Über das Problem der Wohlordnung.

Von

F. Hartogs in München.

Im folgenden gebe ich für den Satz, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, einen Beweis, der sich von den beiden Zermeloschen Beweisen (Math. Ann. Bd. 59, S. 514 und Bd. 65, S. 107) dadurch unterscheidet, daß das sogenannte Auswahlprinzip bei ihm nicht zur Anwendung kommt, dafür jedoch eine Prämisse anderer Art benutzt wird, nämlich die Annahme der „Vergleichbarkeit der Mengen" (nach welcher unter zwei gegebenen unendlichen Mengen sich stets mindestens eine befinden muß, welche einer Teilmenge der anderen äquivalent ist).*) Hiernach kann also der Wohlordnungssatz als eine Folgerung aus der Vergleichbarkeit der Mengen aufgefaßt werden. Berücksichtigt man nun andererseits den Umstand, daß umgekehrt die Vergleichbarkeit der Mengen eine unmittelbare Folge aus dem Wohlordnungssatze ist, sowie ferner, daß, wie die Zermeloschen Beweise zeigen, der Wohlordnungssatz mit dem Auswahlprinzip gleichwertig ist, so ergibt sich schließlich, daß alle drei Prinzipe, nämlich erstens das Auswahlprinzip, zweitens die Vergleichbarkeit der Mengen, drittens die Wohlordnungsfähigkeit der Mengen, als gleichwertig betrachtet werden müssen, in dem Sinne, daß jedes der drei Prinzipe die Gültigkeit der beiden anderen nach sich zieht.

Wird von den drei genannten Prinzipen keines vorausgesetzt, so liefern die folgenden Betrachtungen immer noch einen Nachweis für den Satz, daß es keine Menge geben kann, deren Mächtigkeit größer ist als die Mächtigkeit jeder beliebigen wohlgeordneten Menge.**)

Als Grundlage für die folgenden Ausführungen habe ich die von Herrn Zermelo in seiner Abhandlung „Untersuchungen über die Grundlagen der

*) Diese Annahme wird übrigens beim nachfolgenden Beweise nur für den Fall angewandt, daß von den beiden gegebenen Mengen die eine wohlgeordnet ist.

**) Dieser Satz ist meines Wissens ohne Anwendung des Auswahlprinzips bisher noch nicht streng bewiesen worden.

Mengenlehre I" (Math. Ann. Bd. 65, S. 261) aufgestellten Axiome gewählt, wobei das das Auswahlprinzip enthaltende Axiom VI natürlich fortgelassen werden mußte. Die Aufgabe, alle im Beweise vorkommenden Begriffe und Sätze auf ihre Unabhängigkeit vom Auswahlprinzip zu prüfen, wird dabei allerdings durch den Umstand etwas erschwert, daß die von Zermelo gegebene axiomatische Durcharbeitung der Mengenlehre sich noch nicht auf die Lehre von den geordneten und den wohlgeordneten Mengen erstreckt.*) Ich habe aus diesem Grunde den Beweis, wenn auch zum Teil auf Kosten der Kürze**), so gestaltet, daß möglichst wenig Begriffe und Sätze vorkommen, welche jenen Teilen der Mengenlehre angehören. Sämtliche auf die Mengenlehre bezüglichen Begriffe und Sätze, welche beim Beweise benutzt werden, habe ich, um die Prüfung auf ihre Unabhängigkeit vom Auswahlprinzip zu erleichtern, überdies in einem besonderen Verzeichnis zusammengestellt, das ich hier zunächst folgen lasse.

Begriffe: a) Element und Menge, Äquivalenz zweier Mengen, größere und kleinere Mächtigkeit.***)

b) Geordnete Menge, Ähnlichkeit zweier geordneter Mengen, wohlgeordnete Menge, Abschnitt einer wohlgeordneten Menge.

Sätze:

1. *Sind zwei geordnete Mengen einer dritten ähnlich, so sind sie auch untereinander ähnlich.* (Cantor, Math. Ann. 46, S. 497.)

2. *Jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist selbst eine wohlgeordnete Menge.* (Cantor, Math. Ann. 49, S. 209, Satz C.)

3. *Jede einer wohlgeordneten Menge ähnliche Menge ist gleichfalls eine wohlgeordnete Menge.* (Ebenda, Satz D.)

4. *Gilt für jedes Element einer geordneten Menge L, daß die ihm vorangehenden Elemente eine wohlgeordnete Menge bilden, so ist L selbst wohlgeordnet.*†)

5. *Eine wohlgeordnete Menge ist keinem ihrer Abschnitte ähnlich.* (Ebenda, S. 211, Satz B.)

---

*) Über die Definition der geordneten und der wohlgeordneten Menge im Rahmen der Zermeloschen Theorie siehe den Anhang zu dieser Arbeit.

**) Z. B. hätten sich durch Anwendung des Begriffs und der Eigenschaften der Ordnungszahl gewisse Vereinfachungen erzielen lassen.

***) Bei den unter a) aufgeführten Begriffen kann die Unabhängigkeit vom Auswahlaxiom unmittelbar aus den Zermeloschen „Grundlagen" entnommen werden.

†) Beweis: Sei L_0 eine beliebige Teilmege von L, a ein beliebiges Element von L_0. Ist dann a nicht selbst schon das erste Element von L_0, so betrachte man die dem a vorangehenden Elemente von L_0; die aus ihnen bestehende Menge ist wohlgeordnet (als Teilmenge derjenigen wohlgeordneten Menge, die aus sämtlichen dem a vorangehenden Elemente von L gebildet ist); ihr erstes Element ist aber zugleich das erste Element von L_0.

6. *Zwei wohlgeordnete Mengen sind entweder einander ähnlich oder eine von ihnen ist einem Abschnitte der anderen ähnlich.* (Ebenda, S. 215, Satz N.).

Endlich wird noch von folgendem auf den Mengenbegriff selbst bezüglichen Ausspruch Gebrauch gemacht werden.*)

7. *Jeder Menge M entspricht eine Menge M^0, welche als Elemente alle geordneten Mengen enthält, deren Elemente mit denen von M identisch sind.***)

Als unmittelbare Folgerung hieraus ergibt sich, indem man den Ausspruch auf alle Untermengen einer gegebenen Menge M anwendet und die Zermeloschen Axiome IV (Axiom der Potenzmenge) und V (Axiom der Vereinigung) benutzt:

7a. *Jeder Menge M entspricht eine Menge M_0, welche als Elemente alle geordneten Mengen enthält, deren Elemente zugleich Elemente von M sind.*

Diejenigen Elemente von M_0, welche wohlgeordnete Mengen sind, bilden gemäß Axiom III (Axiom der Aussonderung) eine Teilmenge M_w von M_0, also ebenfalls eine Menge. So ergibt sich die Aussage in derjenigen engeren Fassung, in der sie nachher benutzt werden wird:

7b. *Jeder Menge M entspricht eine Menge M_w, welche als Elemente alle wohlgeordneten Mengen enthält, deren Elemente zugleich Elemente von M sind.*

Dabei ist selbstverständlich M_w von Null verschieden, sofern nur M es ist.

Nach diesen Vorbemerkungen werde zum eigentlichen Beweise übergegangen.

Gegeben sei eine beliebige, endliche oder unendliche, von Null verschiedene Menge M. Wir betrachten, wie oben, alle möglichen wohlgeordneten Mengen $G, H, \cdots$, deren Elemente zugleich Elemente von M sind; zu ihnen rechnen wir auch die „Nullmenge" (welche gar kein Element enthält). Nach den vorausgeschickten Bemerkungen (Satz 7b) existiert eine (von Null verschiedene) Menge N, deren Elemente die sämtlichen wohlgeordneten Mengen $G, H, \cdots$ und nur diese sind.

Da von jeder der Mengen $G, H, \cdots$ feststeht, ob sie ähnlich G ist oder nicht, so bilden die zu G ähnlichen nach dem Axiom III (Axiom der Aussonderung) eine Untermenge g von N, ebenso die zu H ähnlichen eine

*) Über den Beweis desselben sowie der folgenden Sätze 7a und 7b innerhalb der Zermeloschen Theorie siehe den Anhang zu dieser Arbeit.

**) Hierin ist keineswegs die Behauptung enthalten, daß es solche geordneten Mengen stets geben müsse, d. h. daß jede beliebige Menge M sich ordnen lasse; vielmehr bedeutet, wenn M sich nicht ordnen lassen sollte, M^0 einfach die Nullmenge.

Untermenge h usf. Die so entstehenden Untermengen $g, h, \cdots$ von N mögen im folgenden der Bequemlichkeit wegen als „Klassen" bezeichnet werden. Eine dieser Klassen besteht nur aus der Nullmenge und heiße die Nullklasse. Aus dem Satze 1 folgt sofort, daß zwei Klassen, welche ein Element gemein haben, miteinander identisch sind. Jedes Element von N (d. h. jede der wohlgeordneten Mengen $G, H, \cdots$) gehört infolgedessen einer und nur einer Klasse an.

Wir betrachten nun diejenige Menge L, deren Elemente die sämtlichen voneinander verschiedenen Klassen sind. Dieselbe existiert auf Grund der Axiome IV (Axiom der Potenzmenge) und III (Axiom der Aussonderung) als Untermenge der Potenzmenge $\mathfrak{U}(N)$ von N, da von jeder Untermenge von N feststeht, ob sie eine Klasse ist oder nicht.

Sind g und h zwei voneinander verschiedene Klassen, G ein Element von g, H ein Element von h, so können die wohlgeordneten Mengen G und H einander nicht ähnlich sein; es ist also entweder G einem Abschnitt von H ähnlich ($G < H$) oder H einem Abschnitt von G ($H < G$). Ist z. B. $G < H$, so ist auch $G' < H'$, wo G' ein beliebiges Element von g, H' ein beliebiges Element von h bedeutet. Entweder gilt also für jedes Paar G', H' von Elementen der Klassen g und h, daß $G' < H'$, oder aber es gilt für jedes Paar, daß $H' < G'$. Im ersteren Falle schreiben wir kurz $g \prec h$, im letzteren $h \prec g$.

Sind g, h, i drei verschiedene Klassen und ist $g \prec h$, $h \prec i$, so gilt offenbar auch $g \prec i$. Es ist also auf diese Weise zwischen den Elementen der Menge L eine widerspruchslose Rangordnung hergestellt worden. Wir zeigen jetzt, daß die so geordnete Menge L auch wohlgeordnet ist.

Sei g ein beliebiges Element von L, G irgend eine der Klasse g angehörende wohlgeordnete Menge. Ist alsdann g_0 irgend ein dem g vorangehendes Element von L ($g_0 \prec g$) und G_0 ein Element von g_0, so ist G_0 einem Abschnitt A von G ähnlich*); A ist aber dann ebenfalls ein Element von g_0. Unter den Elementen der Klasse g_0 befindet sich also ein gewisser Abschnitt A von G, und zwar nur *ein* solcher, da die Elemente von g_0 lauter einander ähnliche Mengen sind. Umgekehrt ist jeder Abschnitt von G Element einer gewissen Klasse $\prec g$, und zwar nur *einer* solchen. Die Klassen, welche $\prec g$ sind, und die Abschnitte von G sind einander also ein-eindeutig zugeordnet und zwar unter Aufrechterhaltung des Ranges. Mithin bilden nach Satz 3 die Klassen, welche $\prec g$ sind (d. h. die dem Element g vorangehenden Elemente von L), eine wohlgeordnete Menge; da aber g ein beliebiges Element von L war, so ist nach

*) Auch zum ersten Element einer wohlgeordneten Menge gehört, wie hier und im folgenden angenommen wird, ein Abschnitt, nämlich die Nullmenge.

Satz 4 L selbst wohlgeordnet. (Das Anfangselement von L ist die Nullklasse.)

Es gilt nun ferner: *Jede der wohlgeordneten Mengen $G, H, \cdots$ ist einem Abschnitte von L ähnlich.* Genauer: Gehört die wohlgeordnete Menge G der Klasse g an, so ist G dem durch das Element g von L bestimmten Abschnitte von L ähnlich. Denn nach dem Vorigen besteht eine ein-eindeutige Beziehung unter Aufrechterhaltung des Ranges zwischen den Klassen, welche $\prec g$ sind (d. h. den dem g vorangehenden Elementen von L) einerseits und den Abschnitten von G andererseits; dies bleibt aber richtig, wenn man an Stelle der Abschnitte von G die Elemente von G treten läßt.

Hieraus folgt nun sofort: *L kann weder der Menge M selbst noch irgend einer ihrer Teilmengen äquivalent sein.* Denn wäre L äquivalent der Untermenge M_0 von M (wo M_0 auch die Menge M selbst bedeuten kann), d. h. existierte zwischen den Elementen der Menge L und denen der Menge M_0 eine gegenseitig eindeutige Zuordnung, so ließe M_0 sich auf Grund dieser Zuordnung wohlordnen und die auf solche Weise wohlgeordnete Menge M_0 wäre dann ähnlich L. Andererseits müßte jedoch diese wohlgeordnete Menge M_0, da ihre Elemente zugleich Elemente von M sind, nach dem Vorangehenden einem Abschnitt von L ähnlich sein — Widerspruch.

Damit ist festgestellt, daß zwischen den Mengen L und M mit den Mächtigkeiten $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}$ keinesfalls eine der beiden Beziehungen

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{m} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{l} < \mathfrak{m}$$

stattfinden kann. Ist also M eine beliebige Menge, so existiert stets eine wohlgeordnete Menge L von der Eigenschaft, daß nicht $\mathfrak{l} < \mathfrak{m}$ gilt. *Hiermit ist, ohne das Auswahlprinzip oder die Vergleichbarkeit der Mengen anzuwenden, der Nachweis geführt, daß es keine Menge geben kann, deren Mächtigkeit größer ist als die Mächtigkeit jeder beliebigen wohlgeordneten Menge.*

Setzt man jetzt noch weiter die Vergleichbarkeit der Mengen voraus, so folgt, daß für die bisher betrachteten Mengen M und L

$$\mathfrak{l} > \mathfrak{m}$$

sein muß, d. h. es existiert eine gegenseitig eindeutige Beziehung zwischen den Elementen von M und denjenigen einer gewissen Teilmenge L_0 von L. Da aber L_0 wohlgeordnet ist, so kann auf Grund dieser Beziehung auch M wohlgeordnet werden.

Anhang.

Ich verdanke einer freundlichen Mitteilung des Herrn Hessenberg die Kenntnis der Tatsache, daß der Satz 7 (und mit ihm die Sätze 7a und 7b) auf Grund der Zermeloschen Axiome vollständig bewiesen werden kann (wobei das Auswahlaxiom

nicht benutzt wird). Die Cantorsche Definition der geordneten Menge läßt sich nämlich durch eine ihr äquivalente auf die Zermeloschen Axiome gegründete ersetzen, indem man als „Ordnung" einer Menge M eine Untermenge P der Potenzmenge $\mathfrak{U}M$ definiert, welche die folgenden drei Eigenschaften besitzt:

1. Sind R und S zwei verschiedene Elemente von P, so ist entweder S eine Teilmenge von R oder R eine Teilmenge von S.

2. Sind x und y zwei verschiedene Elemente von M, so gibt es mindestens ein Element R von P, welches genau *eines* jener beiden als Element enthält.

3. Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}\mathsf{P}'$ jeder Untermenge P' von P ist Element von P.

(Die Äquivalenz dieser Definition mit der Cantorschen ergibt sich auf folgendem Wege: Betrachtet man eine im Cantorschen Sinne geordnete Menge M, so hat die Menge ihrer Reste die obigen drei Eigenschaften. Ist umgekehrt P eine Menge der obigen Art und setzt man $x \prec y$, wenn es ein Element R von P gibt, welches y enthält und x nicht enthält, so erhält man eine im Cantorschen Sinne geordnete Menge und zwar ist die Menge der Reste dieser letzteren mit P identisch).

Da gemäß dieser Definition jede Ordnung von M eine Untermenge von $\mathfrak{U}M$ ist und von jeder Untermenge von $\mathfrak{U}M$ definit ist, ob sie eine Ordnung von M ist, so ist die Gesamtheit M^0 aller Ordnungen von M eine Untermenge von $\mathfrak{U}\mathfrak{U}M$, jedenfalls also eine Menge, womit Satz 7 bewiesen ist.

Beim Übergang von Satz 7a zu Satz 7b wird davon Anwendung gemacht, daß unter den Ordnungen einer Menge M die Wohlordnungen ebenfalls wieder durch ein definites Kriterium im Sinne Zermelos ausgezeichnet sind. Dasselbe lautet nämlich: Die oben definierte Menge P stellt eine Wohlordnung von M dar, wenn die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}\mathsf{P}'$ jeder beliebigen Untermenge P' von P ein Element von P' (nicht nur von P) ist.

Erwähnt sei noch, daß die Sätze 7a und 7b auch bewiesen werden können, ohne erst den Umweg über Satz 7 zu machen. Die obige Eigenschaft 2. der Menge P läßt sich nämlich in die folgenden zwei zerspalten:

2a. Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}\mathsf{P}$ von P ist M.

2b. Sind x und y zwei verschiedene Elemente von $\mathfrak{S}\mathsf{P}$, so gibt es mindestens ein Element R von P, welches genau *eines* jener beiden als Element enthält.

Läßt man die Eigenschaft 2a. fort, so definiert P im allgemeinen nicht mehr eine Ordnung von M, sondern eine Ordnung einer Teilmenge von M. Hiernach erweist sich also auch M_0 direkt als Teilmenge von $\mathfrak{U}\mathfrak{U}M$. Ersetzt man schließlich 3. durch die weitergehende Forderung, daß die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}\mathsf{P}'$ jeder Untermenge P' von P Element von P' sei, so ist auch M_ω auf direktem Wege als Teilmenge von $\mathfrak{U}\mathfrak{U}M$ gekennzeichnet.

Ansätze und Mitteilungen über die vorstehend bezeichnete Theorie der geordneten und der wohlgeordneten Mengen finden sich bei Hessenberg, Grundzüge der Mengenlehre, Kap. 28 (Abhandlungen der Friesschen Schule, neue Folge, Bd. I, Heft 4, Göttingen 1906, S. 674) ferner in desselben Autors Referat über Mengenlehre im Taschenbuch für Mathematiker und Physiker III. Jahrg. (Leipzig 1913) S. 74, endlich in Zermelos zweitem Beweise des Wohlordnungssatzes (Math. Ann. 65, S. 107).

München, Juli 1914.