Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen.

Von

F. Hausdorff in Greifswald.

Bekanntlich haben E. Borel und H. Lebesgue das Problem der Inhaltsbestimmung von Punktmengen wenigstens eine Strecke weit *axiomatisch* zu behandeln versucht. Es soll jeder beschränkten Menge A des n-dimensionalen euklidischen Raumes E_n als Inhalt eine nichtnegative Zahl $f(A)$ unter folgenden Bedingungen zugeordnet werden:

(α) Der Einheitswürfel hat den Inhalt 1.

(β) Kongruente Mengen haben denselben Inhalt.

(γ) Es ist $f(A+B) = f(A) + f(B)$.

(δ) Es ist $f(A+B+C+\cdots) = f(A) + f(B) + f(C) + \cdots$ für eine beschränkte Summe von abzählbar vielen Summanden.*)

Die von Lebesgue gegebene *konstruktive* Inhaltsdefinition erfüllt zwar diese vier Forderungen, aber sie ordnet nicht allen (beschränkten) Mengen, sondern nur den „meßbaren" Inhalte zu. Das erste Beispiel einer im Lebesgueschen Sinne nicht meßbaren Menge stammt von G. Vitali**); übrigens hat das System der unmeßbaren Mengen dieselbe Mächtigkeit wie das der meßbaren und das aller Mengen. Die Frage bleibt also offen, ob das durch die Forderungen (α) bis (δ) gestellte Inhaltsproblem, *in der Ausdehnung auf alle beschränkten Mengen*, überhaupt lösbar ist oder nicht.

Man bemerkt sofort, daß eine Lösung des Inhaltsproblems für den E_{n+1} auch eine für den E_n liefern würde (indem man einer n-dimensionalen Menge A_n den $(n+1)$-dimensionalen zylindrischen Körper A_{n+1} mit der Basis A_n und der Höhe 1 zuordnet und $f_n(A_n) = f_{n+1}(A_{n+1})$ setzt);

---

*) Vgl. H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration (Paris 1904), S. 103. Wir bezeichnen eine Summe von Mengen nur dann mit $A+B+\cdots$, wenn diese Mengen paarweise keinen Punkt gemein haben.

**) A. Schoenflies, Entwickelung der Mengenlehre (Leipzig und Berlin 1913), S. 374, wo außer weiteren Beispielen von E. B. van Vleck und Lebesgue auch das im Text folgende von mir mitgeteilt ist.

ebenso auch eine für den n-dimensionalen sphärischen Raum K_n, wobei die Bedingung (α) durch die zu ersetzen ist, daß K_n selber einen positiven Inhalt, etwa 1, haben soll; endlich sind die Inhaltsbestimmungen für die gerade Linie E_1 und den Kreis K_1 identische Probleme.

Wir zeigen zuerst, daß unter den Forderungen (α) bis (δ) eine Inhaltsbestimmung keinesfalls möglich ist; nach dem eben Bemerkten genügt es, dies für den Kreis nachzuweisen. Zu diesem Zweck spalten wir die Kreisperipherie K in *abzählbar viele kongruente* Mengen. Nehmen wir den Radius $= \frac{1}{2\pi}$, also $f(K) = 1$, stellen die Punkte des Kreises durch eine reelle Variable x dar, so daß zwei Werten mit ganzzahliger Differenz derselbe Kreispunkt entspricht, und verstehen unter δ eine irrationale Zahl, so gehört zu jedem Punkt x eine abzählbare Menge

$$P_x = \{\cdots, x - 2\delta, x - \delta, x, x + \delta, x + 2\delta, \cdots\};$$

und zwei Mengen P_x, P_y haben, wenn sie nicht identisch sind, keinen Punkt gemein. Wählen wir jetzt aus jeder Menge P_x genau einen Punkt x aus, so entsteht eine Menge

$$A_0 = \{x, y, z, \cdots\},$$

die durch Drehung um ein beliebiges Vielfaches $m\delta$ von δ in die Menge

$$A_m = \{x + m\delta, y + m\delta, z + m\delta, \cdots\}$$

übergeht; zwei solche Mengen mit verschiedenem Index haben keinen Punkt gemein, und es ist

$$K = \cdots + A_{-2} + A_{-1} + A_0 + A_1 + A_2 + \cdots.$$

Alle diese Mengen sind kongruent, sollen also denselben Inhalt $f(A_m) = a$ haben; da K die Teilmenge $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ enthält, so muß $1 \geqq na$ sein für jede natürliche Zahl n, also $a = 0$, und damit ist die Bedingung (δ) verletzt. Es folgt beiläufig, daß diese Mengen A_m im Lebesgueschen Sinne nicht meßbar sind (ihr äußerer Inhalt ist positiv, der innere Null); aber das Wesentliche ist, daß wir gar nicht von der Lebesgueschen Inhaltsdefinition, sondern nur von seinen Postulaten Gebrauch gemacht haben.

Der Widerspruch, auf den wir geführt wurden, bezieht sich auf die Forderung (δ), die allerdings gerade den spezifischen Vorzug der Borel-Lebesgueschen Maßtheorie gegenüber der älteren Peano-Jordanschen Inhaltstheorie ausmacht. Lassen wir aber diese Forderung fallen und fragen nach einer etwaigen Lösung des Inhaltsproblems unter Einschränkung auf die Postulate (α)(β)(γ), die wohl das Minimum dessen darstellen, was vom Inhalt der Punktmengen verlangt werden muß. *Selbst unter diesen Bedingungen ist das Problem unlösbar*, wenigstens für die Kugel und daher für den drei- oder mehrdimensionalen euklidischen Raum. Zu diesem Zweck zeigen wir, *daß eine Kugelhälfte mit einem Kugeldrittel kongruent sein kann,* oder genauer, daß (von einer abzählbaren Menge abgesehen) die Kugel K in drei Mengen A, B, C gespalten werden kann derart, daß A, B, C und $B+C$ paarweise kongruent sind.

Es sei φ eine Halbdrehung (um π) und ψ eine Dritteldrehung $\left(\text{um } \frac{2\pi}{3}\right)$ um eine von der ersten verschiedene Achse. Diese beiden Drehungen erzeugen, da $\varphi^2 = \psi^3 = 1$, eine zunächst in folgender Weise darstellbare Gruppe

$$(\mathrm{G}) \qquad 1 \mid \varphi, \psi, \psi^2 \mid \varphi\psi, \varphi\psi^2, \psi\varphi, \psi^2\varphi \mid \cdots,$$

in der wir die Produkte verschiedener Faktorenzahl durch Striche getrennt haben; hierbei werden φ, ψ, ψ^2 als einfache Faktoren gerechnet. Die allgemeine Form eines Produktes von zwei oder mehr Faktoren ist eine der folgenden vier:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \varphi\psi^{m_1}\varphi\psi^{m_2}\cdots\varphi\psi^{m_n},\\
\beta &= \psi^{m_1}\varphi\psi^{m_2}\varphi\cdots\psi^{m_n}\varphi,\\
\gamma &= \varphi\psi^{m_1}\varphi\psi^{m_2}\cdots\varphi\psi^{m_n}\varphi,\\
\delta &= \psi^{m_1}\varphi\psi^{m_2}\cdots\varphi\psi^{m_n},
\end{aligned}$$

wobei n eine natürliche Zahl und $m_i = 1$ oder 2 ist.

Bei geeigneter Wahl der Drehungsachsen ist kein Produkt aus einem oder mehreren Faktoren gleich der Identität 1, sind also die in der Form (G) angeschriebenen Drehungen paarweise verschieden. Um dies zu zeigen, bemerken wir zuerst, daß ein Produkt, das $= 1$ ist, jedenfalls in der Form α angenommen werden kann; denn aus $\beta = 1$ würde $\varphi\beta\varphi = \alpha = 1$ folgen; aus $\gamma = 1$ ebenso $\varphi\gamma\varphi = \delta = 1$, und aus $\delta = 1$ schließlich

$$\psi^{3-m_1}\delta\psi^{m_1} = \alpha' = 1.$$

Die unseren Drehungen entsprechenden orthogonalen Transformationen haben, wenn wir die ψ-Achse in die z-Achse, die φ-Achse in die xz-Ebene legen und den Winkel beider Achsen mit $\frac{1}{2}\vartheta$ bezeichnen, die Gestalt:

$$(\psi) \qquad \begin{cases} x' = x\lambda - y\mu, \\ y' = x\mu + y\lambda, \\ z' = z; \end{cases}$$

$$(\varphi) \qquad \begin{cases} x' = -x\cos\vartheta + z\sin\vartheta, \\ y' = -y, \\ z' = x\sin\vartheta + z\cos\vartheta; \end{cases}$$

$$(\varphi\psi) \qquad \begin{cases} x' = -x\lambda\cos\vartheta + y\mu + z\lambda\sin\vartheta, \\ y' = -x\mu\cos\vartheta - y\lambda + z\mu\sin\vartheta, \\ z' = \quad x\sin\vartheta \qquad\qquad + z\quad\cos\vartheta, \end{cases}$$

wobei

$$\lambda = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \mu = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

gesetzt ist; der Übergang von ψ zu ψ^2 wird durch Vertauschung von μ mit $-\mu$ bewirkt.

Es sei nun α ein Produkt von n Doppelfaktoren $\varphi\psi$ oder $\varphi\psi^2$, α' eines von $n+1$ solchen, also $\alpha' = \alpha\varphi\psi$ oder $\alpha' = \alpha\varphi\psi^2$; α führe den Punkt 0, 0, 1 in den Punkt x, y, z über, α' in x', y', z', so daß zwischen diesen Koordinaten die Gleichungen $(\varphi\psi)$ oder die durch Vertauschung von μ mit $-\mu$ daraus hervorgehenden Gleichungen $(\varphi\psi^2)$ bestehen. Wir behaupten, daß x, y, z von der Form

$$\begin{aligned} x &= \sin\vartheta\,(a\cos\vartheta^{n-1} + \cdots), \\ y &= \sin\vartheta\,(b\cos\vartheta^{n-1} + \cdots), \\ z &= c\cos\vartheta^{n} + \cdots \end{aligned}$$

sind, d. h. x und y Produkte von $\sin\vartheta$ mit einem Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, z ein Polynom n^{ten} Grades in $\cos\vartheta$. In der Tat ist dies für $n = 1$ richtig, da der Punkt 0, 0, 1 durch $\varphi\psi$ oder $\varphi\psi^2$ in $\lambda\sin\vartheta$, $\pm\mu\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$ übergeht, und überträgt sich von n auf $n+1$; es ist nämlich

$$\begin{aligned} x' &= \sin\vartheta\,(a'\cos\vartheta^{n} + \cdots), \\ y' &= \sin\vartheta\,(b'\cos\vartheta^{n} + \cdots), \\ z' &= c'\cos\vartheta^{n+1} + \cdots, \end{aligned}$$

wobei zugleich

$$a' = \lambda(c-a), \quad b' = \pm\mu(c-a), \quad c' = c - a,$$

$$c' - a' = (1-\lambda)(c-a) = \frac{3}{2}(c-a).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Rekursionsformel folgt, daß nach n Drehungen $\varphi\psi$ oder $\varphi\psi^2$ der Punkt 0, 0, 1 in x, y, z übergegangen ist, wo

$$z = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\cos\vartheta^{n} + \cdots$$

sich jedenfalls nicht identisch auf 1 reduziert; unser Produkt α kann also nur für endlich viele besondere Werte von $\cos\vartheta$ gleich der Identität 1 sein, und es ist demnach durch Vermeidung von höchstens abzählbar vielen Werten möglich, ϑ so zu wählen, daß kein Produkt α gleich 1 wird.

Nachdem ϑ in dieser Weise gewählt ist, haben die Transformationen von (G), außer der ersten 1, jede nur zwei Fixpunkte, die zusammen eine abzählbare Menge Q bilden; setzen wir die ganze Kugel $K = P + Q$, so muß nach der uns vorschwebenden Inhaltsbestimmung $f(Q) = 0$ und $f(P) = f(K) > 0$ sein. (Durch eine geeignete Drehung, deren Achse durch keinen Punkt von Q hindurchgeht und deren Winkel keiner der abzählbar vielen Längendifferenzen der Punkte von Q gleich ist, geht Q in eine kongruente Teilmenge von P über; durch wiederholte Anwendung erkennt man, daß, für jede natürliche Zahl n, $f(P) \geqq nf(Q)$, also $f(Q) = 0$ sein muß.) Betrachten wir jetzt nur die Menge P, so entspricht jedem ihrer Punkte x die abzählbare Menge P_x der paarweise verschiedenen Punkte

$$x,\ x\varphi,\ x\psi,\ x\psi^2,\ x\varphi\psi,\ \cdots,$$

in die x durch die Transformationen von (G) übergeht; wählen wir aus jeder Menge P_x genau einen Punkt aus, so entsteht eine Menge

$$M = \{x, y, z, \cdots\}$$

und es ist

$$P = M + M\varphi + M\psi + M\psi^2 + M\varphi\psi + \cdots.$$

Wir behaupten jetzt endlich: es ist möglich, diese Mengen oder die entsprechenden Transformationen auf drei Klassen A, B, C so zu verteilen, daß

(1) von zwei Transformationen $\varrho, \varrho\varphi$ die eine zu A und die andere zu $B + C$ gehört;

(2) von drei Transformationen $\varrho, \varrho\psi, \varrho\psi^2$ je eine zu A, B, C gehört.

Angenommen nämlich, die Produkte von n oder weniger Faktoren seien bereits so verteilt, daß diese Bedingungen, soweit die fraglichen Transformationen unter den schon verteilten vorkommen, erfüllt sind. Ein Produkt von n Faktoren, deren letzter ψ oder ψ^2 ist, heiße ψ_n; ein solches, dessen letzter Faktor φ ist, heiße φ_n. Jedes Produkt von $n+1$ Faktoren ist dann von einer der drei Formen $\psi_n\varphi$, $\varphi_n\psi$, $\varphi_n\psi^2$, und wir verteilen sie folgendermaßen:

wenn ψ_n zu A, B, C gehört, so gehöre $\psi_n\varphi$ zu B, A, A;

wenn φ_n zu A, B, C gehört, so gehöre $\varphi_n\psi$ zu B, C, A

und $\varphi_n\psi^2$ zu C, A, B.

Damit sind die Produkte von $n+1$ oder weniger Faktoren in der gewünschten Weise verteilt; man sieht zugleich, welche Rolle die Unabhängigkeit von φ, ψ spielt, denn wenn ein Produkt $= 1$ oder zwei formal verschiedene Produkte gleich wären, so könnte die verlangte Verteilung auf Widersprüche führen.

Wir deuten, indem wir die Identität in die Klasse A werfen, den Anfang der Verteilung an:

A	1		$\psi\varphi$ $\varphi\psi^2$ $\psi^2\varphi$	$\varphi\psi\varphi$	$\psi\varphi\psi\varphi$ $\psi^2\varphi\psi\varphi$ $\varphi\psi^2\varphi\psi^2$ $\psi\varphi\psi^2\varphi$ $\psi^2\varphi\psi^2\varphi$	$\cdots$ $\cdots$
B		ψ φ		$\psi\varphi\psi$ $\psi^2\varphi\psi$ $\varphi\psi^2\varphi$	$\varphi\psi\varphi\psi$	$\cdots$
C		ψ^2	$\varphi\psi$	$\psi\varphi\psi^2$ $\psi^2\varphi\psi^2$	$\varphi\psi\varphi\psi^2$ $\varphi\psi^2\varphi\psi$	$\cdots$

während die beiden folgenden Zusammenstellungen zeigen, wie durch die Bedingung (1) die Klassen A und $B+C$, durch die Bedingung (2) die Klassen A, B, C aufeinander bezogen werden:

A	1	$\psi\varphi$	$\psi^2\varphi$	$\varphi\psi^2$	$\varphi\psi\varphi$	$\psi\varphi\psi\varphi$	$\psi\varphi\psi^2\varphi$	$\psi^2\varphi\psi\varphi$	$\psi^2\varphi\psi^2\varphi$	$\varphi\psi^2\varphi\psi^2$	$\cdots$
$B+C$	φ	ψ	ψ^2	$\varphi\psi^2\varphi$	$\varphi\psi$	$\psi\varphi\psi$	$\psi\varphi\psi^2$	$\psi^2\varphi\psi$	$\psi^2\varphi\psi^2$	$\varphi\psi^2\varphi\psi^2\varphi$	$\cdots$

A	1	$\psi\varphi$	$\psi^2\varphi$	$\varphi\psi^2$	$\varphi\psi\varphi$	$\psi\varphi\psi\varphi$	$\psi\varphi\psi^2\varphi$	$\psi^2\varphi\psi\varphi$	$\psi^2\varphi\psi^2\varphi$	$\varphi\psi^2\varphi\psi^2$	$\cdots$
B	ψ	$\psi\varphi\psi$	$\psi^2\varphi\psi$	φ	$\varphi\psi\varphi\psi$	$\psi\varphi\psi\varphi\psi$	$\psi\varphi\psi^2\varphi\psi$	$\psi^2\varphi\psi\varphi\psi$	$\psi^2\varphi\psi^2\varphi\psi$	$\varphi\psi^2\varphi$	$\cdots$
C	ψ^2	$\psi\varphi\psi^2$	$\psi^2\varphi\psi^2$	$\varphi\psi$	$\varphi\psi\varphi\psi^2$	$\psi\varphi\psi\varphi\psi^2$	$\psi\varphi\psi^2\varphi\psi^2$	$\psi^2\varphi\psi\varphi\psi^2$	$\psi^2\varphi\psi^2\varphi\psi^2$	$\varphi\psi^2\varphi\psi$	$\cdots$

Bezeichnen wir jetzt mit A, B, C auch die Summen der betreffenden Mengen

$$A = M + M\psi\varphi + M\psi^2\varphi + M\varphi\psi^2 + \cdots,$$
$$B = M\psi + M\varphi + \cdots,$$
$$C = M\psi^2 + M\varphi\psi + \cdots,$$

so ist

$$A\varphi = B + C, \quad A\psi = B, \quad A\psi^2 = C,$$

die Mengen $A, B, C, B+C$ sind kongruent und A müßte gleichzeitig die Hälfte und das Drittel des Kugelinhalts haben.

Das Inhaltsproblem selbst ohne die Lebesguesche Forderung (δ) ist also für die Kugel und für den drei- oder mehrdimensionalen Raum nicht lösbar.

Für den Kreis, die gerade Linie und die Ebene muß die Frage nach einer den Bedingungen $(\alpha)(\beta)(\gamma)$ genügenden Inhaltsbestimmung offen bleiben, da die Struktur der Bewegungsgruppe in diesen Fällen das obige Verfahren nicht gestattet.

Greifswald, 27. Februar 1914.