

$$A+\iota\sim\frac{1}{2r\xi}\Big\{\sqrt{1+\xi}\left(\sin\left(r+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{Cs}[(1-\xi)r]+\cos\left(r+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{Ss}[(1-\xi)r]\right)$$
$$+\sqrt{1-\xi}\left(\sin\left(r+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{Cs}[(1+\xi)r]+\cos\left(r+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{Ss}[(1+\xi)r]\right)\Big\}.$$

Wenn wir übereinkommen, gewisse Glieder zu vernachlässigen, die, zusammengenommen, für $r\geqq1$, $0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}$ kleiner sind als $\frac{H}{r^{\frac{3}{2}}}$ (unter H eine von r und φ

unabhängige Zahl verstanden), und zur Abkürzung den « *parabolischen Parameter* »

$$p = (1 - \xi) r = r - x$$

einführen, können wir einfacher schreiben

$$A \sim \frac{1}{r\sqrt{2}}\left[\sin\left(r + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{Cs}(p) + \cos\left(r + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{Ss}(p)\right].$$

Der Name « parabolischer Parameter » für p bezieht sich darauf, dass die Linien $p = \text{const.}$ konfokale Parabeln sind mit der positiven x-Axe als gemeinsamer Axe und dem Nullpunkte als gemeinsamem Brennpunkt.

Die Funktionen $\mathrm{Cs}(p)$, $\mathrm{Ss}(p)$ nehmen, wenn p von 0 bis $+\infty$ wächst, *monoton* von 1 bis 0 ab. Sie genügen den Relationen

$$\mathrm{Cs} = -\frac{d\,\mathrm{Ss}}{dp}; \qquad \mathrm{Ss} = \sqrt{\frac{2}{\pi p}} + \frac{d\,\mathrm{Cs}}{dp}$$

und verhalten sich für grosse Werte von p gemäss den asymptotischen Formeln

$$\mathrm{Cs}(p) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2p^{\frac{3}{2}}}, \qquad \mathrm{Ss}(p) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}$$

oder genauer, gemäss den asymptotischen Reihen:

$$\mathrm{Cs}(p) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi p}}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\frac{1}{p^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\frac{1}{p^5} - + \cdots\right\},$$

$$\mathrm{Ss}(p) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi p}}\left\{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\frac{1}{p^4} - + \cdots\right\}.$$

Mit den FRESNEL'schen Integralen

$$C(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_p^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt, \qquad S(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_p^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

hängen sie durch die Formeln zusammen:

$$\mathrm{Cs}(p) = \cos p \,.\, C(p) + \sin p \,.\, S(p),$$

$$\mathrm{Ss}(p) = \cos p \,.\, S(p) - \sin p \,.\, C(p).$$

Man kann daher aus den Tabellen für die FRESNEL'schen Integrale [8]) die Werte der Funktionen Cs, Ss entnehmen.

Indem wir die asymptotische Gleichung

$$\mathrm{Si}(x) \sim \frac{\cos x}{\pi x}$$

[8]) JAHNKE u. EMDE, *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven* (Leipzig, Teubner, 1909), S. 23-26.

heranziehen, erhalten wir für $x > 0$:

$$2\pi\,\mathrm{Te} \sim \begin{cases} \dfrac{[2-S(p)]\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+[2-C(p)]\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{x\sqrt{2}} & (y \geqq 0) \\[2ex] \dfrac{\mathrm{Ss}(p)\cos\left(r+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{Cs}(p)\sin\left(r+\frac{\pi}{4}\right)}{r\sqrt{2}} & (y \leqq 0). \end{cases}$$

Schreiben wir

$$A_+(p)=\sqrt{\frac{(2-S(p))^2+(2-C(p))^2}{2}}, \qquad A_-(p)=\sqrt{\frac{\mathrm{Ss}^2(p)+\mathrm{Cs}^2(p)}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\left(\Phi_+(p)+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-C(p)}{2+S(p)}, \qquad \mathrm{tg}\left(\Phi_-(p)+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\mathrm{Cs}(p)}{\mathrm{Ss}(p)}$$

$$\left[p \geqq 0, \qquad -\frac{\pi}{2} < \Phi_\pm(p)+\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}\right]$$

und betrachten die Funktion Te lediglich im Bereich der n^{ten} Welle, so ergibt sich, indem wir x, bezw. r durch $n\pi$ ersetzen,

$$2n\pi^2\,\mathrm{Te} \sim \begin{cases} A_+(p).\cos\left(x-\Phi_+(p)\right) & [y \geqq 0] \\ A_-(p).\cos\left(r-\Phi_-(p)\right) & [y \leqq 0]. \end{cases}$$

$\Phi_+(p)$, $\Phi_-(p)$ geben an, in welcher Weise die Te-Welle in ihrer Lage abweicht von einer Welle U, die im Gebiet $y \geqq 0$ gerade, im Gebiet $y \leqq 0$ kreisförmig verläuft:

U:	für $y \geqq 0$ und $n\pi-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq n\pi+\frac{\pi}{2}$	für $y \leqq 0$ und $n\pi-\frac{\pi}{2} \leqq r \leqq n\pi+\frac{\pi}{2}$
	$\cos x$	$\cos r$

Die « Lage » der Welle wird dabei durch ihre beiden seitlichen Begrenzungslinien, längs deren $\mathrm{Te}=0$ ist, oder auch durch die Projektion der Kammlinie auf die xy-Ebene gegeben. Die besagte Abweichung ist also für verschiedene Wellen immer *dieselbe* Funktion des parabolischen Parameters. Was das anschaulich bedeutet, macht man sich am besten klar, indem man darauf achtet, wie sich die Schar der konfokalen Parabeln $p=\text{const.}$ nach $x=+\infty$ zu zerstreut. Die Funktionen Φ_+, Φ_- sind in Figur 3 in 10-facher Ueberhöhung gezeichnet, wobei sie übrigens nach den Gleichungen

$$\Phi(p)=\Phi_+(p), \qquad \Phi(-p)=\Phi_-(p) \qquad (p \geqq 0)$$

zu einer einzigen Funktion Φ zusammengefasst sind. $A_+(p)$, $A_-(p)$ geben, wenn man noch den der einzelnen Welle eigentümlichen Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{2n\pi^2}$ hinzufügt, den Verlauf der *Amplitude* in der Längserstreckung der Welle an. Auch dieser Verlauf stellt sich (abgesehen von jenem Proportionalitätsfaktor) für jede Welle als *dieselbe* Funktion des Parameters p dar. A_+, A_- sind in Fig. 3, gleichfalls in 10-facher Ueberhöhung und zu einer einzigen Funktion A zusammengefasst, gezeichnet worden. Mittels der Kurven Φ und A kann man sich sehr leicht ein anschauliches Bild von den einzelnen Te-Wellen machen. Das Wesentlichste ist, *dass, wenn wir den Rücken der Welle, von der negativen y-Axe beginnend, durchlaufen, wir zunächst eine Kreisbahn beschreiben, die sich dann in der Nähe der x-Axe um* $\frac{\pi}{4}$ *ausweitet, um darauf im Gebiet* $y > 0$ *erst nach wiederholten Oszillationen in eine zur y-Axe parallele gerade Linie überzugehen, deren Abstand von der y-Axe um* $\frac{\pi}{4}$ *grösser ist als der Radius des am Anfang der Durchlaufung beschriebenen Kreises.*

Die gegebene Beschreibung trifft auf die Te-Wellen mit einer hohen Ordnungszahl zu; aber auch noch für die 3., ja selbst für die 2. Welle erhalten wir auf diesem Wege ein qualitativ durchaus richtiges Bild der Erscheinung. Die 1. Welle ist die einzige, welche eine augenfällige Abweichung zeigt. Während nämlich die übrigen Begrenzungslinien $\mathrm{Te} = 0$ der einzelnen Wellen senkrecht in die negative y-Axe einmünden, *läuft die der y-Axe nächste dieser Linien* $\mathrm{Te} = 0$ *(die innere Begrenzung der 1. Welle) von unten* $(y < 0)$ *herauf mit der Tangente* $x = 0$ *in den Nullpunkt hinein.* Diesem Verlauf werden sich die übrigen Niveaulinien der 1. Welle in der aus Figur 4 ersichtlichen Weise anpassen [9]). Der Zwischenraum endlich zwischen der positiven y-Axe und dieser inneren Begrenzungslinie der 1. Welle wird in grösserer Entfernung vom Nullpunkte ausgefüllt durch einen steilen, ziemlich gleichmässigen Abfall der Funktion Te von $\frac{1}{2}$ nach 0; hier liegen also die Niveaulinien nahezu parallel zur y-Axe, laufen dann aber, wenn man sie nach unten zu weiter verfolgt, schliesslich unter verschiedenen Winkeln in den O-Punkt hinein, sodass um O die schon früher erwähnte Schraube zustande kommt.

Um Te in der Umgebung des Nullpunktes zu beherrschen, werden wir uns natürlich nicht der asymptotischen Darstellungen, sondern einer Potenzentwicklung bedienen müssen, und es bleibt noch übrig, diese hier abzuleiten. Nach Formel (10) haben wir dazu die Funktion

$$\mathrm{B}^*(r) = \int_0^r \sin \xi (r - \rho) J(\rho) d\rho$$

zu behandeln, in der wir ξ als Parameter betrachten. Sie ist diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \mathrm{B}^*}{d r^2} + \xi^2 \mathrm{B}^* = \xi J(r),$$

---

9) Die Reinzeichnungen dieser und der übrigen Figuren hat auf Grund meiner Rechnungen und Skizzen Herr cand. math. W. LEHSTEN ausgeführt. Ich möchte ihm hier meinen herzlichsten Dank für seine mühsame und sorgfältige Arbeit aussprechen. — Uebrigens sollen die Figuren 4 und 5 nur der Beschreibung des Phänomens eine einigermassen zutreffende Unterlage geben; sie genügen in quantitativer Hinsicht keinen hohen Ansprüchen.

welche für $r = 0$ den Bedingungen $B^* = 0$, $\frac{dB^*}{dr} = 0$ genügt. Infolgedessen muss B^* die Form haben

$$B^*(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n r^{2n} \qquad (\beta_0 = 0).$$

Aus der Potenzentwicklung von $J(r)$ erhalten wir die Rekursionsformel

$$(2n+2)(2n+1)\beta_{n+1} + \xi^2\beta_n = \frac{(-1)^n\xi}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Sie ergibt nach einigen Zwischenrechnungen das Resultat

$$(-1)^n(2n)!\beta_n = \xi\{c_{n-1} + c_{n-2}\xi^2 + \cdots + c_0\xi^{2n-2}\},$$

wobei

$$c_i = \frac{1.3.5 \ldots (2i-1)}{2.4.6 \ldots 2i}$$

gesetzt ist, sodass also c_i die Koeffizienten der Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1-\chi^2}} = c_0 + c_1\chi^2 + c_2\chi^4 + \cdots$$

bedeuten. Nachdem auf diesem Wege B^* bestimmt ist, finden wir A aus:

$$B(r, \varphi) = \sin\xi r - \upsilon B^*(r, \varphi);$$

$$A = \varphi - \int_0^r \frac{B(\rho, \varphi)}{\rho} d\rho = \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + \pi\,\mathrm{Si}(x) + \cos\varphi \int_0^r \frac{B^*(\rho)}{\rho} d\rho, \quad \left(0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_0^r \frac{B^*(\rho)}{\rho} d\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{2n} r^{2n}.$$

Damit wollen wir die Diskussion der Te-Wellen beschliessen. Um aber jetzt das Eckenphänomen, beispielsweise für $\alpha = 60^\circ$, zu gewinnen, zeichne man in der xy-Ebene einen Winkel von der Oeffnung 60°, umgebe ferner jeden Schenkel mit der nach der Formel

$$\mathrm{Te}(-x, y) = -\mathrm{Te}(x, y) \tag{8}$$

symmetrisch ergänzten Figur 4 *so*, dass die positive y-Axe das eine Mal mit dem einen, das andere Mal mit dem anderen Schenkel des Winkels zusammenfällt. Ist dies geschehen, so erhält man die Superposition $\mathrm{Te}(x_1 y_1) + \mathrm{Te}(x_2 y_2)$, indem man die Schnittpunkte der Niveaulinien des einen und des anderen Te-Wellenzuges diagonal verbindet. In solcher Weise ist die Figur 5, welche die Funktion $\mathrm{Ang}^{\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ darstellt, entstanden [10]. Die Eigentümlichkeiten der Te-Wellen gelangen auch in der durch Ueberlagerung zweier solcher Wellenzüge erhaltenen Figur zu deutlichem Ausdruck; daneben entstehen durch die Superposition manche neue Erscheinungen, auf deren Beschreibung ich hier nicht

[10]) Es ist wiederum nur die eine Hälfte gezeichnet, da die andere vollständig symmetrisch ist. Ausserdem sind wie in Fig. 4 die den Niveaulinien beigeschriebenen Zahlen mit 100 multipliziert. Eine mit einem · versehene Zahl $\dot{a}$ bedeutet $100 + a$; z. B. $\dot{8} = 108$, $-\dot{8} = 92$.

mehr eingehen möchte; es sei dem Leser überlassen, sich darüber an Hand der beigegebenen Figur zu orientieren.

Für stumpfe Winkel α zeigt die Funktion $\mathrm{Ang}^{(\alpha)}$ ein etwas anderes Gepräge. Der Uebergangsfall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ verdient natürlich besondere Beachtung. Alle diese Figuren lassen sich aber leicht mit Hülfe unserer Abbildung der Te-Funktion auf graphischem Wege gewinnen. Man wird ferner auch solche Fälle behandeln können, in denen man es mit der Entwicklung einer Funktion f nach Kugelfunktionen zu tun hat, die längs mehrerer in einem und demselben Punkt O zusammenlaufender Kurvenäste einen Sprung erleidet. Die ihnen entsprechenden charakteristischen Absturzfunktionen für die Umgebung der « mehrzipfligen » Singularität O entstehen gleichfalls durch Ueberlagerung mehrerer Te-Wellenzüge, und ihre zeichnerische Darstellung macht daher keine Schwierigkeit [11]).

§ 4.

Höhere Summationsmethoden.

Ist

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = A \tag{12}$$

irgend eine konvergente Reihe, $\gamma(s)$ eine für $s \geqq 0$ definierte Funktion, welche, während s von 0 bis $+\infty$ wächst, monoton von 1 bis 0 abnimmt und an der Stelle $s = 0$ stetig ist, so konvergiert auch

$$a_0\gamma(0s) + a_1\gamma(1s) + a_2\gamma(2s) + a_3\gamma(3s) + \cdots = A_\gamma(s) \tag{13}$$

für $s > 0$, und es ist

$$\lim_{s=+0} A_\gamma(s) = A. \tag{14}$$

Der Beweis der angeführten Tatsache geschieht mit Hülfe der *Methode der partiellen Summation* (ABEL'*sche Transformation*). In manchen Fällen jedoch, wenn die Reihe (12) nicht konvergiert, konvergiert gleichwohl (13) und existiert der Limes (14). Alsdann bezeichnen wir die ursprüngliche Reihe (12) als *« durch die Funktion γ summabel mit der Summe A »*. Durch diesen allgemeinen Ansatz umfassen wir eine Reihe wichtiger spezieller Summationsmethoden.

Zunächst kommen wir auf die natürliche Summation zurück, indem wir

$$\gamma(s) = 1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq s < 1, \qquad = 0 \quad \text{für} \quad s \geqq 1$$

setzen. In der Tat ist dann

$$u_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = A_\gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

---

[11]) Es ist vielleicht für Rechner eine ganz lohnende Aufgabe, für solche Zwecke die Te-Funktion genauer zu tabellieren.

Wir erhalten die HÖLDER-CESÀRO'schen Mittel 1. Ordnung

$$u'_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n},$$

wenn wir

$$\gamma(s) = 1 - s \quad \text{für} \quad 0 \leqq s < 1, \qquad = 0 \quad \text{für} \quad s \geqq 1$$

nehmen; denn dann wird

$$u'_n = A_\gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

Wir erhalten die HÖLDER-CESÀRO'*schen Mittel* h^{ter} Ordnung, wenn wir

$$\gamma(s) = (1 - s)^h \quad \text{für} \quad 0 \leqq s < 1, \qquad = 0 \quad \text{für} \quad s \geqq 1$$

wählen; und hierbei hindert uns nichts, unter h irgend einen reellen positiven Exponenten zu verstehen, sodass wir auf diesem Wege auch zu einer sehr naturgemässen Einführung der *arithmetischen Mittel von gebrochener Ordnung* gelangen.

Wir wollen derartige Summationsmethoden vor allem auf die FOURIER'sche und die LAPLACE'sche Reihe anwenden, und gerade für diese Reihen ist von POISSON [12]) eine Summation vorgeschlagen worden, welche darin besteht, statt (12) zunächst die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots \qquad (r < 1)$$

zu betrachten und darauf $\lim\limits_{r=1-0} \mathfrak{P}(r)$ als Definition der Summe zu nehmen. Bei dieser Auffassung erscheint insbesondere die FOURIERreihe als Randwert einer harmonischen Funktion (wenn wir r als Radiusvector und das Argument x der FOURIERreihe als Azimut in einem ebenen Polarkoordinatensystem betrachten). Wir ordnen die POISSON'sche Summationsmethode unserem allgemeinen Ansatz unter, indem wir $r = e^{-s}$ setzen; *wir erkennen dann nämlich, dass sie nichts anderes ist als die Summation mittels der Funktion* $\gamma(s) = e^{-s}$.

In der *Wärmeleitungstheorie* bildet man zu einer FOURIERreihe $\sum a_n \cos nx$ unter Verwendung einer neuen positiven Variablen t den Ausdruck

$$\sum a_n \cos nx\, e^{-n^2 t}.$$

Er gibt den in einem Kreisringe nach Ablauf der Zeit t eintretenden Temperaturzustand an, wenn der Anfangszustand für $t = 0$ durch $\sum a_n \cos nx$ gegeben war. *Wir brauchen nur* $t = s^2$ *zu setzen, um zu sehen, dass es sich hier um den besonderen Ansatz* $\gamma(s) = e^{-s^2}$ *handelt.*

Doch genug mit diesen Beispielen! Wir wollen jetzt das *Analogon der* GIBBS'*schen Erscheinung* aufstellen für den Fall, dass man die FOURIERreihe mittels der monotonen

---

[12]) POISSON: *a*) *Mémoire sur la manière d'exprimer les fonctions en séries de quantités périodiques, et sur l'usage de cette transformation dans la résolution de différens problèmes* [Journal de l'École Royale Polytechnique, cah. XVIII (1820), S. 417-489], S. 422 ff.; *b*) *Addition au Mémoire sur la distribution de la chaleur dans les corps solides, et au Mémoire sur la manière d'exprimer les fonctions par des séries de quantités périodiques* [Ibid., cah. XIX (1823), S. 145-162], S. 149 ff.

Funktion $\gamma(s)$ summiert. Der Einfachheit halber soll dabei vorausgesetzt werden, dass $\gamma(s)$ stetig ist. Die in eine FOURIERreihe zu entwickelnde Funktion sei diejenige Funktion $\overset{\circ}{1}$ auf der Kreisperipherie, welche auf der einen Hälfte dieser Peripherie den Wert 1, auf der anderen den Wert 0 und an den beiden Trennungspunkten den Wert $\frac{1}{2}$ hat. Wir denken uns den Punkten der Peripherie in der üblichen Weise die Werte einer Variablen x zugeordnet so, dass x gleichförmig von $-\pi$ bis $+\pi$ wächst, wenn ein variabler Punkt, von einem der Trennungspunkte auslaufend, die Kreisperipherie mit gleichförmiger Geschwindigkeit umkreist:

$$\overset{\circ}{1} = \overset{\circ}{1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{für} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Wir entwickeln $\overset{\circ}{1}$ in eine FOURIERreihe

$$\overset{\circ}{1} = k_0 + k_1 + k_2 + \cdots,$$

wobei allgemein k_n eine *Kreisfunktion* n^{ter} *Ordnung*

$$k_n = \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \qquad (\alpha_n,\ \beta_n \text{ konstant})$$

bedeutet. Wir setzen

$$(15) \qquad \begin{cases} k_0 + k_1 + \cdots + k_n = \overset{\circ}{1}_n, \\ k_0\gamma(0s) + k_1\gamma(1s) + k_2\gamma(2s) + \cdots \text{ in inf. } = \overset{\circ}{1}_\gamma(s;\ x). \end{cases}$$

Es handelt sich darum, das Verhalten von $\overset{\circ}{1}_\gamma(s;\ x)[s > 0]$ in der Umgebung von $s = 0$, $x = 0$ kennen zu lernen. Durch partielle Summation folgt aus (15)

$$\overset{\circ}{1}_\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{\circ}{1}_n \big[\gamma(ns) - \gamma\big((n+1)s\big)\big].$$

Drücken wir $\overset{\circ}{1}_n$ durch die Formel

$$\overset{\circ}{1}_n(x) = \mathrm{Si}(nx) + R_n(x)$$

aus $\left[R_n(x) \text{ konvergiert für } n = \infty \text{ gleichmässig in } x\left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2}\right) \text{ gegen } 0\right]$ und führen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Si}(nx)\big[\gamma(ns) - \gamma\big((n+1)s\big)\big] = F_\gamma(s;\ x)$$

ein, so wird

$$\overset{\circ}{1}_\gamma(s;\ x) = F_\gamma(s;\ x) + R(s;\ x)$$

wo R ein « unwesentliches » Restglied ist, d. h. ein solches, welches *gleichmässig* für $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ gegen 0 konvergiert, wenn s von positiven Werten her gegen 0 geht. Für F_γ finden wir

$$F_\gamma(s;\ x) + \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} \mathrm{Si}\left(\frac{x}{s} - \tau\right) d\gamma(\tau)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} [\mathrm{Si}(nx) - \mathrm{Si}(\mathfrak{x}_n)]\big[\gamma(ns) - \gamma\big((n+1)s\big)\big],$$

wo $\mathfrak{x}_n$ für jedes n einen gewissen im Intervall $nx \ldots (n+1)x$ gelegenen Wert bedeutet. Es ist daher

$$|\mathrm{Si}(nx) - \mathrm{Si}(\mathfrak{x}_n)| \leqq \int_{n|x|}^{(n+1)|x|} \frac{|\sin\tau|}{\pi\tau}\, d\tau \leqq \frac{1}{n|x|\pi}\int_{n|x|}^{(n+1)|x|} d\tau = \frac{1}{n\pi},$$

mithin unter Vernachlässigung eines unwesentlichen Terms

$$F_\gamma \backsimeq - \int_0^\infty \mathrm{Si}\left(\frac{x}{s}\tau\right) d\gamma(\tau).$$

Setzen wir also

$$-\int_0^\infty \mathrm{Si}(r\tau)\, d\gamma(\tau) = \mathrm{Si}_\gamma(r) \tag{16}$$

so gilt

$$\overset{\circ}{\mathrm{I}}_\gamma \backsimeq \mathrm{Si}_\gamma\left(\frac{x}{s}\right).$$

Aus (16) erhalten wir für Si_γ die einfachere Formel

$$\mathrm{Si}_\gamma(r) = \frac{1}{2} - \int_0^\infty \gamma(\tau)\frac{\sin r\tau}{\pi\tau}\, d\tau = \int_0^\infty \bigl(1-\gamma(\tau)\bigr)\frac{\sin r\tau}{\pi\tau}\, d\tau \qquad (r > 0).$$

Meist ist es bequemer, zuerst die Ableitung

$$-\pi\cdot\frac{d\,\mathrm{Si}_\gamma}{dr} = \int_0^\infty \gamma(\tau)\cos r\tau\, d\tau$$

zu berechnen und daraus die Funktion selbst:

$$\mathrm{Si}_\gamma(r) = \int_r^\infty \left(-\frac{d\,\mathrm{Si}_\gamma}{dr}\right) dr.$$

Mit der Behandlung der speziellen Funktion $\overset{\circ}{\mathrm{I}}$ ist auch die GIBBS'sche Erscheinung für eine beliebige mit einem Sprung behaftete Funktion $f(x)$ von beschränkter Schwankung erledigt.

Wir besprechen kurz den Einfluss der erwähnten besonderen Summationsmethoden auf das GIBBS'sche Phänomen. Für

$$\gamma(s) = 1 - s \; (0 \leqq s \leqq 1), \qquad = 0 \; (s \geqq 1)$$

(1. HÖLDER*sche Mittel*) findet man

$$\mathrm{Si}'(r) = \mathrm{Si}_\gamma(r) = \frac{1}{\pi}\int_r^\infty \frac{1-\cos\rho}{\rho^2}\, d\rho,$$

bekommt also hier eine monoton abnehmende Absturzfunktion Si_γ.[13]) Betrachten wir allgemeiner

$$\gamma(s) = (1-s)^h \quad (0 \leqq s \leqq 1), \qquad = 0 \; (s \geqq 1),$$

so hat Si_γ für $h \geqq 1$ monotonen Charakter, dagegen nicht für die Fälle $0 \leqq h < 1$. —

---

13) Vergl. *I* § 4.

Für $\gamma(s) = e^{-s}$ (POISSON'*sche Summation*) erhalten wir [14])

$$\frac{d\,\mathrm{Si}_\gamma}{dr} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\tau}\cos r\tau\, d\tau = -\frac{1}{\pi(1+r^2)},$$

$$\mathrm{Si}_\gamma(r) = \frac{1}{\pi}\int_r^\infty \frac{d\rho}{1+\rho^2} = \frac{1}{\pi}\,.\,\mathrm{arc\,cotg}\, r.$$

Dieses Resultat lässt sich auf sehr einfache Weise dadurch bestätigen, dass $\mathrm{arc\,tg}\dfrac{\mathfrak{x}-1}{\mathfrak{y}}$ eine harmonische Funktion von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ ist, deren Randwerte auf dem Kreise $\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2=1$ an der Stelle $\mathfrak{x}=1$, $\mathfrak{y}=0$ den Sprung π erleiden.

Ziehen wir endlich den « *Wärmeleitungs* »-Fall $\gamma(s) = e^{-s^2}(s=\sqrt{t})$ in Betracht, so kommt

$$\frac{d\,\mathrm{Si}_\gamma}{dr} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\tau^2}\cos r\tau\, d\tau = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{r^2}{4}},$$

$$\mathrm{Si}_\gamma(r) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_r^\infty e^{-\frac{\rho^2}{4}}d\rho = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,.\,\mathrm{Erf}\left(\frac{r}{2}\right).$$

Dieses Resultat ist gleichfalls bekannt; denn wie man sich leicht überzeugt, ist $\mathrm{Erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)$ selbst eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, freilich eine Lösung, die inbezug auf x nicht die Periode 2π besitzt. Eine solche aber erhalten wir, wenn wir die gut konvergierende Summe bilden:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{h=-\infty}^{+\infty}\left[\mathrm{Erf}\left(\frac{x-2h\pi}{2\sqrt{t}}\right) - \mathrm{Erf}\left(\frac{x-(2h-1)\pi}{2\sqrt{t}}\right)\right].$$

Die durch sie gelieferte Funktion ergibt im Limes für $t=+0$ den Wert

1 in allen Intervallen $(2h-1)\pi < x < 2h\pi$,

0 in allen Intervallen $2h\pi < x < (2h+1)\pi$.

Damit sind wir also im Besitz einer exakten Auswertung der Funktion $\overset{\circ}{\mathrm{I}}_\gamma(\sqrt{t};\, x)$ für den Fall $\gamma(\sqrt{t}) = e^{-t}$. *In diesem Beispiel gibt die* GIBBS'*sche Erscheinung an, nach welchem Gesetz die Wärme zweier sich berührender Körper aus gleichem Material, die zuvor auf verschiedene Temperatur gebracht sind, im ersten Moment nach der Berührung zum Ausgleich kommt* (unter der Annahme, dass die Temperatur U samt ihrer Ableitung $\dfrac{dU}{dx}$ für $t>0$ stetig über die Grenze der beiden Körper hinübergeht).

Betrachten wir endlich noch die Abänderungen, welche das *Eckenphänomen* oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Funktion $\mathrm{A}(r, \varphi)$ durch die höheren Summationen erleidet. Man berechnet leicht, dass hier in analoger Weise, wie bei der gewöhnlichen GIBBS'schen Erscheinung Si_γ an Stelle von Si tritt,

$$\mathrm{A} = 2\xi\sqrt{1-\xi^2}\int_1^\infty \frac{\mathrm{Si}(ry)}{(y^2-\xi^2)\sqrt{y^2-1}}dy \quad \left(r>0,\ 0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

---

[14]) Vergl. POISSON, loc. cit. [12]), *a*, S. 423.

durch

$$A_\gamma = 2\xi\sqrt{1-\xi^2}\int_1^\infty \frac{\mathrm{Si}_\gamma(ry)}{(y^2-\xi^2)\sqrt{y^2-1}}\,dy$$

ersetzt werden muss. Betrachten wir speziell die HÖLDER'*schen Mittel* 1. *Ordnung*, so bedeutet $\mathrm{Si}_\gamma(x)$ die Funktion

$$\mathrm{Si}' = \frac{1}{\pi}\int_x^\infty \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt.$$

Für diese Summation wird also

$$A_\gamma \equiv A' = 2\xi\sqrt{1-\xi^2}\int_1^\infty \frac{\mathrm{Si}'(ry)}{(y^2-\xi^2)\sqrt{y^2-1}}\,dy.$$

Indem wir nach r differentiieren, folgt für

$$B' = -r\frac{\partial A'}{\partial r}$$

die Formel

$$B' = \frac{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}{\pi r}\int_1^\infty \frac{1-\cos ry}{y(y^2-\xi^2)\sqrt{y^2-1}}\,dy \geqq 0.$$

Auf jedem Strahl $\varphi = \mathrm{const.} = \varphi_0 \left(0 \leqq \varphi_0 \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ *nimmt also* A' *mit wachsendem* r *monoton* (von φ_0 bis 0) *ab.*

Untersuchen wir ferner das Verhalten von A' auf einem Viertelkreise $r = \mathrm{const.}$, indem wir nach ξ differentiieren; es kommt

$$\frac{\partial A'}{\partial \xi} = 2\int_1^\infty \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi\sqrt{1-\xi^2}}{y^2-\xi^2}\right)\frac{\mathrm{Si}'(ry)}{\sqrt{y^2-1}}\,dy. \tag{17}$$

Nun finden wir

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi\sqrt{1-\xi^2}}{y^2-\xi^2}\right) = \frac{y^2+\xi^2-2y^2\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}\,(y^2-\xi^2)^2}.$$

Solange also $0 \leqq \xi \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, fällt der Integrand in (17) im ganzen Integrationsintervall $1 \leqq y < \infty$ positiv aus, und hier ist also

$$\frac{\partial A'}{\partial \xi} > 0. \tag{18}$$

Ist hingegen $\frac{1}{\sqrt{2}} < \xi < 1$, so geht, wenn y von 1 bis $+\infty$ wächst, der Integrand an der Stelle $y_1 = \frac{\xi^2}{2\xi^2-1}$ vom positiven zum negativen Vorzeichen über. Wir setzen daher

$$\frac{1}{2}\frac{\partial A'}{\partial \xi} = \int_1^\infty = \int_1^{y_1} + \int_{y_1}^\infty.$$

Dann wird, da Si' eine monoton abnehmende Funktion ist,

$$\int_1^{y_1} > \mathrm{Si}'\left(\frac{r\xi^2}{2\xi^2-1}\right)\cdot\int_1^{y_1}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi\sqrt{1-\xi^2}}{y^2-\xi^2}\right)\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Im zweiten Bestandteil $\int_{y_1}^{\infty}$ ist der Integrand durchweg negativ und wegen der Monotonität von Si' daher

$$0 < -\int_{y_1}^{\infty} < -\,\mathrm{Si}'\left(\frac{r\xi^2}{2\xi^2 - 1}\right) \cdot \int_{y_1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi\sqrt{1-\xi^2}}{y^2-\xi^2}\right)\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Indem wir diese beiden Ungleichungen voneinander subtrahieren, bekommen wir

$$\frac{1}{2}\frac{\partial A'}{\partial \xi} \geqq \mathrm{Si}'\left(\frac{r\xi^2}{2\xi^2-1}\right) \cdot \int_{1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi\sqrt{1-\xi^2}}{y^2-\xi^2}\right)\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}},$$

und da nach Früherem

$$\xi\sqrt{1-\xi^2}\int_{1}^{\infty}\frac{dy}{(y^2-\xi^2)\sqrt{y^2-1}} = \int_{1}^{\infty}\frac{d\Theta_{\varphi}(y)}{dy}\,dy = \varphi = \arcsin \xi$$

ist, also

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi\sqrt{1-\xi^2}}{y^2-\xi^2}\right)\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} > 0,$$

so schliessen wir endlich, dass auch für $\frac{1}{\sqrt{2}} < \xi \leqq 1$ die Ungleichung (18) statthat.

Nimmt demnach auf einem Kreise $r =$ const. *der Winkel* φ *von* $\frac{\pi}{2}$ *bis zu* 0 *ab, so fällt dabei auch* A' *monoton von* $\pi\,\mathrm{Si}'(r)$ *nach* 0. Die der Funktion Te entsprechende Funktion Te' ist infolgedessen für $x > 0$ durchweg positiv und $< \frac{1}{2}$, in der Halbebene $x < 0$ durchweg negativ und $> -\frac{1}{2}$; von den Wellen, welche für Te charakteristisch waren, zeigt sie keine Spur. — Aus den asymptotischen Darstellungen der Funktion Te erhält man ohne Mühe ähnliche Darstellungen für Te'.

§ 5.

Temperaturausgleich und Gibbs'sches Phänomen.

Das Problem, den Wärmeausgleich zu bestimmen, wie er in einem Kreisring eintritt, welcher aus zwei je auf eine bestimmte Anfangstemperatur gebrachten Halbstücken verschiedenen Materials zusammengesetzt wird, führt darauf, die in § 4 eingeführte Funktion $\mathring{1}$ in eine Reihe

$$(19) \qquad \mathring{1}(x) = \sum A\varphi(x), \qquad A = \frac{\int_{-\pi}^{+\pi}\mathring{1}(x)\varphi(x)\,dx}{\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi^2(x)\,dx}$$

zu entwickeln, in welcher $\varphi(x)$ alle diejenigen Lösungen der den Parameter λ^2 linear enthaltenden Differentialgleichungsschar

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda^2 k(x)\varphi = 0 \tag{20}$$

$$k(x) = \alpha^2 \quad \text{für} \quad -\pi < x < 0, \qquad k(x) = \beta^2 \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi$$

durchläuft, für welche $\varphi(x)$ und $\frac{1}{k(x)}\frac{d\varphi}{dx}$ stetig über die Berührungsstellen $x \equiv 0$ und $x \equiv \pi \pmod{2\pi}$ hinübergehen [15]). Sobald die Richtigkeit der Gleichung (19) für alle x (von den Berührungsstellen abgesehen) nachgewiesen ist, ergibt sich die an der Reihe $\sum A\varphi(x)$ für Summation mittels $\gamma(s) = e^{-s^2}$ bei $x = 0$ auftretende GIBBS'sche Erscheinung aus der Lösung des eben erwähnten Wärmeausgleich-Problems, die sich unter Benutzung der Funktion Erf unmittelbar hinschreiben lässt [16]). Weit schwieriger ist hingegen die Berechnung der GIBBS'schen Erscheinung für die natürliche Summation, und zwar namentlich deshalb, weil die Eigenwerte λ von (20) keinem einfachen asymptotischen Gesetz genügen.

Die Masseinheiten mögen so gewählt sein, dass die positiven thermischen Konstanten α, β die Summe 1 besitzen. Die Funktionen $\varphi(x)$, nach denen die Reihe (19) fortschreitet, zerfallen in zwei Klassen: die der 1. Klasse sind durch die Gleichungen gegeben:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos\frac{\beta\lambda\pi}{2}\cos\left[\alpha\lambda\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right] & (-\pi \leqq x \leqq 0) \\ \cos\frac{\alpha\lambda\pi}{2}\cos\left[\beta\lambda\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] & (0 \leqq x \leqq \pi), \end{cases}$$

und es kann dabei für λ irgend eine nicht-negative Wurzel der transzendenten Gleichung

$$\beta \operatorname{tg}\frac{\alpha\lambda\pi}{2} + \alpha \operatorname{tg}\frac{\beta\lambda\pi}{2} = 0 \tag{21}$$

eintreten; die Funktionen der 2. Klasse, welche wir zum Unterschied mit $\psi(x)$ bezeichnen, lauten so:

$$\psi(x) = \begin{cases} \sin\frac{\beta\mu\pi}{2}\sin\left[\alpha\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right] & (-\pi \leqq x \leqq 0) \\ \sin\frac{\alpha\mu\pi}{2}\sin\left[\beta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] & (0 \leqq x \leqq \pi), \end{cases}$$

und μ kann hier jede Wurzel der Gleichung

$$\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha\mu\pi}{2} + \beta \operatorname{tg}\frac{\beta\mu\pi}{2} = 0$$

[15]) Diese spezielle Form der Uebergangsbedingungen hat die *Orthogonalität* der $\varphi(x)$ zur Folge. Doch würden sich auch andere Uebergangsbedingungen ganz analog behandeln lassen.

[16]) H. WEBER, *Ueber den Temperatur-Ausgleich zwischen zwei sich berührenden heterogenen Körpern* [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen, Jahrgang 1893, S. 722-730].

bedeuten [17]). Um diese Funktionen $\psi(x)$ brauchen wir uns aber nicht zu kümmern, da

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \overset{\circ}{\mathrm{I}}(x)\psi(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} \psi(x)\,dx = 0$$

ist.

Wir diskutieren zunächst die transzendente Gleichung (21). Ist λ irgend eine Wurzel derselben, so setzen wir

$$\beta \operatorname{tg} \frac{\alpha\lambda\pi}{2} = -\alpha \frac{\operatorname{tg}\beta\lambda\pi}{2} = \upsilon.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{\alpha\lambda\pi}{2} &= g\pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{\upsilon}{\beta}, \\ \frac{\beta\lambda\pi}{2} &= h\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{\upsilon}{\alpha}, \end{aligned} \qquad \left(\begin{matrix} g \text{ und } h \text{ ganzzahlig;} \\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} \leqq \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right)$$

$$(\beta g - \alpha h)\pi = \alpha \operatorname{arc\,tg}\frac{\upsilon}{\alpha} + \beta \operatorname{arc\,tg}\frac{\upsilon}{\beta}, \tag{22}$$

$$-\tfrac{1}{2} < \beta g - \alpha h \leqq \tfrac{1}{2},$$

und also, wenn wir $g + h = n$ einführen,

$$-\tfrac{1}{2} < g - \alpha n \leqq \tfrac{1}{2}. \tag{23}$$

Umgekehrt existiert zu jeder ganzen Zahl $n \geqq 0$ eine einzige ganze Zahl g gemäss Bedingung (23) und dann zu g und $h = n - g$ ein einziger Wert $\upsilon = \upsilon_n$ nach (22) und eine einzige Wurzel $\lambda = \lambda_n$:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= 2n + \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\upsilon_n}{\beta} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\upsilon_n}{\alpha}\right) \\ &= 2n + \mathfrak{z}_n, \end{aligned}$$

wo jedenfalls

$$-1 < \mathfrak{z}_n < 1$$

ist. Die Frage nach der genaueren Verteilung der Werte $\mathfrak{z}_n$ auf der Strecke $-1 \cdots +1$ ist wesentlich zahlentheoretischer Natur. Ist α und daher auch β rational:

$$\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \beta = \frac{b}{c}, \qquad c = a + b$$

(a, b ganz, positiv und relativ prim), so genügen die Zahlen $\mathfrak{z}_n$ den Periodizitätsgleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_n &= \mathfrak{z}_{n'}, &&\text{falls } n \equiv n' \pmod{c} \text{ ist,} \\ \mathfrak{z}_n + \mathfrak{z}_{n'} &= 0, &&\text{falls } n + n' \equiv 0 \pmod{c} \text{ ist.} \end{aligned}$$

---

[17]) Ist $\operatorname{tg}\frac{\alpha\mu\pi}{2} = 0$, $\operatorname{tg}\frac{\beta\mu\pi}{2} = 0$, so sind in der Formel für ψ die Faktoren $\sin\frac{\beta\mu\pi}{2}$, $\sin\frac{\alpha\mu\pi}{2}$ bezw. durch β und α zu ersetzen; Werte μ, für welche $\operatorname{tg}\frac{\alpha\mu\pi}{2} = \infty$, $\operatorname{tg}\frac{\beta\mu\pi}{2} = \infty$ ist, gelten gleichfalls als Lösungen der transzendenten Gleichung.

Wir halten nun zunächst an der Voraussetzung eines rationalen $\alpha = \frac{a}{c}$ fest und werden hernach zu einem beliebigen irrationalen α dadurch übergehen, dass wir α mittels rationaler Zahlen annähern. Wir müssen, mit Rücksicht auf diese Absicht, die ganzen Zahlen a und b als veränderlich betrachten, und das im folgenden benutzte LANDAU'sche Symbol [18]) O bezeichnet Abschätzungen, welche gleichmässig in x $(-\pi \leqq x \leqq 0)$, $n (n \geqq 1)$, a und b $\left(\text{solange } \frac{a}{b} \text{ zwischen festen positiven Grenzen bleibt}\right)$ gültig sind.

Bedeutet $A_n \varphi_n(x)$ das zu $\lambda = \lambda_n$ gehörige Glied der Reihe (19) und setzen wir

$$\overset{\circ}{\mathrm{I}}_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu \varphi_\nu(x), \qquad R_n(x) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_\nu \varphi_\nu(x),$$

so findet man durch Rechnung, indem man in R_n immer diejenigen Glieder zusammenfasst, deren Index ν einer festen Zahl j (mod c) kongruent ist,

$$R_n(x) = C(x) \sum_{p=m}^{\infty} \frac{\sin(2apx)}{p} + D(x) \sum_{p=m}^{\infty} \frac{\cos(2apx)}{p} + O\left(\frac{c}{n}\right)$$
$$(-\pi \leqq x \leqq 0);$$

$c.m$ ist dabei die kleinste ganze durch c teilbare Zahl, welche $> n$ ist, und die Funktionen $C(x)$, $D(x)$ haben folgende Bedeutung:

$$C(x) = -\frac{2}{a\pi} \sum_{j=0}^{c-1} \frac{\cos^2 \frac{\beta\lambda_j\pi}{2} \sin \frac{\alpha\lambda_j\pi}{2}}{\cos^2 \frac{\beta\lambda_j\pi}{2} + \cos^2 \frac{\alpha\lambda_j\pi}{2}} \sin\left[\alpha\lambda_j\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$D(x) = \frac{2}{a\pi} \sum_{j=0}^{c-1} \frac{\cos^2 \frac{\beta\lambda_j\pi}{2} \cos \frac{\alpha\lambda_j\pi}{2}}{\cos^2 \frac{\beta\lambda_j\pi}{2} + \cos^2 \frac{\alpha\lambda_j\pi}{2}} \sin\left[\alpha\lambda_j\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Aus der Beziehung

$$\lambda_{c-j} = 2c - \lambda_j$$

ergibt sich

$$D\left(\frac{-h\pi}{a}\right) = 0 \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, a).$$

Im Intervall i_h: $-\frac{\pi}{2a} \leqq x + \frac{h\pi}{a} \leqq \frac{\pi}{2a}$ gilt, wenn für einen Moment

$$2a\left(x + \frac{h\pi}{a}\right) = y$$

[18]) Vergl. E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig, B. G Teubner, 1909), S. 59.

gesetzt wird, infolgedessen die Ungleichung

$$|D(x)| = \left|\int_{-\frac{h\pi}{a}}^{x} \frac{dD}{dx} dx\right| \leqq \frac{2}{a\pi}\left|x + \frac{h\pi}{a}\right| \sum_{j=0}^{c-1} \alpha\lambda_j$$

$$\leqq \frac{2}{a\pi}\cdot\frac{|y|}{2a}\cdot\alpha c^2 = \frac{c}{a\pi}\cdot|y|;$$

Ferner ist

$$\left|\sum_{p=m}^{\infty} \frac{\cos(py)}{p}\right| \leqq \frac{\pi}{m|y|} \qquad (-\pi \leqq y \leqq +\pi),$$

und also in i_h und hernach für alle x des Intervalls $-\pi \ldots 0$

$$\left|D(x).\sum_{p=m}^{\infty} \frac{\cos(2apx)}{p}\right| < \frac{c}{a.m} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{m},$$

(24) $$R_n(x) = C(x).\sum_{p=m}^{\infty} \frac{\sin(2apx)}{p} + O\left(\frac{c}{n}\right).$$

Wir erkennen so, dass die Reihe $\sum A\varphi(x)$ in jedem Teilintervall von $-\pi \ldots 0$, das keinen der Punkte $\frac{-h\pi}{a}$ $(h=0, 1, \ldots, a)$ enthält, gleichmässig konvergiert, und der Wert dieser Reihe überdies im ganzen Gebiet $-\pi \leqq x \leqq 0$ beschränkt ist. Entsprechendes trifft auch für $0 \leqq x \leqq \pi$ zu, und daraus schliessen wir in bekannter Weise, dass der Wert der Reihe kein anderer sein kann als $\overset{\circ}{1}(x)$:

$$\sum A\varphi(x) = 1 \qquad \left(-\pi < x < 0,\ x \neq \frac{-h\pi}{a}\right).$$

Infolgedessen muss die Funktion $R_n(x)$ bei Annäherung des Arguments x von der einen und der anderen Seite an eine Stelle $x = \frac{-h\pi}{a}$ $(h = 1, 2, \ldots, a-1)$ gegen dieselbe Grenze konvergieren, und dies ist mit (24) nur dann verträglich, wenn

$$C\left(\frac{-h\pi}{a}\right) = 0 \qquad (\text{für } h = 1, 2, \ldots, a-1).$$

Hingegen ist

$$-C(0) = C(\pi) = C_\alpha > 0.$$

Wir bekommen daher für $-\frac{\pi}{2a} \geqq x \geqq \frac{\pi}{2a} - \pi$

(25) $$R_n(x) = O\left(\frac{c}{n}\right),$$

dagegen für $0 \geqq x \geqq -\frac{\pi}{2a}$

$$R_n(x) = -C_\alpha.\sum_{p=m}^{\infty} \frac{\sin(2apx)}{p} + O\left(\frac{c}{n}\right).$$

Nun ist aber für $0 > 2ax \geqq -\pi$

$$\sum_{p=m}^{\infty} \frac{\sin(2apx)}{p} = -\pi\,\mathrm{Si}(-2max) + O\left(\frac{1}{m}\right) = -\pi\,\mathrm{Si}(-2\alpha nx) + O\left(\frac{c}{n}\right)$$

und ausserdem für $-\frac{\pi}{2a} \geqq x$:

$$\mathrm{Si}(-2\alpha n x) = O\left(\frac{c}{n}\right).$$

Mithin ergibt sich die für $0 \geqq x \geqq -\frac{\pi}{2}$ gleichmässige Abschätzung

$$\overset{\circ}{\mathrm{I}}_n(x) = 1 - \pi C_\alpha \mathrm{Si}(-2\alpha n x) + O\left(\frac{c}{n}\right). \tag{26}$$

Aehnlich folgt für $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$

$$\overset{\circ}{\mathrm{I}}_n(x) = \pi C_\beta \mathrm{Si}(2\beta n x) + O\left(\frac{c}{n}\right). \tag{26'}$$

Der Berechnung der Konstanten C_α, C_β lege man die Formeln zu Grunde:

$$\pi C_\alpha = \frac{2}{\alpha c}\sum_{j=0}^{c-1} \frac{\cos^2\frac{\alpha\lambda_j\pi}{2}\cos^2\frac{\beta\lambda_j\pi}{2}}{\cos^2\frac{\alpha\lambda_j\pi}{2} + \cos^2\frac{\beta\lambda_j\pi}{2}}\cdot \mathrm{tg}^2\frac{\alpha\lambda_j\pi}{2},$$

$$\pi C_\beta = \frac{2}{\beta c}\sum_{j=0}^{c-1} \frac{\cos^2\frac{\alpha\lambda_j\pi}{2}\cos^2\frac{\beta\lambda_j\pi}{2}}{\cos^2\frac{\alpha\lambda_j\pi}{2} + \cos^2\frac{\beta\lambda_j\pi}{2}}\cdot \mathrm{tg}^2\frac{\beta\lambda_j\pi}{2}.$$

Die transzendente Gleichung (21), welcher λ_j genügt, liefert die einfache Beziehung

$$\frac{\pi C_\alpha}{\alpha} = \frac{\pi C_\beta}{\beta}.$$

Setzt man ferner in (26), (26') $x = 0$ und geht zur Grenze $n = \infty$ über, so kommt

$$1 - \frac{C_\alpha \pi}{2} = \frac{C_\beta \pi}{2},$$

mithin

$$\pi C_\alpha = 2\alpha, \qquad \pi C_\beta = 2\beta.$$

Bis hierher hatten wir an der Voraussetzung eines rationalen α festgehalten. Ist α irrational, so bedienen wir uns des folgenden zahlentheoretischen Satzes:

Zu jeder reellen Zahl α lässt sich eine unendliche Reihe von Brüchen

$$\frac{a_n}{c_n}\left(n = 1, 2, 3, \ldots;\ a_n,\ c_n \text{ ganzzahlig}\right)$$

so finden, dass

$$\lim_{n=\infty} n\left(\alpha - \frac{a_n}{c_n}\right) = 0, \tag{27}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{n} = 0 \tag{28}$$

ist.

Ersetzt man nun bei der Berechnung von $\overset{\circ}{\mathrm{I}}_n$ die irrationale Zahl α durch $\frac{a_n}{c_n}$

— der dadurch begangene Fehler konvergiert, wie aus (27) zu schliessen ist, für $n = \infty$ gleichmässig mit Bezug auf x gegen 0 — und wendet dann für diesen Näherungsbruch $\alpha_n = \frac{a_n}{c_n}$ die Formeln (26), (26′) an, so bekommen wir wegen (28) für das Restglied r_n in den Gleichungen

$$\overset{\circ}{\mathrm{I}}_n(x) = \begin{cases} 1 - 2\alpha \operatorname{Si}(-2\alpha n x) + r_n(x) & \left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq 0\right) \\ 2\beta \operatorname{Si}(2\beta n x) + r_n(x) & \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

einen Ausdruck, welcher zeigt, dass dasselbe mit wachsendem n gleichmässig in x gegen 0 konvergiert. Damit ist auch der Fall eines irrationalen α erledigt.

Der Beweis des eben benutzten zahlentheoretischen Hülfssatzes ist etwa so zu führen: Zu jedem Index n und jeder positiven Zahl ε bestimmen wir zwei ganze Zahlen $\mathfrak{a}(n\varepsilon)$, $\mathfrak{c}(n\varepsilon)$ gemäss den Bedingungen [19])

$$|\alpha . \mathfrak{c}(n\varepsilon) - \mathfrak{a}(n\varepsilon)| \leqq \frac{1}{n\varepsilon},$$

$$0 < \mathfrak{c}(n\varepsilon) \leqq n\varepsilon.$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ sei eine monoton abnehmende Folge positiver Zahlen, welche gegen 0 konvergiert. Da bei festem ε gewiss $\lim_{n=\infty} \mathfrak{c}(n\varepsilon) = \infty$ ist, kann zu jedem ε_h ein Index n_h gefunden werden derart, dass für $n \geqq n_h$

$$\varepsilon_h^2 \mathfrak{c}(n\varepsilon_h) \geqq 1$$

wird. Wir können noch annehmen, dass $1 = n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ ist. Wir setzen dann

$$a_n = \mathfrak{a}(n\varepsilon_h), \quad c_n = \mathfrak{c}(n\varepsilon_h) \quad \text{für} \quad n_h \leqq n < n_{h+1}$$

und finden in Bestätigung des zu beweisenden Satzes

$$\left. \begin{aligned} \left| n\left(\alpha - \frac{a_n}{c_n}\right) \right| &\leqq \varepsilon_h \\ 0 < \frac{c_n}{n} &\leqq \varepsilon_h \end{aligned} \right\} \quad (\text{für } n \geqq n_h).$$

Göttingen, Pfingsten 1910.

HERMANN WEYL.

---

19) H. MINKOWSKI, DIOPHANT*ische Approximationen* (Leipzig, B. G. Teubner, 1907), S. 3 und S. 9.