Über die Auflösung von Gleichungen im logischen Gebietekalkul.

Von

Leopold Löwenheim in Rummelsburg-Berlin.

Einleitung.

Der „Gebietekalkul" läßt sich auffassen als ein Zweig der „Mengenlehre" (obwohl auch eine allgemeinere Auffassung möglich ist).

Der Theorie liegt dann zugrunde eine beliebige Menge M, deren „Untermengen" $a, b, c, \cdots x, y, z, \cdots$ als „Gebiete" bezeichnet werden sollen. Zahlen will ich immer mit den Buchstaben k, l, m, n, p und den entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichnen. Ich setze ein für allemal $M = 2^m$, $N = 2^n$, $P = 2^p$. Die „leere" Menge wird mit 0, die „Gesamtmenge" M zur Abkürzung mit 1 bezeichnet. 0 und 1 heißen die „Moduln". Griechische Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \xi, \eta, \zeta, \cdots$ sollen immer einen der beiden Moduln bezeichnen, was der Leser stets genau beachten wolle.

Ist ein Gebiet a als Untermenge in einem anderen Gebiete b enthalten, so schreibt man $a \mathrel{\underline{\prec}} b$ (lies: a sub b).

Die „Summe" $a + b$ zweier Gebiete ist die Vereinigungsmenge der beiden, welche jedes Element von M enthält, das entweder in a oder in b (oder in beiden) enthalten ist. Das „Produkt" ab ist der „Durchschnitt" oder der „Gemeinteil" der beiden Mengen, d. h. es enthält ausschließlich alle gleichzeitig in a und in b enthaltenen Elemente von M.

Unter dem „Negat" $\bar{a}$ (lies: a nicht) eines Gebietes a versteht man die zu a gehörende „Komplementärmenge" $M - a$, welche alle nicht in a enthaltenen Elemente von M umfaßt.

Unter einer „Funktion von $x, y, z, \cdots$" versteht man jeden Ausdruck, welcher aus den Gebieten $x, y, z, \cdots$ (und irgendwelchen anderen Gebieten $a, b, c, \cdots$) aufgebaut ist vermittels beliebig vieler der drei oben definierten Grundoperationen: Addition, Multiplikation und Negation.

Ich werde nun im folgenden aus dem kürzlich erschienenen „Abriß der Algebra der Logik" von Dr. Ernst Schröder, herausgegeben von Dr. Eugen Müller, die auf den Gebietekalkul bezüglichen Formeln und

Lehrsätze (ohne Anwendung des Aussagekalküls) in derselben Numerierung wie dort zusammenstellen (mit Weglassung der unwichtigen gestrichelten Nummern sowie von 33—35), was vielleicht auch den Besitzern des Werkes erwünscht sein mag „äquivalent“ werde ich kurz mit „äq.“ abkürzen:

I $a ⋹ a$

II Aus $a ⋹ b,\ b ⋹ c$ folgt $a ⋹ c$

III $a ⋹ b,\ b ⋹ a$ ist äq. $a = b$

$\mathrm{IV}_\times$ $0 ⋹ a$	IV_+ $a ⋹ 1$

V Es ist nicht $1 ⋹ 0$

$\mathrm{VI}_\times$ $x ⋹ a,\ x ⋹ b$ ist äq. $x ⋹ ab$	VI_+ $a ⋹ y,\ b ⋹ y$ ist äq. $a + b ⋹ y$

VII $(a+z)(\bar{a}+z) = z = az + \bar{a}z$

1) $b = a$ ist. äq. $a = b$

2) $a = a$

3) Aus $a = b,\ b = c$ folgt $a = c$

$4)_\times$ Aus $a ⋹ b_1,\ b_1 ⋹ b$ folgt $a ⋹ b$	$4)_+$ Aus $a = a_1,\ a_1 ⋹ b$ folgt $a ⋹ b$
$5)_\times$ $p ⋹ 0$ ist äq. $p = 0$	$5)_+$ $1 ⋹ q$ ist äq. $1 = q$
$6)_\times$ $ab ⋹ a,\ ab ⋹ b$	$6)_+$ $a ⋹ a + b,\ b ⋹ a + b$
$7)_\times$ $ab = ba$	$7)_+$ $a + b = b + a$
$8)_\times$ $a(bc) = (ab)c = abc$	$8)_+$ $a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$

$9)_{\times +}$ $a = ab$ ist äq. $a ⋹ b$ und $a + b = b$

10) $a = b$ ist äq. $a + b ⋹ ab$ und $a + b = ab$

$11)_\times$ $aa = a$	$11)_+$ $a + a = a$
$12)_\times$ $a \cdot 0 = 0,\ a \cdot 1 = a$	$12)_+$ $1 = 1 + a,\ a = 0 + a$
$13)_\times$ $a(a+b) = a$	$13)_+$ $a = a + ab$
$14)_\times$ $1 = ab$ ist äq. $1 = a,\ 1 = b$	$14)_+$ $a + b = 0$ ist äq. $a = 0,\ b = c$
$15)_\times$ Aus $a ⋹ b$ folgt $ac ⋹ bc$	$15)_+$ Aus $a ⋹ b$ folgt $a + c ⋹ b + c$
$16)_\times$ „ $a = b$ „ $ac = bc$	$16)_+$ „ $a = b$ „ $a + c = b + c$
$17)_\times$ „ $a ⋹ b,\ c ⋹ d$ folgt $ac ⋹ bd$	$17)_+$ „ $a ⋹ b,\ c ⋹ d$ folgt $a + c ⋹ b + d$
$18)_\times$ „ $a ⋹ b,\ c = d$ „ $ac ⋹ bd$	$18)_+$ „ $a ⋹ b,\ c = d$ „ $a + c ⋹ b + d$
$19)_\times$ „ $a = b,\ c = d$ „ $ac = bd$	$19)_+$ „ $a = b,\ c = d$ „ $a + c = b + d$
$20)_\times$ $a\bar{a} = 0$	$20)_+$ $1 = a + \bar{a}$

21) $\bar{\bar{a}} = a$

22) $a = b$ ist äq. $\bar{a} = \bar{b}$

23) $\bar{0} = 1,\quad \bar{1} = 0,$

$24)_{\times +}$ $a\bar{b} = 0$ ist äq. $a ⋹ b$ und $1 = \bar{a} + b$

25) $$a \mathrel{=\!\!\!\in} b \text{ ist äq. } \bar{b} \mathrel{=\!\!\!\in} \bar{a}$$

26) $$ab = 0,\ a + b = 1 \text{ ist äq. } \bar{a} = b \text{ und } \bar{b} = a$$

$27)_{\times +}$ $$a\bar{b} + \bar{a}b = 0 \text{ ist äq. } a = b \text{ und } 1 = (\bar{a} + b)(a + \bar{b})$$

$28)_\times$ $0 = a\bar{a}$ $= (a+b)(a+\bar{b})(\bar{a}+b)(\bar{a}+\bar{b})$ $= (a+b+c)(a+b+\bar{c})(a+\bar{b}+c)\cdots$ $= \cdots$	$28)_+$ $1 = a + \bar{a}$ $= ab + a\bar{b} + \bar{a}b + \bar{a}\bar{b}$ $= abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + \cdots$ $= \cdots$
$29)_\times$ $ab = a(\bar{a} + b)$	$29)_+$ $a + b = a + \bar{a}b$
$30)_\times$ $ab = (a + b)(a + \bar{b})(\bar{a} + b)$	$30)_+$ $a + b = ab + a\bar{b} + \bar{a}b$
$31)_\times$ $\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$	$31)_+$ $\overline{a + b} = \bar{a}\bar{b}$
$32)_\times$ $a(b + c) = ab + ac$	$32)_+$ $(a+b)(a+c) = a + bc$
$32)'_\times$ $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$	$33)'_+$ $(a+c)(a+d)(b+c)(b+d) = ab + cd.$

Die Nummern dieser Formeln werde ich, wo es mir gut scheint, unter die Gleichheits- und Subsumptionszeichen setzen, bei denen sie gebraucht werden, wie es auch in dem Abriß geschehen ist.

Nachdem in den §§ 1—5 einige Hilfsmittel entwickelt sind, sollen drei Methoden zur Auflösung von Gleichungen angegeben werden (in §§ 6 und 7, § 8, § 9). Ich werde dabei sämtliche Entwicklungen auf den obigen Formeln aufbauen, ohne frühere Untersuchungen auf dem Gebiete als bekannt vorauszusetzen (da ich doch noch einmal alles von neuen und allgemeineren Gesichtspunkten aus herzuleiten habe), und ohne von der Deutung des Kalkuls als Mengenkalkul (die mir manche Beweise ersparen oder abkürzen würde) Gebrauch zu machen.

Für wertvolle Ratschläge bei der Arbeit bin ich Herrn Müller und ganz besonders Herrn Korselt zu Dank verpflichtet, dessen Anregung und Kritik eine gründliche Umarbeitung der Abhandlung zur Folge gehabt hat.

§ 1.

Grundlegende Definitionen und Sätze über Disjunktivsysteme.

Einen geordneten Inbegriff von n Gebieten $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ werde ich kurz ein „System n^{ter} Ordnung“ nennen. Unter den Gebieten dürfen auch gleiche vorkommen. Systeme, die sich nur durch die Reihenfolge der vorkommenden Elemente unterscheiden, sollen „verwandt“ genannt werden. Ein System, welches nur die „Moduln“ 0 und 1 enthält, nenne ich ein „Modularsystem“.

Die Gebiete $a^1, a^2, \cdots, a^n$ sollen disjunktiv oder beigeordnet heißen, wenn sie „disjunkt (getrennt)“ und „komplementär (ergänzend)“ sind, d. h. wenn

$$d_0)\quad a^\varkappa a^\lambda = 0 \quad \text{für} \quad \varkappa \neq \lambda,$$

$$d_1)\quad \sum_\varkappa a^\varkappa = 1.$$

Ein System von disjunktiven Gebieten will ich kurz ein „Disjunktivsystem" nennen.

Satz 1. *Das einzige Disjunktivsystem erster Ordnung ist* (1). *Jedes Disjunktivsystem zweiter Ordnung hat die Form* $(a, \bar{a})$, *und umgekehrt sind zwei „obverse" Gebiete* a *und* $\bar{a}$ *stets disjunktiv.* Ersteres folgt aus 26), letzteres aus $20)_{\times +}$.

Ist $(a^1, a^2, \cdots, a^n)$ ein Disjunktivsystem, so sind $(a^1, a^2, \cdots, a^n, 0, 0, \cdots, 0)$ und die verwandten Systeme nach $12)_{\times +}$ auch Disjunktivsysteme. Die Reihe der von 0 verschiedenen Gebiete eines Disjunktivsystems nenne ich seinen „Kern", die Reihe seiner Nullen nenne ich seinen „Hohlraum". Disjunktivsysteme ohne Hohlraum nenne ich „kernig".

Satz 2. *Gleiche Gebiete eines Disjunktivsystems gehören zum Hohlraum* (Korselt). Denn aus $a^p = a^q$ folgt $a^p \underset{11)_\times}{=} a^p a^p = a^p a^q \underset{d_0)}{=} 0$.

Satz 3. *Der Kern eines Disjunktivsystems, vereinigt mit beliebig vielen Nullen (oder auch für sich allein), ist wieder ein Disjunktivsystem,* wie aus der Definition leicht folgt.

Satz 4. *Ersetzt man in einem Disjunktivsystem einige Gebiete durch ihre Summe, so erhält man wieder ein Disjunktivsystem;* d. h. ist $(a^1, a^2, \cdots, a^m, b^1, b^2, \cdots, b^n)$ ein Disjunktivsystem, so ist $(a^1 + a^2 + \cdots + a^m, b^1, b^2, \cdots, b^n)$ auch eines, denn $(a^1 + a^2 + \cdots + a^m) b^\varkappa \underset{32)\, d_0)}{=} 0$, $(a^1 + a^2 + \cdots + a^m) + b^1 + b^2 + \cdots + b^n \underset{d_1)}{=} 1$.

Das System, in welchem das $\varkappa^{\text{te}}$ Element $= 1$, alle übrigen $= 0$ sind, nenne ich „das $\varkappa^{\text{te}}$ Elementarsystem".

Satz 5. *Jedes Modulardisjunktivsystem, sowie jedes Disjunktivsystem, in welchem alle Gebiete bis auf eins* $= 0$ *sind, oder in welchem ein Gebiet* $= 1$ *ist, ist ein Elementarsystem.* Denn 1) kann nach Satz 2 in einem Modulardisjunktivsystem höchstens ein Gebiet $= 1$ sein, und 2): Wenn in einem Disjunktivsystem alle Gebiete bis auf eins (für das es zunächst unbestimmt bleibt) $= 0$ sind, so muß dieses eine wegen $d_1)$, $12)_+ = 1$ sein, und 3): Ist $a^\varkappa = 1$, so ist für $\varkappa \neq \lambda$: $a^\lambda \underset{12)_\times}{=} a^\lambda \cdot 1 = a^\lambda a^\varkappa \underset{d_0)}{=} 0$, q. e. d.

Wir wollen jetzt ein Schema kennen lernen, nach dem man sich jedes beliebige Disjunktivsystem erzeugt denken kann:

Satz 6. *Ist* $(a^0, a^1, a^2, \cdots, a^n)$ *ein Disjunktivsystem, so ist auch* $(a^0 + r, a^1\bar{r}, a^2\bar{r}, \cdots, a^n\bar{r})$ *eines.*

Beweis. Für $\varkappa \neq 0$ ist

$$(a^0 + r) \cdot a^\varkappa \bar{r} \underset{32)_\times\, d_0)\, 20)_\times}{=} 0, \quad a^\varkappa \bar{r} \cdot a^\lambda \bar{r} \underset{d_0)}{=} 0 \quad \text{für} \quad \varkappa \neq \lambda,$$

$$a^0 + r + a^1\bar{r} + a^2\bar{r} + \cdots + a^n\bar{r} \underset{29)_+}{=} r + a^0\bar{r} + a^1\bar{r} + a^2\bar{r} + \cdots + a^n\bar{r} \underset{32)_\times\, d_0)}{=} r + \bar{r} = 1.$$

Für $a^0 = 0$ erhält man den ersten Teil von

Satz 7. *Ist* $(a^1, a^2, \cdots, a^n)$ *ein Disjunktivsystem, so ist auch* $(r, a^1\bar{r}, a^2\bar{r}, \cdots, a^n\bar{r})$ *eines, und jedes beliebige Disjunktivsystem* $n+1^{ter}$ *Ordnung kann man sich auf diese Weise aus einem Disjunktivsystem* n^{ter} *Ordnung entstanden denken* (Korselt).

Um nämlich ein beliebiges Disjunktivsystem $n+1^{ter}$ Ordnung $(b^0, b^1, b^2, \cdots, b^n)$ auf diese Form zu bringen, setze man

$$r = b^0, \quad a^\varkappa = b^\varkappa + t^\varkappa b^0 \quad \text{für} \quad \varkappa = 1, 2, \cdots, n,$$

wo man für $(t^1, t^2, \cdots, t^n)$ ein beliebiges Disjunktivsystem n^{ter} Ordnung (z. B. ein Elementarsystem) nehmen kann. Dann ist

1) $(a^1, a^2, \cdots, a^n)$ ein Disjunktivsystem, denn

$$a^\varkappa a^\lambda = (b^\varkappa + t^\varkappa b^0)(b^\lambda + t^\lambda b^0) \underset{32)_\times d_0)}{=} 0 \quad \text{für} \quad \varkappa \neq \lambda,$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} a^\varkappa \underset{\overline{32)}_\times}{=} \sum_{\varkappa=1}^{n} b^\varkappa + b^0 \sum_{\varkappa=1}^{n} t^\varkappa \underset{d_1)\overline{12)}_\times}{=} \sum_{\varkappa=1}^{n} b^\varkappa + b^0 \underset{\overline{d_1)}}{=} 1;$$

2) $$\begin{cases} b^0 = r, \\ b^\varkappa \underset{12)\overline{\times}\,20)_+}{=} b^\varkappa(b^0 + \bar{b}^0) \underset{32)\overline{\times}\,d_0)}{=} b^\varkappa \bar{b}^0 \underset{32)_\times \overline{20)}\,12)_\times}{=} (b^\varkappa + t^\varkappa b^0)\bar{b}^0 = a^\varkappa \bar{r}, \end{cases}$$

q. e. d.

Denkt man sich so ein gegebenes Disjunktivsystem n^{ter} Ordnung aus einem $n-1^{ter}$ Ordnung entstanden, dieses aus einem $n-2^{ter}$ Ordnung usw., so erhält man z. B. für $n=5$ folgendes Schema:

$$\begin{array}{ll} & (1), \\ r = d: & (d,\ \bar{d}), \\ r = c: & (c,\ \bar{c}d,\ \bar{c}\bar{d}), \\ r = b: & (b,\ \bar{b}c,\ \bar{b}\bar{c}d,\ \bar{b}\bar{c}\bar{d}), \\ r = a: & (a,\ \bar{a}b,\ \bar{a}\bar{b}c,\ \bar{a}\bar{b}\bar{c}d,\ \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}). \end{array}$$

§ 2.

Zugeordnete Disjunktivsysteme.

Ein zweites Schema für Disjunktivsysteme, das für die Folge von der größten Wichtigkeit sein wird, erhält man mit Hilfe des Begriffes der Summe von Disjunktivsystemen.

Gegeben seien zwei Disjunktivsysteme

$$A = (a^1, a^2, \cdots, a^m),$$
$$B = (b^1, b^2, \cdots, b^n).$$

Ich setze*)

$$A + B = (a^1 b^1, a^1 b^2, \cdots, a^1 b^n, a^2 b^1, a^2 b^2, \cdots, a^2 b^n, \cdots\cdots, a^m b^1, a^m b^2, \cdots, a^m b^n).$$

Dann gilt das assoziative Gesetz, und die Elemente von $A + B + C + \cdots$ sind die Ausdrücke von der Form $a^\varkappa b^\lambda c^\mu \cdots$, wo $a^\varkappa$ ein Element von A, b^λ eines von B, c^μ eines von C ist usw.

Satz 8. *Die Summe zweier und folglich auch mehrerer Disjunktivsysteme ist wieder ein Disjunktivsystem.*

Beweis. 1) Greift man zwei verschiedene Elemente $a^\varkappa b^\lambda$ und $a^\mu b^\nu$ heraus, so ist entweder $\varkappa \neq \mu$ oder $\lambda \neq \nu$ (oder beides). Ist z. B. $\varkappa \neq \mu$ so ist $a^\varkappa a^\mu \underset{\overline{a_1)}}{=} 0$, folglich $a^\varkappa b^\lambda \cdot a^\mu b^\nu = 0$. 2) Die Summe der Elemente von $A + B$ gibt nach $32)'_\times$ $(a^1 + a^2 + \cdots + a^m)(b^1 + b^2 + \cdots + b^n) \underset{\overline{a_1)}}{=} 1$.

Satz 8 läßt sich auch folgendermaßen aussprechen:

Satz 8a. *Die Reihe von Gebieten, welche aus p Disjunktivsystemen entstehen, indem man aus jedem derselben auf alle möglichen Arten ein Element aushebt und diese p ausgehobenen Elemente miteinander multipliziert, ist ein Disjunktivsystem* (Korselt).

Setzt man nun

$$(a^1, a^2, \cdots, a^N) = (a_1, \bar{a}_1) + (a_2, \bar{a}_2) + \cdots + (a_n, \bar{a}_n),$$

so hat man hiermit eine Methode gewonnen, um mit Anwendung von möglichst wenig (n) Buchstaben möglichst viele (N) disjunktive Gebiete auf die allgemeinste Weise zu bilden (vgl. Satz 12a). Ich nenne nun $(a^1, a^2, \cdots, a^N)$ „das zu dem System $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ gehörende oder zugeordnete Disjunktivsystem" und seine Elemente nenne ich „die zu $a_1, a_2, \cdots, a_n$ gehörigen disjunktiven Gebiete" oder kurz „die zu $a_1, a_2, \cdots, a_n$ zugeordneten Gebiete".

Für $n = 3$ ist

$$\text{(D)} \qquad \begin{aligned} a^1 &= a_1\, a_2\, a_3, \\ a^2 &= a_1\, a_2\, \bar{a}_3, \\ a^3 &= a_1\, \bar{a}_2\, a_3, \\ a^4 &= a_1\, \bar{a}_2\, \bar{a}_3, \\ a^5 &= \bar{a}_1\, a_2\, a_3, \\ a^6 &= \bar{a}_1\, a_2\, \bar{a}_3, \\ a^7 &= \bar{a}_1\, \bar{a}_2\, a_3, \\ a^8 &= \bar{a}_1\, \bar{a}_2\, \bar{a}_3. \end{aligned}$$

Will man $p < N$ disjunktive Gebiete bilden, so darf man natürlich nicht von den N disjunktiven Gebieten einfach p auswählen, sondern muß

*) Vgl. Schröder, Vorlesungen über Algebra der Logik, Bd. I, Anhang 6, wo für Gruppen ein ähnlicher Begriff entwickelt wird.

auf irgendeine Weise die N Gebiete in p Klassen teilen und innerhalb derselben addieren (vgl. Satz 4), z. B. für $p = 6$:

$$
\text{(D')} \quad
\begin{aligned}
b^1 &= a^1 = a_1,\ a_2,\ a_3, \\
b^2 &= a^2 = a_1,\ a_2,\ \bar{a}_3, \\
b^3 &= a^3 = a_1,\ \bar{a}_2,\ a_3, \\
b^4 &= a^4 = a_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{a}_3, \\
b^5 &= a^5 = \bar{a}_1,\ a_2,\ a_3, \\
b^6 &= a^6 + a^7 + a^8 \underset{30)+}{=} \bar{a}_1 (\bar{a}_2 + \bar{a}_3).
\end{aligned}
$$

Zu Systemen mit lauter verschiedenen Elementen gehört im allgemeinen ein kerniges Disjunktivsystem, aber keineswegs immer; ist z. B. das System selbst schon ein Disjunktivsystem, so stimmt der Kern des zugehörigen Disjunktivsystems mit dem System überein, während die übrigen $N - n$ Elemente zum Hohlraum gehören.

Satz 9'. *Eine Summe von Disjunktivsystemen ist nicht nur durch seine Summanden und deren Reihenfolge eindeutig bestimmt, sondern auch umgekehrt: Die Zerlegung eines gegebenen Disjunktivsystems in zwei und folglich auch in mehrere Summanden von gegebener Ordnungszahl ist stets in eindeutiger Weise möglich, wenn das Produkt der gegebenen Ordnungszahlen gleich der Ordnungszahl des gegebenen Disjunktivsystems ist.*

Beweis. Das gegebene Disjunktivsystem sei

$$(a^1,\ a^2,\ \cdots,\ a^{mn}),$$

die gegebenen Ordnungszahlen der Summanden m und n. Dann ist zu beweisen, daß die Gleichungen

$$x^\varkappa y^\lambda = a^{(\varkappa - 1)n + \lambda} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, m,\ \lambda = 1, 2, \cdots, n)$$

eindeutig durch disjunktive Gebiete $x^\varkappa$, y^λ auflösbar sind. Wir wollen $a^{(\varkappa-1)n+\lambda} = a^{\varkappa,\lambda}$ setzen. Nun folgt aus den Gleichungen und der Forderung, daß die $x^\varkappa$ sowie die $y^\varkappa$ disjunktiv sein sollen:

$$x^\varkappa \underset{d_1)}{=} x^\varkappa \cdot \sum_\lambda y^\lambda = \sum_\lambda x^\varkappa y^\lambda = \sum_\lambda a^{\varkappa,\lambda},$$

$$y^\lambda \underset{d_1)}{=} \sum_\varkappa x^\varkappa \cdot y^\lambda = \sum_\varkappa x^\varkappa y^\lambda = \sum_\varkappa a^{\varkappa,\lambda}.$$

Es gibt also höchstens diese eine Lösung der Aufgabe. In der Tat befriedigen diese Werte für $x^\varkappa$ und y^λ die vorgelegten Gleichungen, denn

$$x^\varkappa y^\lambda = \sum_{\lambda'} a^{\varkappa,\lambda'} \sum_{\varkappa'} a^{\varkappa',\lambda} \underset{32)\times}{=} \sum_{\varkappa'\lambda'} a^{\varkappa,\lambda'} a^{\varkappa',\lambda}.$$

Derjenige Summand, welcher $\varkappa' = \varkappa$, $\lambda' = \lambda$ entspricht, wird $= a^{\varkappa,\lambda}$, für die übrigen Summanden sind die Exponenten ungleich, folglich die betreffenden Glieder $\underset{d_0)}{=} 0$. Also wird $x^\varkappa y^\lambda = a^{\varkappa,\lambda}$, q. e. d.

Endlich ist noch zu zeigen, daß die $x^\varkappa$ sowie die $y^\varkappa$ disjunktiv sind:

$$x^\varkappa x^{\varkappa'} = \sum_\lambda a^{\varkappa,\lambda} \sum_\mu a^{\varkappa',\mu} \underset{32)'_\times}{=} \sum_{\lambda,\mu} a^{\varkappa,\lambda} a^{\varkappa',\mu} \underset{d_0)}{=} 0 \quad \text{für} \quad \varkappa \neq \varkappa',$$

$$\sum_\varkappa x^\varkappa = \sum_\varkappa \sum_\lambda a^{\varkappa,\lambda} \underset{d_1)}{=} 1,$$

ebenso $y^\lambda y^{\lambda'} = 0$ für $\lambda \neq \lambda'$, $\sum\limits_\lambda y^\lambda = 1$, q. e. d.

Ein Spezialfall von Satz 9′ ist der

Fundamentalsatz 9. *Ein System und sein zugehöriges Disjunktivsystem sind eindeutig durcheinander bestimmt.*

Die Umkehrung von (D) z. B. lautet:

$$(\nabla) \qquad \begin{aligned} a_1 &= (a^1 + a^2 + a^3 + a^4), \\ a_2 &= (a^1 + a^2) + (a^5 + a^6), \\ a_3 &= a^1 + a^3 + a^5 + a^7, \end{aligned}$$

wie man mit Hilfe von $28)_+$ sieht, indem man die rechtsstehenden Summen aus (D) bildet. Die Klammern sind nur gesetzt zur Verdeutlichung des Bildungsgesetzes und können auch wegbleiben.

Ich will endlich noch für $n = 4$ die Umkehrungsgleichungen hinschreiben:

$$\begin{aligned} a_1 &= (a^1 + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8), \\ a_2 &= (a^1 + a^2 + a^3 + a^4) + (a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12}), \\ a_3 &= (a^1 + a^2) + (a^5 + a^6) + (a^9 + a^{10}) + (a^{13} + a^{14}), \\ a_4 &= a^1 + a^3 + a^5 + a^7 + a^9 + a^{11} + a^{13} + a^{15}. \end{aligned}$$

Aus Satz 5 und Satz 9′ folgt

Satz 10′. *Die Summe von Elementarsystemen ist wieder ein Elementarsystem, und umgekehrt: Ein Elementarsystem liefert bei der (eindeutigen) Zerlegung in Summanden wieder Elementarsysteme.*

Ein Spezialfall ist

Satz 10. *Einem jeden der N möglichen Modularsysteme n^{ter} Ordnung ist eineindeutig zugeordnet eines der N Elementarsysteme N^{ter} Ordnung.*

§ 3.

Das Verifikationstheorem.

Gegeben sei eine Funktion der einander beigeordneten Gebiete $x^1, x^2, \cdots, x^k$. Zunächst lassen sich die Negate $\bar{x}^\varkappa$ dieser Gebiete wegschaffen, denn wegen

$$a^\varkappa \sum_{\lambda \neq \varkappa} a^\lambda \underset{32)\times d_0}{=} 0, \quad a^\varkappa + \sum_{\lambda \neq \varkappa} a^\lambda \underset{d_1)}{=} 1$$

gilt die wichtige Formel:

(N″) $$\bar{a}^\varkappa \underset{26)}{=} \sum_{\lambda \neq \varkappa} a^\lambda.$$

Nun lassen sich die Funktionen durch Ausführung der Negationen (vgl. 31) und Ausmultiplizieren mit Hilfe von d_0) und $11)_\times$ auf die Form bringen

$$\sum_\varkappa \underset{\varkappa}{A} x^\varkappa + L,$$

da ja die Glieder mit $x^\varkappa x^\lambda$ verschwinden. Wegen d_1) kann man nun $L \sum_\varkappa x^\varkappa$ für L schreiben. Daraus folgt:

Satz 11: *Jede Funktion disjunktiver Gebiete läßt sich linear und homogen in bezug auf diese Gebiete darstellen, d. h. in der Form* $\sum_\varkappa a_\varkappa x^\varkappa$.

Selbstverständlich läßt sich stets erreichen, daß die $a_\varkappa$ von den $x^\varkappa$ unabhängig sind, oder wenn man hierauf verzichtet, so läßt sich stets erreichen, daß $a_\varkappa \Subset x^\varkappa$, denn man kann ja nach $11)_\times$ $a_\varkappa x^\varkappa$ ersetzen durch $b_\varkappa x^\varkappa$, wo $b_\varkappa = a_\varkappa x^\varkappa$ gesetzt ist. Hier ist tatsächlich $b_\varkappa \underset{6)\times}{\Subset} x^\varkappa$.

Ich will noch bemerken, daß sich mit Hilfe unserer Betrachtungen das von Schröder aufgeworfene Problem der Ordnung eines endlichen Feldes in Unterfelder*) höchst einfach erledigen läßt. Unter einem „Feld" (Schröder sagt „Gruppe von Gebieten") verstehe ich mit Herrn Korselt einen Inbegriff von Gebieten, bei dem durch Addition, Multiplikation und Negation keine neuen Gebiete mehr gebildet werden können. Betrachtet man nun das Feld $G(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, d. h. das Feld, welches aus diesen n Gebieten gebildet wird, indem man mit ihnen alle möglichen Additionen, Multiplikationen und Negationen vornimmt, bis keine neuen Gebiete mehr entstehen, so muß dieses Feld natürlich das Disjunktivsystem $(a^1, a^2, \cdots, a^N)$ enthalten. Nach Satz 9 ist

$$G(a_1, a_2, \cdots, a_n) = G(a^1, a^2, \cdots, a^N) = G(a^1, a^2, \cdots, a^m),$$

wenn $(a^1, a^2, \cdots, a^m)$ der Kern von $(a^1, a^2, \cdots, a^N)$ ist.

*) Vgl. Schröder, a. a. O. Bd. I, Anhang 6.

Ein Feld ist also *vollständig charakterisiert* durch ein *bestimmtes* in ihm enthaltenes kerniges Disjunktivsystem, und die Anzahl der Unterfelder muß also angeben, wieviele kernige Disjunktivsysteme sich aus $a^1, a^2, \cdots, a^m$ bilden lassen, und jedes Unterfeld muß die Form haben $G(b^1, b^2, \cdots, b^p)$.

Nun läßt sich jedes Element $b^\varkappa$ als lineare homogene Funktion der $a^\varkappa$ darstellen, deren Koeffizienten von den $a^\varkappa$ unabhängig, also $= 0$ oder 1 sind, d. h. in der Form

$$\sum_{\varkappa=1}^{m} \varepsilon_\varkappa a^\varkappa.$$

Das Element 0 kommt auch unter den $b^\varkappa$ vor, weil es $\underset{d_0)}{=} a^\varkappa a^\lambda$ $(\varkappa \neq \lambda)$ ist. Die Gruppe enthält also M Elemente, und die $b^\varkappa$ in den Unterfeldern sind irgendwelche aus den $a^\varkappa$ gebildete Summen. Bei diesen Summen darf jedes $a^\varkappa$ in einem und nur einem $b^\varkappa$ als Summand vorkommen. (Denn wären z. B.

$$b^1 = a^\varkappa + a^\lambda + \cdots, \quad b^2 = a^\varkappa + a^\mu + \cdots,$$

so wäre wegen $a_\varkappa \neq 0$

$$b^1 b^2 \underset{32)+}{=} a^\varkappa + (a^2 + \cdots)(a^\mu + \cdots) \underset{14)+}{\neq} 0$$

im Widerspruch zu d_0.) Man erhält also alle P-gliedrigen Unterfelder von G, indem man auf alle möglichen Arten die m Gebiete $a^\varkappa$ in p Klassen einteilt und innerhalb jeder Klasse die Gebiete addiert. Daraus folgt:

Satz 12: *Ein M-gliedriges Feld enthält*

$$\frac{1}{p!} \sum_{\nu=0}^{p-1} (-1)^\nu (p)_\nu (p-\nu)^m$$

P-gliedrige Unterfelder und ebensoviel kernige Disjunktivsysteme p^{ter} Ordnung lassen sich aus einem kernigen Disjunktivsystem m^{ter} Ordnung bilden.

Zugleich folgt aus unseren Betrachtungen:

Satz 12a: *Mit Hilfe von n Buchstaben lassen sich genau N von 0 verschiedene disjunktive Gebiete bilden,* und zwar nur nach dem Schema (D).

Zwei lineare homogene Funktionen sind dann und nur dann einander gleich, wenn die gleichnamigen Glieder einander gleich sind, d. h.:

Satz 13: *Aus*

$$\sum_\varkappa a_\varkappa x^\varkappa = \sum_\varkappa b_\varkappa x^\varkappa \quad \textit{folgt} \quad a_\varkappa x^\varkappa = b_\varkappa x^\varkappa.$$

Dies hat schon Schröder gezeigt*), indem er in der Voraussetzung links und rechts mit $x^\varkappa$ multiplizierte.

*) Vgl. Schröder, a. a. O. Bd. II, S. 408.

Es möge nun eine gewisse Gleichung oder Subsumption, in der die disjunktiven Gebiete $x^1, x^2, \cdots, x^k$ auftreten, allgemein richtig sein, d. h. also, sie möge gelten, wenn man für die darin vorkommenden Buchstaben irgendwelche speziellen Gebiete einsetzt, (wobei Symbole, bei denen Exponenten auf gleicher Basis stehen, hier und in Zukunft stets als disjunktiv vorausgesetzt werden sollen). Nun ist nach $24)_\times$, $27)_\times$ jede Subsumption der Gleichung äquivalent einer auf 0 gebrachten Gleichung. Nach dem Vorhergehenden läßt sich also die vorgelegte Gleichung oder Subsumption auf die Form bringen

$$\sum_\varkappa a_\varkappa x^\varkappa = 0,$$

wo die $a_\varkappa$ von den $x^\varkappa$ unabhängig sind.

Ist nun diese Gleichung allgemein richtig, so ist sie auch richtig, wenn man für die $x^\varkappa$ die Werte eines beliebigen Elementarsystems einsetzt, sie ist z. B. richtig für $x^\varkappa = 1$, $x^{\varkappa'} = 0$ für $\varkappa' \neq \varkappa$.

Für dieses Wertsystem wird aber unsere Gleichung $a_\varkappa = 0$. Ist umgekehrt die Gleichung richtig für die Werte eines beliebigen Elementarsystems, d. h. ist $a_\varkappa = 0$ für beliebiges $\varkappa$, so ist auch ganz allgemein $a_\varkappa x_\varkappa \underset{12)_\times}{=} 0$ für beliebiges $\varkappa$, folglich auch $\sum\limits_\varkappa a_\varkappa x^\varkappa \underset{14)_+}{=} 0$. Hieraus folgt

Satz 14a: *Das einfache Verifikationstheorem: Ob eine Gleichung oder Subsumption, in der die Elemente eines Disjunktivsystems* $(x^1, x^2, \cdots, x^k)$ *vorkommen, allgemein richtig ist, kann man daran erkennen, daß sie stets richtig ist, wenn man für die* $x^\varkappa$ *die Werte eines beliebigen Elementarsystems* k^{ter} *Ordnung einsetzt.*

Kommen in einer vorgelegten Gleichung oder Subsumption die Gebiete $x_1, x_2, \cdots, x_n$ vor, so ist dieselbe äquivalent einer Gleichung in den $x^\varkappa$, da sich diese durch jene nach Satz 9 eineindeutig ausdrücken lassen. Diese letztere Gleichung kann man aber nach Satz 14a verifizieren, indem man die $x^\varkappa$ der Reihe nach die Werte der N Elementarsysteme N^{ter} Ordnung durchlaufen läßt. Dann durchlaufen aber nach Satz 10 die $x_\varkappa$ die sämtlichen N Modularsysteme n^{ter} Ordnung. Daraus folgt

Satz 14b: *Das Müllersche Verifikationstheorem*): Ob eine Gleichung oder Subsumption, in der* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *vorkommen, allgemein richtig ist, kann man daran erkennen, daß sie richtig ist für beliebige Wertsysteme* 0, 1 *der Gebiete* $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Ebenso ergibt sich aus Satz 10′ und 14a folgendes noch allgemeinere Theorem, das aber für unsere Zwecke nicht besonders wichtig ist:

Satz 14c: *Ob eine Gleichung oder Subsumption, in der die Elemente*

---

*) Vgl. Eugen Müller, Aus der Algebra der Logik, II. Das Eliminationsproblem und die Syllogistik. Programmabh. des Gymnasiums in Tauberbischofsheim 1901.

mehrerer Disjunktivsysteme vorkommen, allgemein richtig ist, kann man daran erkennen, daß sie stets richtig ist, wenn man für die Elemente eines jeden Disjunktivsystems die Werte eines beliebigen Elementarsystems der gleichen Ordnung einsetzt.

Es sei nun eine Gleichung vorgelegt, in der außer den Moduln nur noch das Gebiet v auftritt und die sich nach dem Vorhergehenden auf die Form bringen läßt:

$$\alpha v + \beta \bar{v} = 0.$$

Wir setzen die Richtigkeit der Gleichung für einen bestimmten, von 0 und 1 verschiedenen Wert von v voraus. Dann ist für diesen Wert

$$\alpha v \underset{14)+}{=} 0, \quad \beta \bar{v} = 0.$$

Wäre nun $\alpha = 1$, so wäre $v \underset{12)\times}{=} \alpha v = 0$ gegen die Voraussetzung, also ist $\alpha = 0$ und ebenso ist $\beta = 0$, weil sonst $\bar{v} = 0$ wäre. Umgekehrt folgt aus $\alpha = 0$, $\beta = 0$ die Richtigkeit der Gleichung. Hieraus ergibt sich:

Satz 14d: *Ob eine Gleichung oder Subsumption, in der außer den Moduln nur ein einziges von* 0 *und* 1 *verschiedenes Gebiet vorkommt, richtig ist, kann man daran erkennen, daß sie richtig bleibt, wenn man für dieses Gebiet* 0 *oder* 1 *einsetzt.*

Korollar: *Wenn eine Gleichung oder Subsumption, in welcher außer den Moduln nur ein einziges Gebiet v vorkommt, für einen speziellen, von* 0 *und* 1 *verschiedenen Wert von v richtig ist, so ist sie auch richtig für $v = 0$ und für $v = 1$.* Das Korollar hebt aus 14d gerade den Teil heraus, welcher nicht bereits aus 14b folgt.

§ 4.

Das Entwicklungstheorem.

Satz 15: *Ist* (z. B. für drei Gruppen von Gebieten)

$$x_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{m} a_{\varkappa\lambda} x^\lambda, \quad y_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} b_{\varkappa\lambda} y^\lambda, \quad z_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{p} c_{\varkappa\lambda} z^\lambda,$$

so ist

$$\text{(E)} \qquad F(x_1, x_2, \cdots, x_m;\ y_1, y_2, \cdots, y_n;\ z_1, z_2, \cdots, z_p)$$
$$= \sum_{\lambda\mu\nu} F(a_{1\lambda}, a_{2\lambda}, \cdots, a_{m\lambda};\ b_{1\mu}, b_{2\mu}, \cdots, b_{n\mu};\ c_{1\nu}, c_{2\nu}, \cdots, c_{p\nu})\, x^\lambda y^\mu z^\nu.$$

Entsprechendes gilt für die Elemente beliebig vieler Disjunktivsysteme. Ausdrücklich sei bemerkt, daß die a, b, c nicht von den x, y, z unabhängig zu sein brauchen.

Der Beweis folgt aus dem allgemeinen Verifikationstheorem, denn der Satz ist richtig für $x^\lambda = y^\mu = z^\nu = 1$.

Wichtig sind von diesem Satz für uns nur folgende Spezialfälle, die sich mit dem einfachen und dem Müllerschen Verifikationstheorem beweisen lassen:

$$(\mathrm{E}_1)\quad F\Big(\sum_{\varkappa} a_{1\varkappa} x^{\varkappa},\ \sum_{\varkappa} a_{2\varkappa} x^{\varkappa}, \cdots, \sum_{\varkappa} a_{m\varkappa} x^{\varkappa}\Big) = \sum_{\varkappa} F(a_{1\varkappa}, a_{2\varkappa}, \cdots, a_{m\varkappa}) x^{\varkappa}.$$

Wir wollen nun ein für allemal folgende Abkürzungen einführen:

$$\begin{aligned}
[a, b]_x &= ax + b\bar{x}, \\
[a, b, c, d]_{xy} &= axy + bx\bar{y} + c\bar{x}y + d\bar{x}\bar{y}, \\
[a, b, \cdots, h]_{xyz} &= axyz + bxy\bar{z} + cx\bar{y}z + dx\bar{y}\bar{z} + e\bar{x}yz + f\bar{x}y\bar{z} \\
&\quad + g\bar{x}\bar{y}z + h\bar{x}\bar{y}\bar{z}.
\end{aligned}$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
(\mathrm{E}_2)\quad & F([a_1, b_1, c_1, d_1]_{xy}, [a_2, b_2, c_2, d_2]_{xy}, \cdots, [a_n, b_n, c_n, d_n]_{xy}) = \\
&= [F(a_1, a_2, \cdots, a_n),\ F(b_1, b_2, \cdots, b_n),\ F(c_1, c_2, \cdots, c_n), \\
&\qquad F(d_1, d_2, \cdots, d_n)]_{xy},
\end{aligned}$$

entsprechend für x, y, z, usw.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{E}_3)\quad & F(a_1 x + A_1\bar{x},\ a_2 x + A_2\bar{x}, \cdots, a_m x + A_m\bar{x};\ b_2 y + B_1\bar{y}, \\
&\qquad b_2 y + B_2\bar{y}, \cdots, b_n y + B_n\bar{y}) = \\
&= [F(a_1, a_2, \cdots, a_m;\ b_1, b_2, \cdots, b_n),\ F(a_1, a_2, \cdots, a_m;\ B_1, B_2, \cdots, B_n), \\
&\qquad F(A_1, A_2, \cdots, A_m;\ b_1, b_2, \cdots, b_n),\ F(A_1, A_2, \cdots, A_m;\ B_1, B_2, \cdots, B_n)]_{xy},
\end{aligned}$$

entsprechend für x, y, z, usw.*)

$$(\mathrm{E}_4)\quad F(x_1 t + u_1\bar{t},\ x_2 t + u_2\bar{t}, \cdots, x_n t + u_n\bar{t}) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n) t + F(u_1, u_2, \cdots, u_n)\bar{t}$$

Spezialfälle von (E_1) resp. (E_2) sind das Boolesche Multiplikationstheorem

$$(\mathrm{M})\quad \begin{cases} \sum_{\varkappa} a_{\varkappa} x^{\varkappa} \cdot \sum_{\varkappa} b_{\varkappa} x^{\varkappa} = \sum_{\varkappa} a_{\varkappa} b_{\varkappa} x^{\varkappa}, \\ [a, b, c, d]_{xy}\, [a_1, b_1, c_1, d_1]_{xy} = [aa_1, bb_1, cc_1, dd_1]_{xy} \end{cases}$$

und das Schrödersche Negationstheorem

$$(\mathrm{N})\quad \begin{cases} \overline{\sum_{\varkappa} a_{\varkappa} x^{\varkappa}} = \sum_{\varkappa} \bar{a}_{\varkappa} x^{\varkappa}, \\ \overline{[a, b, c, d]_{xy}} = [\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}]_{xy}. \end{cases}$$

Bilden die $a_{\varkappa}$ ein Modularsystem resp. Elementarsystem, so ergibt sich aus (N):

---

*) Vgl. Löwenheim, Über das Auflösungsproblem im logischen Klassenkalkul. Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges., VII. Jahrg., S. 90.

Sind $a^1, a^2, \cdots, a^n$ einander beigeordnet, so ist, wenn $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_n$ die Zahlen von 1 bis n in irgend einer Reihenfolge sind,

$$\text{(N')} \qquad \overline{a^{\varkappa_1} + a^{\varkappa_2} + \cdots + a^{\varkappa_p}} = a^{\varkappa_{p+1}} + a^{\varkappa_{p+2}} + \cdots + a^{\varkappa_n}.$$

Vorgekommen ist bereits

$$\text{(N'')} \qquad \bar{a}^{\varkappa} = \sum_{\lambda \neq \varkappa} a^{\lambda}.$$

Ein spezieller Fall von (E_3) ist die bekannte Entwicklungsformel

$$(E_5) \qquad F(x, y) = [F(1,1), F(1,0), F(0,1), F(0,0)]_{xy},$$

wonach sich jede Funktion von x und y nach den Argumenten „entwickeln", d. h. in der Form schreiben läßt: $[a, b, c, d]_{xy}$, was natürlich entsprechend für beliebig viele Argumente gilt.

Satz 16: *Wenn allgemein* (für alle Werte der vorkommenden Buchstaben) *aus dem Bestehen einer Gleichung* $F = 0$ *das Bestehen einer Gleichung* $G = H$ *gefolgert werden kann, so ist* $G\overline{F} = H\overline{F}$ *(vorausgesetzt, daß es wirklich Werte gibt, für die die Gleichung* $F = 0$ *erfüllt ist).*

Speziell:

Satz 17: *Wenn allgemein aus der Gleichung* $F = 0$ *die Gleichung* $G = 0$ *folgt, so ist* $G \underset{24)\times}{\Subset} F$ *(falls* $F = 0$ *überhaupt erfüllbar ist).*

Beweis: Kommen in F, G und H nur die Gebiete $x_1, x_2, \cdots, x_n$ vor und keine anderen (aber nicht notwendig in jeder Funktion alle diese Gebiete), so kann man nach (E_5) schreiben:

$$F = \sum_{\varkappa} \alpha_{\varkappa} x^{\varkappa}, \quad G = \sum_{\varkappa} \beta_{\varkappa} x^{\varkappa}, \quad H = \sum_{\varkappa} \gamma_{\varkappa} x^{\varkappa},$$

wo die $x^{\varkappa}$ zu den $x_{\varkappa}$ gehören. Griechische Buchstaben sollen, wie schon gesagt, stets Moduln bedeuten. Folgt nun allgemein aus $F = 0$ $G = H$, so gilt dies auch für $x^{\varkappa} = 1$, d. h. dann folgt auch aus $\alpha^{\varkappa} = 0$ $\beta_{\varkappa} = \gamma_{\varkappa}$. Wenn also $\alpha_{\varkappa} = 0$, also $\bar{\alpha}_{\varkappa} = 1$ ist, so soll $\beta_{\varkappa} = \gamma_{\varkappa}$, also auch

$$\beta_{\varkappa} \cdot \bar{\alpha}_{\varkappa} \underset{12)\times}{=} \gamma_{\varkappa} \bar{\alpha}_{\varkappa}$$

sein. Wenn dagegen $\alpha_{\varkappa} = 1$, also $\bar{\alpha}^{\varkappa} = 0$ ist, so ist obige Gleichung von selbst erfüllt. Also ist sie in jedem Falle richtig und zwar für jedes $\varkappa$. Folglich ist auch

$$\sum_{\varkappa} \beta_{\varkappa} \bar{\alpha}_{\varkappa} x^{\varkappa} \underset{18)\times+}{=} \sum_{\varkappa} \gamma_{\varkappa} \bar{\alpha}_{\varkappa} x^{\varkappa},$$

$$G\overline{F} \underset{(M)}{=} H\overline{F}, \quad \text{q. e. d.}$$

Hieraus ergibt sich eine Verallgemeinerung des Verifikationstheorems, die auch Herr Müller schon ebenso wie den Satz 16 gefunden hat:

Satz 14′: *Nicht nur Formeln lassen sich mit Hilfe der Verifikationstheoreme beweisen, sondern auch solche Lehrsätze, welche besagen, daß aus einer oder mehreren Subsumptionen oder Gleichungen gewisse andere folgen.* Ist nämlich ein System von Gleichungen und Subsumptionen gegeben, so ist dieses bekanntlich (vgl. $24)_\times$, $27)_\times$, $14)_\times$) äquivalent einer auf 0 gebrachten Gleichung, der „vereinigten Gleichung" des Systems*). Voraussetzung und Behauptung lassen sich also auf die Form bringen: $F = 0$, $G = 0$. Der Lehrsatz ist also nach Satz 17 äquivalent $G \prec F$. Auf $G \prec F$ aber lassen sich die Verifikationstheoreme anwenden.

§ 5.

Die Zusammensetzung von Lösungen.

Ist $(t^1, t^2, \cdots, t^p)$ ein Disjunktivsystem, und ist

$$\begin{array}{lll} \text{für} & t^1 = 1 & x_1, y_1, z_1, \cdots, \\ \text{„} & t^2 = 1 & x_2, y_2, z_2, \cdots, \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \text{„} & t^p = 1 & x_p, y_p, z_p, \cdots \end{array}$$

eine Lösung der Gleichung $F(x, y, z, \cdots) = 0$, so ist

$$x = \sum_{\varkappa=1}^{p} x_\varkappa t^\varkappa, \quad y = \sum_{\varkappa=1}^{p} y_\varkappa t^\varkappa, \quad z = \sum_{\varkappa=1}^{p} z_\varkappa t^\varkappa$$

eine Lösung der Gleichung.

A fortiori gilt die Behauptung, wenn (auch ohne irgendwelche Annahme über die t)

$$x_1, y_1, z_1, \cdots;\ x_2, y_2, z_2, \cdots;\ \cdots;\ x_p, y_p, z_p, \cdots$$

p Lösungen der Gleichung sind.

Beweis:

$$F(x, y, z, \cdots) \underset{(E_1)}{=} \sum_{\varkappa=1}^{p} F(x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa, \cdots)\, t^\varkappa.$$

Nun ist aber

$$F(x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa, \cdots)\, t^\varkappa = 0,$$

denn für $t^\varkappa = 0$ ist dies selbstverständlich, und für $t^\varkappa = 1$ folgt es aus der Voraussetzung. Folglich ist

$$F(x, y, z, \cdots) = 0, \text{ q. e. d.}$$

---

*) Z. B. ist $a \prec b$, $c = d$ äquivalent $a\bar{b} \underset{24)_\times}{=} 0$, $c\bar{d} + \bar{c}d \underset{27)_\times}{=} 0$ und $a\bar{b} + c\bar{d} + \bar{c}d \underset{14)_+}{=} 0$.

Umgekehrt: Ist

$$x = \sum_{\varkappa=1}^{p} x_\varkappa t^\varkappa, \quad y = \sum_{\varkappa=1}^{p} y_\varkappa t^\varkappa, \quad z = \sum_{\varkappa=1}^{p} z_\varkappa t^\varkappa, \cdots$$

eine Lösung der Gleichung $F(x, y, z \cdots) = 0$, so ist

$$\begin{array}{lll} \text{für} & t^1 = 1 & F(x_1, y_1, z_1, \cdots) = 0, \\ ,, & t^2 = 1 & F(x_2, y_2, z_2, \cdots) = 0, \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ ,, & t^p = 1 & F(x_p, y_p, z_p, \cdots) = 0, \end{array}$$

da sich für $t^\varkappa = 1$ die Ausdrücke für $x, y, z, \cdots$ auf $x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa, \cdots$ reduzieren. Hieraus folgt:

Satz 18: *Eine Lösung einer Gleichung kann man durch „Zusammensetzung“ finden, wenn man nur imstande ist, die Gleichung für*

$$t^\varkappa = 1 \; (\varkappa = 1, 2, \cdots, p)$$

zu lösen, und umgekehrt kann man sich jede Lösung einer Gleichung entstanden denken durch Zusammensetzung mit Hilfe beliebiger disjunktiver Gebiete.

§ 6.

Der Zwischenwertsatz und die natürlichen Lösungen.

Ich will die Entwickelungen dieses Paragraphen nur für Gleichungen mit drei Unbekannten durchführen; die Verallgemeinerung bietet keine Schwierigkeit.

Es sei

$$F(x, y, z) = [a, b, c, d, e, f, g, h]_{xyz}.$$

Setzt man in (E_4) für $n = 3$ für u_1, u_2, u_3 der Reihe nach sämtliche 8 Modularsysteme dritter Ordnung ein, so erhält man wegen $xt + \bar{t} \underset{29)}{=} x + \bar{t}$, $F(1, 1, 1) = a$, $F(1, 1, 0) = b, \cdots$, folgende Formeln:

$$\begin{aligned}
F(x+\bar{t},\ y+\bar{t},\ z+\bar{t}) &= t\,F(x, y, z) + a\,\bar{t}, \\
F(x+\bar{t},\ y+\bar{t},\ zt) &= t\,F(x, y, z) + b\,\bar{t}, \\
F(x+\bar{t},\ yt,\ z+\bar{t}) &= t\,F(x, y, z) + c\,\bar{t}, \\
F(x+\bar{t},\ yt,\ zt) &= t\,F(x, y, z) + d\,\bar{t}, \\
F(xt,\ y+\bar{t},\ z+\bar{t}) &= t\,F(x, y, z) + e\,\bar{t}, \\
F(xt,\ y+\bar{t},\ zt) &= t\,F(x, y, z) + f\,\bar{t}, \\
F(xt,\ yt,\ z+\bar{t}) &= t\,F(x, y, z) + g\,\bar{t}, \\
F(xt,\ yt,\ zt) &= t\,F(x, y, z) + h\,\bar{t}.
\end{aligned}$$

Die erste dieser Formeln hat mit dem Taylorschen Lehrsatz eine gewisse Ähnlichkeit.

(Eine Verallgemeinerung z. B. der ersten und letzten Formel wäre übrigens

$$F(rx + s\bar{x},\ ry + s\bar{y},\ rz + s\bar{z}) \underset{(E_2)}{=} [a,\ F(x, y, z),\ F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),\ h]_{rs},$$

die sich ergibt, wenn man

$$px + q\bar{x} = [1, x, \bar{x}, 0]_{pq}$$

schreibt, entsprechend für y und z.)

Setzt man für t der Reihe nach $a + t,\ b + t, \cdots, h + t$ ein, so folgt:

$$F(x + \bar{a}\,\bar{t},\ y + \bar{a}\,\bar{t},\ z + \bar{a}\,\bar{t}) = (a + t)\,F(x, y, z),$$
$$F(x + \bar{b}\,\bar{t},\ y + \bar{b}\,\bar{t},\ z(b + t)) = (b + t)\,F(x, y, z),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F(x(h + t),\ y(h + t),\ z(h + t)) = (h + t)\,F(x, y, z).$$

Ich nenne nun die Substitutionen

$$x' = x + \bar{a},\ y' = y + \bar{a},\ z' = z + \bar{a},$$
$$x' = x + \bar{b},\ y' = y + \bar{b},\ z' = z\,b,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x' = x\,h, \qquad y' = y\,h, \qquad z' = z\,h$$

die 8 „natürlichen Substitutionen" von F, und die Substitutionen

$$x' = x + \bar{a}\,\bar{t},\ y' = y + \bar{a}\,\bar{t},\ z' = z + \bar{a}\,\bar{t},$$
$$x' = x + \bar{b}\,\bar{t},\ y' = y + \bar{b}\,\bar{t},\ z' = z(b + t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x' = x(h + t),\ y' = y(h + t),\ z' = z(h + t)$$

die „erweiterten natürlichen" Substitutionen. Aus unseren Formeln folgt:

Satz 19: *Die natürlichen Substitutionen führen F in $aF, bF, \cdots, hF$, die erweiterten natürlichen Substitutionen in $(a+t)F, (b+t)F, \cdots, (h+t)F$ über.*

Hieraus folgt:

Satz 20: *Aus jeder Lösung der Gleichung $F = 0$ geht durch eine der erweiterten oder unerweiterten natürlichen Substitutionen eine neue Lösung hervor.*

Bei der Gelegenheit möchte ich folgendes bemerken: Ist x, y, z eine Lösung, so ist für $t = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\,\bar{e}\,\bar{f}\,\bar{g}\,\bar{h}$

$$x' = x + ut, \quad y' = y + vt, \quad z' = z + wt$$

auch eine Lösung, weil

$$F(x', y', z') = tF(x + u,\ y + u,\ z + u) + \bar{t}\,F(x, y, z),$$

wo das erste Glied wegen $F \leqslant \bar{t}$ (vgl. Satz 21a)) verschwindet.

Satz 21*): *Der Zwischenwertsatz: Es sei*

$$F(x, y, z) = [a, b, \cdots, h]_{xyz}.$$

*) Vgl. Schröder, a. a. O., Bd. I, S. 427 flgd.

Dann ist

a) $abcdefgh \in F(x,y,z) \in a+b+c+d+e+f+g+h.$

b) *Es gibt Werte von x, y, z, für die F jeden gegebenen Zwischenwert zwischen $abcdefgh$ und $a+b+c+d+e+f+g+h$, d. h. jeden gegebenen Wert von der Form*

$$abcdefgh + t(a+b+c+d+e+f+g+h)$$

annimmt. Dasselbe gilt für beliebig viele Variable, auf die sich der folgende Beweis ohne weiteres ausdehnen läßt.

Für a) mag der folgende Beweis vielleicht noch etwas einfacher sein als der Schrödersche:

$$\begin{array}{c} axyz \in a, \\ bxy\bar{z} \underset{6)_\times}{\in} b, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ h\bar{x}\bar{y}\bar{z} \in h, \\ \hline F = axyz + bxy\bar{z} + \cdots + h\bar{x}\bar{y}\bar{z} \underset{17)_+}{\in} a+b+\cdots+h. \end{array}$$

Ebenso läßt sich beweisen:

$$\bar{F} = \bar{a}xyz + \bar{b}xy\bar{z} + \cdots + \bar{h}\bar{x}\bar{y}\bar{z} \in \bar{a}+\bar{b}+\cdots+\bar{h},$$

$$abcdefgh \underset{25)}{\in} F, \quad \text{q. e. d.}$$

Der Beweis von b) folgt aus Satz 19, denn durch Zusammensetzung aller natürlichen Substitutionen kann man F in $abcdefghF$ überführen, d. h. nach a) und $9)_\times$ in $abcdefgh$. Diese zusammengesetzte Substitution wird also eine Lösung der Gleichung $F(x,y,z) = abcdefgh$ ergeben, und ich will eine so erhaltene Lösung eine „natürliche Lösung" nennen. Je nach der Reihenfolge, in der man die Substitutionen zusammensetzt, erhält man verschiedene natürliche Lösungen. Wendet man zuerst die zu a, dann die zu b, dann die zu c gehörige Substitution an und so fort, so erhält man folgende Lösung:*)

$$\begin{aligned} x &= \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}+efgh\cdot u, \\ y &= \bar{a}+\bar{b}+cd(\bar{e}+\bar{f}+gh\cdot v), \\ z &= \bar{a}+b\Big(\bar{c}+d(\bar{e}+f(\bar{g}+h\cdot w))\Big), \end{aligned}$$

deren Gesetzmäßigkeit einleuchtet. Für u, v, w darf man beliebige Werte einsetzen. Eine ganz entsprechende Form haben die Negate:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= abcd(\bar{e}+\bar{f}+\bar{g}+\bar{h}+\bar{u}), \\ \bar{y} &= ab(\bar{c}+\bar{d}+ef(\bar{g}+\bar{h}+\bar{v})), \\ \bar{z} &= a\Big(\bar{b}+c\Big(\bar{d}+e(\bar{f}+g(\bar{h}+\bar{w}))\Big)\Big). \end{aligned}$$

*) Ich habe diese Lösung zuerst hergeleitet a. a. O. S. 93.

Herr Müller hat bemerkt, daß, wenn die Eliminationsresultante erfüllt ist, die letzten Glieder, welche u, v, w enthalten, herausfallen, wie man beim Ausmultiplizieren leicht mit Hilfe von $29)_+$ erkennt.

Übrigens liefert nicht nur jede Lösung der Gleichung

$$F = a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h$$

eine Lösung der Gleichung $F = 0$ für den Fall, daß die „Eliminationsresultante" $R \equiv a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h = 0$ erfüllt ist, sondern auch umgekehrt:

Satz 22: *Ist $F(x, y, z) = 0$ erfüllt für irgend ein Wertsystem x, y, z (das im allgemeinen von den Parametern $a, b, \cdots, h$ abhängen wird) bei allen derartigen Werten der Parameter, welche die Eliminationsresultante erfüllen, so ist auch bei beliebigen Parameterwerten stets*

$$F(x, y, z) = a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h$$

für dieselben Ausdrücke x, y, z, (in die man die neuen Parmaterwerte eingesetzt zu denken hat). Dies gilt auch dann, wenn die Parameter $a, b, \cdots, h$ spezielle Werte haben, wenn sie etwa spezielle Funktionen anderer Parameter $p, q, r, \cdots$ sind.

Denn wenn aus der Eliminationsresultante $F = 0$ folgt, so ist nach Satz 17 $F \underset{a)}{\lessdot} R$, $R \lessdot F$, $F \underset{\text{III}}{=} R$, q. e. d.

Satz 14″: *Die Verifikationstheoreme lassen sich auch auf solche Sätze anwenden, deren Voraussetzung resp. Behauptung besagt, daß es Werte gibt, die eine gegebene Gleichung erfüllen.*

Voraussetzung resp. Behauptung lassen sich dann nämlich ersetzen durch die Eliminationsresultante der betreffenden Gleichungen.

Die Gleichung

$$F(x, y, z) = a + b + c + d + e + f + g + h$$

läßt sich durch Kontraposition

$$\bar a\,\bar b\,\bar c\,\bar d\,\bar e\,\bar f\,\bar g\,\bar h \underset{25)}{=} \overline{F(x, y, z)} = [\bar a, \bar b, \cdots, \bar h]_{xyz}$$

auf die zuerst gelöste zurückführen. Eine Lösung ist also z. B.

$$x = a + b + c + d + \bar e\,\bar f\,\bar g\,\bar h \cdot u,$$
$$y = a + b + \bar c\,\bar d\,(e + f + \bar g\,\bar h \cdot v),$$
$$z = a + \bar b\,\big(c + \bar d\,(e + \bar f\,(g + \bar h \cdot w))\big).$$

Ist nun eine Lösung x_0, y_0, z_0 der Gleichung

$$F = a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h$$

und eine Lösung x_1, y_1, z_1 der Gleichung

$$F = a + b + c + d + e + f + g + h$$

bekannt, so ist

$$x = x_0\,\bar t + x_1\,t, \quad y = y_0\,\bar t + y_1\,t, \quad z = z_0\,\bar t + z_1\,t$$

eine Lösung der Gleichung

$$F = abcdefgh + t(a + b + c + d + e + f + g + h),$$

wie aus dem Verifikationstheorem mit Hilfe von $6)_{\times +}$ folgt.

Die Lösung soll eine natürliche genannt werden, wenn x_0, y_0, z_0 sowie x_1, y_1, z_1 nach der oben auseinandergesetzten Methode gewonnen sind. Die natürlichen Lösungen dürften die denkbar einfachsten sein.

Herr Korselt hat Zeichen angegeben, mit denen man die Verallgemeinerung unserer Formeln nicht nur durch Beispiele und die Worte „usw." andeuten, sondern auch wirklich angeben kann. Mit einer kleinen Abänderung dieser Zeichen setzen wir

$$x^1 = x, \qquad x^0 = \bar{x},$$
$$\overset{1}{+} = +, \qquad \overset{0}{+} = \cdot = \times.$$

Setzt man mit Peirce und Schröder

$$1'_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 \text{ für } \alpha = \beta, \\ 0 \quad ,, \quad \alpha \neq \beta, \end{cases} \qquad 0'_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 \text{ für } \alpha = \beta, \\ 1 \quad ,, \quad \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

so gelten folgende, z. T. von Herrn Korselt aufgestellte Formeln:

$$\alpha^\beta = \beta^\alpha = \alpha\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta} = 1'_{\alpha\beta},$$
$$\bar{\alpha}^\beta = \bar{\beta}^\alpha = \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 0'_{\alpha\beta},$$
$$\alpha^{\beta^\gamma} = \alpha\beta\gamma + \sum \alpha\bar{\beta}\bar{\gamma},$$
$$\alpha^{\beta^{\gamma^\delta}} = \alpha\beta\gamma\delta + \sum \alpha\beta\bar{\gamma}\bar{\delta}, \text{ usw.},$$

wo die Summationen sich über sämtliche Permutationen der Faktoren erstrecken.

$$(x^\alpha)^\beta = (x^\beta)^\alpha = x^{(\alpha^\beta)} = x^{(\beta^\alpha)}$$
$$(\text{speziell: } x^{\bar{\alpha}} = \bar{x}^\alpha = \overline{x^\alpha})$$
$$x^\alpha \overset{\gamma}{+} x^\beta = x^\alpha \overset{\gamma}{+} \bar{\alpha}^{\beta^\gamma} = x^\beta \overset{\gamma}{+} \bar{\alpha}^{\beta^\gamma}$$
$$(\text{speziell: } x^\alpha x^\beta = x^\alpha \cdot 1'_{\alpha\beta} = x^\beta \cdot 1'_{\alpha\beta}$$
$$x^\alpha + x^\beta = x^\alpha + 0'_{\alpha\beta} = x^\beta + 0'_{\alpha\beta})$$
$$x \overset{\alpha}{+} y = x \overset{\alpha}{+} (x^\beta \overset{\alpha^\beta}{+} y)$$
$$(x \overset{\alpha}{+} y)^\beta = x^\beta \overset{\alpha^\beta}{+} y^\beta$$
$$(x \overset{\alpha}{+} y) \overset{\beta}{+} z = (x \overset{\beta}{+} z) \overset{\alpha}{+} (y \overset{\beta}{+} z).$$

Die wiederholte Anwendung der beiden letzten Formeln liefert folgende Formeln, mit deren Hilfe man die Richtigkeit der natürlichen Lösungen leicht direkt zeigen kann: Setzt man

$$A = a \overset{\alpha_1}{+} \bar{t}_1^{\alpha_1} \overset{\alpha_2}{+} \bar{t}_2^{\alpha_2} \cdots \overset{\alpha_n}{+} \bar{t}_n^{\alpha_n},$$
$$B = b \overset{\beta_1}{+} \bar{t}_1^{\beta_1} \overset{\beta_2}{+} \bar{t}_2^{\beta_2} \cdots \overset{\beta_n}{+} \bar{t}_n^{\beta_n},$$

so ist

$$\bar{A} = \bar{a} \overset{\bar{\alpha}_1}{+} t_1^{\alpha_1} \overset{\bar{\alpha}_2}{+} t_2^{\alpha_2} \cdots \overset{\bar{\alpha}_n}{+} t_n^{\alpha_n},$$
$$A + B = a + b \overset{\alpha_1+\beta_1}{+} \bar{t}_1^{\alpha_1+\beta_1} \overset{\alpha_2+\beta_2}{+} \bar{t}_2^{\alpha_2+\beta_2} \cdots \overset{\alpha_n+\beta_n}{+} \bar{t}_n^{\alpha_n+\beta_n},$$
$$AB = ab \overset{\alpha_1\beta_1}{+} \bar{t}_1^{\alpha_1\beta_1} \overset{\alpha_2\beta_2}{+} \bar{t}_2^{\alpha_2\beta_2} \cdots \overset{\alpha_n\beta_n}{+} \bar{t}_n^{\alpha_n\beta_n}.$$

Hiernach kann man leicht A^s und $A \overset{s}{+} B$ bilden. Ferner ist

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n} F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

und unsere Ausgangsformeln lassen sich zusammenziehen und verallgemeinern zu

$$F(x_1 \overset{\alpha_1}{+} t^{\alpha_1}, x_2 \overset{\alpha_2}{+} t^{\alpha_2}, \cdots, x_n \overset{\alpha_n}{+} t^{\alpha_n}) = t\,F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) + \bar{t}\,F(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Bezeichnet man die N Modularsysteme n^{ter} Ordnung in irgendeiner Reihenfolge mit

$$(\alpha_{\varkappa 1}, \alpha_{\varkappa 2}, \cdots, \alpha_{\varkappa n}) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, N)$$

und setzt zur Abkürzung

$$F_\varkappa = F(\alpha_{\varkappa 1}, \alpha_{\varkappa 2}, \cdots, \alpha_{\varkappa n}) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, N),$$

so lassen sich die natürlichen Lösungen in folgender Form angeben:

$$x_\nu = \left(\bar{F}_1^{\alpha_{1\nu}} \overset{\alpha_{1\nu}}{+} (\bar{F}_2^{\alpha_{2\nu}} \overset{\alpha_{2\nu}}{+} (\cdots \bar{F}_N^{\alpha_{N\nu}} \overset{\alpha_{N\nu}}{+} u_\nu) \cdots)\right).$$

Durch Ausmultiplizieren der Klammern erhält man, wie eine leichte Überlegung zeigt:

$$x_\nu = \alpha_{1\nu}\bar{F}_1 + \alpha_{2\nu}F_1\bar{F}_2 + \alpha_{3\nu}F_1F_2\bar{F}_3 + \cdots + \alpha_{N\nu}F_1F_2\cdots F_{N-1}\bar{F}_N + u_\nu F_1F_2\cdots F_N.$$

In der Lösung z. B., die wir für $n = 3$ hingeschrieben hatten, erhält man beim Ausmultiplizieren Summen, deren Summanden die Ausdrücke sind:

$$\bar{a},\ a\bar{b},\ ab\bar{c}, \cdots, abcdefg\bar{h},\ abcdefgh,$$

multipliziert

in x	mit	den	Koeffizienten	$1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, u,$
„ y	„	„	„	$1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, v,$
„ z	„	„	„	$1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, w.$

Endlich will ich noch ohne Beweis folgende Sätze erwähnen:

1) Die $N!$ natürlichen Lösungen, die man erhält, indem man die N natürlichen Substitutionen in allen möglichen Reihenfolgen hintereinander ausführt, sind voneinander verschieden.

2) Die Ausführung einer schon früher benutzten Substitution ändert das Ergebnis nicht mehr.

3) Sind in einer allgemeinen Gleichung $a_1, a_2, \cdots, a_N$ die Gleichungskoeffizienten, und

$$x_\nu = \bar{a}_{x_1}^{\alpha_{\nu 1}} +^{\alpha_{\nu 1}} \bar{a}_{x_2}^{\alpha_{\nu 2}} +^{\alpha_{\nu 2}} \cdots \bar{a}_{x_k}^{\alpha_{\nu k}} +^{\alpha_{\nu k}} r_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

eine Lösung der Gleichung, so haben

$$\alpha_{\nu 1}, \alpha_{\nu 2}, \cdots, \alpha_{\nu k}$$

dieselben Werte wie in dem Anfang einer natürlichen Lösung. (Ist z. B. $\bar{b}^\alpha +^\alpha r_1$, $\bar{b}^\beta +^\beta r_2$, $\bar{b}^\gamma +^\gamma r_3$ eine Lösung unserer früheren Gleichung mit drei Unbekannten, so ist $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, wie man leicht sieht.)

§ 7.

Reproduktive Lösungen.

Wir beschränken wieder die Betrachtungen der ersten Hälfte dieses Paragraphen auf Gleichungen mit drei Unbekannten, da auch hier die Verallgemeinerung keine Schwierigkeiten bietet.

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v, \cdots), \\ y &= \psi(u, v, \cdots), \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

ist eine „allgemeine Lösung“ der Gleichung $F(x, y, \cdots) = abcdefgh$, wenn sie

1) für beliebige Werte der „arbiträren“ Parameter $u, v, \cdots$ eine Lösung ist, und

2) fähig ist, jede beliebige Lösung von $F(x, y, \cdots) = abcdefgh$ darzustellen; d. h. ist eine bestimmte Lösung $x_0, y_0, \cdots$ der Gleichung gegeben, so müssen sich bestimmte Werte von $u, v, \cdots$ finden lassen, für die

$$\begin{aligned} x_0 &= \varphi(u, v, \cdots), \\ y_0 &= \psi(u, v, \cdots), \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

wird.

Ich nenne ein System von Funktionen von $u, v, \cdots$ „reproduktiv in bezug auf F“, wenn es die Schrödersche „Adventivforderung“ erfüllt, d. h. wenn jeder der Unbekannten $x, y, \cdots$ einer der arbiträren Parameter $u, v, \cdots$ in der Weise zugeordnet ist, daß, wenn man für $u, v, \cdots$ eine Lösung $x_0, y_0, \cdots$ der Gleichung $F = abcdefgh$ einsetzt,

$$\begin{aligned} x_0 &= \varphi(x_0, y_0, \cdots), \\ y_0 &= \psi(x_0, y_0, \cdots), \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

wird. (Dabei braucht aber $\varphi(u, v, \cdots)$, $\psi(u, v, \cdots)$, $\cdots$ keine Lösung zu sein.) Demnach sind reproduktive Lösungen auch immer allgemeine Lösungen. Das einfachste reproduktive System ist $(u, v, \cdots)$ selber.

Die Gleichung $F = abcdefgh$ läßt sich in der Form schreiben

$$[a_1, b_1, \cdots, h_1]_{xyz} \underset{27)\times}{=} 0,$$

wo

$$a_1 \underset{29)\times}{=} a(\bar{b} + \bar{c} + \cdots + \bar{h}),$$
$$b_1 = b(\bar{a} + \bar{c} + \cdots + \bar{h}),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$h_1 = h(\bar{a} + \bar{c} + \cdots + \bar{g})$$

ist. Die Gleichung läßt sich also ersetzen durch eine auf 0 gebrachte Gleichung, welche (da erstere nach dem Zwischenwertsatz stets eine Lösung besitzt) stets eine Lösung besitzen muß, was wir auch bei den folgenden Betrachtungen stets voraussetzen müssen, da sonst der Begriff „reproduktiv" hinfällig wird.

Wenn wir für $a_1, b_1, \cdots, h_1$ wieder $a, b, \cdots, h$ schreiben, so legen wir zugrunde die Gleichung

$$F = [a, b, \cdots, h]_{xyz} = 0.$$

Wir fragen nun: Welche Formen müssen die Funktionen $\varphi, \psi, \cdots$ haben, um Lösungen resp. reproduktive Funktionenreihen darzustellen?

Jedes Funktionentripel von u, v, w läßt sich durch Entwicklung auf die Form bringen:

$$x = [x_1, x_2, \cdots, x_8]_{u,v,w},$$
$$y = [y_1, y_2, \cdots, y_8]_{u,v,w},$$
$$z = [z_1, z_2, \cdots, z_8]_{u,v,w}.$$

Zunächst folgt aus Satz 18, daß x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2: $\cdots$; x_8, y_8, y_8 acht Lösungen der Gleichung sein müssen, wenn x, y, z Lösungen der Gleichung sind.

Sollen dagegen x, y, z reproduktiv (aber nicht notwendig eine Lösung) sein, so muß aus $F(u, v, w) = 0$ folgen $u = [x_1, x_2, \cdots, x_8]_{uvw}$, folglich ist nach Satz 16

$$u\overline{F(u, v, w)} = [x_1, x_2, \cdots, x_8]_{uvw}\overline{F(u, v, w)},$$

entsprechend für v und w, also z. B. für $u = 1$, $v = 1$, $w = 0$:

$$1 \cdot \bar{b} = x_2\bar{b}, \qquad 1 \cdot \bar{b} = y_2\bar{b}, \qquad 0 \cdot \bar{b} = z_2\bar{b},$$
$$\bar{b} \underset{9)\times}{\Subset} x_2, \qquad \bar{b} \underset{9)\times}{\Subset} y_2, \qquad z_2 \underset{24)\times}{\Subset} b,$$
$$x_2 \underset{9)+}{=} x_2 + \bar{b}, \qquad y_2 \underset{9)+}{=} y_2 + \bar{b}, \qquad z_2 \underset{9)\times}{=} z_2 b.$$

Entsprechende Ausdrücke ergeben sich für die übrigen x_ν, y_ν, z_ν. Setzen wir diese in die Gleichungen für x, y, z ein, so ergibt sich folgende Form für jede reproduktive Funktionenreihe:

$$
(\mathrm{R})\quad \begin{cases}
x = [x_1+\bar{a},\ x_2+\bar{b},\ x_3+\bar{c},\ x_4+\bar{d},\ x_5 e,\ x_6 f,\ x_7 g,\ x_8 h]_{uvw},\\
y = [y_1+\bar{a},\ y_2+\bar{b},\ y_3 c,\ y_4 d,\ y_5+\bar{e},\ y_6+\bar{f},\ y_7 g,\ y_8 h]_{uvw},\\
z = [z_1+\bar{a},\ z_2 b,\ z_3+\bar{c},\ z_4 d,\ z_5+\bar{e},\ z_6 f,\ z_7+\bar{g},\ z_8 h]_{uvw}.
\end{cases}
$$

Umgekehrt ist jede Funktionenreihe von dieser Form reproduktiv. Denn ist

$$F = [a, b, \cdots, h]_{xyz} = 0,$$

so ist z. B.

$$e\bar{x}yz \underset{14)+}{=} 0,$$

folglich verschwindet in dem Ausdruck

$$X = [x_1+\bar{a},\ x_2+\bar{b},\ x_3+\bar{c},\ x_4+\bar{d},\ x_5 e,\ x_6 f,\ x_7 g,\ x_8 h]_{xyz}$$

das 5. Glied und ebenso natürlich das 6., 7. und 8. Ferner folgt aus der Voraussetzung

$$axyz \underset{14)+}{=} 0,$$

$$(x_1+\bar{a})xyz \underset{12)+}{=} (x_1+\bar{a})xyz + axyz \underset{32)\times}{=} (x_1+\bar{a}+a)xyz \underset{20)+\,12)+\,12)\times}{=} xyz.$$

Formt man ebenso das 2., 3. und 4. Glied von X um, so wird

$$X = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} \underset{28)+}{=} x.$$

Ebenso läßt sich unsere Behauptung für die zweite und dritte Zeile von (R) beweisen.

(R) stellt also eine reproduktive Lösung dar, wenn x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; $\cdots$; x_8, y_8, z_8 irgend welche Lösungen sind.

Es genügt aber schon die Annahme, daß

$$
\begin{array}{lll}
x_1' = x_1+\bar{a}, & y_1' = y_1+\bar{a}, & z_1' = z_1+\bar{a},\\
x_2' = x_2+\bar{b}, & y_2' = y_2+\bar{b}, & z_2' = z_2 b,\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
x_8' = x_8 h, & y_8' = y_8 h, & z_8' = z_8 h
\end{array}
$$

Lösungen sind. Dann läßt sich nämlich in (R) der Ausdruck für x in der Form schreiben:

$$x \underset{11)\times+}{=} [x_1'+\bar{a},\ x_2'+\bar{b},\ x_3'+\bar{c},\ x_4'+\bar{d},\ x_5' e,\ x_6' f,\ x_7' g,\ x_8' h]_{uvw},$$

entsprechend für y und z. Also läßt sich unter dieser Voraussetzung x, y, z wieder auf die vorige Form bringen. Wir haben also das Resultat:

Satz 23: *Jede reproduktive Lösung läßt sich auf die Form* (R) *bringen, wo entweder*

$$x_1,\ y_1,\ z_1,$$
$$x_2,\ y_2,\ z_2,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$x_8,\ y_8,\ z_8,$$

oder aber

$$x_1+\bar a,\ y_1+\bar a,\ z_1+\bar a,$$
$$x_2+\bar b,\ y_2+\bar b,\ z_2 b,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$x_8 h,\qquad y_8 h,\qquad z_8 h$$

Lösungen der Gleichung $F=0$ *bedeuten.*

Für n Unbekannte schreibt Herr Korselt die Form (R) etwa so:

$$\text{(R*)}\qquad x_\varkappa=\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n}[x_{\varkappa\lambda}\overset{\alpha_\varkappa}{+}F^{\bar\alpha_\varkappa}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)]u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\cdots u_n^{\alpha_n},$$

wo λ die Zahl ist, welche angibt, zu dem wievielten Elementarsystem $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ gehört.

Nun läßt sich aber (R) noch auf eine andere Form bringen. Aus $x_1+\bar a \underset{29)+}{=\!=} x_1 a+\bar a$ folgt nämlich

$$x=[x_1 a+1\cdot\bar a,\ x_2 b+1\cdot\bar b,\ x_3 c+1\cdot\bar c,\ x_4 d+1\cdot\bar d,\ x_5 e+0\cdot\bar e,\ x_6 f+0\cdot\bar f,$$
$$x_7 g+0\cdot\bar g,\ x_8 h+0\cdot\bar h]_{uvw}$$
$$\underset{(\overline{\overline{E_2}})}{=}[x_1,x_2,\cdots,x_8]_{uvw}[a,b,\cdots,h]_{uvw}+[1,1,1,1,0,0,0,0]_{uvw}[\bar a,\bar b,\cdots,\bar h]_{uvw}.$$

Entsprechende Ausdrücke ergeben sich für y und z. Setzen wir nun

$$[x_1,x_2,\cdots,x_8]_{uvw}=\varphi(u,v,w),$$
$$[y_1,y_2,\cdots,y_8]_{uvw}=\psi(u,v,w),$$
$$[z_1,z_2,\cdots,z_8]_{uvw}=\chi(u,v,w),$$

so wird

$$x=\varphi(u,v,w)F(u,v,w)+u\overline{F(u,v,w)},$$
$$y=\psi(u,v,w)F(u,v,w)+v\overline{F(u,v,w)},$$
$$z=\chi(u,v,w)F(u,v,w)+w\overline{F(u,v,w)}.$$

$\varphi(u,v,w)$, $\psi(u,v,w)$, $\chi(u,v,w)$ ist eine Lösung der Gleichung, wenn x, y, z eine Lösung ist, weil φ, ψ, χ mit x, y, z übereinstimmen.

Für eine beliebige Anzahl von Unbekannten haben wir also das Resultat:

Satz 24: *Jede reproduktive Funktionenreihe der Gleichung*

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$$

läßt sich auf die Form bringen

$$(\mathrm{R}_1)\quad \varphi_\varkappa(u_1, u_2, \cdots, u_n) F(u_1, u_2, \cdots, u_n) + u_\varkappa \overline{F(u_1, u_2, \cdots, u_n)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n),$$

und umgekehrt: Jede derartige Funktionenreihe ist reproduktiv.

Satz 24a: *Jede reproduktive Lösung der Gleichung $F = 0$ läßt sich in der Weise auf die Form* (R_1) *bringen, daß die $\varphi_\varkappa$ eine Lösung der Gleichung bilden, und umgekehrt: Jede derartige Funktionenreihe* (R_1), *bei der die $\varphi_\varkappa$ eine Lösung der Gleichung sind, ist eine reproduktive Lösung.*

Der einfachste Fall ist natürlich der, wo die $\varphi_\varkappa$ Konstante in bezug auf die arbiträren Parameter $u_\varkappa$ sind, wo also die $\varphi_\varkappa$ eine „rein partikulare" Lösung sind, d. h. eine Lösung ohne arbiträre Parameter. Es sei aber ausdrücklich bemerkt, daß sich eine reproduktive Lösung im allgemeinen nicht, wie ich anfangs vermutete, auf eine solche Form bringen läßt, wo die $\varphi_\varkappa$ eine rein partikulare Lösung bilden. Die Gleichung $F(x, y) = xy + \bar{x}\bar{y} = 0$ hat z. B., wenn u und v die arbiträren Parameter sind, die reproduktive Lösung $x = u$, $y = \bar{u}$ (die zufällig in bezug auf v konstant ist. Man kann ja aber auch schreiben $x = u(v + \bar{v})$, $y = \bar{u}(v + \bar{v})$). u läßt sich, wie leicht zu zeigen ist, nicht auf die Form $aF(u, v) + u\overline{F(u, v)}$ bringen, wenn a konstant sein soll.

Die Formen (R) und (R_1) sind äquivalent, und wir hätten auch unsere Beweisführung anstatt an der Form (R) an der Form (R_1) durchführen können.

Dieses ist sogar einfacher und interessanter, doch schien mir auch jenes sehr lehrreich und methodisch wichtig zu sein, so daß ich es nicht glaubte, umgehen zu sollen. Für die zweite Methode brauchen wir den

Hilfssatz. *Ist $\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, t = 0$, so lassen sich die $x_\varkappa t$ auf die Form bringen:*

$$x_\varkappa t = z_\varkappa t,$$

wo die $z_\varkappa$ passende Lösungen der Gleichung $\Phi = 0$ sind. Dies folgt aus Satz 14'', indem man $t = 1$ und $t = 0$ setzt.*) t darf von den $x_\varkappa$ abhängig sein, auch dürfen t und die Gleichungsparameter von Φ voneinander abhängen.

Satz 25: *Die allgemeinen Ausdrücke für solche Werte, welche, wenn man $t = 0$ setzt, Lösungen der Gleichung $\Phi(y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0$ werden, sind*

$$y_\varkappa = u_\varkappa t + z_\varkappa \bar{t},$$

wo die $u_\varkappa$ ganz beliebige Werte (z. B. Funktionen von t) und die $z_\varkappa$ Lösungen der Gleichung $\Phi = 0$ bedeuten.

*) Man kann den Satz auch beweisen, indem man mit dem Entwicklungs- oder Verifikationstheorem zeigt, daß die $z_\varkappa = x_\varkappa t + r_\varkappa \bar{t}$, wo die $r_\varkappa$ eine beliebige Lösung von $\Phi = 0$ bedeuten, eine Lösung der verlangten Art bilden.

Beweis. 1) Die Ausdrücke sind, falls $t = 0$ ist, wirklich eine Lösung der Gleichung, wie man sofort sieht.

2) Sind irgendwelche Ausdrücke $y_1, y_2, \cdots, y_n$ gegeben, welche für $t = 0$ eine Lösung der Gleichung sind, so ist nach Satz 16

$$\Phi(y_1, y_2, \cdots, y_n)\bar{t} = 0.$$

Entwickelt man die $y_\varkappa$ nach t:

$$y_\varkappa = u_\varkappa t + v_\varkappa \bar{t},$$

so folgt

$$\Phi(y_1, y_2, \cdots, y_n) \underset{(E_4)}{=} \Phi(u_1, u_2, \cdots, u_n)t + \Phi(v_1, v_2, \cdots, v_n)\bar{t}.$$

Bei Multiplikation mit $\bar{t}$ wird wegen $\Phi(y_1, y_2, \cdots, y_n)\bar{t} = 0$:

$$\Phi(v_1, v_2, \cdots, v_n)\bar{t} = 0,$$

folglich nach dem Hilfssatz

$$v_\varkappa \bar{t} = z_\varkappa \bar{t}.$$

Setzen wir dies in den Ansatz für $y_\varkappa$ ein, so erhalten wir die Form des Lehrsatzes, q. e. d.

Dieser einfache Satz besitzt offenbar eine größere Tragweite, als man beim ersten Anblick glauben sollte. Herr Korselt hat z. B. die Frage aufgeworfen, wie Funktionen

$$f_\varkappa(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

aussehen müssen, welche stets dann eine Lösung der Gleichung

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

darstellen, falls $x_1, x_2, \cdots, x_n$ eine Lösung der Gleichung ist. Die Antwort lautet nach Satz 25 (für $t = F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$)

$$f_\varkappa(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \psi_\varkappa(x_1, x_2, \cdots, x_n)F(x_1, x_2, \cdots, x_n) + z_\varkappa \overline{F(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$
$$(\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

wo die $\psi_\varkappa$ beliebige Funktionen (den $u_\varkappa$ in Satz 25 entsprechend) und die $z_\varkappa$ Lösungen von $F = 0$ (vorgreifend können wir bemerken: Ausdrücke von der Form (R_1), wenn dort die $\varphi_\varkappa$ eine Partikularlösung, z. B. eine natürliche, bedeuten) sind.

Ebenso einfach erledigt sich das Problem, Funktionen von $x_1, x_2, \cdots, x_n$ zu suchen, welche Lösungen einer Gleichung $\Phi = 0$ darstellen, falls $x_1, x_2, \cdots, x_n$ Lösungen von $F = 0$ sind. Es ergibt sich wieder der vorige Ausdruck, in welchem aber diesmal die $z_\varkappa$ Lösungen der Gleichung $\Phi = 0$ bedeuten.

Dies benutzen wir zur Aufstellung von reproduktiven Ausdrücken $f_\varkappa(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Diese sollen die Eigenschaft haben, daß für $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$

$$x_\varkappa = f_\varkappa(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

wird. Die vereinigte Gleichung dieser n Gleichungen entspricht also hier der Gleichung $\Phi = 0$. Es müssen also die $z_\varkappa$ Lösungen von $\Phi = 0$, also Lösungen der Gleichungen

$$x_\varkappa = z_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

sein. Diese Gleichungen besitzen aber nur die eine Lösung $z_\varkappa = x_\varkappa$. Setzen wir diese ein, so erhalten wir

$$f_\varkappa(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \psi_\varkappa(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, F(x_1, x_2, \cdots, x_n) + x_\varkappa \overline{F(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$
$$(\varkappa = 1, 2, \cdots, n),$$

q. e. d. Die $x_\varkappa$ sollen hier natürlich nicht mehr Lösungen bedeuten, können also auch durch $u_\varkappa$ ersetzt werden.

Stellen nun die $f_\varkappa$ eine Lösung der Gleichung $F = 0$ dar, so läßt sich der obige Ausdruck stets so umformen, daß die $\psi_\varkappa$ durch eine Lösung ersetzt werden, wie es Satz 24 verlangt, und zwar höchst einfach dadurch, daß man $\psi_\varkappa$ durch $f_\varkappa$ ersetzt, was in jedem Falle erlaubt ist (auch ohne daß die $f_\varkappa$ eine Lösung bilden), weil durch Multiplikation der letzten n Gleichungen mit F

$$f_\varkappa \cdot F = \psi_\varkappa \cdot F \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

folgt. (Freilich kann man auch im allgemeinen die $\varphi_\varkappa$ so bestimmen, daß (R_1) eine reproduktive Lösung ist, ohne daß die $\varphi_\varkappa$ eine Lösung wären.)

Der Ausdruck (R_1) würde nun eine Methode geben, alle möglichen reproduktiven Lösungen auch wirklich aufzustellen, falls es gelänge, alle möglichen Lösungen $\varphi_\varkappa$ herzustellen. Dies ist aber leicht, wenn nur eine einzige Lösung $a_1, a_2, \cdots, a_n$ (z. B. eine natürliche) vorliegt. Der Ausdruck $a_\varkappa F(v_1, v_2, \cdots, v_n) + v_\varkappa \overline{F(v_1, v_2, \cdots, v_n)}$ liefert dann sämtliche Lösungen. Man braucht nur für die $v_\varkappa$ ganz beliebige Funktionen $\vartheta_\varkappa(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ zu nehmen. Sämtliche reproduktiven Lösungen sind also in der Form enthalten:

$$(R_2) \quad x_\varkappa = [a_\varkappa F(\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_n) + \vartheta_\varkappa \overline{F(\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_n)}]\, F(u_1, u_2, \cdots, u_n)$$
$$+ u_\varkappa \overline{F(u_1, u_2, \cdots, u_n)},$$

wo die $\vartheta_\varkappa$ beliebige Funktionen der $u_\varkappa$ sind.

Setzt man z. B. $\vartheta_\varkappa = \bar{u}_\varkappa$, so erhält man folgende bis jetzt noch nicht bekannte reproduktive Lösung:

$$x_\varkappa = [a_\varkappa F(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_n) + \bar{u}_\varkappa \overline{F(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_n)}]\, F(u_1, u_2, \cdots, u_n)$$
$$+ u_\varkappa \overline{F(u_1, u_2, \cdots, u_n)}.$$

Nun noch einige Folgerungen für Leser, welche mit der Algebra der Relative vertraut sind.

In der Algebra der Relative ist

$$x = [a \cdot 1;\ F(\bar{u});\ 1 + \bar{u} \cdot 0 \mathbin{\dagger} \overline{F(\bar{u})} \mathbin{\dagger} 0] \mathbin{\dagger} 1;\quad F(u);\ 1 + u \cdot 0 \mathbin{\dagger} \overline{F(u)} \mathbin{\dagger} 0$$

eine neue reproduktive Lösung, und, was die Hauptsache ist, keine „rigorose". *) Sie hat aber leider mit einer rigorosen immerhin so viel Ähnlichkeit, daß sie nur einen schwachen Fortschritt gegenüber der Schröderschen rigorosen Lösung darstellt.

Sind p Lösungen

$$a_{\lambda 1},\ a_{\lambda 2}, \cdots, a_{\lambda n} \quad (\lambda = 1, 2, \cdots, p)$$

gegeben, so ist

$$x_\varkappa = \sum_\lambda a_{\lambda\varkappa} T^\lambda(u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

auch eine Lösung, wenn die T^λ einander beigeordnete Funktionen sind. Setzt man diese Ausdrücke in (R_1) für die $\varphi_\varkappa$ ein, so kann man mannigfaltige neue reproduktive Lösungen erhalten. Für $\lambda = 2$ z. B. ergibt sich:

Sind a und b Lösungen der Gleichung $F(x) = 0$ in der Algebra der Relative, so ist

$$x = [a \cdot 1;\ T(u);\ 1 + b \cdot 0 \mathbin{\dagger} \overline{T(u)} \mathbin{\dagger} 0] \cdot 1;\ F(u);\ 1 + u \cdot 0 \mathbin{\dagger} \overline{F(u)} \mathbin{\dagger} 0$$

eine reproduktive Lösung, die, wenn man für u keine Lösung der Gleichung einsetzt, immer wieder die Lösung a oder die Lösung b reproduziert, welche also, wenn dieser Ausdruck gestattet ist, genau halb so rigoros ist als die Schrödersche. Ebenso läßt sich durch Verwendung von p beigeordneten ausgezeichneten Relativen (die man nach dem Muster (D′) konstruieren kann), aus p gegebenen Lösungen eine reproduktive Lösung konstruieren welche stets eine dieser p Lösungen reproduziert, falls man für u keine Lösung einsetzt.

Sind auch solche Lösungen noch nicht befriedigend, so mögen sie doch vielleicht in speziellen Fällen gute Dienste leisten, vielleicht auch einen Fingerzeig geben, wie man in der Frage weiter kommen kann.

§ 8.

Die analytische Methode und die Anzahl der Lösungen.

Wir wollen jetzt eine andere Methode der Auflösung von Gleichungen besprechen, welche ich die analytische Methode nennen möchte. Sie bildet ein sehr primitives Verfahren, und stimmt im wesentlichen mit dem Jevonsschen Ausmusterungsverfahren überein, gestattet aber nicht nur, sämtliche möglichen Lösungen auch wirklich aufzustellen und ihre Anzahl zu bestimmen (was auch durch Reduktion (siehe § 9) gelingt),

*) Vgl. Schröder, a. a. O. Bd. III, S. 167.

sondern sie gibt uns auch den besten Einblick in die Struktur der Lösungen und bleibt die ultima ratio in allen Fällen, wo andere Methoden versagen, z. B. bei einigen Untersuchungen über symmetrische Lösungen. Sie besteht darin, daß man die Gleichung $F = 0$ löst für alle Modularsysteme der vorkommenden Gleichungsparameter und arbiträren Parameter, und dann gemäß § 5 zusammensetzt.

Es handelt sich also dabei um die Aufgabe, parameterlose Gleichungen zu lösen, denn wenn man die Parameter gleich 0 oder 1 setzt, fallen sie eben fort. Nun hat aber z. B. die Gleichung $x y \bar{z} = 0$ nicht das Wertsystem $(1, 1, 0)$, wohl aber alle anderen Modularsysteme als Lösungen. Jede kompliziertere parameterlose Funktion von x, y, z läßt sich nun nach x, y, z entwickeln, d. h. auf die Form bringen:

$$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_8]_{xyz}.$$

Nehmen wir nun z. B. die Gleichung

$$x y \bar{z} + x \bar{y} \bar{z} + \bar{x} \bar{y} z = 0,$$

so wird das erste Glied gewiß für jedes Modularsystem verschwinden, wenn wir nur das Wertsystem $(1, 1, 0)$ vermeiden; das zweite, wenn wir nur das Wertsystem $(1, 0, 0)$ vermeiden, und das dritte, wenn wir nur das Wertsystem $(0, 0, 1)$ vermeiden. Diese drei Modularsysteme sind also die einzigen, welche nicht Lösungen der Gleichung sind; alle übrigen $2^3 - 3$ Modularsysteme sind Lösungen. Allgemein können wir sagen:

Jede entwickelte parameterlose Gleichung mit n Unbekannten und r Gliedern besitzt genau $l = N - r$ rein partikuläre Lösungen, d. h. Modularlösungen $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2; \cdots; \xi_l, \eta_l, \zeta_l$.

Unlösbar ist also eine parameterlose Gleichung dann und nur dann, wenn in der Entwickelung alle N Glieder vorkommen. (In der Tat reduziert sich dann die Gleichung auf $1 \underset{28)+}{=} 0$ und kann deshalb keine Lösungen besitzen.)

Wieviele Lösungen gibt es nun, in denen höchstens die arbiträren Parameter $u_1, u_2, \cdots, u_p$ vorkommen dürfen?

Ist

$$x = \varphi(u_1, u_2, \cdots, u_p),$$
$$y = \psi(u_1, u_2, \cdots, u_p),$$
$$z = \chi(u_1, u_2, \cdots, u_p)$$

eine Lösung, und sind die $u^\varkappa$ den $u_\varkappa$ zugeordnet, so ist

$$(\mathrm{L}_1) \quad \begin{cases} x \underset{(E_5)}{=} \varphi(1, 1, \cdots, 1) u^1 + \varphi(1, 1, \cdots, 0) u^2 + \cdots + \varphi(0, 0, \cdots, 0) u^P, \\ y = \psi(1, 1, \cdots, 1) u^1 + \psi(1, 1, \cdots, 0) u^2 + \cdots + \psi(0, 0, \cdots, 0) u^P, \\ z = \chi(1, 1, \cdots, 1) u^1 + \chi(1, 1, \cdots, 0) u^2 + \cdots + \chi(0, 0, \cdots, 0) u^P. \end{cases}$$

Die drei Koeffizienten von $u^\varkappa$ haben keine Parameter und bilden nach Satz 18 eine Lösung, folglich sind sie eine der obigen l Modularlösungen. Jede Lösung hat also die Form

$$(\mathrm{L}_2)\qquad \begin{cases} x = \xi_{\varkappa_1} u^1 + \xi_{\varkappa_2} u^2 + \cdots + \xi_{\varkappa_P} u^P, \\ y = \eta_{\varkappa_1} u^1 + \eta_{\varkappa_2} u^2 + \cdots + \eta_{\varkappa_P} u^P, \\ z = \zeta_{\varkappa_1} u^1 + \zeta_{\varkappa_2} u^2 + \cdots + \zeta_{\varkappa_P} u^P, \end{cases}$$

wo die ξ, η, ζ Modularlösungen bedeuten, und umgekehrt bilden nach Satz 18 Ausdrücke von der Form (L_2) stets eine Lösung. Will man also sämtliche Lösungen bilden, so hat man jedes der P Gebiete $u^\varkappa$ mit sämtlichen l Modularlösungen durch Multiplikation zu verbinden, so daß man im ganzen l^P Lösungen erhält. Diese sind auch nach Satz 13 voneinander verschieden (d. h. je zwei für mindestens ein Wertsystem der $u^\varkappa$), da die l Modularlösungen auch dann noch verschieden bleiben (wenigstens für $u^\varkappa \neq 0$), wenn man sie mit einem arbiträren Gebiete $u^\varkappa$ multipliziert. Ich will diese Lösungen einmal alle hinschreiben für die Gleichung

$$x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} = 0$$

für den Fall, daß ein arbiträrer Parameter u erlaubt sein soll. Die rein partikularen Lösungen sind $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$. Die zu u gehörigen disjunktiven Gebiete sind u, $\bar{u}$. Daher ist $P = 2$ und es gibt 3^2 Lösungen. Schreiben wir für den Augenblick kurz (a, b) für $au + b\bar{u}$, so sind diese:

$$\begin{aligned} x &= (1, 1),\ (1, 1),\ (1, 0),\ (1, 1),\ (1, 1),\ (1, 0),\ (0, 1),\ (0, 1),\ (0, 0), \\ y &= (1, 1),\ (1, 1),\ (1, 0),\ (1, 1),\ (1, 1),\ (1, 0),\ (0, 1),\ (0, 1),\ (0, 0), \\ z &= (1, 1),\ (1, 0),\ (1, 1),\ (0, 1),\ (0, 0),\ (0, 1),\ (1, 1),\ (1, 0),\ (1, 1). \end{aligned}$$

Untereinanderstehende Moduln bilden immer eine Lösung.

Sind unter den Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_P$ einige einander gleich, so können wir in (L_2) die entsprechenden Modularlösungen vor die Klammer ziehen und erhalten so als die Form einer beliebigen Lösung:

$$(\mathrm{L}_3)\qquad \begin{cases} x = \xi_{\varkappa_1}(u^{\lambda_1} + u^{\mu_1} + \cdots) + \xi_{\varkappa_2}(u^{\lambda_2} + u^{\mu_2} + \cdots) + \cdots, \\ y = \eta_{\varkappa_1}(u^{\lambda_1} + u^{\mu_1} + \cdots) + \eta_{\varkappa_2}(u^{\lambda_2} + u^{\mu_2} + \cdots) + \cdots, \\ z = \zeta_{\varkappa_1}(u^{\lambda_1} + u^{\mu_1} + \cdots) + \zeta_{\varkappa_2}(u^{\lambda_2} + u^{\mu_2} + \cdots) + \cdots, \end{cases}$$

wo $\varkappa_1 \neq \varkappa_2 \neq \cdots$, ebenso die Exponenten alle voneinander verschieden und die Gliederzahl $\leqq l$ und auch $\leqq P$ ist.

Ich behaupte nun: Jede allgemeine Lösung ist in der Form enthalten

$$(\mathrm{A})\qquad x = \xi_1 t^1 + \xi_2 t^2 + \cdots + \xi_l t^l,$$

entsprechend für y und z.

1) Diese Lösung ist allgemein, denn jede beliebige Lösung (L_3) kann man aus ihr erhalten, indem man

$$t^{\varkappa_1} = u^{\lambda_1} + u^{\mu_1} + \cdots,$$
$$t^{\varkappa_2} = u^{\lambda_2} + u^{\mu_2} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und die übrig bleibenden t gleich 0 setzt. Nach Satz 4 ist dann $(t^1, t^2, \cdots, t^l)$ auch wirklich ein Disjunktivsystem.

2) Jede allgemeine Lösung läßt sich auf diese Form bringen. Denn denken wir uns eine allgemeine Lösung in der Form (L_3) geschrieben, so behaupte ich, daß sämtliche l Modularlösungen unter den vor den Klammern stehenden Koeffizientensystemen (vielleicht mehrfach) enthalten sind, daß also eine vorgelegte Modularlösung $(\xi_\varkappa, \eta_\varkappa, \zeta_\varkappa)$ mit einem der Koeffizientensysteme übereinstimmt. Denn wegen der Allgemeinheit der Lösungen muß es ein Wertsystem der u geben, für das unsere Ausdrücke (L_3) gleich $\xi_\varkappa$, $\eta_\varkappa$, $\zeta_\varkappa$ werden. Dieses Wertsystem kann ev. von gewissen Parametern v abhängen, die aber keine Gleichungsparameter sind; es sei etwa

$$u^\varkappa = g^\varkappa(v_1, v_2, \cdots). \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, P)$$

Dann soll also sein

$$\xi_\varkappa = \xi_{\varkappa_1}(g^{\lambda_1} + g^{\mu_1} + \cdots) + \xi_{\varkappa_2}(g^{\lambda_2} + g^{\mu_2} + \cdots) + \cdots,$$

entsprechend für $\eta_\varkappa$ und $\zeta_\varkappa$. Soll dies allgemein richtig sein, so ist es auch richtig, wenn man alle Parameter v gleich 1 setzt. Dann bilden aber die $g^\varkappa$ ein Modularsystem, folglich nach Satz 5 ein Elementarsystem. Setzt man aber ein solches für die $g^\varkappa$ ein, so bilden die drei rechten Seiten eines der Koeffizientensysteme, das also zufolge unserer drei Gleichungen gleich $(\xi_\varkappa, \eta_\varkappa, \zeta_\varkappa)$ wird.

Schreibt man also unsere allgemeine Lösung in der Form (L_3), so kommt unter den Koeffizientensystemen von (L_3) jede Modularlösung je einmal vor, und man erhält daher aus (L_3) die Form (A), indem man

$$u^{\lambda_1} + u^{\mu_1} + \cdots = t^{\varkappa_1},$$
$$u^{\lambda_2} + u^{\mu_2} + \cdots = t^{\varkappa_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

setzt. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Die Anzahl der allgemeinen Lösungen, die man aus p arbiträren Parametern bilden kann, wird also angeben müssen, auf wie viele Arten sich P Gegenstände $u^1, u^2, \cdots, u^P$ in l Fächer bringen lassen, so daß in jedes Fach wenigstens einer von den Gegenständen kommt. Diese Anzahl ist aber

$$\sum_{\nu=0}^{p-1} (-1)^\nu (p)_\nu (p-\nu)^l.$$

Kehren wir nun zurück zu der allgemeinen Gleichung

$$F(x, y, z) = [a, b, \cdots, h]_{xyz} = a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h$$

und fragen zunächst nach der Anzahl der rein partikularen Lösungen. Entwickeln wir nach den Koeffizienten $a, b, \cdots, h$ und setzen die zu diesen gehörigen Gebiete gleich $a^1, a^2, \cdots, a^{256}$, so wird die Gleichung

$$(\mathrm{A}_1)\quad F_{(\overline{E_3})}\, \varphi_1(x, y, z)\, a^1 + \varphi_2(x, y, z)\, a^2 + \cdots + \varphi_{256}(x, y, z)\, a^{256} = a^1,$$

wo die φ parameterlose Funktionen sind. Die $a^\varkappa$ sind Produkte von der Form $a^{\alpha_1} b^{\alpha_2} c^{\alpha_3} d^{\alpha_4} e^{\alpha_5} f^{\alpha_6} g^{\alpha_7} h^{\alpha_8}$ (in Korseltscher Schreibweise). φ_1 erhält man, indem man in F

$$a^1 = 1, \quad \text{also} \quad a = b = \cdots = h = 1$$

setzt. Es ist also $\varphi_1 = 1$. (φ_{63} erhält man beispielsweise, da

$$a^{63} = a\,b\,\bar{c}\,\bar{d}\,\bar{e}\,\bar{f}\,\bar{g}\,h$$

ist, indem man in F

$$a = b = h = 1, \quad c = d = e = f = g = 0$$

setzt; es ist also

$$\varphi_{63} = x\,y\,z + x\,y\,\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}.)$$

Ferner ist $\varphi_{256} = 0$.

Man erhält nun nach Satz 18 sämtliche Lösungen, indem man die Gleichung $F = a^1$ der Reihe nach für

$$a^1 = 1, \quad a^2 = 1, \cdots, a^{256} = 1$$

auflöst und dann zusammensetzt. Die aufzulösenden Gleichungen werden dann

$$\varphi_1 = 1, \ \varphi_2 = 0, \ \varphi_3 = 0, \ \cdots, \ \varphi_{256} = 0,$$

von denen die erste und letzte identisch erfüllt sind, während $\varphi_\varkappa = 0$ genau so viele Modularlösungen besitzt, als das Produkt $a^\varkappa$ negierte Faktoren enthält.

Freilich besitzt z. B. die Gleichung $\varphi_{63} = 0$ außer den Modularlösungen noch Lösungen, die von den Gleichungsparametern abhängen, etwa

$$\psi(a, b, \cdots, h), \quad \chi(a, b, \cdots, h), \quad \vartheta(a, b, \cdots, h).$$

Diese sind mit

$$a^{63} = a\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\,\bar{e}\,\bar{f}\,\bar{g}\,h$$

zu multiplizieren. Nun folgt aber aus dem Müllerschen Verifikationstheorem

$$\psi(a, b, c, d, e, f, g, h)\, a\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\,\bar{e}\,\bar{f}\,\bar{g}\,h =$$
$$= \psi(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\, a\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\,\bar{e}\,\bar{f}\,\bar{g}\,h,$$

entsprechend für χ und ϑ. Man kann also die Lösungen der Gleichung $\varphi_\varkappa = 0$ ersetzen durch Modularlösungen, ohne daß die zusammengesetzte Lösung der Gleichung $F = a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h$ sich dadurch änderte.

Verschiedene Modularlösungen von $\varphi_\varkappa = 0$ liefern nach Satz 13 bei der Zusammensetzung verschiedene Lösungen von $F = a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h$, da die Verschiedenheit der Modularlösungen sich durch Multiplikation mit $a^\varkappa$ nicht ändert. ($a^\varkappa = 0$ darf nämlich wegen der Allgemeinheit der Gleichung $F = 0$ nicht angenommen werden.)

Betrachten wir nun allgemein eine Gleichung mit n Unbekannten, so enthält diese 2^N Produkte $a^\varkappa$, darunter $(N)_\lambda$ Produkte mit λ Negaten. Zu jedem liefert die zugehörige Gleichung $\varphi_\varkappa = 0$ λ Lösungen. Nur $\varphi_1 = 1$ besitzt N Lösungen. Diese kommen aber nur in Betracht bei der Lösung der Gleichung $F = a_1 a_2 \cdots a_N$, nicht bei der Gleichung $F = 0$. Im ganzen gibt es also

$$N \prod_{\lambda=1}^{N} \lambda^{(N)_\lambda}$$

rein partikulare Lösungen, wo der erste Faktor wegfällt für die Gleichung $F = 0$.

Für $n = 1$ erhält man $2 \cdot 2$, für $n = 2$ bereits $12^4 \cdot 4 = 15376 \cdot 4$, für $n = 3$ aber $2^{199} \cdot 3^{84} \cdot 5^{56} \cdot 7^8 \cdot 8 > 6 \cdot 10^{146}$ rein partikulare Lösungen.

Da sich aus der Tatsache, daß die Gleichung $F = a^1$ Lösungen besitzt, leicht mit Hilfe der Betrachtungen auf S. 187 unten der Zwischenwertsatz beweisen läßt, so haben wir hiermit einen neuen, wenn auch weniger einfachen Beweis desselben. Sind p arbiträre Parameter erlaubt, so sind die Anzahlen noch in die P^{te} Potenz zu erheben. Es folgt also:

Satz 26: *Die Gleichung $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ besitzt, wenn die Eliminationsresultante als erfüllt vorausgesetzt wird, genau*

$$\left[\prod_{\lambda=1}^{N} \lambda^{(N)_\lambda}\right]^P$$

Lösungen mit höchstens p Parametern.

Ebenso folgt aus dem Vorhergehenden

Satz 27: *Die Gleichung $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ besitzt unter derselben Voraussetzung genau*

$$\left\{\prod_{\lambda=1}^{N}\left[\sum_{\nu=0}^{p-1}(-1)^\nu (p)_\nu (p-\nu)^\lambda\right]^{(N)_\lambda}\right\}^P$$

allgemeine Lösungen mit höchstens p Parametern.

Diese Zahl gibt zu gleicher Zeit an, wieviel allgemeine Lösungen sich mit Hilfe von P arbiträren disjunktiven Parametern bilden lassen, auch ohne daß P Potenz von 2 ist.

Wir wollen nun noch die Anzahl der reproduktiven Lösungen ausrechnen. Wir gehen aus von der Form (R) und fragen zunächst, wieviel Werte die Ausdrücke

$$x_1 = x_1 + \bar{a}, \quad y_1 = y_1 + \bar{a}, \quad z_1 = z_1 + \bar{a}$$

annehmen können. Entwickeln wir diese Gebiete nach den Koeffizienten $a, b, \cdots, h$, so müssen alle Glieder mit dem Faktor $\bar{a}$ auch wirklich vorkommen, und es fragt sich nur noch, welche von den übrigen Gliedern vorkommen können. Diese Frage läßt sich aber ebenso beantworten wie auf S. 202 oben, nur spielt hier $N-1$ dieselbe Rolle wie dort N, da die Glieder mit dem Negat $\bar{a}$ bereits erledigt sind. Die Anzahl wird also

$$\prod_{\lambda=1}^{N} \lambda^{(N-1)_\lambda}.$$

Man sieht leicht, daß es für (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), $\cdots$, (x_8, y_8, z_8) ebenso viele Möglichkeiten gibt. Daraus folgt:

Satz 27a: *Die Gleichung* $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ *besitzt genau*

$$\left[\prod_{\lambda=1}^{N} \lambda^{(N-1)_\lambda}\right]^N = \prod_{\lambda=1}^{N} \lambda^{(\lambda+1)(N)_\lambda + 1}$$

reproduktive Lösungen bei erfüllter Eliminationsresultante.

Für $n = 1$ gibt es eine, für $n = 2$ bereits 24^4 reproduktive Lösungen.

§ 9.

Reduzierte Gleichungen.

Wir kommen jetzt zu der allereinfachsten Lösungsmethode von Gleichungen, die Johnson bereits angegeben hat, ohne aber die Rechnung durchzuführen. Es sei die Gleichung

$$[a_1, a_2, \cdots, a_N]_{x_1, x_2, \cdots, x_n} = \prod_{\varkappa} a_\varkappa$$

vorgelegt. Setzt man die zu den $x_\varkappa$ gehörigen disjunktiven Gebiete gleich $x^1, x^2, \cdots, x^N$, so erhält man die „reduzierte" Gleichung

$$\sum_{\varkappa} a_\varkappa x^\varkappa = 0.$$

Da nun nach Satz 9 die $x_\varkappa$ durch die $x^\varkappa$ eindeutig bestimmt sind, so braucht man nur die Lösungen der reduzierten Gleichung zu suchen. Die Gleichungen (∇) zeigen dann, wenigstens für $n = 3$, wie man die Unbekannten findet.

Zu gleicher Zeit läßt sich das Auflösungsproblem allgemeiner fassen: Jede beliebige Gleichung zwischen den Elementen mehrerer Disjunktivsysteme $(x^1, x^2, \cdots, x^k)$, $(y^1, y^2, \cdots, y^l)$, $(z^1, z^2, \cdots, z^m)$, $\cdots$ läßt sich auf die Form bringen:

$$\sum_{\varkappa, \lambda, \mu, \cdots} a_{\varkappa\lambda\mu} \cdots x^\varkappa y^\lambda z^\mu \cdots = 0,$$

was sich ebenso zeigen läßt wie Satz 11. Ist nun $(t^1, t^2, \cdots, t^{klm})$ die Summe obiger Disjunktivsysteme (vgl. die Definition S. 174 oben), so sind nach Satz 9 die Lösungen dieser Gleichung eindeutig verknüpft mit den Lösungen der reduzierten Gleichung

$$\sum_{\varkappa, \lambda, \mu, \cdots} a_{\varkappa\lambda\mu} \cdots t^\nu = 0,$$

wo $t^\nu = x^\varkappa y^\lambda z^\mu \cdots$ ist.

Ich bemerke noch ausdrücklich, daß bei reduzierten Gleichungen auch die verschwindenden Glieder hingeschrieben werden müssen, damit man sieht, welche Unbekannten einander beigeordnet sind.

Betrachten wir nun z. B. die Gleichung

$$at^1 + bt^2 + ct^3 + dt^4 + et^5 = abcde.$$

Sie hat folgende Lösung

$$t^1 = \bar{a} + w^1 abcde, \quad t^2 = a\bar{b} + w^2 abcde, \quad t^3 = ab\bar{c} + w^3 abcde,$$
$$t^4 = abc\bar{d} + w^4 abcde, \quad t^5 = abcd\bar{e} + w^5 abcde.$$

Diese Gebiete sind in der Tat einander beigeordnet (vgl. (D′)). Ich nenne diese Lösung eine natürliche Lösung. Für $w^5 = 1$ wird die Lösung sehr trivial:

$$t^1 = \bar{a}, \quad t^2 = a\bar{b}, \quad t^3 = ab\bar{c}, \quad t^4 = abc\bar{d}, \quad t^5 = abcd$$

und liefert einen neuen, höchst einfachen Beweis des Zwischenwertsatzes.

Betrachten wir nun noch, als einfaches Beispiel, die allgemeine Gleichung mit den Unbekannten x^1, x^2, x^3, x^4, y^1, y^2, y^3, welche geordnet die Koeffizienten $a, b, \cdots, l$ besitzen möge. (k, l bedeuten also hier einmal ausnahmsweise nicht Zahlen, sondern Gebiete.) Setzen wir das Produkt dieser Koeffizienten gleich Π, so wird

$$t^{11} = \bar{a} + \Pi w^{11}, \quad t^{12} = a\bar{b} + \Pi w^{12}, \quad t^{13} = ab\bar{c} + \Pi w^{13},$$
$$t^{21} = abc\bar{d} + \Pi w^{21}, \quad t^{22} = abcd\bar{e} + \Pi w^{22}, \quad t^{23} = abcde\bar{f} + \Pi w^{23},$$
$$t^{31} = abcdef\bar{g} + \Pi w^{31}, \quad t^{32} = abcdefg\bar{h} + \Pi w^{32}, \quad t^{33} = abcdefgh\bar{i} + \Pi w^{33},$$
$$t^{41} = abcdefghi\bar{j} + \Pi w^{41}, \quad t^{42} = abcdefghij\bar{k} + \Pi w^{42}, \quad t^{43} = abcdefghijk\bar{l} + \Pi w^{43},$$

folglich ergibt sich mit Benutzung von $29)_+$ und $32)_\times$

$$\begin{aligned}
x^1 &= \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \Pi u^1,\\
x^2 &= abc(\bar{d} + \bar{e} + \bar{f}) + \Pi u^2,\\
x^3 &= abcdef(\bar{g} + \bar{h} + \bar{i}) + \Pi u^3,\\
x^4 &= abcdefghi(\bar{j} + \bar{k} + \bar{l}) + \Pi u^4,\\
y^1 &= \bar{a} + bc(\bar{d} + ef(\bar{g} + hi\bar{j})) + \Pi v^1,\\
y^2 &= a\left(\bar{b} + cd(\bar{e} + fg(\bar{h} + ij\bar{k}))\right) + \Pi v^2,\\
y^3 &= ab\left(\bar{c} + de(\bar{f} + gh(\bar{i} + jk\bar{l}))\right) + \Pi v^3,
\end{aligned}$$

wo

$$(u^1, u^2, u^3) + (v^1, v^2) = (w^{11}, w^{12}, \cdots, w^{43}).$$

Bringt man nun die letzten Glieder in die Klammer hinein, so erkennt man, daß unsere Lösungen genau so gebaut sind wie die natürlichen Lösungen auf S. 186.

Ich will nun noch die natürlichen Lösungen für die Gleichung

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}\sum_{\lambda=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{m} a_{\varkappa\lambda\mu} x^{\varkappa} y^{\lambda} z^{\mu} = 0$$

angeben:

$$x^{\varkappa} = {}^{*}\Pi a(\bar{a}_{\varkappa 11} + \bar{a}_{\varkappa 12} + \cdots + \bar{a}_{\varkappa 1m} + \bar{a}_{\varkappa 21} + \bar{a}_{\varkappa 22} + \cdots + \bar{a}_{\varkappa 2m} + \cdots + \bar{a}_{\varkappa l1} + \bar{a}_{\varkappa l2} + \cdots$$
$$\cdots + \bar{a}_{\varkappa lm}) + \Pi a \cdot u^{\varkappa},$$

$$y^{\lambda} = {}^{*}\Pi a(\bar{a}_{1\lambda 1} + \bar{a}_{1\lambda 2} + \cdots + \bar{a}_{1\lambda m} + {}^{*}\Pi a(\bar{a}_{2\lambda 1} + \bar{a}_{2\lambda 2} + \cdots + \bar{a}_{2\lambda m} + \cdots$$
$$\cdots + {}^{*}\Pi a(\bar{a}_{k\lambda 1} + \bar{a}_{k\lambda 1} + \cdots + \bar{a}_{k\lambda m}) \cdots)) + \Pi a \cdot v^{\lambda},$$

$$z^{\mu} = {}^{*}\Pi a(\bar{a}_{11\mu} + {}^{*}\Pi a(\bar{a}_{12\mu} + \cdots + {}^{*}\Pi a(\bar{a}_{1l\mu} + {}^{*}\Pi a(\bar{a}_{21\mu} + {}^{*}\Pi a(\bar{a}_{22\mu}' + \cdots + {}^{*}\Pi a(\bar{a}_{2l\mu}$$
$$+ \cdots\cdots + {}^{*}\Pi a(\bar{a}_{k1\mu} + {}^{*}\Pi a(\bar{a}_{k2\mu} + \cdots + {}^{*}\Pi a(\bar{a}_{kl\mu}) \cdots)) \cdots\cdots) \cdots))) \cdots)) + \Pi a \cdot w^{\mu},$$

wobei $^{*}\Pi a$ das Produkt aller derjenigen Gebiete a bedeuten soll, welche bei unserer Ordnung dem ersten in der darauffolgenden Klammer vorangehen. Dabei können natürlich in diesen Produkten auch alle diejenigen Faktoren wegbleiben, die in der Zeile schon vorher vorgekommen sind.

Die Summen sind in $x^{\varkappa}$ lang, in y^{λ} mittellang und in z^{λ} nur zweigliedrig.

Die Anzahl der rein partikularen Lösungen einer reduzierten Gleichung

$$F(x^1, x^2, \cdots, x^m) \equiv \sum_{\varkappa=1}^{m} a_{\varkappa} x^{\varkappa} = \prod_{\varkappa=1}^{m} a_{\varkappa}$$

läßt sich nun leichter als in § 7 folgendermaßen bestimmen: Jede Unbekannte läßt sich darstellen als eine Summe von einigen der zu den Koeffizienten $a_{\varkappa}$ zugeordneten Gebiete $a^{\varkappa}$. Da nun die Unbekannten disjunktiv sein sollen, so muß jedes einzelne $a^{\varkappa}$ in einer und nur einer der Unbekannten als Summand auftreten. Die Unbekannten lassen sich also mit m Fächern vergleichen, in welche gewisse Gegenstände $a^{\varkappa}$ (zu denen auch $\Pi a_{\varkappa}$ gehört) untergebracht werden sollen. Nun verlangt aber die Gleichung, daß $x^{\varkappa}$ (außer vielleicht dem Gliede $\Pi a_{\varkappa}$) nur solche Summanden enthält, welche nicht den Faktor $a_{\varkappa}$ (infolgedessen also den Faktor $\bar{a}_{\varkappa}$) besitzen, und diese Bedingung genügt, um die Gleichung zu befriedigen (wenn auch noch $\Pi a_{\varkappa}$ in irgendeiner Unbekannten als Summand untergebracht wird). Greift man also irgend ein $a^{\varkappa}$ heraus, welches λ negierte Faktoren enthält, so hat man die Wahl zwischen λ Unbekannten, in welche man es als Summanden unterbringen kann. Nun gibt es $(m)_{\lambda}$ Gebiete $a^{\varkappa}$ mit λ negierten Faktoren, und für jedes stehen λ „Fächer“

(nur für $\Pi a_\varkappa$ stehen m Fächer) zur Auswahl, folglich haben wir im ganzen wieder dieselbe Anzahl wie in § 7, nur kann m hier eine beliebige Zahl bedeuten, während dort N eine Potenz von 2 war. Diese Herleitung ist nicht wesentlich von der Herleitung in § 7 verschieden; die letzte erscheint einfacher, die erste zeigt aber besser die Struktur der Lösungen einer unreduzierten Gleichung.

Endlich erwähne ich noch, daß

$$F = \sum_\varkappa a_\nu x^\varkappa$$

durch die Substitution

$$\mathfrak{X}^\varkappa = x^\varkappa + \bar{t}, \qquad \mathfrak{X}^\lambda = x^\lambda t \quad \text{für} \quad \lambda \neq \varkappa$$

übergeführt wird in $tF + a_\varkappa \bar{t}$, also durch die Substitution

$$\mathfrak{X}^\varkappa = x^\varkappa + \bar{a}_\varkappa, \qquad \mathfrak{X}^\lambda = x^\lambda a_\varkappa \quad \text{für} \quad \lambda \neq \varkappa$$

in $a_\varkappa F$. Die substituierten Größen bilden nach Satz 6 ein Disjunktivsystem.

Daher läßt sich ebenso wie in § 7 (freilich ein wenig einfacher) die allgemeine Form einer reproduktiven Lösung herleiten:

$$(\mathrm{R}') \qquad x^\varkappa = (x_\varkappa^\varkappa + \bar{a}_\varkappa) u^\varkappa + \sum_{\lambda \neq \varkappa} x_\lambda^\varkappa a_\lambda u^\lambda,$$

wo für jedes λ entweder $(x_\lambda^1, x_\lambda^2, \cdots, x_\lambda^n)$ oder aber

$$\left(x_2^1 a_1,\ x_2^2 a_2, \cdots, x_\lambda^{\lambda-1} a_{\lambda-1},\ x_\lambda^\lambda + \bar{a}_\lambda,\ x_\lambda^{\lambda+1} a_{\lambda+1}, \cdots, x_\lambda^n a_n\right)$$

eine Lösung der Gleichung $F = 0$ bedeutet.

Ist nun F durch Reduktion entstanden, so kann man leicht zu den ursprünglichen Gebieten zurückkehren und erhält ohne Mühe die Form (R).

Auch läßt sich leicht, wie früher (R_1), die Form herleiten

$$(\mathrm{R}_1') \qquad x = \varphi^\varkappa F + u^\varkappa \bar{F} = \varphi^\varkappa F + u^\varkappa \bar{a}_\varkappa,$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ eine Lösung irgendwelcher Art ist.

Ich habe absichtlich von dieser Erleichterung in den früheren Paragraphen keinen Gebrauch gemacht.

Andere interessante Resultate, welche ich durch Reduktion gewonnen habe, müssen wegen Raummangels einer späteren Veröffentlichung vorbehalten bleiben.

Nachtrag zu den §§ 6 und 7.

Während der Drucklegung fand ich noch folgende Verallgemeinerung der Korseltschen Zeichen: Setzt man

$$a^b = ab + \bar{a}\bar{b},$$
$$a \overset{c}{+} b = ab + c(a+b),$$

so gilt nach dem Verifikationstheorem jede Formel, die für die alten, engeren Definitionen richtig war, auch für diese neuen, erweiterten. Ferner ist

$$\begin{array}{ll} a^a = 1, & a^{\bar a} = 0, \\ a^{b^a} = b, & a^{b^{\bar a}} = \bar b \text{ usw.*}), \\ a^b = 1 \text{ ist äq. } & a = b, \\ a^b = 0 \quad \text{„} \quad \text{„} & a = \bar b, \\ a^{b^c} = 1 \quad \text{„} \quad \text{„} & a = b^c \text{ und } b = c^a \text{ und } c = a^b\text{*}), \end{array}$$

wie aus der drittletzten Zeile folgt.

Die Gleichung $x^a = b$ besitzt also als einzige Lösung $x = a^b$. Die natürlichen Substitutionen lauten

$$\text{(S)} \qquad x' = x + \overline{F(u, v, w)}^u, \; y' = y \overset{v}{+} \overline{F(u, v, w)}^v, \; z' = z \overset{w}{+} \overline{F(u, v, w)}^w,$$

wenn u, v, w Moduln sind. Wird dieses nun nicht mehr vorausgesetzt, so stimmt (S) mit (R) und (R_1) überein, wie man sieht auf Grund der Formel

$$ax + b\bar x = \bar x^b \overset{b}{+} a = x^a \overset{a}{+} b.$$

Die Substitution (R), (R_1) oder (S), die ich mit R_{uvw} bezeichnen will, führt $F(x, y, z)$ in $F(u, v, w)\, F(x, y, z)$ über, und durch Zusammensetzung der Substitutionen $R_{uvw}, R_{uv\bar w}, \cdots, R_{\bar u \bar v \bar w}$ in irgend einer Reihenfolge erhält man eine allgemeine (und, wenn R_{uvw} zuletzt kommt, reproduktive) Lösung der Gleichung $F(x, y, z) = abcdefgh$. Die Form (R_1) vermag also aus sich selbst heraus allgemeine Lösungen zu liefern und ist dazu nicht, wie ich bisher glaubte, auf die anderweitige Ermittlung einer Partikularlösung angewiesen.

*) Vgl. Schröder, a. a. O. S. 380, 381.