ÜBER DEN VARIABILITÄTSBEREICH DER FOURIER'SCHEN KONSTANTEN VON POSITIVEN HARMONISCHEN FUNKTIONEN.

Von **C. Carathéodory** (Breslau).

Adunanza del 26 marzo 1911.

Einleitung.

1. Die folgende Arbeit schliesst sich Untersuchungen an, die ich im Zusammenhange mit dem Picard'schen Satz im Band LXIV der Mathematischen Annalen [1]) verfolgt habe. Seit dieser Publikation habe ich nicht nur neue Resultate gewonnen sondern auch die Darstellung des Ganzen in eine übersichtlichere Form gebracht. Deshalb schien es mir zweckmässig die vorliegende Arbeit unabhängig von dem Früheren zu gestalten.

Dort wurde u. A. auseinandergesetzt, dass die Reihe

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \tag{1}$$

nur dann eine harmonische Funktion $U(r, \theta)$ darstellen kann, die für $r < 1$ *regulär* und *positiv* ist, wenn die Koeffizienten a_n und b_n gewissen *angebbaren* Beschränkungen unterworfen sind. Insbesondere musste der Punkt des $2n$-dimensionalen Raumes mit den Koordinaten

$$a_1,\quad b_1,\quad a_2,\quad b_2,\ \ldots,\ a_n,\quad b_n$$

notwendig im Inneren oder höchstens auf der Begrenzung des kleinsten konvexen Körpers K_{2n} dieses Raumes liegen, der die Kurve mit den Koordinaten

$$\cos\theta,\quad \sin\theta,\quad \cos 2\theta,\quad \sin 2\theta,\ \ldots,\ \cos n\theta,\quad \sin n\theta$$

enthält, wobei θ einen variablen Parameter bedeutet.

2. Eine Umkehrung dieses Satzes hatte ich damals ebenfalls bewiesen, indem ich zeigte, dass, wenn die Zahlen

$$a_1,\quad b_1,\quad a_2,\quad b_2,\ \ldots,\ a_n,\quad b_n$$

die Koordinaten eines Punktes darstellen, der nicht ausserhalb des Körpers K_{2n} liegt, mindestens eine harmonische Funktion existiert, die im Einheitskreise regulär und positiv ist und deren Entwickelung (1) mit den gegebenen $2n$ Koeffizienten beginnt.

[1]) C. Carathéodory, *Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen* [Mathematische Annalen, Bd. LXIV (1907), S. 95-115].

In dieser Arbeit werde ich nun eine andere Umkehrung desselben Satzes geben, die für die Anwendungen von Bedeutung ist, indem ich zeige, dass folgender Satz gilt:

Wenn die $2n$ *Koeffizienten*

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_n$$

der Reihe

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

die Koordinaten eines Punktes darstellen, der für jedes n *im Inneren des jeweiligen konvexen Körpers* K_{2n} *liegt, so stellt diese Reihe eine im Einheitskreise reguläre, positive harmonische Funktion dar.*

3. Für die Begrenzung des Körpers K_{2n} hatte ich eine Parameterdarstellung aufgestellt, die diese Begrenzung durch trigonometrische Polynome vollständig beherrscht. Es ist nun Herrn Toeplitz gelungen, eine sehr schöne und sehr einfache Darstellung dieser Begrenzung in Determinantenform zu entdecken, durch welche sämtliche gefundenen Sätze in algebraische Form gebracht werden können [2].

Der Übergang von der Parameterdarstellung der Begrenzung von K_{2n} zu der Toeplitz'schen Darstellung hat uns auf ein Gleichungssystem geführt, das in der Litteratur mehrfach behandelt worden ist. Man begegnet nämlich demselben algebraischer Problem, bei der Kanonisierung von binären Formen ungerader Ordnung [3], bei der mechanischen Quadratur [4], und bei der Theorie der Kettenbrüche [5].

Diese Bemerkung hat uns erlaubt das Toeplitz'sche Resultat abzuleiten, ohne von der Theorie quadratischer Formen von unendlich vielen Variabeln gebrauch zu machen.

Eine rein algebraische Darstellung sowohl meiner früheren Sätze als auch der Toeplitz'schen Resultate ist vor Kurzem Herrn E. Fischer gelungen [6], dem ich auch die obigen Litteraturangaben verdanke.

Eine auf das Stieltje'sche Integral begründete Methode, die zu einem ganz neuen Beweise für viele dieser Sätze führt, hat Herr Friedrich Riesz gegeben [7].

---

[2]) O. Toeplitz: *a*) *Über die* Fourier'*sche Entwickelung positiver Funktionen* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXXII (2. Semester 1911), S. 191-192]; *b*) *Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen* [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1910, S. 489-506].

[3]) F. Faà di Bruno, *Einleitung in die Theorie der binären Formen* (deutsch bearbeitet von Dr. Th. Walter) (Leipzig, Teubner, 1881), S. 94.

[4]) E. Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen, Theorie und Anwendungen* (Berlin, Reimer), Bd. II (1881), Kap. I.

[5]) Hermite et Stieltjes, *Correspondance d'*Hermite *et de* Stieltjes (Paris, Gauthier-Villars, 1905); Ch. Possé, *Sur quelques applications des fractions continues algébriques* (St.-Pétersbourg, 1886), S. 93.

[6]) E. Fischer, *Über das* Carathéodory'*sche Problem, Potenzreihen mit positivem reellen Teil betreffend* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXXII (2. Semester 1911), S. 240-256 (Sitzung 11. Juni 1911)].

[7]) F. Riesz, *Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales* [Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure (Paris), Ser. III, Bd. XXVIII (1911), S. 33-62].

4. Die Betrachtungen sind in der folgenden Arbeit ebenso wie in meiner früheren vorwiegend geometrisch geblieben. Ich beginne in Anschluss an MINKOWSKI mit der Behandlung der konvexen Körper im n-dimensionalen Raume und beschäftige mich insbesondere mit dem kleinsten konvexen Körper, der eine gegebene abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{M}$ enthält. Dabei ist es sehr vorteilhaft die Punkte dieses Gebildes als Schwerpunkte von positiven Massenbelegungen auf $\mathfrak{M}$ zu betrachten, eine Bemerkung die ich einer mündlichen Mitteilung von Herrn G. HERGLOTZ zu verdanken habe.

Speziell werden dann die allgemeinen Resultate angewandt auf die Bestimmung der Eigenschaften des kleinsten konvexen Körpers des $2n$-dimensionalen Raumes

$$x_1, \quad y_1, \quad x_2, \quad y_2, \ldots, x_n, \quad y_n,$$

der die Kurve mit den Gleichungen

$$x_1 = \cos\theta, \quad y_1 = \sin\theta, \quad x_2 = \cos 2\theta, \quad y_2 = \sin 2\theta, \ \ldots, \ x_n = \cos n\theta, \quad y_n = \sin n\theta$$

enthält.

Die zu Beginn der Einleitung erwähnten Umkehrungssätze über positive harmonische Funktionen lassen sich dann mit Benutzung der geometrischen Resultate ganz leicht erledigen.

I.

Die kleinsten konvexen Bereiche, die eine abgeschlossene Punktmenge enthalten.

5. Die Sätze, die wir aufstellen wollen, werden sehr übersichtlich und leicht fasslich, wenn wir uns der Sprache der Geometrie im n-dimensionalen Raume bedienen. Man darf aber dabei nicht vergessen, dass die Geometrie der höheren Räume *nicht* eine Plausibelmachung durch Analogie zu Sätzen der gewöhnlichen Geometrie bedeutet, sondern, dass auch hier eine strenge Arithmetisierung durchführbar und durchgeführt ist. Um dies in Erinnerung zu bringen, wollen wir die allerelementarsten Begriffe kurz erklären:

Ein Punkt $\mathfrak{x}$ des n-dimensionalen Raumes ist gegeben, wenn man seine Koordinaten

$$x_1, \quad x_2, \ \ldots, \ x_n$$

kennt. Der Abstand E_{xy} von zwei Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ wird gegeben durch die Formel

$$E_{xy} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}. \tag{1}$$

Gleichungen wie

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \ \ldots, \ x_n = \varphi_n(t),$$

deren rechten Seiten von einem Parameter t abhängen, stellen eine Linie dar; sind die $\varphi(t)$ sämtlich lineare Funktionen von t, also von der Form

$$x_k = m_k t + n_k$$

so ist die Linie eine Gerade. Die Grössen m_k heissen die Richtungskoeffizienten der

Geraden. Der Winkel θ von zwei Geraden $x_k = m_k t + n_k$ und $x_k = m'_k t + n'_k$ wird durch die Formel gegeben

$$(2) \qquad \cos\vartheta = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k m'_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} m_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k'^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ist $\sum m_k m'_k = 0$ so heissen die beiden Geraden zu einander orthogonal.

Die Begriffe *Entfernung* und *Winkel* sind absolute Invarianten gegenüber einer jeden *orthogonalen Transformation* des n-dimensionalen Raumes, wie eine leichte Rechnung zeigt. Sind drei beliebige Punkte gegeben, so kann man immer eine derartige Transformation finden, welche diese Punkte in die 2-dimensionale Ebene der x_1, x_2 (für welche also $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $\ldots$, $x_n = 0$ sind) überführt. Wählt man diese letzte Ebene als Zeichenebene, so kann man das Dreieck, dessen Ecken in den transformierten Punkten liegen, ausführen und sämtliche metrische Eigenschaften dieses Dreiecks sind denen des ursprünglichen gleich.

Unter einer *Ebene* des R_n verstehen wir eine $(n-1)$-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit, also ein Gebilde, das durch die Gleichung

$$(3) \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n + d = 0$$

dargestellt wird. Die u_k sind Konstanten, die nicht alle verschwinden sollen, und man kann immer voraussetzen, dass sie der Bedingung genügen

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = 1.$$

Man sagt dann, dass die Gleichung der Ebene die *Normalform* hat. Zwei Ebenen, deren Gleichungen die Normalform haben sind *Parallel*, wenn die entsprechenden Koeffizienten der x_k in beiden Gleichungen gleich oder entgegengesetzt sind.

Der Abstand p eines Punktes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ von der Ebene (3) ist gegeben durch die Formel

$$(4) \qquad p = u_1 a_1 + u_2 a_2 + \cdots + u_n a_n + d.$$

Jede Ebene trennt daher den Raum in zwei Gebiete, von denen jedes diejenigen Punkte des Raumes umfasst, für welche p ein und dasselbe Vorzeichen besitzt.

Unter einer p-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit P verstehen wir die Gesamtheit der Punkte des R_n, die $(n-p)$ von einander linear unabhängigen Ebenen, die einen gemeinsamen Punkt besitzen, gemeinsam sind. Jede Ebene, die einer Ebene, die sämtliche Punkte von P enthält, parallel ist, soll *parallel zu P* heissen. Durch jeden Punkt $\mathfrak{a}$, der kein Punkt von P ist, kann man mindestens eine zu P parallele Ebene führen, da es unter den $(n-p)$ Ebenen, die P definieren, sicher eine gibt, die $\mathfrak{a}$ nicht enthält.

Sind zwei von einander verschiedene Punkte

$$\mathfrak{a}: \quad a_1, \ a_2, \ldots, a_n$$
$$\mathfrak{b}: \quad b_1, \ b_2, \ldots, b_n$$

gegeben, so enthält die Gerade

$$x_k = a_k t + (1 - t) b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

beide Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Dasjenige Stück dieser Geraden, das man erhält, wenn man t zwischen Null und Eins variieren lässt, wenn also

$$0 \leqq t \leqq 1$$

ist, soll die, die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ verbindende *Strecke* $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ heissen.

6. Ein *konvexer Bereich* [8]) $\mathfrak{K}$ des R_n soll jede Punktmenge heissen, die folgende Eigenschaften zugleich besitzt:

A. Sie ist abgeschlossen, d. h. sie enthält ihre Häufungspunkte.

B. Gehören zwei Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ dem Bereiche $\mathfrak{K}$ an, so soll dasselbe für die ganze Strecke $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ gelten, die diese Punkte verbindet.

Aus diesen beiden Eigenschaften folgt ohne weiteres, dass die Punktmenge $\mathfrak{K}$ *perfekt* sein muss (d. h. dass jeder ihrer Punkte ein Häufungspunkt ist) sobald sie nur zwei von einander verschiedene Punkte enthält, und ferner, dass $\mathfrak{K}$ ganz im Endlichen liegt.

Sind ein konvexer Bereich $\mathfrak{K}$ und eine Gerade im Raume gegeben, so haben beide Gebilde entweder keinen Punkt, oder nur einen Punkt, oder eine zwei Punkte verbindende Strecke gemeinsam; eine vierte Möglichkeit, wo die den beiden Gebilden gemeinsame Punkte isoliert oder getrennt liegen, ist nach der Definition ausgeschlossen.

Es gibt Konvexe Bereiche: jede Strecke $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ z. B. ist ein derartiger Bereich.

Jeder Punkt, der in der Punktmenge $\mathfrak{K}$ nicht enthalten ist, soll ein *äusserer* Punkt von $\mathfrak{K}$ heissen.

Unter *Begrenzung* eines konvexen Bereiches verstehen wir die Gesamtheit der Punkte, die Häufungspunkte von äusseren Punkten sind. Insbesondere sind die Endpunkte der Strecke, die eine Gerade mit dem Bereiche $\mathfrak{K}$ gemeinsam hat, Punkte der Begrenzung von $\mathfrak{K}$.

Es sei jetzt $\mathfrak{a}$ ein äusserer Punkt von $\mathfrak{K}$; da die Punktmenge $\mathfrak{K}$ abgeschlossen ist und die Entfernung von zwei Punkten eine stetige Funktion ihrer $2n$ Argumente ist, so wird, nach dem bekannten Satze von WEIERSTRASS, die untere Grenze der Entfernung von $\mathfrak{a}$ bis zu den Punkten von $\mathfrak{K}$, für einen bestimmten Punkt

$$\mathfrak{p}: \quad p_1, \ p_2, \ldots, p_n$$

erreicht werden.

Wir betrachten die Ebene

$$(p_1 - a_1)(x_1 - a_1) + (p_2 - a_2)(x_2 - a_2) + \cdots + (p_n - a_n)(x_n - a_n) = 0, \tag{6}$$

---

[8]) Die Theorie der konvexen Bereiche und Körper ist von H. MINKOWSKI zu einer grossen Vollkommenheit gebracht worden. Das hier Folgende ist eine freie Bearbeitung einiger seiner Untersuchungen. Vgl.: H. MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen* (Leipzig, Teubner, 1896), Kap. I und II; H. MINKOWSKI, *Volumen und Oberfläche* [Mathematische Annalen, Bd. LVII (1903), S. 447-495]; H. MINKOWSKI, *Gesammelten Schriften* (Leipzig, Teubner), Bd. II (1911), S. 131 u. f.

die man erhält, wenn man das innere Produkt der n-dimensionalen Vektoren $(\mathfrak{p}-\mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{x}-\mathfrak{a})$ gleich Null setzt. Diese Ebene enthält den Punkt $\mathfrak{a}$ und jede Gerade, die in (6) enthalten ist und durch $\mathfrak{a}$ geht, ist zu der Strecke $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{p}}$ orthogonal. Hieraus folgt aber, dass die Ebene (6) ganz ausserhalb $\mathfrak{K}$ liegt: würde nämlich ein Punkt $\mathfrak{q}$ von (6) zu dem Bereiche $\mathfrak{K}$ gehören, so müsste dies für die ganze Strecke $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ auch der Fall sein. Die Betrachtung des Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, das wir, wie wir oben erklärten, in die Zeichenebene transformieren können, fürt aber zu einem Widerspruch: dieses Dreieck ist nämlich rechtwinkelig in $\mathfrak{a}$ und seine Hypothenuse $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ besteht aus lauter Punkten von $\mathfrak{K}$; die untere Grenze des Abstandes von $\mathfrak{a}$ bis $\mathfrak{K}$ würde daher nicht für den Punkt $\mathfrak{p}$ erreicht sein. Aus dieser Tatsache folgt ferner, dass von den zwei Gebieten in denen der Raum R_n durch die Ebene (6) getrennt wird, das eine keinen einzigen Punkt von $\mathfrak{K}$ enthalten kann; würden zwei Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{K}$ auf verschiedenen Seiten der Ebene (6) liegen, so müsste die Strecke $\mathfrak{p}\mathfrak{r}$ die zu $\mathfrak{K}$ gehört, einen Punkt $\mathfrak{q}$ von (6) enthalten, was, wie wir gesehen haben, nicht möglich ist.

Jede Ebene, die, wie (6) die Punkte von $\mathfrak{K}$ nicht trennt und keinen einzigen Punkt von $\mathfrak{K}$ enthält, soll eine *Schranke* des konvexen Bereiches heissen.

Jeder Punkt $\mathfrak{b}$ der Begrenzung ist nach Voraussetzung Häufungspunkt von Punkten, die ausserhalb $\mathfrak{K}$ liegen. Betrachtet man eine abzählbare Menge derartiger Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n, \ldots$, die $\mathfrak{b}$ zum Häufungspunkt haben, so kann man durch jeden dieser Punkte eine Schranke des Konvexen Bereiches konstruieren, deren Gleichung

$$u_{k1}x_1 + u_{k2}x_2 + \cdots + u_{kn}x_n + d_k = 0$$

in Normalform geschrieben zu denken ist. Aus diesen unendlich vielen Gleichungen kann man eine Teilfolge aussondern, für welche die Grenzwerte

$$\lim_{k=\infty} u_{kj} = u_j \quad \text{und} \quad \lim_{k=\infty} d_k = d \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

existieren; dann hat die Ebene

$$(7) \qquad u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n + d = 0$$

folgende Eigenschaften: *a*) sie enthält den Punkt $\mathfrak{b}$; *b*) sämtliche Punkte von $\mathfrak{K}$ liegen auf einer und derselben Seite der Ebene (7). Jede derartige Ebene soll nach MINKOWSKI eine *Stützebene* des Bereiches $\mathfrak{K}$ heissen.

Unsere Resultate lassen sich folgendermassen zusammenfassen: *Durch jeden äusseren Punkt eines konvexen Bereiches kann man eine Schranke durch jeden Punkt seiner Begrenzung eine Stützebene legen.*

7. Wir betrachten jetzt eine im Endlichen gelegene, abgeschlossene, aber *beliebige* Punktmenge $\mathfrak{M}$ und nennen wieder *Stützebene* und *Schranke* für $\mathfrak{M}$ jede Ebene, die die Punkte von $\mathfrak{M}$ nicht trennt, je nachdem sie Punkte von $\mathfrak{M}$ enthält oder nicht.

Die Punkte des R_n zerfallen sodann in zwei Klassen, je nachdem man durch sie eine Schranke für $\mathfrak{M}$ legen kann, oder nicht. Die Gesamtheit $\mathfrak{K}$ der Punkte, durch welche man *keine* Schranke für $\mathfrak{M}$ legen kann, bilden, wie wir beweisen wollen, einen konvexen Bereich:

a) Die Punktmenge $\mathfrak{K}$ liegt im Endlichen; bedeutet nämlich A das Maximum der Entfernung der Punkte von $\mathfrak{M}$ vom Anfangspunkte $\mathfrak{o}$ der Koordinaten, so ist jede Ebene, deren Entfernung von $\mathfrak{o}$ grösser als A ist, eine Schranke für $\mathfrak{M}$ folglich ist jeder Punkt dessen Abstand von $\mathfrak{o}$ grösser als A ist kein Punkt von $\mathfrak{K}$.

b) Die Punktmenge $\mathfrak{K}$ ist abgeschlossen. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Häufungspunkt von Punkten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots$, die alle zu der Punktmenge $\mathfrak{K}$ gehören. Ist $\mathfrak{a}$ kein Punkt von $\mathfrak{K}$, so geht durch $\mathfrak{a}$ eine Schranke s von $\mathfrak{M}$, deren Abstand von dieser abgeschlossenen Punktmenge gleich p sei. Durch jeden Punkt, dessen Entfernung von $\mathfrak{a}$ weniger als p beträgt, würde man Schranken zu $\mathfrak{M}$ legen können, nämlich die Parallelebenen zu s; der Punkt $\mathfrak{a}$ könnte somit nicht Häufungspunkt von Punkten sein, die alle zu $\mathfrak{K}$ gehören.

c) Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei von einander verschiedene Punkte von $\mathfrak{K}$, und $\mathfrak{c}$ ein Punkt der Strecke $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$, so gehört $\mathfrak{c}$ zu $\mathfrak{K}$. Wäre es nämlich möglich durch $\mathfrak{c}$ eine Schranke s für $\mathfrak{K}$ zu legen, so kann nach Voraussetzung die Ebene s weder $\mathfrak{a}$ noch $\mathfrak{b}$ enthalten; diese Punkte liegen dann auf verschiedenen Seiten von s; und von den beiden durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gehenden Parallelebenen zu s, müsste die eine eine Schranke sein, was unmöglich ist.

Die Punktmenge ist also ein konvexer Bereich, der überdies sämtliche Punkte von $\mathfrak{M}$ enthält. Es sei $\mathfrak{K}'$ ein zweiter konvexer Bereich, der dieselbe Eigenschaft besitzt. Durch jeden Punkt $\mathfrak{a}'$ der ausserhalb $\mathfrak{K}'$ liegt, kann man eine Schranke zu $\mathfrak{K}'$ und folglich zu $\mathfrak{M}$ legen. Der Punkt $\mathfrak{a}'$ liegt folglich auch ausserhalb $\mathfrak{K}$, womit wir bewiesen haben, dass sämtliche Punkte von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{K}'$ enthalten sein müssen.

Der Bereich $\mathfrak{K}$ ist mit anderen Worten der kleinste konvexe Bereich, der die Menge $\mathfrak{M}$ enthält.

Liegt die Menge $\mathfrak{M}$ ganz in einer p-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit L_p, $p < n$, so ist dies auch der Fall für $\mathfrak{K}$. Denn man kann durch jeden Punkt ausserhalb L_p mindestens eine Ebene legen, die zu L_p parallel ist, und diese Ebene wäre eine Schranke für $\mathfrak{M}$.

8. Es sei $\mathfrak{b}$ irgend ein Punkt der Begrenzung von $\mathfrak{K}$ und s eine Stützebene an $\mathfrak{K}$ durch diesen Punkt. Die Ebene s enthält *notwendig* Punkte von $\mathfrak{M}$; sonst wäre nämlich s eine Schranke für $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{b}$ könnte kein Punkt von $\mathfrak{K}$ sein.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}'$ die abgeschlossene Punktmenge, welche durch die Gesamtheit der Punkte von $\mathfrak{M}$ gebildet wird, die auf s liegen, und mit $\mathfrak{K}'$ den kleinsten konvexen Körper, der $\mathfrak{M}'$ enthält und der folglich ganz in s liegt. $\mathfrak{K}'$ bildet natürlich einen Teil von $\mathfrak{K}$; wir wollen aber umgekehrt zeigen, dass sämtliche Punkte von $\mathfrak{K}$, die auf s liegen, in $\mathfrak{K}'$ enthalten sind.

Es sei nämlich $\mathfrak{a}$ ein Punkt von s, der ausserhalb $\mathfrak{K}'$ liegt; dann gibt es durch $\mathfrak{a}$ eine Schranke t zu $\mathfrak{K}'$.

Wenn man die Abkürzungen t, s für die linken Seiten der Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} v_k x_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} u_k x_k = 0$$

gebraucht, die in Normalform zu schreiben sind und die Ebenen t, s darstellen, kann man ferner festsetzen, dass für sämtliche Punkte von $\mathfrak{M}$ die Grösse $s \geqq 0$ und für sämtliche Punkte von $\mathfrak{M}'$ die Grösse $t < 0$ ist. Die Gesamtheit der Punkte von $\mathfrak{M}$ für welche $t \geqq 0$ ist, bilden eine abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{M}''$, die keinen einzigen Punkt mit s gemeinsam hat. Es sei h der Abstand zwischen $\mathfrak{M}''$ und s; mit k bezeichne man die grösste Entfernung eines Punktes der Punktmenge $\mathfrak{M}''$ von $t = 0$. Betrachten wir den Ausdruck $\left(s - \frac{h}{2k}t\right)$; für die Punkte von $\mathfrak{M}''$ ist

$$s \geqq h > 0, \qquad t < k$$

und folglich

$$s - \frac{h}{2k}t > \frac{h}{2} > 0;$$

für die übrigen Punkte von $\mathfrak{M}$ für welche ja $t < 0$ und $s \geqq 0$ ist, ist dieser Ausdruck ebenfalls positiv und von Null verschieden. Die Ebene

$$s - \frac{h}{2k}t = 0$$

ist also eine Schranke für $\mathfrak{M}$ womit wir bewiesen haben, dass $\mathfrak{a}$ ein äusserer Punkt von $\mathfrak{K}$ ist.

9. Die Punkte des kleinsten konvexen Bereiches $\mathfrak{K}$, der eine abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{M}$ enthält, können sämtlich als Schwerpunkte von Massenbelegungen auf der Menge $\mathfrak{M}$ gedeutet werden, wobei alle in betracht kommenden Massen positiv sind und die Gesamtmasse 1 besitzen.

Für eindimensionale Räume ist der Satz selbstverständlich: man behafte die extremen Punkte der Menge $\mathfrak{M}$ mit den Massen t und $(1 - t)$; dann durchläuft der Schwerpunkt dieser beiden Massen den ganzen Bereich $\mathfrak{K}$, wenn t von Null bis Eins mit Einschluss der Grenzen variiert.

Wir nehmen jetzt an, der Satz bestehe für $(n - 1)$-dimensionale Räume [oder was dasselbe ist für $(n - 1)$-dimensionale lineare Mannigfaltigkeiten im n-dimensionalen Raum], und betrachten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}$ im n-dimensionalen Raum. Es sei $\mathfrak{c}$ ein Punkt von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{m}$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{M}$, den wir mit $\mathfrak{c}$ durch eine Gerade verbinden; wir verlängern wenn nötig die Strecke $\mathfrak{m}\mathfrak{c}$ bis zu ihrem Schnittpunkte $\mathfrak{b}$ mit der Begrenzung von $\mathfrak{K}$. Durch $\mathfrak{b}$ legen wir eine Stützebene an $\mathfrak{K}$, welche die Teilmenge $\mathfrak{M}'$ von $\mathfrak{M}$ enthalten möge. Wir können nach Voraussetzung eine Verteilung von positiven Massen von Gesamtmasse Eins auf $\mathfrak{M}'$ vornehmen, deren Schwerpunkt in $\mathfrak{b}$ liegt; multipliziert man jede dieser Massen mit einem positiven Faktor t so ändert sich der Schwerpunkt nicht; fügt man aber jetzt zu diesen Massen eine Masse $(1 - t)$ in $\mathfrak{m}$ hizu indem man zugleich bedenkt, dass $\mathfrak{c}$ auf der Strecke $\mathfrak{m}\mathfrak{b}$ (oder in einem ihrer Endpunkte) liegt, so sieht man, dass für einen geeigneten Wert von t zwischen Null und Eins der Schwerpunkt der Gesamtmasse in $\mathfrak{c}$ zu liegen kommt. Dabei hat unsere Beweisführung gezeigt, dass *jeder* Punkt von $\mathfrak{K}$ als Schwerpunkt von höchstens $(n + 1)$ positiven Massen angesehen werden kann, die sämtlich in Punkten der Menge $\mathfrak{M}$ angebracht sind.

Umgekehrt ist aber der Schwerpunkt $\mathfrak{c}$ einer jeden positiven Massenverteilung auf

$\mathfrak{M}$ ein Punkt des Bereiches $\mathfrak{K}$. Im entgegengesetzten Falle würde man durch $\mathfrak{c}$ eine Schranke legen können, deren Abstand d von $\mathfrak{M}$ von Null verschieden wäre. Der Schwerpunkt jeder diskreten oder kontinuierlichen Massenverteilung würde aber dann auch auf derselben Seite der Schranke liegen wie $\mathfrak{M}$ und seine Entfernung von dieser Ebene würde mindestens d betragen; er könnte also, entgegen der Voraussetzung, nie mit $\mathfrak{c}$ zusammenfallen.

10. Wenn ein konvexer Bereich K des n-dimensionalen Raumes $(n+1)$ Punkte enthält, die nicht alle in einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene liegen so heisst K ein *konvexer Körper*. Ein konvexer Körper ist dadurch charakterisiert, dass er *innere Punkte* enthält.

Ein Punkt i heisst innerer Punkt von K, wenn eine gewisse Umgebung von i aus lauter Punkten des Körpers K besteht, oder, was dasselbe ist, wenn die untere Grenze des Abstandes zwischen i und den äusseren Punkten von K nicht Null ist.

Es seien $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ die $(n+1)$ Punkte von $\mathfrak{M}$, von denen man weiss, dass sie nicht alle in einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene liegen: ich will beweisen, dass der Schwerpunkt $\mathfrak{c}$ von $(n+1)$ positiven Massen, von denen keine einzige verschwindet und die in diesen Punkten konzentriert sind, mit einem inneren Punkte von K zusammenfällt. Es sei s eine beliebige Ebene durch $\mathfrak{c}$; mindestens einer der Punkte $\mathfrak{a}$, z. B. $\mathfrak{a}_0$, liegt nicht in s; $\mathfrak{c}$ fällt aber mit einem *inneren* Punkte der Strecke zusammen die $\mathfrak{a}_0$ mit dem Schwerpunkte derjenigen Massen verbindet, die in $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ konzentriert sind. Diese Strecke liegt aber ganz in K und durchsetzt andererseits s; folglich ist s weder Stützebene noch Schranke von K, womit bewiesen ist, dass $\mathfrak{c}$ weder auf der Begrenzung noch ausserhalb von K liegen kann.

Nachdem die Existens eines inneren Punktes bewiesen worden ist, ist es nun ein Leichtes zu zeigen, dass die Punkte der Begrenzung eines konvexen Körpers des n-dimensionalen Raumes, diesen Raum in zwei Gebiete zerlegen, von denen jedes aus lauter inneren resp. aus lauter äusseren Punkten bestehen.

II.

Die kleinsten konvexen Körper K_{2n}, die eine sphärische Normkurve des $2n$-dimensionalen Raumes enthalten.

11. Die Überlegungen des vorigen Abschnittes führen zu besonders einfachen Gebilden, wenn man als Punktmenge $\mathfrak{M}$ ein Stück einer Normkurve des $2n$-dimensionalen Raumes wählt.

Eine algebraische Kurve k^{ter} Ordnung heisst bekanntlich Normkurve, wenn sie $(k+1)$ Punkte enthält, die nicht alle in einer $(k-1)$-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit des Raumes R_n liegen. So sind z. B. nicht zerfallende Kegelschnitte oder nicht ebene Kurven dritter Ordnung Normkurven.

In Räumen R_{2n} von gerader Anzahl von Dimensionen, gibt es Normkurven, die einen ganz im Endlichen liegenden geschlossenen reellen Zug besitzen und ganz auf einer $(n-1)$-dimensionalen Kugel liegen. Die Gleichung dieser Kurven kann, wenn man von einer Ähnlichkeitstransformation und einer Drehung des $2n$-dimensionalen Raumes absieht, auf die Form gebracht werden:

$$(8)\qquad \begin{cases} x_1 = \cos\theta, & x_2 = \cos 2\theta, \ \ldots, \ x_n = \cos n\theta, \\ \bar{x}_1 = \sin\theta, & \bar{x}_2 = \sin 2\theta, \ \ldots, \ \bar{x}_n = \sin n\theta. \end{cases}$$

Diese Kurve ist $2n^{\text{ter}}$ Ordnung, wie man sofort einsieht, wenn man

$$\cos k\theta = \frac{\alpha^k + \alpha^{-k}}{2}, \quad \sin k\theta = \frac{\alpha^k - \alpha^{-k}}{2i}$$
$$\alpha = e^{i\theta}$$

setzt und α als Parameter einführt. Jede Gleichung der Form

$$(9)\qquad u_1 \cos\theta + \bar{u}_1 \sin\theta + \cdots + u_n \cos n\theta + \bar{u}_n \sin n\theta = d,$$

bei welcher nicht alle Koeffizienten u_k, $\bar{u}_k$ verschwinden, wird in α höchsten $2n^{\text{ten}}$ Grades sein und wird daher nie mehr als $2n$ reelle Wurzeln besitzen, wenn sie nicht identisch verschwindet. Mit anderen Worten: die $(2n-1)$-dimensionale Ebene

$$u_1 x_1 + \bar{u}_1 \bar{x}_1 + \cdots + u_n x_n + \bar{u}_n \bar{x}_n = d$$

hat höchstens $2n$ Punkte mit der Kurve gemein, wenn sie nicht die ganze Kurve enthält. Letzteres ist aber ausgeschlossen, weil man aus dem identischen Verschwinden eines beliebigen trigonometrischen Polynoms auf das Nullsein eines jeden seiner Koeffizienten schliessen kann.

Die Kurve (8) ist also eine Normkurve; wir wollen jetzt den kleinsten konvexen Körper K_{2n}, der diese Kurve enthält, eingehend betrachten. Unsere Überlegungen lassen sich übrigens mit geringfügigen Modifikationen auf jede andere Normkurve, wie z. B. auf die Kurve

$$x_1 = t, \quad x_2 = t^2, \ \ldots, \ x_n = t^n$$

oder auch auf Stücke dieser Kurven leicht übertragen.

Da, wie wir sahen, jede Ebene mit der Kurve (8) höchstens $2n$ Punkte gemeinsam hat, wird eine beliebige Ebene — und folglich auch jede Stützebene — die Kurve *höchstens in n Punkten* berühren. Umgekehrt gilt aber hier der Satz, dass jede Ebene, welche die Kurve (8) in n getrennten Punkten berührt, eine Stützebene sein muss. Würde nämlich diese Ebene die Kurve in einem von den Berührungspunkten verschiedenen Punkte treffen, so würde die Gleichung (9) mehr als $2n$ (einfache und doppelte) Wurzeln besitzen, und das Gleiche würde der Fall sein, wenn die Kurve in einem ihrer Berührungspunkte mit der Ebene, diese durchsetzen würde, wobei die entsprechende Wurzel dreifach zu zählen wäre.

12. Aus diesen einfachen Tatsachen kann man für den kleinsten konvexen Bereich K_{2n}, der die Kurve (8) enthält, folgende Eigenschaften entnehmen:

a) Der Bereich K_{2n} ist ein konvexer *Körper,* weil $(2n+1)$ beliebige Punkte der Normkurve (8), nie alle in einer $(2n-1)$-dimensionalen Ebene liegen können.

Insbesondere ist der Anfangspunkt der Koordinaten ein *innerer* Punkt von K_{2n} weil die Kurve (8) jede Ebene

$$u_1 x_1 + \bar{u}_1 \bar{x}_1 + \cdots + u_n x_n + \bar{u}_n \bar{x}_n = 0$$

durchsetzt und eine solche Ebene folglich nie Stützebene sein kann. Dieses sieht man am einfachsten, wenn man den Ausdruck

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{n} u_k \cos k\theta + \bar{u}_k \sin k\theta$$

bildet und bedenkt, dass

$$\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta = 0$$

ist.

b) Jeder Schwerpunkt $\mathfrak{b}$ von p positiven Massen, die auf der Kurve (8) liegen ist ein Punkt der *Begrenzung* von K_{2n} so lange $p \leqq n$ ist.

Fügt man nämlich zu den p Punkten in welchen die Massen liegen, $(n - p)$, von diesen verschiedene, Punkte hinzu, so gibt es eine $(n - 1)$-dimensionale Ebene, welche sämtliche n Punkte (die ursprünglichen und die hinzugefügten) sowie auch die Tangenten der Normkurve in diesen Punkten enthält; diese Ebene ist eine Stützebene von K_{2n} und enthält den Punkt $\mathfrak{b}$. Dieser Punkt ist aber als Schwerpunkt einer Massenverteilung von positiven Massen auf (8) ein Punkt von K_{2n}, der auf der Begrenzung dieses Körpers liegt, weil er einer Stützebene angehört.

c) Jeder Punkt $\mathfrak{b}$ der Begrenzung von K_{2n} kann als Schwerpunkt von p positiven Massen auf der Kurve (8) angesehen werden, wo $p \leqq n$ ist. Es geht nämlich mindestens eine Stützebene durch $\mathfrak{b}$, die nach Vorhergehendem, höchstens n Berührungspunkte mit der Normkurve besitzt. Der Punkt $\mathfrak{b}$ gehört aber zu dem kleinsten konvexen Bereich den diese Berürungspunkte bestimmen.

d) Die Darstellung der Punkte der Begrenzung von K_{2n} durch eine Massenbelegung von positiven Massen auf (8) ist *eindeutig,* d. h. es können zwei Massenbelegungen von Gesamtmasse Eins, von denen die Eine aus höchstens n Punkten besteht, während die Andere beliebig ist, nur dann denselben Schwerpunkt $\mathfrak{b}$ besitzen, wenn sie identisch sind.

Es sei nämlich $\mathfrak{a}$ irgend ein Punkt der zweiten Massenverteilung, der nicht mit einem Punkte der ersten übereinstimmt; wir können dann immer durch den Schwerpunkt $\mathfrak{b}$ der ersten Massenbelegung eine Stützebene s an K_{2n} legen, die den Punkt $\mathfrak{a}$ nicht enthält: Dazu brauchen wir nur zu den $p \leqq n$ Punkten des ersten Aggregats $(n - p)$ Punkte hinzuzufügen, die alle von $\mathfrak{a}$ verschieden sind und die Stützebene von K_{2n} zu betrachten, die diese n Punkte enthält. Es sei jetzt m_a die in $\mathfrak{a}$ konzentrierte Masse und s_a die Entfernung von $\mathfrak{a}$ bis zu der Ebene s; dann ist der Schwerpunkt der zweiten Massenbelegung in einer Entfernung von s die mindestens $m_a s_a$ beträgt.

Die zwei Massenverteilungen müssen daher aus genau denselben p Punkten bestehen, wobei $p \leqq n$ ist. Durch $(p - 1)$ dieser Punkte kann man aber dann immer eine Stützebene an die Normkurve legen, die den p^{ten} nicht enthält; die p Punkte liegen also nicht in einer $(p-1)$-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit. Jeder Punkt $\mathfrak{b}$ des kleinsten konvexen Bereiches, der dieses Aggregat von p Punkten enthält kann daher nur auf eine Weise als Schwerpunkt von nicht negativen Massen von Gesamtmasse Eins dargestellt werden, die auf dem Aggregate liegen, wie aus § 9 dieser Arbeit folgt. Hiermit ist aber die Eindeutigkeit der Darstellung bewiesen.

e) Aus diesem letzten Umstande folgt nun, dass der Schwerpunkt von *mehr* als n positiven Massen, die auf der Normkurve liegen notwendig im *Inneren* des Körpers K_{2n} liegt.

Dasselbe gilt von jeder kontinuierlichen Massenverteilung, deren Schwerpunkt, wie wir wissen, auch zu K_{2n} gehört.

Nimmt man insbesondere die Dichte ρ einer Massenverteilung auf der ganzen Kurve konstant an, so fällt der Schwerpunkt mit dem Anfangspunkte $\mathfrak{o}$ der Koordinaten zusammen, was einen neuen Beweis liefert, dass $\mathfrak{o}$ im Inneren von K_{2n} liegt.

13. Wir können jetzt unsere Resultate in Formeln zusammenfassen und eine Parameterdarstellung für die Begrenzung von K_{2n} geben.

Wenn wir nämlich die Massen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, wobei $p \leqq n$ ist, auf die p Punkte der Kurve (8) verteilen, die den Werten $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ des Parameters θ entsprechen, so bekommen die Koordinaten $a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, \ldots, a_n, \bar{a}_n$ des Schwerpunktes folgende Gestalt:

$$a_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \cos k\theta_j, \quad \bar{a}_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \sin k\theta_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

wir müssen aber dabei voraussetzen, dass die λ_j alle positiv sind und die Summe Eins besitzen. Diese Formeln sind identisch mit den folgenden in denen p nicht unmittelbar vorkommt:

$$(10) \qquad \begin{cases} a_k = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \cos k\theta_j, \quad \bar{a}_k = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \sin k\theta_j \\ \lambda_1 \geqq 0, \quad \lambda_2 \geqq 0, \ldots, \lambda_n \geqq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1; \end{cases}$$

hier hat man $\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \cdots = \lambda_n = 0$ gesetzt.

III.

Algebraische Darstellung der Begrenzung von K_{2n}.

14. Es seien

$$(11) \qquad a_1, \; \bar{a}_1, \; a_2, \; \bar{a}_2, \ldots, a_n, \; \bar{a}_n$$

die Koeffizienten eines beliebigen Punktes $\mathfrak{p}$ des $2n$-dimensionalen Raumes R_{2n}. Wir verbinden diesen Punkt mit dem Anfangspunkt $\mathfrak{o}$ der Koordinaten durch eine Strecke, die wir eventuell bis zu ihrem Schnittpunkte $\mathfrak{q}$ mit der Begrenzung von K_{2n} verlängern.

Dieser Punkt $\mathfrak{q}$ kann auf eine und nur eine Weise als Schwerpunkt von p Massen $(p \leqq n)$ angesehen werden, die auf der Normkurve (8) liegen. Es kann daher $\mathfrak{p}$ auf eine und nur eine Weise durch die Formeln:

$$a_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cos k\theta_j, \qquad \bar{a}_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sin k\theta_j$$

dargestellt werden, wo die θ_j reell und die λ_j reell und nicht negativ sind, im Allgemeinen aber eine von Eins verschiedene Summe besitzen: die Grösse

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = (1 - \lambda_0) > 0$$

stellt nämlich das Verhältnis der Strecken $\frac{\mathfrak{p}\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}\mathfrak{o}}$ dar, und ist nur dann gleich Eins, wenn $\mathfrak{p}$ sich auf der Begrenzung von K_{2n} befindet, d. h. wenn $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ zusammenfallen. Die Grösse λ_0, die negativ ist wenn der Punkt $\mathfrak{p}$ ausserhalb des Körpers K_{2n} liegt, kann als Masse angesehen werden, die im Anfangspunkte $\mathfrak{o}$ der Koordinaten konzentriert ist. Dann ist der Punkt Schwerpunkt der $(p+1)$ Massen $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.

15. Um die Parameter λ und θ zu bestimmen, wenn die Grössen (11) gegeben sind, führt man zweckmässig die Bezeichnung ein:

$$(12) \qquad \begin{cases} a_k + i\bar{a}_k = \alpha_k, & a_k - i\bar{a}_k = \alpha_{-k} \\ \alpha_0 = 1 - \lambda_0, & e^{i\theta_j} = \cos\theta_j + i\sin\theta_j = \sigma_j. \end{cases}$$

Man erhält dann das Gleichungssystem

$$(13) \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_j^n = \alpha_n \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_j^{n-1} = \alpha_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_j = \alpha_1 \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \alpha_0 = 1 - \lambda_0 \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_j^{-1} = \alpha_{-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_j^{-n} = \alpha_{-n} \end{cases}$$

von $(2n+1)$ Gleichungen für die $(2n+1)$ Unbekannten $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n; \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$.

Dieses Gleichungssystem ist demjenigen ganz analog, das man bei der Kanonisierung binärer Formen ungerader Ordnung erhält [9]) und man kann es, mindestens formal auflösen mit Hülfe einer Methode, die SYLVESTER entwickelt hat [10]).

---

9) Vgl. FAÀ DI BRUNO, loc. cit. 3), Kap. III, S. 94.

10) J. J. SYLVESTER, *On a remarkable Discovery in the Theory of Canonical Forms and of Hyperdeterminants* [Philosophical Magazine, Ser. IV, Bd. II (1851), S. 391-410].

Wir werden ausserdem zeigen, indem wir unsere früheren Resultate benutzen, dass diese formale Auflösung des Gleichungssystems (13) immer zum gewünschten Ziele führt.

Wir wissen nämlich, dass dieses System eine Lösung besitzt, bei welcher die p ersten λ_j von Null verschieden und positiv und mit den p ersten σ_j eindeutig bestimmt sind; die übrigen $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$ sind dabei alle Null; die Grössen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ sind komplex haben den absoluten Betrag Eins und keine zwei dieser Grössen sind einander gleich; die ganze Zahl p ist von Null verschieden und nicht grösser als n.

Wir denken jetzt, dass die Werte $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ bestimmt sind, und führen weitere $(n-p)$ komplexe Grössen $\sigma_{p+1}, \sigma_{p+2}, \ldots, \sigma_n$ vom absoluten Betrage Eins ein, derart, dass von den n Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ keine zwei einander gleich seien; dann wird die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_1^{(n-1)} & \sigma_2^{(n-1)} & \ldots & \sigma_n^{(n-1)} \\ \sigma_1^{(n-2)} & \sigma_2^{(n-2)} & \ldots & \sigma_n^{(n-2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

die wir, nach den Potenzen von σ_1 entwickelt, folgendermassen schreiben wollen

$$(14) \qquad \Delta = A_0 + A_1\sigma_1 + A_2\sigma_1^2 + \cdots + A_{n-1}\sigma_1^{n-1},$$

sowohl wie die Unterdeterminante A_0, von Null verschieden sein.

Wenn wir jetzt in das Gleichungssystem (13) diese Werte von σ_j eingesetzt denken, gibt es sicher ein System von Grössen λ_j, welche diese sämtlichen Gleichungen befriedigen. Wir können zwischen den n ersten Gleichungen des Systems (13) die Grössen $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ eliminieren und erhalten:

$$\sigma_1\lambda_1\Delta = A_0\alpha_1 + A_1\alpha_2 + \cdots + A_{n-1}\alpha_n;$$

lässt man die erste Gleichung in (13) weg und eliminiert $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ zwischen den n ersten Gleichungen des so reduzierten Systems, so kommt:

$$\lambda_1\Delta = A_0\alpha_0 + A_1\alpha_1 + \cdots + A_{n-1}\alpha_{n-1};$$

indem man so fortfährt, erhält man ein System von $(n+2)$ Gleichungen, nämlich folgendes:

$$(15) \qquad \left\{\begin{array}{rl} \sigma_1\lambda_1\Delta &= A_0\alpha_1 + A_1\alpha_2 + \cdots + A_{n-1}\alpha_n \\ \lambda_1\Delta &= A_0\alpha_0 + A_1\alpha_1 + \cdots + A_{n-1}\alpha_{n-1} \\ \sigma_1^{-1}\lambda_1\Delta &= A_0\alpha_{-1} + A_1\alpha_1 + \cdots + A_{n-1}\alpha_{n-2} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_1^{-n}\lambda_1\Delta &= A_0\alpha_{-n} + A_1\alpha_{-(n-1)} + \cdots + A_{n-1}\alpha_{-1}. \end{array}\right.$$

Wir multiplizieren jetzt je zwei auf einander folgende Gleichungen dieses Systems resp. mit Eins und $-\sigma_1$ und addieren sie zu einander; dann erhalten wir, wenn wir noch die Bezeichnungen einführen,

$$-\sigma_1 A_0 = B_0, \quad A_0 - \sigma_1 A_1 = B_1, \quad A_1 - \sigma_1 A_2 = B_2, \ldots, A_{n-2} - \sigma_1 A_{n-1} = B_{n-1}, \quad A_{n-1} = B_n$$

$$(16) \qquad \begin{cases} 0 = B_0 \alpha_0 + B_1 \alpha_1 + B_2 \alpha_2 + \cdots + B_n \alpha_n \\ 0 = B_0 \alpha_{-1} + B_1 \alpha_0 + B_2 \alpha_1 + \cdots + B_n \alpha_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = B_0 \alpha_{-n} + B_1 \alpha_{-(n-1)} + \cdots\cdots + B_n \alpha_0 . \end{cases}$$

Da in diesem Gleichungssysteme von linearen Gleichungen für die B_j, die Grösse B_0, als Produkt von zwei nicht verschwindenden Grössen, sicher von Null verschieden ist, so muss die Determinante

$$(17) \qquad D_n = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{-2} & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \ldots & \alpha_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{-n} & \alpha_{-(n-1)} & & \ldots & \alpha_0 \end{vmatrix}$$

verschwinden.

Diese Determinante ist eine sogenannte *rekurrente* Determinante, d. h. die Elemente in jeder Parallele zur Hauptdiagonale sind einander gleich; ausserdem sind zwei beliebige Elemente, die zur Hauptdiagonale symmetrisch liegen, konjugiert komplex. Hieraus folgt, dass die Determinante (17) bestimmt ist, wenn man die Elemente der ersten Zeile kennt. Wir wollen, im Folgenden, Determinanten, die dasselbe Bildungsgesetz wie (17) haben, durch ihre erste Zeile, also folgendermassen

$$D_n(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

bezeichnen.

16. Wir sind durch unsere Rechnung auf die Gleichung

$$(18) \qquad D_n(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$$

geführt worden, die, wenn wir für α_0 seinen Wert $(1 - \lambda_0)$ einführen, in eine Gleichung $(n + 1)^{\text{ten}}$ Grades für λ_0 übergeht.

Diese Gleichung

$$(19) \qquad D_n[(1 - \lambda_0), \alpha_1, \ldots, \alpha_n] = 0$$

besitzt als charakteristische Gleichung einer HERMITE'schen Form lauter reelle Wurzeln; für uns kommt aber nur *eine* dieser Wurzeln in Betracht, da wir wissen, dass die Lösung von (13), die wir suchen *eindeutig* bestimmt ist.

Um diese spezielle Wurzel zu bestimmen, müssen wir auf die geometrische Bedeutung von (19) näher eingehen. Der Punkt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des $2n$-dimensionalen Raumes befindet sich nämlich nur dann auf der Begrenzung von K_{2n}, wenn $\lambda_0 = 0$ ist. Für jeden Punkt dieser Begrenzung muss also die Gleichung

$$(20) \qquad D_n(1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$$

bestehen.

Die Begrenzung von K_{2n} besteht aus einem Teile einer einzigen algebraischen Fläche, deren Gleichung durch (20) gegeben ist.

Dieses wichtige Resultat, das von TOEPLITZ gefunden worden ist, kann man durch eine Eigenschaft von K_{2n} vervollständigen, die dieser Autor ebenfalls bewiesen hat [11]). Man kann nämlich zeigen, dass im Inneren des konvexen Körpers K_{2n} die Determinante D_n immer positiv und von Null verschieden ist.

Es sei nämlich

$$a: \quad a_1, \ \bar{a}_1, \ a_2, \ \bar{a}_2, \ \ldots, \ a_n, \ \bar{a}_n$$

ein Punkt des *Inneren* von K_{2n}. Wir betrachten den Schnitt des konvexen *Körpers* K_{2n} mit der 2-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit, die man erhält, wenn man die Koordinaten

$$(21) \qquad x_1 = a_1, \ \bar{x}_1 = \bar{a}_1, \ \ldots, \ x_{n-1} = a_{n-1}, \ \bar{x}_{n-1} = \bar{a}_{n-1}$$

festhält und x_n, $\bar{x}_n$ frei variieren lässt.

Dieser Schnitt ist seiner Natur nach eine geschlossene konvexe Kurve, die den Punkt a in ihrem *Inneren* enthält. Andererseits kann der Schnitt der 2-dimensionalen Ebene (21) mit der Fläche (20), die die ganze Begrenzung von K_{2n} enthält, geschrieben werden

$$D_n(1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, x_n + i\bar{x}_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots \alpha_{n-1} & (x_n + i\bar{x}_n) \\ \alpha_{-1} & 1 & \ldots\ldots\ldots & \alpha_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{-(n-1)} & \alpha_{-(n-2)} & \ldots\ldots\ldots & \alpha_1 \\ (x_n - i\bar{x}_n) & \alpha_{-(n-1)} & \ldots\ldots\ldots & 1 \end{vmatrix}$$

oder wenn man entwickelt

$$(22) \qquad (x_n^2 + \bar{x}_n^2)L + x_n M + \bar{x}_n \bar{M} + N = 0.$$

Dieses ist die Gleichung eines Kreises, der folglich mit unserer konvexen Kurve zusammenfallen muss. Für einen inneren Punkt dieses Kreises kann D_n unmöglich verschwinden, womit zugleich bewiesen ist, dass D_n für jeden Punkt des Inneren von K_{2n} von Null verschieden ist. Da andererseits

$$D_n(1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

eine stetige Funktion des Ortes ist, und für den Anfangspunkt o der Koordinaten den Wert

$$D_n(1, 0, 0, \ldots, 0) = 1 > 0$$

besitzt, ist unsere Behauptung, dass D_n für innere Punkte von K_{2n} positiv und von Null verschieden ist, vollständig erbracht.

Man bemerke, dass der konvexe Körper K_{2p} für $p < n$ die Projektion von K_{2n} auf eine $2p$-dimensionale Mannigfaltigkeit bedeutet und dass innere Punkte von K_{2n} sich immer auf innere Punkte von K_{2p} projizieren. Hieraus folgt, dass für innere Punkte von K_{2n} die n Bedingungen

$$(23) \qquad D_p(1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) > 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

[11]) l. c. [2]), *a*.

erfüllt sein müssen und ferner, dass für jeden Punkt von K_{2n} einschliesslich der Begrenzung, die ja aus Grenzpunkten von inneren Punkten besteht, die Bedingungen

$$D_p(1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \geqq 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten.

Die Bedingungen (23), die sich für die inneren Punkte von K_{2n} als notwendig erwiesen haben, sind auch hinreichend: nehmen wir nämlich an, die Behauptung sei für den $(2n-2)$-dimensionalen Raum schon erbracht und $a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, \ldots, a_n, \bar{a}_n$ sei ein Punkt für welchen die Ungleichheiten (23) bestehen. Dann ist $a_1, \bar{a}_1, \ldots, a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}$ ein Punkt des konvexen Körpers K_{2n-2}, und es gibt mindestens einen Punkt von K_{2n}, der sich in $a_1, \ldots, \bar{a}_{n-1}$ projiziert. Setzen wir diese Werte in die Gleichung (22) ein, so werden sämtliche Punkte des Inneren oder des Randes des durch diese Gleichung dargestellten Kreises Punkten des Inneren oder der Begrenzung von K_{2n} entsprechen; da nun $L = -D_{n-2} < 0$ ist, so fallen die Punkte, die nicht ausserhalb des Kreises (22) liegen, zusammen mit denen für welche $D_n \geqq 0$ ist, womit unsere Behauptung, dass der von uns betrachtete Punkt $a_1, \ldots, \bar{a}_n$ zu dem Körper K_{2n} gehört bewiesen ist.

Im obigen Beweise haben wir *nur* das Nichtverschwinden der Determinante D_{n-2} benutzt. Er zeigt also, dass die Bedingungen

$$\begin{aligned} D_p(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_p\ ) &> 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, (n-2)) \\ D_{n-1}(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) &\geqq 0 \\ D_n(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\ ) &\geqq 0 \end{aligned}$$

hinreichen, damit der Punkt $a_1, \bar{a}_1, \ldots, a_n, \bar{a}_n$ im Inneren oder auf der Begrenzung des Körpers K_{2n} liege.

Verschwindet aber eine der früheren Determinanten, so kann man aus dem Nichtnegativsein der D_p für $p = 1, 2, \ldots, n$ keineswegs schliessen, dass der betreffende Punkt in K_{2n} liegt. Für $n = 5$ erhält man z. B., wenn man $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 1$, $\alpha_5 = 5$ macht $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ und $D_4 = D_5 = 1$. Trotzdem liegt der betreffende Punkt ausserhalb des Körpers K_{10}, weil der reelle Teil von α_3 und von α_5 die Zahl 1 übersteigt.

Um eine Bedingung aufzustellen, die in jedem Falle hinreichend ist, bemerken wir, dass es genügt zu zeigen, dass für jedes $\nu > 1$ der Punkt

$$\frac{a_1}{\nu}, \quad \frac{\bar{a}_1}{\nu}, \ldots, \frac{a_n}{\nu}, \quad \frac{\bar{a}_n}{\nu}$$

im *Inneren* von K_{2n} liege. Dazu genügt seinerseits, wie im nächsten § ausführlicher gezeigt wird, dass die Gleichung in ν

$$D_n(\nu, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$$

keine Wurzel besitze, die grösser als $+1$ ist.

Ist für irgend einen Punkt von K_{2n} die Determinante $D_p = 0$ und $p < n$ so muss der Punkt

$$a_1, \quad \bar{a}_1, \quad a_2, \quad \bar{a}_2, \ldots, a_p, \bar{a}_p$$

auf der Begrenzung von K_{2p} liegen und kann nicht als Projektion eines Punktes des Inneren von K_{2q} $(q > p)$ angesehen werden. Aus der Tatsache, dass der betreffende Punkt auf K_{2n} liegt und aus $D_p = 0$ folgen also die Gleichungen

$$D_{p+1} = 0, \quad D_{p+2} = 0, \ldots, D_n = 0$$

17. Jetzt können wir zu unserem ursprünglichen Probleme zurückkehren und zunächst den Wert des Parameters λ_0 bestimmen, der der Gleichung (19) genügen muss.

Wir bemerken dazu, dass nach den Ausführungen des § 14 der Punkt mit den Koordinaten

(24) $$\frac{a_k}{1-\lambda_0}, \quad \frac{\bar{a}_k}{1-\lambda_0} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

auf der Begrenzung von K_{2n} liegen muss. Lässt man λ_0 von $-\infty$ bis $+1$ wachsen, so beschreibt dieser Punkt einen Radiusvektor dessen *erster* Schnittpunkt mit der Fläche $D_n = 0$ auf der Begrenzung von K_{2n} liegen muss. Wir müssen danach für λ_0 die algebraisch kleinste Wurzel der Gleichung

$$D_n\left(1, \frac{\alpha_1}{1-\lambda_0}, \frac{\alpha_2}{1-\lambda_0}, \ldots, \frac{\alpha_n}{1-\lambda_0}\right) = 0$$

oder was dasselbe ist, der Gleichung (19)

(19) $$D_n[(1-\lambda_0), \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] = 0$$

nehmen.

Zugleich haben wir bewiesen, dass diese Gleichung, in allen Fällen eine Wurzel besitzt, die kleiner als $+1$ ist.

18. Nachdem λ_0 bestimmt ist, können wir die Anzahl p der von Null verschiedenen λ_j in der Parameterdarstellung bestimmen. Wir betrachten dazu die Folge

$$D_k(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

wo wir für α_0 den soeben bestimmten Wert $(1-\lambda_0)$ eingesetzt haben. Es sei D_p die erste verschwindende Zahl dieser Folge. Das bedeutet nach den Resultaten des § 16, dass der Punkt mit den Koordinaten (24) in das Innere des Körpers K_{2p-2} aber auf die Begrenzung von K_{2p} fällt. Nach unseren Ausführungen des § 12 wird also dieser Punkt durch den Schwerpunkt von genau p von einander verschiedenen diskreten Massen, die auf der Normkurve (8) verteilt sind, dargestellt werden.

Es werden mit anderen Worten nur noch $2p$ Grössen $\lambda_1, \ldots, \lambda_p; \sigma_1, \ldots, \sigma_p$ für die Auflösung des Gleichungsystems (13) zu ermitteln sein.

19. Führt man in die $(n+1)$ ersten Gleichungen des Gleichungsystems (15) die Bezeichnung

$$A_n = -\sigma_1^{-n+1}\lambda_1\Delta$$

ein, so nehmen sie die Form an:

$$\begin{aligned}
0 &= A_0\alpha_1 + A_1\alpha_2 + \cdots + A_{n-1}\alpha_n + A_n\sigma_1^n \\
0 &= A_0\alpha_0 + A_1\alpha_1 + \cdots + A_{n-1}\alpha_{n-1} + A_n\sigma_1^{n-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= A_0\alpha_{-n+1} + A_1\alpha_{-n+2} + \cdots + A_{n-1}\alpha_0 + A_n,
\end{aligned}$$

woraus folgt, dass σ_1 der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^n & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \sigma_1^{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \sigma_1^{n-2} & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \dots & \alpha_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_1 & \alpha_{-(n-2)} & \alpha_{-(n-3)} & \dots & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_{-(n-1)} & \alpha_{-(n-2)} & \dots & \alpha_0 \end{vmatrix} = 0$$

genügen muss. Man würde genau auf dieselbe Weise einsehen, dass alle übrigen σ_j dieselbe Bedingung befriedigen.

Wir erhalten also für sämtliche σ_j eine einzige Gleichung

$$(25)\qquad \begin{vmatrix} \sigma^n & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \sigma^{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \sigma^{n-2} & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \dots & \alpha_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma & \alpha_{-(n-2)} & \alpha_{-(n-3)} & \dots & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_{-(n-1)} & \alpha_{-(n-2)} & \dots & \alpha_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Im allgemeinen Falle, wo $D_{n-1}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$ ist, ist in dieser Gleichung der Koeffizient von σ^n von Null verschieden; dann gibt es höchstens n von einander verschiedene Zahlen die dieser Gleichung genügen. Andererseits wissen wir aus den Ausführungen des § 18, dass wirklich n von einander verschiedene σ_j existieren müssen, folglich hat die Gleichung (25) lauter *einfache* Wurzeln und wir können unsere sämtlichen σ_j bestimmen.

Sind die σ_j bestimmt, so kann man die zugehörigen λ_j durch Auflösung von n *beliebigen* unter den linearen Gleichungen (13) erhalten, wie aus dem Eindeutigkeitsbeweise § 12 d) folgt.

Ist $D_{n-1}(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = 0$ so wird die Gleichung (25) *illusorisch* und es verschwinden ihre sämtlichen Koeffizienten identisch; in der Tat, sie müsste für beliebige Werte von σ für welche $|\sigma| = 1$ ist, erfüllt sein.

Es sei dann in der Folge

$$D_k(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

D_p der erste verschwindende Audruck; nach § 18 sind dann nur $2p$ Grössen λ_j und σ_j zu bestimmen und wir können die Frage auf die frühere zurückführen indem wir im Systeme (13) die $(n-p)$ ersten und die $(n-p)$ letzten Gleichungen streichen und $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ von vorn herein gleich Null setzen.

20. Die Fläche $D_n(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$, welche die Begrenzung von K_{2n} enthält besitzt die bemerkenswerte Eigenschaft, *rational* zu sein. Legt man nämlich durch den Punkt mit den Koordinaten $x_k = 1$, $\bar{x}_k = 0$ eine Gerade deren Richtungskoeffizienten mit c_k, $\bar{c}_k$ bezeichnet sein mögen und führt die Bezeichnung ein $\gamma_k = c_k + i\bar{c}_k$, $\gamma_{-k} = c_k - i\bar{c}_k$, $\gamma_0 = 0$, so werden die Schnittpunkte dieser Gerade mit der Fläche gegeben sein durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1+\gamma_0 t & 1+\gamma_1 t & 1+\gamma_2 t & \dots & 1+\gamma_n t \\ 1+\gamma_{-1} t & 1+\gamma_0 t & 1+\gamma_1 t & \dots & 1+\gamma_{n-1} t \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+\gamma_{-n} t & 1+\gamma_{-(n-1)} t & \dots & \dots & 1+\gamma_0 t \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich schreiben, wenn man von der vorletzten Reihe aus beginnend jede Reihe von der folgenden abzieht:

$$t^n \begin{vmatrix} 1+\gamma_0 t & 1+\gamma_1 t & \dots & 1+\gamma_n t \\ \gamma_{-1}-\gamma_0 & \gamma_0-\gamma_1 & \dots & \gamma_{n-1}-\gamma_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{-n}-\gamma_{-(n-1)} & \gamma_{-(n-1)}-\gamma_{-(n-2)} & \dots & \gamma_0-\gamma_1 \end{vmatrix} = 0$$

sie besitzt ausser einer n-fachen Wurzel $t=0$ nur noch eine andere Wurzel, die sich rational in den gegebenen Richtungskoeffizienten ausdrücken lässt. Der Wert dieser letzten Wurzel kann besonders elegant und kurz geschrieben werden, wenn man die folgende Bezeichnung einführt:

$$\delta_k = 2\gamma_k - \gamma_{k+1} - \gamma_{k-1},$$

die sowohl für positive wie auch für negative k gelten soll. Man erhält nämlich dann

$$t = -D_{n-1}(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}) : D_n(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n),$$

wie eine leichte Rechnung zeigt.

Der Punkt $a_k = 1$, $\bar{a}_k = 0$, der auf der Normkurve (8) liegt, ist demnach ein n-facher Punkt der Fläche $D_n = 0$. Es ist zu vermuten, dass die ganze Normkurve eine n-fache Kurve dieser Fläche sein wird. Um dies zu beweisen, wollen wir zeigen, dass es eine einparametrige kontinuierliche Gruppe von *Drehungen* im R_{2n} gibt, welche die Normkurve und den Ausdruck D_n sowohl wie auch die Begrenzung von K_{2n} invariant lassen.

Diese Drehungen sind durch die Formeln

$$x_k + i\bar{x}_k = (x_k^0 + i\bar{x}_k^0)e^{ik\tau} \qquad (k=1, 2, \dots, n) \tag{26}$$

charakterisiert, wo τ den Parameter der Gruppe bedeutet. Man sieht leicht, dass bei diesen Transformationen die Entfernungen erhalten bleiben, so dass man es wirklich mit Drehungen zu tun hat, deren einziger Fixpunkt der Anfangspunkt der Koordinaten ist.

Übt man die Transformation (26) auf die α_k in D_n aus, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1\zeta & \alpha_2\zeta^2 & \dots & \alpha_n\zeta^n \\ \alpha_{-1}\zeta^{-1} & \alpha_0 & \alpha_1\zeta & \dots & \alpha_{n-1}\zeta^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{-n}\zeta^{-n} & \alpha_{-n+1}\zeta^{-n+1} & \dots & \dots & \alpha_0 \end{vmatrix}$$

wo wir ζ statt $e^{i\tau}$ geschrieben haben. Dieser Ausdruck geht aber in $D_n(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ über, wenn man die k^{te} Kolonne mit ζ^{n-k+1} und die k^{te} Reihe mit ζ^{-n+k-1} multipliziert und diese Operation für $k = 1, 2, \dots, n$ ausführt.

Bei allen diesen Drehungen bleibt also der Ausdruck D_n invariant und die Fläche $D_n = 0$ ebenfalls.

21. In einer letzten Bemerkung, die nützlich sein kann, wollen wir die grösste und kleinste Entfernung des Anfangspunkts der Koordinaten von der Begrenzung von K_{2n} untersuchen. Das Maximum E_n der Entfernung muss mit der Entfernung der sphärischen Normkurve vom Anfangspunkte der Koordinaten zusammenfallen; die Oberfläche der Kugel mit dem Radius $\sqrt{n}$ enthält die Normkurve und kann, als Begrenzung eines Konvexen Körpers, keinen inneren Punkt von K_{2n} enthalten. Es ist also

$$E_n = \sqrt{n}.$$

Das Minimum e_n zu berechnen ist ziemlich kompliziert, man kann aber leicht für diese Grösse eine obere Schranke finden. In der Tat schneidet die Gerade

$$x_k = t, \quad \bar{x}_k = 0$$

unseren konvexen Körper in zwei Punkten die den Werten $t = 1$ und $t = -\frac{1}{n}$ des Parameters entsprechen; es ist also sicher

$$e_n \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diese Zahl ist i. A. zu gross; schon für $n = 2$ findet man

$$e_2 = \frac{\sqrt{7}}{4} < \frac{1}{\sqrt{2}};$$

sie zeigt aber, dass während

$$\lim_{n=\infty} E_n = \infty$$

ist,

$$\lim_{n=\infty} e_n = 0$$

sein wird.

IV.

Die positiven harmonischen Funktionen.

22. Es sei $U(r, \theta)$ eine harmonische Funktion von zwei Veränderlichen, r und θ Polarkoordinaten in der Ebene dieser Veränderlichen. Wir setzen voraus, dass $U(r, \theta)$ im Kreise $r < 1$ regulär positiv und im Anfangspunkte der Koordinaten gleich $\frac{1}{2}$ sei. Dann gilt folgende Entwickelung

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + \bar{a}_n \sin n\theta), \tag{27}$$

die für jedes $r \leqq \rho$ (wobei ρ eine beliebige feste positive Konstante bedeutet, für welche $0 < \rho < 1$ ist) absolut und gleichmässig konvergiert.

Daher gelten für jedes $r < 1$ die Formeln:

(28) $$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U(r,\theta)\,d\theta = 1,$$

(29) $$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} U(r,\theta)\cos k\theta\,d\theta = a_k r^k, \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} U(r,\theta)\sin k\theta\,d\theta = \bar{a}_k r^k. \end{cases}$$

Die linken Seiten der $2n$ ersten unter den Gleichungen (29) können gedeutet werden [wenn man (28), sowie die Eigenschaft von $U(r,\theta) \geqq 0$ zu sein berücksichtigt] als Schwerpunktskoordinaten einer Massenverteilung mit der Dichte $\frac{1}{\pi} U(r,\theta)$ auf der sphärischen Normkurve des R_{2n}

$$\cos k\theta, \qquad \sin k\theta \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

die wir in den früheren Paragraphen untersucht haben.

Hieraus folgt, dass der Punkt mit den Koordinaten

$$a_k r^k, \quad \bar{a}_k r^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

im Inneren des kleinsten konvexen Körpers K_{2n} liegt, der diese Kurve enthält; da nun diese Eigenschaft für jeden Wert von $r < 1$ erhalten bleibt, so folgt, dass der Punkt mit den Koordinaten a_k, $\bar{a}_k$, den wir den n^{ten} geometrischen Representanten von U nennen wollen, im Inneren *oder auf der Begrenzung* von K_{2n} liegen muss.

Nach den Resultaten der früheren Paragraphen sehen wir jetzt, dass in Folge der Bedingungen

(30) $$\Delta U = 0, \quad U(r,\theta) \geqq 0 \quad \text{und regulär für} \quad r < 1, \quad U(0) = \tfrac{1}{2}$$

eine Reihe von Ungleichheiten für die Koeffizienten a_k, $\bar{a}_k$ *notwendig* erfüllt sein müssen, nämlich folgende:

(31) $$D_n(1, a_1 + i\bar{a}_1, a_2 + i\bar{a}_2, \ldots, a_n + i\bar{a}_n) \geqq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots, \text{in inf.}).$$

23. Wir wollen das soeben ausgesprochene Resultat auf zweifache Weise umkehren und zeigen, dass:

1°) Wenn die $2n$ ersten Koeffizienten

$$a_1, \ \bar{a}_1, \ a_2, \ \bar{a}_2, \ \ldots, \ a_n, \ \bar{a}_n$$

gegeben sind und der entsprechende geometrische Representant im Inneren oder auf der Begrenzung von K_{2n} liegt, immer eine Funktion $U(r,\theta)$ gefunden werden kann, die den Bedingungen (30) genügt und deren Entwickelung (27) mit den gegebenen Koeffizienten beginnt.

2°) Wenn unendlich viele Zahlen

$$a_1, \ \bar{a}_1, \ a_2, \ \bar{a}_2, \ \ldots, \ a_n, \ \bar{a}_n, \ \ldots \text{ in inf.}$$

willkürlich gegeben sind, und wenn für jedes n der entsprechende geometrische Representant im Inneren oder auf der Begrenzung von K_{2n} liegt, so stellt die formal hingeschriebene Entwickelung (27) eine Funktion dar, die sämtlichen Bedingungen (30) genügt; sie ist harmonisch, regulär und positiv für $r < 1$.

Um den ersten Teil dieses Satzes zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass es Funktionen gibt, deren geometrische Representanten für jedes n auf der Normkurve liegen und ausserdem die Bedingungen (30) sämtlich erfüllen. Betrachten wir in der Tat die Entwickelung

$$\varepsilon(\varphi;\, r,\, \theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos n\varphi \cos n\theta + \sin n\varphi \sin n\theta),$$

deren geometrische Representanten für jedes n auf der Normkurve liegen und die für $r < 1$ absolut konvergiert. Man kann schreiben:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\varphi;\, r,\, \theta) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\varphi - \theta)\\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{2}\left(e^{in(\varphi-\theta)} + e^{-in(\varphi-\theta)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{r e^{i(\varphi-\theta)}}{1 - r e^{i(\varphi-\theta)}} + \frac{r e^{-i(\varphi-\theta)}}{1 - r e^{-i(\varphi-\theta)}}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \theta) + r^2}\end{aligned}$$

woraus folgt, dass $\varepsilon(\varphi;\, r,\, \theta)$ eine *positive* harmonische Funktion ist.

Ferner folgt aus dem soeben gewonnenen Resultat, dass für nicht negative λ_0, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, die der Bedingung $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1$ genügen, die Funktion

$$\frac{1}{2}\lambda_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varepsilon(\vartheta_j;\, r,\, \vartheta)$$

sämtliche Bedingungen (30) erfüllt. Ihr n^{ter} geometrischer Representant besitzt die Koordinaten

$$a_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cos k\vartheta_j, \quad \bar{a}_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sin k\vartheta_j$$

und, wie wir wissen, können bei geeigneter Wahl der $(2n+1)$ Grössen

$$\lambda_0 \geqq 0,\quad \lambda_1 \geqq 0,\quad \lambda_2 \geqq 0,\ \ldots,\ \lambda_n \geqq 0,\quad \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_n$$

mit der Nebenbedingung

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$$

die Koordinaten eines jeden Punktes des Inneren oder der Begrenzung von K_{2n} durch diese Formeln dargestellt werden.

Wir haben mit anderen Worten jedem Punkte unseres konvexen Körpers K_{2n} eine Funktion zugeordnet, die diesen Punkt zum n^{ten} geometrischen Representanten besitzt und die Bedingungen (30) erfüllt.

Um nun den zweiten Teil unseres Satzes zu beweisen bemerken wir, dass, bei gegebenen unendlich vielen Zahlen

$$a_1,\ \bar{a}_1,\ a_2,\ \bar{a}_2,\ \ldots \text{ in inf.},$$

nur dann für jedes n der Punkt $a_1, \bar{a}_1, \ldots, a_n, \bar{a}_n$ in K_{2n} liegt, wenn für jedes k

$$|a_k| \leqq 1, \quad |\bar{a}_k| \leqq 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots \text{ in inf.})$$

sind. In der Tat ist der Würfel

$$|x_1| = 1, \quad |\bar{x}_1| = 1, \ \ldots, \ |x_n| = 1, \quad |\bar{x}_n| = 1$$

der Normkurve (8) umschrieben und enthält daher den konvexen Körper K_{2n}.

Die Reihe

$$\frac{1}{2} + \sum r^n (a_n \cos n\theta + \bar{a}_n \sin n\theta) \tag{32}$$

ist also für alle $r < 1$ absolut konvergent und stellt eine harmonische Funktion $U(r, \theta)$ dar. Wir bilden jetzt der Reihe nach Funktionen

$$U_1(r, \theta),\quad U_2(r, \theta),\ \ldots,\ U_n(r, \theta),\ \ldots \text{ ad inf.} \tag{33}$$

so dass die n ersten Koeffizienten von $U_n(r, \theta)$ mit $a_1, \bar{a}_1, \ldots, a_n, \bar{a}_n$ zusammenfallen und dass $U_n(r, \theta)$ den Bedingungen (30) genüge d. h. für $r < 1$ harmonisch und positiv sei. Wir können z. B. zu diesem Zwecke die soeben benutzte Konstruktion mit Hülfe der $\varepsilon(\varphi;\ r,\ \theta)$ widerholen. Wir bemerken, dass sämtliche Koeffizienten der Funktionen der Folge (33) dem absoluten Betrage nach ebenfalls kleiner als Eins sind.

Hieraus folgt, dass der Rest $R_p^{(n)}$ der Entwickelung von U_n für jeden Punkt des Inneren des Kreises $r \leqq \rho < 1$ dem absoluten Betrage nach kleiner sein wird als

$$\sum_{k=p}^{\infty} \rho^k \{|a_{k,n}| + |b_{k,n}|\} \leqq \frac{2\rho^p}{1-\rho}$$

und dass folglich für $n > p$ für jeden Punkt des Kreises $r < \rho$

$$|U_n(r, \theta) - U(r, \theta)| < \frac{4\rho^p}{1-\rho}$$

sein muss.

Mit anderen Worten ist (da man ρ beliebig nahe an Eins wählen kann) für jeden Wert von $r < 1$

$$U(r, \theta) = \lim_{n=\infty} U_n(r, \theta) \geqq 0.$$

Unsere Funktion $U(r, \theta)$ genügt also, wie wir behaupteten, sämtlichen Bedingungen (30).

24. Wir wollen endlich jetzt noch beweisen, dass wenn der n^{te} geometrische Representant einer für $r < 1$ positiven, harmonischen, mit dem konstanten Gliede $\frac{1}{2}$ beginnenden Funktion auf die *Begrenzung* von K_{2n} zu liegen kommt, diese Funktion durch ihre $(2n + 1)$ ersten Koeffizienten eindeutig bestimmt ist und von der Form $\sum \lambda_j \varepsilon(\theta_j;\ r,\ \theta)$.

Es sei nämlich $U(r, \theta)$ eine beliebige Funktion, welche die besagten Eigenschaften besitzt; ihr $(n+p)^{\text{ter}}$ geometrischer Representant wird auf der Begrenzung von $K_{2(n+p)}$ liegen und als Schwerpunkt von n diskreten Massen auf der Normkurve dargestellt sein. Es sind also die Koeffizienten a_{n+p}, $\overline{a}_{n+p}$ durch die a_1, $\overline{a}_1$, ..., a_n, $\overline{a}_n$ *eindeutig* bestimmt. Es gibt daher nur eine Funktion, die unseren Bedingungen genügt und sie muss mit der von uns aufgestellten zusammenfallen.

Breslau, März 1911.

C. CARATHÉODORY.

INHALTSÜBERSICHT.