Die Hesse'sche Curve in rein geometrischer Behandlung.

Von

Ernst Kötter in Berlin.

Wenn, gemäss seinem Titel, der nachfolgende Aufsatz in der Hauptsache einer rein geometrischen Untersuchung der Hesse'schen Curve einer gegebenen gewidmet ist, so stellt er sich doch auch die Aufgabe, eine frühere Arbeit*) des Verfassers, welche sich mit rein geometrischer Begründung der Hauptresultate aus der Curvenlehre befasste, in einigen wesentlichen Punkten zu ergänzen. Die beiden ersten Abschnitte nämlich beschäftigen sich mit jenen wohlbekannten Lehrsätzen, welche sich auf Curven mit mehrfachen Punkten und auf das Verhalten der Curvenpolaren in solchen Punkten beziehen. Besonderes Interesse scheint dem Verfasser der im zweiten Abschnitt gegebene Nachweis des Satzes von der gemischten Polare in Anspruch nehmen zu dürfen.

Im dritten Abschnitt wird die Jacobi'sche Curve eines Netzes zweiter Stufe einer genauen Betrachtung unterzogen, und zwar wird sie, der Gleichungsform $0 = \sum \pm \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \chi}{\partial x_3}$ entsprechend, als Ort derjenigen Punkte gedeutet, in denen zwei Curven zur Berührung gelangen, die aus irgend zwei festen Netzbüscheln entstammen. Hieraus lassen sich zwei projectivische Curvenbüschel ableiten, welche die Jacobi'sche Curve zusammen mit irgend einer Hülfsgeraden und mit der gemeinsamen Curve der beiden Netzbüschel erzeugen. Indem man die beiden Netzbüschel passend auswählt, kann man nach Methoden, wie sie Herr Cremona in seinem „introduzione" ausgebildet hat, das Verhalten der Jacobi'schen Curve eines Netzes in der Umgebung jedes Punktes, mag er nun in den Curven eines Büschels oder in allen Netzcurven vorkommen, genau untersuchen.

Bei dem Uebergang zur Hesse'schen Curve erhalten wir nun einmal diejenigen Lehrsätze über das Verhalten der Hesse'schen Curve ausser-

---

*) Vergl. „Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven". Abhandlungen der Berliner Academie, 1887.

halb mehrfacher Punkte der Grundcurve, welche die Herren Geiser*) und Del Pezzo**) auf analytischem Wege entwickelt haben. Andererseits folgt ein Satz, der als einen speciellen Fall Herrn Voss***) elegantes Kriterium für gemeinsame Wendepunkte einer Grundcurve mit ihrer Hesse'schen Curve enthält.

I.

Allgemeine Sätze über Curven mit mehrfachem Punkt.

A ist ein ϱ-facher Punkt einer Curve K^n n^{ter} Ordnung, wenn jede von A ausgehende Grade in A ϱ-fach, also ausserhalb A im allgegemeinen in $n-\varrho$ Punkten K^n trifft. Man lege durch einen Punkt O von K^n zunächst einen Strahl o_ν und durch seine $n-1$ anderen Schnittpunkte eine K_ν^{n-1}, die A zum ϱ-fachen Punkt hat. Alsdann kann man†) K^n durch das Strahlbüschel $o_1 o_2 o_3 \ldots$ und ein bestimmtes dazu projectivisches Kurvenbüschel $K_1^{n-1} K_2^{n-1} K_3^{n-1} \ldots$ erzeugen. Da die Curven $o_\nu K_\lambda^{n-1}$, $o_\lambda K_\nu^{n-1}$, K^n zu einem Büschel gehören, so muss jede Curve K_λ^{n-1} des zweiten Büschels A zum ϱ-fachen Punkt haben. Jede Gerade trifft nämlich die drei Curven $o_\nu K_\lambda^{n-1}$, $o_\lambda K_\nu^{n-1}$, K^n in drei Gruppen einer Involution; zwei von ihnen enthalten, wenn die Gerade durch A geht, diesen Punkt ϱ-fach, und dasselbe muss natürlich bei der dritten Gruppe, die $o_\nu K_\lambda^{n-1}$ ausschneidet, der Fall sein. K^n kann also durch ein Strahlbüschel, dessen Centrum auf der Curve willkürlich ist, und durch ein projectivisches Büschel von Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die in A ϱ-fache Punkte haben, erzeugt werden. Ist A ein $(n-1)$-facher Punct der Curve, so führt dies auf die bekannte Erzeugung derselben durch ein Strahlbüschel und eine projectivische Strahleninvolution mit dem Centrum A.

Von dem Punkt A gehen ϱ Tangenten der K^n aus, von denen jede einzelne die K^n in $\varrho+1$ bei A vereinigten und in $n-\varrho-1$ anderen Punkten schneidet. Irgend eine von A ausgehende Gerade a schneidet auf K^n die Coincidenzpunkte der beiden projectivischen Gebilde:

$$a(o_1\, o_2\, o_3 \ldots) \barwedge a(K_1^{n-1} K_2^{n-1} K_3^{n-1} \ldots)$$

aus. Die Involution $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfällt in den ϱ-fach zählen-

---

*) „Sopra la teoria delle curve piane di quarto grado etc.“ Brioschi Ann., Serie II, Bd. 9, S. 35—41.

**) „Sulla curva Hessiana.“ Nap. Rend., 1883, S. 203—218.

***) „Zur Theorie der Hesse'schen Determinante.“ Diese Zeitschrift, Bd. XXX, S. 418—424.

†) Vergl. a. a. O. §§ 143—147.

den Punkt A und in eine Involution $(n-\varrho-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die mit $a(o_1\, o_2\, o_3 \ldots)$ die ausserhalb A liegenden Punkte der Gruppe $a(K^n)$ gemeinsam hat. Ist nun a eine Tangente der Curve, so fällt noch einer dieser Coincidenzpunkte nach A; der Linie OA oder o_1 entspricht eine K_1^{n-1}, die mit a $\varrho+1$ bei A vereinigte Punkte gemein hat. Die Tangenten von K^n sind mit denen von K_1^{n-1} identisch. Offenbar ist also durch einen Schluss von $n-1$ auf n unser Satz, der für $n=\varrho+1$ selbstverständlich ist, erwiesen.

(1.) „*Eine Curve K^n mit einem ϱ-fachen Punkte A ist das Erzeugniss eines Strahlbüschels, dessen Centrum auf der Curve willkürlich ist, mit einem Büschel von Curven K^{n-1}, die A zum ϱ-fachen Punkt haben. Die ϱ Tangenten der Curve K^n in A gehören auch der Curve an, die dem nach A führenden Strahle entspricht.*“

Wenn von zwei Curven K_1^n, K_2^n die eine A zum ϱ-fachen, die andere aber zum ν-fachen Punkt hat, und ϱ grösser als ν ist, so enthält auch jede andere Curve K_3^n des Büschels K_1^n, K_2^n A ν-fach und weist dieselben Tangenten, wie K_2^n, auf. Denn jede Gerade trifft K_1^n, K_2^n, K_3^n in drei Gruppen einer Involution; wenn a durch A geht, so kommt dieser Punkt in $a(K_1^n)$ ϱ-fach, in $a(K_2^n)$ aber und folglich auch in jeder dritten Gruppe $a(K_3^n)$ nur ν-fach vor; eine Tangente von K_2^n schneidet aus K_2^n eine A $(\nu+1)$-fach enthaltende Gruppe aus, und, da ϱ grösser als ν ist, auch aus K_3^n.

Wenn ferner K_2^n und K_3^n den Punkt A beide ν-fach enthalten und überdies dieselbe Tangentengruppe zeigen, so muss eine Curve K_1^n des Büschels K_2^n, K_3^n den Punkt A mehr als ν-fach, etwa ϱ-fach, enthalten. Eine beliebige von A ausgehende Gerade a bestimmt eine Involution $a(K_2^n, K_3^n)$, von der *eine* Gruppe A ϱ-fach $(\varrho > \nu)$ enthält. Diese Gruppe gehört einer Curve K_1^n des gegebenen Büschels an, die A nicht nur ν-fach enthalten kann, da sie sonst $\nu+1$ Tangenten in A berühren müsste.

Enthalten alle Curven U^n, V^n, W^n, ... eines Büschels A ϱ-fach, so bilden ihre Tangentengruppen eine zum Büschel projectivische Involution $u^\varrho\, v^\varrho\, w^\varrho \ldots$. Denn ist O ein allen Curven des Büschels gemeinsamer Punkt, so können dieselben durch das Strahlbüschel

$$o_1\, o_2\, o_3\, o_4 \ldots$$

und die zu ihm und unter sich projectivischen Büschel

$$U_1^{n-1}\, U_2^{n-1}\, U_3^{n-1}\, U_4^{n-1} \ldots \barwedge V_1^{n-1}\, V_2^{n-1}\, V_3^{n-1}\, V_4^{n-1} \ldots$$
$$\barwedge W_1^{n-1}\, W_2^{n-1}\, W_3^{n-1}\, W_4^{n-1} \ldots \barwedge \ldots$$

einer „Schaar“ erzeugt werden*). Homologe Curven der bezeichneten Büschel reihen sich zu neuen Büscheln

*) Vergl. a. a. O. §§ 148 und 152.

$$U_1^{n-1}\, V_1^{n-1}\, W_1^{n-1} \ldots \overline{\wedge}\; U_2^{n-1}\, V_2^{n-1}\, W_2^{n-1} \ldots$$
$$\overline{\wedge}\; U_3^{n-1}\, V_3^{n-1}\, W_3^{n-1} \ldots \overline{\wedge} \ldots,$$

die alle zu $U^n\, V^n\, W^n \ldots$ projectivisch sind. Wir können annehmen, dass alle Curven U_λ^{n-1}, V_μ^{n-1}, $W_\nu^{n-1}, \ldots$ A ϱ-fach enthalten. Eines der „Leitbüschel“ enthält die Curven, die dem Strahle OA der Reihe nach zugeordnet werden müssen, damit U^n, V^n, $W^n, \ldots$ entstehen. Hieraus folgt aber, da nur von $n-1$ auf n zu schliessen ist, der behauptete Satz. Für $n = \varrho + 1$, wo alle Curven U_λ^{n-1}, V_μ^{n-1}, $W_\nu^{n-1}, \ldots$ Strahlengruppen sind, ist derselbe evident.

Sollten U^n, V^n, $W^n, \ldots$ ausserhalb A gar keinen Punkt gemeinsam haben, so benutzen wir eine Hülfscurve K^n, die A zum $(\varrho + 1)$-fachen Punkt hat. Das Netz zweiter Stufe aus K^n, U^n, V^n sendet durch O die Curven $\mathfrak{U}^n$, $\mathfrak{V}^n$, $\mathfrak{W}^n, \ldots$ eines zu $U^n\, V^n\, W^n \ldots$ projectivischen Büschels, wenn wir annehmen, dass U^n und $\mathfrak{U}^n$, V^n und $\mathfrak{V}^n$, W^n und $\mathfrak{W}^n, \ldots$ je dieselbe Tangentengruppe zeigen. Folglich gilt der Satz ganz allgemein. Das Gesagte lässt sich so zusammenfassen.

(2.) *„Ist A ein ϱ-facher Punkt einer Curve K_1^n und ein ν-facher Punkt einer zweiten, K_2^n, so kommt er, wenn $\varrho > \nu$ ist, auch ν-fach in allen anderen Curven K_3^n, $K_4^n, \ldots$ des Büschels K_1^n, K_2^n vor, und zwar haben alle Curven, ausser K_1^n, dieselbe Tangentengruppe. Enthalten K_1^n und K_2^n den Punkt A beide ϱ-fach, so kommt er in einer Curve des Büschels K_1^n, K_2^n mehr als ϱ-fach vor, wenn die gegebenen Curven dieselbe Tangentengruppe zeigen. Im anderen Falle ist A ein ϱ-facher Punkt aller Curven des Büschels, und die Tangentengruppen bilden eine zum Büschel projectivische Involution.“*

Das Erzeugniss der beiden Büschel

$$K_1^m K_2^m K_3^m \ldots \overline{\wedge}\; K_1^n K_2^n K_3^n \ldots$$

gehört zu jedem einzelnen der Büschel $K_i^m K_k^n$, $K_k^m K_i^n$. Hieraus ist leicht der folgende Lehrsatz abzuleiten:

(3.) *„Zwei projectivische Büschel von Curven m^{ter}, bez. n^{ter} Ordnung erzeugen eine K^{n+m}, welche in A einen $(\lambda + \mu)$-fachen Punkt besitzt, wenn A ein λ-facher Punkt für alle K^m, ein μ-facher Punkt für alle K^n ist. Die Tangenten von K^{n+m} enthält die Coincidenzgruppe der Tangenteninvolutionen der beiden gegebenen Büschel. Sollten die beiden Involutionen in dieselbe Involution σ^{ter} Ordnung und in je eine feste Strahlengruppe zu $\lambda - \sigma$, bez. $\mu - \sigma$ Strahlen zerfallen, so muss K^{n+m} A wenigstens $(\lambda + \mu + 1)$-fach enthalten.“*

II.

Gemischte Polaren. — Verhalten der Polaren für Curven mit mehrfachem Punkt.

Die Polare P^{n-1} einer Curve K^n hinsichtlich eines beliebigen Punktes P erwies sich als Ort der Polargruppen, die hinsichtlich P zu den Schnittgruppen $p(K^n)$ gehören, wo p eine um P rotierende Gerade war. Als Polargruppe einer Gruppe U von n Punkten hinsichtlich eines Punktes P soll nämlich fortab die Gruppe der $n-1$ ferneren Doppelpunkte der Involution bezeichnet werden, die durch die Gruppe U^n und den n-fachen Punkt P bestimmt wird. Auf der anderen Seite war P^{n-1} mit einer beliebigen Geraden r zusammen ein Glied des Büschels, das K^n mit seinem unendlich nahen perspectivisch-collinearen Abbild hinsichtlich P und r bildet*).

Ich hatte aus diesen Definitionen drei der bekannten Polareigenschaften gefolgert, nämlich

(4.) (α) „*Die Polaren der Curven eines Büschels hinsichtlich eines Punktes bilden ein zweites zum ersten projectivisches Büschel.*"

(β) „*Ist Q ein Punkt von P^{n-1}, so ist P ein Punkt von Q^1, der Polargeraden von K^n hinsichtlich Q.*"

(γ) „*Die ersten Polaren von K^n hinsichtlich der Punkte einer Geraden bilden ein zu der Punktreihe projectivisches Büschel.*"

Ich will jetzt einen Beweis des Satzes von der gemischten Polare anschliessen, also zeigen, dass man zu derselben Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung gelangt, ob man hinsichtlich Q die Polare von P^{n-1} oder hinsichtlich P die Polare von Q^{n-1} nimmt. Es sind mit einander identisch die beiden Curven:

$$(P, Q)^{n-2} : K^n \quad \text{und} \quad (Q, P)^{n-2} : K^n.$$

---

*) Vergl. a. a. O. §§ 161—165. Offenbar enthält die Polargruppe die harmonischen Mittelpunkte erster Ordnung der Gruppe $p(K^n)$ hinsichtlich P und die erste Definition deckt sich daher mit der Cremona-Grassmann'schen. [Vergl. Herrn Cremona's „introduzione" Nr. 68 ff.] Eine allgemeine Definition der harmonischen Mittelpunkte beliebig hoher Ordnung, welche die obige als speciellen Fall enthält, gab zuerst Herr Kohn [„Zur Theorie der harmonischen Mittelpunkte etc." Wien. Ber., Bd. 88_2, S. 424—431.] Die obige Umformung der Cremona'schen Definition, übrigens ohne rein geometrischen Beweis, benutzte derselbe in der Abhandlung: „Ueber Satellitcurven und Flächen", Wien. Ber., Bd. 89_2, S. 144—172. Herr Castelnuovo dehnte Herrn Kohn's Theorie auf gemischte Polargruppen aus. Vergl.: „Studio dell' involuzione generale etc." Ven. Ist. Atti (6), Bd. 4, S. 1167—1200. Die Polaren-Definition liegt seiner Arbeit „Studii sulla teoria della involuzione nel piano" ibidem, (S. 1559—1594) zu Grunde. Dass die Polare auch mit einer P nicht enthaltenden Curve nur $n-1$ Punkte gemein hat, zeigt Herr Castelnuovo durch Behandlung des Netzes der Curven, welche hinsichtlich P dieselbe Polare haben. Im übrigen verweise ich auf die a. a. O., Note 37, gemachten Literaturangaben.

Hierzu nehme ich r oder PQ als Axe, P und Q als Centren zweier perspectivischer Beziehungen. Für beide treffen sich homologe Gerade auf PQ; homologe Punkte liegen für die erste mit P, für die zweite mit Q auf einer Geraden. Zu A gehöre A' vermöge der ersten, A'' vermöge der zweiten Beziehung, so dass eben O, A, A', bez. Q, A, A'' in je einer Geraden liegen. PA'' und QA' mögen sich in A''' treffen. Alsdann entsprechen sich A'' und A''' in der ersten perspectivischen Beziehung, da nämlich QA und QA' homologe Gerade sind. Ebenso entsprechen sich A' und A''' in der zweiten perpectivischen Beziehung. Bewegt man nun A über eine K^n, so durchlaufen A', A'', A''' drei andere Curven n^{ter} Ordnung K_1^n, K_2^n, K_3^n, und zwar sind

$$K^n,\ K_1^n,\quad \text{sowie}\quad K_2^n,\ K_3^n,$$

Paare homologer Curven der ersten perspectivischen Beziehung. In der zweiten Beziehung entsprechen sich

$$K^n \text{ und } K_2^n,\quad \text{sowie}\quad K_1^n \text{ und } K_3^n.$$

Alle vier Curven haben mit PQ oder r dieselbe Gruppe von n Punkten gemeinsam. Je zwei von ihnen bestimmen ein solches Büschel, in dem r zusammen mit einer Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung vorkommt. Ich will annehmen, dass

$$K^n,\ K_1^n,\ r\mathfrak{P}^{n-1};\quad K^n,\ K_2^n,\ r\mathfrak{Q}^{n-1};$$
$$K_2^n,\ K_3^n,\ r\mathfrak{P}_2^{n-1};\quad K_1^n,\ K_3^n,\ r\mathfrak{Q}_1^{n-1}$$

je zu einem Büschel gehören. $\mathfrak{Q}^{n-1}$ und $\mathfrak{Q}_1^{n-1}$ entsprechen einander in der ersten perspectivischen Beziehung, denn jedenfalls wird das Büschel K^n, K_2^n in das andere K_1^n, K_3^n umgewandelt, und der zerfallenden Curve $r\mathfrak{Q}^{n-1}$ des ersteren kann hierbei nur die zerfallende Curve des zweiten Büschels entsprechen. $\mathfrak{Q}^{n-1}$ und $\mathfrak{Q}_1^{n-1}$ schneiden folglich auf r dieselbe Punktgruppe aus. Ganz ähnlich ist zu zeigen, dass $\mathfrak{P}^{n-1}$ und $\mathfrak{P}_2^{n-1}$ sich in der zweiten perspectivischen Beziehung entsprechen und wiederum in $n-1$ Punkten auf r sich schneiden. Auf der anderen Seite können

$$r\mathfrak{P}^{n-1},\ r\mathfrak{P}_2^{n-1},\ r\mathfrak{Q}^{n-1},\ r\mathfrak{Q}_1^{n-1}$$

als solche vier Curven des Netzes dritter Stufe aus K^n, K_1^n, K_2^n, K_3^n betrachtet werden, die irgend einen bestimmten Punkt S von r enthalten. Derartige Curven gehören aber zu einem Netze zweiter Stufe. Die in einem Netze zweiter Stufe liegenden Büschel $\mathfrak{P}^{n-1}, \mathfrak{P}_2^{n-1}$ und $\mathfrak{Q}^{n-1}, \mathfrak{Q}_1^{n-1}$ müssen also eine Curve gemeinsam haben*). Da diese die beiden Gruppen, welche r auf $\mathfrak{P}^{n-1}$ und $\mathfrak{Q}^{n-1}$ ausschneidet, enthält, so zerfällt sie in r und in eine Curve $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})^{n-2}$ $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung von der Art dass

*) Vergl. a. a. O. § 137 u. § 151.

$$\mathfrak{P}^{n-1},\ \mathfrak{P}_2^{n-1},\ r(\mathfrak{P},\ \mathfrak{Q})^{n-2}$$

zu einem, und

$$\mathfrak{Q}^{n-1},\ \mathfrak{Q}_1^{n-1},\ r(\mathfrak{P},\ \mathfrak{Q})^{n-2}$$

zu einem anderen Büschel gehören. Wenn man nun A' und A'' an A heranrückt so gehen $\mathfrak{Q}^{n-1}$ und $\mathfrak{Q}_1^{n-1}$ in die Polare Q^{n-1}, $\mathfrak{P}^{n-1}$ und $\mathfrak{P}_2^{n-1}$ in P^{n-1} über, $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})^{n-2}$ geht in eine Curve $(n-2)^{ter}$ Ordnung über, welche nach der ersten Definition die Polare von P^{n-1} hinsichtlich Q, nach der zweiten Definition aber die Polare von Q^{n-1} hinsichtlich P ist. Hiermit ist der Satz von der gemischten Polare überhaupt bewiesen.

(5.) „*Wenn man von K^n die Polare hinsichtlich P_1, von dieser Curve die Polare hinsichtlich P_2, von der neuen Curve die Polare hinsichtlich P_3 nimmt, u. s. f., so hängt die schliesslich entstehende Curve*

$$(P_1, P_2, \ldots P_m)^{n-m} : K^n$$

$(n-m)^{ter}$ Ordnung wohl von den Punkten $P_1, P_2, \ldots P_m$, nicht aber von ihrer Reihenfolge ab.“

Aus dem Satz von der gemischten Polare folgt bekanntlich sofort der nachstehende

(6.) „*Ist Q ein Punkt von $(P_1, P_2, \ldots P_m)^{n-m} : K^n$, so liegt P_m auf der gemischten Polargeraden $(P_1, P_2, \ldots P_{m-1})^1 : Q^m$.*“

Denn diese Gerade kann als Polargerade hinsichtlich Q von

$$(P_1, P_2, \ldots P_{m-1})^{n-m+1} : K^n$$

bezeichnet werden, während

$$(P_1, P_2, \ldots P_{m-1}, P_m)^{n-m} : K^n$$

als die erste Polare derselben Curve hinsichtlich P_m zu betrachten ist.

Wir schreiten jetzt zur Begründung des folgenden Satzes.

(7.) „*Wenn eine Curve K^n n^{ter} Ordnung Q zum ϱ-fachen Punkt hat, so tritt derselbe in P^{n-1} $(\varrho-1)$-fach auf. Die Tangenten der letzteren Curve bilden die Polargruppe der Tangentengruppe von K^n hinsichtlich PQ.*“

„*Ist die Tangentengruppe von K^n mit dem ϱ-fach zählenden Strahle QP identisch, so enthält P^{n-1} den Punkt Q im allgemeinen und mindestens ϱ-fach, möglicher Weise aber $(\varrho+\varrho')$-fach, doch muss dann die Schnittgruppe zwischen PQ und K^n Q mindestens $(\varrho+\varrho'+1)$-fach enthalten; keinesfalls kann es mehr als einen solchen ausgezeichneten Punkt P auf PQ geben.*“

„*Ist P ein ϱ-facher Punkt von K^n, so ist er auch ein ϱ-facher Punkt von P^{n-1}; P^{n-1} und K^n haben dieselbe Tangentengruppe.*“

Man setze $r = n - \varrho$. Für $r = 0$ ist dann der Satz selbstverständlich, denn K^n besteht aus n, P^{n-1} aus $n-1$ in Q sich treffenden Geraden; und zwar bilden diese nach der ersten Definition die

Polargruppe der ersteren Strahlengruppe hinsichtlich PQ. Um den allgemeinen Satz zu erhärten, braucht man daher nur noch von $r-1$ auf r zu schliessen. Hierzu ziehe man eine K^{n-1}, welche in Q dieselbe Tangentengruppe wie K^n hat, ferner lege man durch P eine beliebige Gerade p und betrachte das Büschel K^n, $p\,K^{n-1}$, in dem sich eine bestimmte Curve K_1^n vorfindet, die Q mindestens $(\varrho+1)$-fach (Satz 2) enthält. Die Polaren dieser Curven hinsichtlich P bilden (4. α) ein zweites zum ersten projectivisches Büschel. Nun ist der Satz für K_1^n vorauszusetzen, da für sie $r-1=n-(\varrho+1)$ an die Stelle von r tritt, folglich hat P_1^{n-1} Q zum mindestens ϱ-fachen Punkt. Die Polare von $p\ K^{n-1}$ besteht nach der zweiten Definition aus p und aus der Polare P^{n-2} von K^{n-1} hinsichtlich P. Für K^{n-1} tritt aber wieder $r-1=(n-1)-\varrho$ an die Stelle von r. Demzufolge hat P^{n-2} in Q einen $(\varrho-1)$-fachen Punkt, und sie berührt in Q die Polargruppe der auch bei K^n auftretenden Tangentengruppe hinsichtlich PQ. Da nun P^{n-1}, $p\,P^{n-2}$, P_1^{n-1} einem Büschel angehören, so gilt nach Satz 2 auch für K^n der aufgestellte Lehrsatz, der damit bewiesen ist.

Ist QP die einzige, mithin ϱ-fach zählende Tangente, so ziehe man durch P die Hülfsgeraden $P, P_1, P_2, P_3 \ldots$. Zu P_λ gehört eine P_λ^{n-1}, die $Q(\varrho-1)$-fach enthält und QP zur $(\varrho-1)$-fach zählenden Tangente hat. Diese Curven P_1^{n-1}, P_2^{n-1}, $P_3^{n-1}, \ldots$ bilden also (Satz 4 α) ein Büschel, in dem (Satz 2) auch eine Curve vorkommt, die Q mehr als $(\varrho-1)$-fach enthält. Diese Curve kann aber nur P^{n-1} sein*). Da die Schnittgruppe von PQ und K^n den Punkt Q $(\varrho+\varrho'+1)$-fach enthält, so vereinigt Q in sich $\varrho+\varrho'$ Doppelpunkte der Involution P^n, $PQ(K^n)$**) und die Polare P^{n-1} enthält daher Q höchstens $(\varrho+\varrho')$-fach, im allgemeinen aber ϱ-fach.

Ist P selbst ein ϱ-facher Punkt von K^n, so zerfällt jede der Involutionen P^n, $p\,(K^n)$ in den ϱ-fachen Punkt P und in eine Involution P^{n-m}, (U^{n-m}), wo die Gruppe (U^{n-m}) aus den ferneren Schnittpunkten zwischen p und K^n besteht. Demzufolge enthält die Gruppe der Doppelpunkte $n-m-1$ von P verschiedene Punkte, es ist P wirklich ein genau m-facher Punkt von P^{n-1}. Dass die Tangenten von P^{n-1} mit denen von K^n sich decken, folgt nun, wenn man die zweite Entstehungsart der Polare ins Auge fasst.

(8.) „*Ist Q ein ϱ-facher Punkt der m^{ten} Polare P^{n-m} von K^n, so ist P ein mindestens ϱ-facher Punkt der Polare $Q^{m+\varrho-1} : K^n$.*“

---

*) Man könnte auch, wenn p^n eine Strahlengruppe mit dem Centrum P ist, die PQ ϱ-fach enthält, benutzen, dass eine Curve des Büschels p^n, K^n Q mindestens $(\varrho+1)$-fach enthält, aber hinsichtlich P dieselbe Polare hat, wie K^n.

**) Vergl. a. a. O. § 56 bez. 34b.

Denn nach Lehrsatz 7. wird $(P_1, P_2, \ldots P_{\varrho-1})^{n-m-\varrho+1} : P^{n-m}$ ebenfalls Q enthalten, wobei $P_1, P_2, \ldots P_{\varrho-1}$ ganz willkürliche Punkte sind. Die letztgenannte Curve kann auch als

$$(P_1, P_2, \ldots P_{\varrho-1}, P^m)^{n-m-\varrho+1} : K^n$$

bezeichnet werden. Folglich muss

$$(P_1, P_2, \ldots P_{\varrho-1} P^{m-1})^1 : Q^{m+\varrho-1}$$

durch den Punkt P gehen. Diese Curve kann aber auch als

$$(P_1, P_2, \ldots P_{\varrho-1}) : \{ P^{m-1} : Q^{m+\varrho-1} \}$$

bezeichnet werden. Hieraus geht hervor, dass $P^{m-1} : Q^{m+\varrho-1}$ in P einen mindestens ϱ-fachen Punkt hat. Dasselbe gilt von

$$P^{m-2} : Q^{m+\varrho-1};\ P^{m-3} : Q^{m+\varrho-1};\ \ldots P : Q^{m+\varrho-1};\ Q^{m+\varrho-1}.$$

III.

Jacobi'sche Curve eines Netzes zweiter Stufe.

Ich will bei meiner rein geometrischen Behandlung die Jacobi'sche Curve eines Netzes nach der zweiten der üblichen Arten definiren, nämlich als Ort derjenigen Punkte, in welchen alle Curven eines bestimmten Büschels eine Berührung mit einander eingehen. Indem man aus jedem derartigen Büschel die beiden Curven herausgreift, welche aus zwei festen Büscheln des Netzes entstammen, wird man auf den Ort derjenigen Punkte hingewiesen, in denen Curven zweier Büschel

$$K_1^p K_2^p K_3^p \ldots \quad \text{und} \quad L_1^q L_2^q L_3^q \ldots$$

eine Berührung eingehen. Es mögen K_μ^p und L_ν^q sich in B längs b berühren, welche Gerade einer anderen festen a in P begegne. Alsdann treffen sich in B die vier Curven K_μ^p, L_ν^q, P_μ^{p-1}, $\mathfrak{P}_\nu^{q-1}$, wobei unter P_μ^{p-1} und $\mathfrak{P}_\nu^{q-1}$ die Polaren von K_μ^p und L_ν^q hinsichtlich P zu verstehen sind. Betrachtet man für alle Punkte $P, Q, R, S, \ldots$ der Geraden a diese Zusammenstellungen von vier Curven, so kann man alle verschiedenen Punkte B erhalten. Nun erzeugen

$$K_1^p K_2^p K_3^p \ldots \quad \text{und} \quad P_1^{p-1} P_2^{p-1} P_3^{p-1} \ldots \quad \text{eine} \quad P^{2p-1},$$

$$L_1^q L_2^q L_3^q \ldots \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_1^{q-1} \mathfrak{P}_2^{q-1} \mathfrak{P}_3^{q-1} \ldots \quad \text{eine} \quad \mathfrak{P}^{2q-1},$$

und es gehören alle Schnittpunkte zwischen P^{2p-1} und $\mathfrak{P}^{2q-1}$ ausser P zu dem gesuchten Orte. Lässt man P in andere Punkte $Q, R, S, \ldots$ von a übergehen, so erhält man die Büschel

$$P_1^{p-1} P_2^{p-1} P_3^{p-1} \ldots \barwedge Q_1^{p-1} Q_2^{p-1} Q_3^{p-1} \ldots$$
$$\barwedge R_1^{p-1} R_2^{p-1} R_3^{p-1} \ldots \barwedge S_1^{p-1} S_2^{p-1} S_3^{p-1} \ldots \barwedge \ldots$$

und

$$\mathfrak{P}_1^{q-1}\mathfrak{P}_2^{q-1}\mathfrak{P}_3^{q-1}\ldots \barwedge \mathfrak{Q}_1^{q-1}\mathfrak{Q}_2^{q-1}\mathfrak{Q}_3^{q-1}\ldots$$
$$\barwedge \mathfrak{R}_1^{q-1}\mathfrak{R}_2^{q-1}\mathfrak{R}_3^{q-1}\ldots \barwedge \mathfrak{S}_1^{q-1}\mathfrak{S}_2^{q-1}\mathfrak{S}_3^{q-1}\ldots \barwedge \ldots$$

zweier bestimmter Schaaren. Jedes der ersteren Büschel ist zu

$$K_1^p K_2^p K_3^p \ldots$$

projectivisch; sie bilden eine Schaar, da homologe Curven in zu $PQRS\ldots$ projectivischen Leitbüscheln angeordnet liegen.

$$P_\lambda^{p-1} Q_\lambda^{p-1} R_\lambda^{p-1} S_\lambda^{p-1}\ldots$$

enthält die Polaren einer festen K_λ^p hinsichtlich $P, Q, R, S, \ldots$ Mithin sind die Curvenreihen

$$P^{2p-1}Q^{2p-1}R^{2p-1}S^{2p-1}\ldots \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}^{2q-1}\mathfrak{Q}^{2q-1}\mathfrak{R}^{2q-1}\mathfrak{S}^{2q-1}\ldots$$

zwei zu $PQRS\ldots$ projectivische Büschel, welche neben dem fraglichen Orte die Gerade a erzeugen, da homologe Curven sich der Reihe nach in $P, Q, R, S, \ldots$ treffen. Also ist die gesuchte Curve eine $K^{2p+2q-3}$, welche die Grundpunkte der beiden Büschel enthält*).

Bei zwei Büscheln desselben Netzes, wo $p = q = n$ wird, löst sich von $K^{2p+2q-3}$ oder K^{4n-3} noch eine Curve n^{ter} Ordnung ab; es ist dies offenbar die beiden Netzbüscheln gemeinsame Netzcurve. Hiernach behalten wir als eigentliche Jacobi'sche Curve des Netzes eine K^{3n-3} übrig. Es ist also auch rein geometrisch die Thatsache erwiesen.

(9.) *„In einem Netze zweiter Stufe giebt es eine einfache Mannigfaltigkeit von Curven, die mehrfache Punkte enthalten. Der Ort derselben, die Jacobi'sche Curve, ist von der $(3n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung."***)

Um das Verhalten der Jacobi'schen Curve in ihren einzelnen Punkten zu untersuchen, ist nun die soeben erläuterte Methode bekanntlich

---

*) Vergl. Herrn Cremona's „Introduzione etc." Nr. 87 und 90.

**) Auch Herr Cremona benutzt bekanntlich zur Discussion der allgemeinen Jacobi'schen Curve dreier Curven C, C', C'' eine projectivische Erzeugung, welche aber die Curve zusammen mit einer ersten Polaren einer dieser Curven ergiebt. Während ein Strahl S um o rotiert, werden jedesmal die zu seiner Punktreihe gehörigen Polarbüschel hinsichtlich der drei Curven C, C', C'' genommen, von denen regelmässig zwei mit dem dritten zur Coincidenz kommen. Die so entstehenden veränderlichen Curven K' und K'' müssen jedenfalls zwei eindeutig aufeinander bezogene Reihen vom Index 1, also zwei projectivische Büschel durchlaufen. Sie erzeugen die erwähnte zusammengesetzte Curve (Vergl. a. a. O. Nr. 93 ff.). Ein im strengsten Sinne des Wortes rein geometrischer Beweis für die Büschelnatur der beiden Cremona'schen Reihen ist ziemlich schwer zu führen. Demzufolge habe ich die obige Betrachtungsweise in dem speciellen Fall eines vorliegenden Netzes bevorzugt.

vorzüglich geeignet. Ich betrachte hierzu zunächst einen nicht allen Curven des Netzes gemeinsamen Punkt X. Das Büschel der ihn enthaltenden Curven diene zur Herstellung des in der soeben gegebenen Entwickelung auftretenden Büschels $P^{2n-1}Q^{2n-1}R^{2n-1}\ldots$ Es sei zuerst X für alle Curven des Netzbüschels ein ϱ-facher Punkt und $x_1^\varrho x_2^\varrho x_3^\varrho \ldots$ die zugehörige Tangenteninvolution. Alsdann besitzen alle Curven des Büschels $P_1^{n-1}P_2^{n-1}P_3^{n-1}\ldots$ X zum $(\varrho - 1)$-fachen Punkt, und die Tangenteninvolution $x_{\mathfrak{p}_1}^{\varrho-1}x_{\mathfrak{p}_2}^{\varrho-1}x_{\mathfrak{p}_3}^{\varrho-1}\ldots$ besteht aus den Polargruppen der früheren Involutionsgruppen hinsichtlich PX (Satz 7). Enthält x_λ^ϱ einen zweifachen Strahl, so kommt er einfach in $x_{\mathfrak{p}_\lambda}^{\varrho-1}$ vor, enthält x_λ^ϱ einen μ-fachen Strahl, so kommt er $(\mu - 1)$-fach in $x_{\mathfrak{p}_\lambda}^{\varrho-1}$ vor. Mithin haben die projectivischen Involutionen

$$x_1^\varrho x_2^\varrho x_3^\varrho \ldots \barwedge x_{\mathfrak{p}_1}^{\varrho-1}x_{\mathfrak{p}_2}^{\varrho-1}x_{\mathfrak{p}_3}^{\varrho-1}\ldots$$

zunächst die Doppelstrahlen-Gruppe der Involution x_1^ϱ, x_2^ϱ gemeinsam, die Gruppe, welche einen Strahl $(\mu - 1)$-fach enthält, der μ-fach in einer Gruppe der ersten Involution auftritt. Neben dieser Gruppe von $2\varrho - 2$ unveränderlichen Tangenten hat P^{2n-1} als einzige bewegliche den Strahl PX. Denn PX kommt in einer bestimmten Gruppe von x_1^ϱ, x_2^ϱ und von selbst in der Polargruppe derselben hinsichtlich PX vor. Alle Curven des Büschels $P^{2n-1}Q^{2n-1}R^{2n-1}\ldots$ haben also X zum $(2\varrho - 1)$-fachen Punkt, eine Tangente beschreibt das Büschel $X(PQR\ldots)$, die anderen Tangenten sind fest und bilden die Doppelstrahlen-Gruppe von x_1^ϱ, x_2^ϱ.

Das zweite Büschel $K_1^n \mathfrak{K}_2^n \mathfrak{K}_3^n \mathfrak{K}_4^n \ldots$, welches zur Herstellung von $\mathfrak{P}^{2n-1}\mathfrak{Q}^{2n-1}\mathfrak{R}^{2n-1}\ldots$ dient, habe mit dem ersten K_1^n gemeinsam. $\mathfrak{P}^{2n-1}$ hat alsdann X zum $(\varrho - 1)$-fachen Punkt und berührt die Gruppe $x_{\mathfrak{p}_1}^{\varrho-1}$. Denn die beiden Involutionen, welche die projectivischen Büschel

$$K_1^n \mathfrak{K}_2^n \mathfrak{K}_3^n \mathfrak{K}_4^n \ldots \barwedge P_1^{n-1}\mathfrak{P}_2^{n-1}\mathfrak{P}_3^{n-1}\mathfrak{P}_4^{n-1}\ldots$$

auf irgend einem von X ausgehenden Strahle x bestimmen, haben X $(\varrho - 1)$-fach mit einander gemeinsam, da dieser Punkt $(\varrho - 1)$-fach in $x(P_1^{n-1})$, hingegen ϱ-fach in $x(K_1^n)$ vorkommt; eine Tangente von P_1^{n-1}, also ein Strahl von $x_{\mathfrak{p}_1}^{\varrho-1}$ bestimmt zwei homologe Gruppen, die X ϱ-fach enthalten. Da diese Ueberlegung für alle Curven des zweiten Büschels gilt, so erzeugen die Büschel

$$P^{2n-1}Q^{2n-1}R^{2n-1}S^{2n-1}\ldots \barwedge \mathfrak{P}^{2n-1}\mathfrak{Q}^{2n-1}\mathfrak{R}^{2n-1}\mathfrak{S}^{2n-1}\ldots$$

eine K^{4n-2}, welche X zum $(3\varrho - 2)$-fachen Punkt hat. Dieselbe berührt einmal die allen Curven des ersten Büschels gemeinsamen Tangenten, zweitens, wie es sein muss, die in x_1^ϱ vorkommenden Strahlen. Denn jeder derselben kommt, wie bemerkt, in der Polargruppe von x_1^ϱ

hinsichtlich seiner vor und berührt also zwei homologe Curven der beiden letzteren Büschel.

Nachdem man von K^{4n-2} die Hülfsgerade a und K_1^n abgelöst hat, bleibt die Jacobi'sche Curve übrig, für die folgender Satz gilt:

(10.) „*Kommt ein Punkt X in allen Curven eines Netzbüschels ϱ-fach vor, so ist er ein $(2\varrho-2)$-facher Punkt der Jacobi'schen Curve des Netzes. Als Tangente der letzteren zählt jeder Strahl $(\mu-1)$-fach, welcher eine μ-fache Tangente für eine Curve des betrachteten Büschels ist.*"

Im zweiten möglichen Fall enthält eine Netzcurve, K_1^n, den Punkt X ϱ-fach, während er in den anderen Curven K_2^n, K_3^n, K_4^n, ... des durch X bestimmten Büschels nur σ-fach auftritt $(\varrho > \sigma)$. x_1^ϱ sei die Tangentengruppe von K_1^n, während die Tangentengruppen $x_2^\sigma, x_3^\sigma, x_4^\sigma, \ldots$ mit einander übereinstimmen. Da P^{2n-1}, $K_1^n P_2^{n-1}$, $K_2^n P_1^{n-1}$ drei Curven eines Büschels sind, so enthält P^{2n-1} den Punkt X $(\varrho+\sigma-1)$-fach; die zugehörige Tangentengruppe kommt in der Involution

$$x_1^\varrho x_{P2}^{\sigma-1}, \; x_2^\sigma x_{P1}^{\varrho-1}$$

vor und enthält also alle den beiden homologen Gruppen $x_{P2}^{\sigma-1}$ und $x_{P1}^{\varrho-1}$ etwa gemeinsamen Strahlen. Wird als zweites Netzbüschel

$$K_1^n \mathfrak{K}_2^n \mathfrak{K}_3^n \mathfrak{K}_4^n \ldots$$

zu Grunde gelegt, so enthält $\mathfrak{P}^{2n-1}$ X $(\varrho-1)$-fach und berührt die Strahlen der Gruppe $x_{P1}^{\varrho-1}$. Folglich enthält das Erzeugniss K^{4n-2} der Büschel

$$P^{2n-1} Q^{2n-1} R^{2n-1} S^{2n-1} \ldots \barwedge \mathfrak{P}^{2n-1} \mathfrak{Q}^{2n-1} \mathfrak{R}^{2n-1} \mathfrak{S}^{2n-1} \ldots$$

X $(2\varrho+\sigma-2)$-fach. Als Tangenten der Curve erhalten wir einmal diejenigen von K_1^n, dann die $\varrho+\sigma-2$ Strahlen, deren jeder zwei homologen Polargruppen der beiden gegebenen Tangentengruppen angehört. Dieselben sind Tangenten der nach Ablösung von a und K_1^n verbleibenden Jacobi'schen Curve. Gemeinsame Tangenten von K_1^n und K_2^n sind einfache Tangenten derselben.

Der Fall, wo für eine der beiden Curven alle Tangenten zusammenfallen, ist jetzt besonders ins Auge zu fassen. K_2^n habe zunächst XP zur σ-fach zählenden Tangente. Wir benutzen wieder, dass

$$P^{2n-1}, \; K_1^n P_2^{n-1}, \; K_2^n P_1^{n-1}$$

zu einem Büschel gehören. Nun enthält P_1^{n-1} X $(\varrho-1)$-fach und berührt die Strahlen der Gruppe $x_{P1}^{\varrho-1}$; P_2^{n-1} hingegen enthält X mindestens σ-fach (Satz 7). Da also $K_1^n P_2^{n-1}$ einen $(\varrho+\sigma)$-fachen, $K_2^n P_1^{n-1}$ aber nur einen $(\varrho+\sigma-1)$-fachen Punkt in X hat, so gilt letzteres (Satz 2) von P^{2n-1}; diese Curve berührt XP σ-fach und überdies $x_{\mathfrak{P}_1}^{\sigma-1}$. Da auch $\mathfrak{P}^{2n-1}$ diese Gruppe berührt, so gilt dasselbe von K^{4n-2} und K^{3n-3}.

Ferner gehören zu einem Büschel Q^{2n-1}, $K_1{}^n Q_2{}^{n-1}$, $K_2{}^n Q_1{}^{n-1}$. Demzufolge hat jede Curve des ersten Büschels und mithin auch die untersuchte den Strahl XP zur $(\sigma-1)$-fachen Tangente. Q^{2n-1} berührt ferner eine Gruppe der Involution x_1^{σ}, $QPx_{Q1}^{\sigma-1}$, hingegen $\mathfrak{Q}^{2n-1}$ die Gruppe $x_{Q1}^{\sigma-1}$ selbst. Nach Abscheidung der allen Curven

$$P^{2n-1}, Q^{2n-1}, R^{2n-1}, \ldots \text{ bez. } \mathfrak{P}^{2n-1}\mathfrak{Q}^{2n-1}\mathfrak{R}^{2n-1}, \ldots$$

gemeinsamen Tangenten bleiben also zwei projectivische aber nothwendig von einander verschiedene Involutionen übrig, deren homologe Gruppen homologe Curven

$$P^{2n-1}, \mathfrak{P}^{2n-1}; Q^{2n-1}, \mathfrak{Q}^{2n-1}; R^{2n-1}, \mathfrak{R}^{2n-1}; \ldots$$

berühren. Daher kann K^{3n-3} X gewiss nicht mehr als $(\varrho+\sigma-2)$-fach enthalten.

Aehnlich ist der Fall zu behandeln, wo $K_1{}^n$ einen Strahl XQ zur einzigen ϱ-fach zählenden Tangente hat. Es ist leicht zu sehen, dass alle Curven des zweiten Büschels bis auf $\mathfrak{Q}^{2n-1}$, welche X mindestens ϱ-fach enthält, X zum $(\varrho-1)$-fachen Punkt haben, und allein XQ berühren. Von den Curven des ersten Büschels schliesst sich jede einzelne QX $(\varrho-1)$-fach an, Q^{2n-1} berührt den Strahl QX ϱ-fach, ausserdem aber die Gruppe $x_{Q,2}^{\sigma-1}$. Da nun

$$K^{4n-2}, P^{2n-1}\mathfrak{Q}^{2n-1}, \mathfrak{P}^{2n-1}Q^{2n-1}$$

drei Curven eines Büschels sind, von denen die zweite X mindestens $(2\varrho+\sigma-1)$-fach enthält, während er in der dritten nur $(2\varrho+\sigma-2)$-fach vorkommt, so gilt letzteres von K^{4n-2}. Von den Tangenten sind ferner $2\varrho-1$ mit XQ identisch, und die anderen machen die Gruppe $x_{Q2}^{\sigma-1}$ aus.

Wenn endlich $K_1{}^n$ und $K_2{}^n$ denselben Strahl XP zur ϱ-fachen bez. σ-fachen Tangente haben, so enthält K^{4n-2} X mindestens, also im allgemeinen, $(2\varrho+\sigma-1)$-fach. Denn X kommt mindestens ϱ-fach in $P_1{}^{n-1}$, mindestens σ-fach in $P_2{}^{n-1}$ und folglich in jeder der drei einem Büschel angehörigen Curven P^{2n-1}, $K_1{}^n P_2{}^{n-1}$, $K_2{}^n P_1{}^{n-1}$ mindestens $(\varrho+\sigma)$-fach vor. $\mathfrak{P}^{2n-1}$ enthält X mindestens ϱ-fach. Ferner ist X ein $(\varrho+\sigma-1)$-facher Punkt für Q^{2n-1}, ein $(\varrho-1)$-facher Punkt für $\mathfrak{Q}^{2n-1}$, und zwar berühren die letzteren Curven nur XP. Schliesslich muss K^{4n-2}, als Glied des Büschels $P^{2n-1}\mathfrak{Q}^{2n-1}$, $\mathfrak{P}^{2n-1}Q^{2n-1}$ X $(2\varrho+\sigma-1)$-fach enthalten und XP, wie man sich leicht überzeugt, $(\varrho+\sigma-1)$-fach berühren.

In besonderen Fällen giebt es auf XP einen Punkt R, hinsichtlich dessen $K_2{}^n$ eine Polare zeigt, die X öfter als diese Curve selbst enthält. Jeder andere Punkt von XP ergiebt dann eine Polare, die sich XP eben so oft anschmiegt, wie $K_2^{\,n}$ selbst. Von diesen Besonderheiten wollen wir (im nächsten Abschnitt) nur die bei der Hesse'schen Curve möglichen behandeln.

Die gewonnenen Resultate spricht der folgende Satz aus:

(11.) „*Enthält eine Curve eines Netzes zweiter Stufe einen Punkt X ϱ-fach, der in den anderen Curven des durch ihn bestimmten Netzbüschels σ-fach vorkommt, ($\varrho > \sigma$), so ist er ein ($\varrho + \sigma - 2$)-facher Punkt der Jacobi'schen Curve des Netzes. Jede Tangente derselben gehört zwei homologen Polargruppen der beiden Gruppen an, deren einer jede X enthaltende Curve des Netzes sich anschmiegt. Geht eine der beiden Gruppen in ein Strahlenvielfach über, so berührt die Jacobi'sche Curve einmal die Polargruppe der anderen Tangentengruppe hinsichtlich dieses Strahles, ausserdem aber nur ihn selbst (($\varrho - 1$)-fach bez. ($\sigma - 1$)-fach).*“

„*Wenn beide Gruppen Vielfache desselben Strahles XP sind, und nur in diesem Falle, enthält die Jacobi'sche Curve X mehr als ($\varrho + \sigma - 2$)-fach, im allgemeinen also ($\varrho + \sigma - 1$)-fach. Den Strahl XP berührt dieselbe alsdann ($\sigma - 1$)-fach.*“

Wir gehen nunmehr zur Untersuchung derjenigen, im allgemeinen nicht vorkommenden Punkte Y über, die in sämmtlichen Curven des Netzes zweiter Stufe auftreten. Hierbei sind vier verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Zunächst können alle Curven Y genau ϱ-fach enthalten, wo dann ihre Tangentengruppen ein eigentliches Involutionsnetz zweiter Stufe bilden.

Im zweiten Fall enthält eine Curve Y ϱ-fach, während er in allen anderen Curven σ-fach vorkommt ($\varrho > \sigma$). Die verschiedenen in Betracht kommenden Tangentengruppen der letzteren Curven bilden eine eigentliche Involution.

Im dritten Fall kommt Y in den allgemeinen Netzcurven σ-fach vor, und dieselben haben dieselbe Tangentengruppe. Hingegen kommt Y ϱ-fach in allen Curven eines bestimmten Büschels vor ($\varrho > \sigma$).

Im letzten Falle kommt Y in den allgemeinen Netzcurven τ-fach, in denen eines bestimmten Büschels σ-fach und schliesslich in einer einzigen Curve desselben ϱ-fach vor ($\varrho > \sigma > \tau$).

Der rein geometrischen Behandlung fügen sich am leichtesten der zweite und der dritte Fall*). Im zweiten Falle benutzen wir zur

*) Man vergl. Herrn Cremona's Entwickelungen a. a. O. No. 96, die zwar nur auf die beiden einfachsten Fälle sich beziehen, die im Netze der ersten Polaren auftreten, die aber sofort auf die allgemeinen Fälle ausgedehnt werden können.

Herstellung von K^{4n-2} irgend ein Büschel $K_1^n K_2^n K_3^n \ldots$, dessen sämmtliche Curven Y σ-fach enthalten, und daneben ein zweites Büschel $K_1^n \mathfrak{K}_2^n \mathfrak{K}_3^n \ldots$, welches die Curve $\mathfrak{K}_3^n$ mit dem ϱ-fachen Punkt Y enthält. Die Tangentengruppen der ersteren mögen die Involution $y_1^\sigma y_2^\sigma y_3^\sigma \ldots$ bilden. $\mathfrak{y}_3^\varrho$ sei die Tangentengruppe der Curve $\mathfrak{K}_3^n$. Alle übrigen Curven des zweiten Büschels berühren y_1^σ.

Nach dem Obigen berühren alle Curven des ersten Büschels $P^{2n-1} Q^{2n-1} R^{2n-1} S^{2n-1} \ldots$ (Beweis zum Satz 7) die Doppelstrahlen der Involution x_1^σ, x_2^σ; die einzige bewegliche Tangente beschreibt das Strahlbüschel $Y(PQRS\ldots)$. Die Tangentengruppen der Curven von $\mathfrak{P}^{2n-1}$; $\mathfrak{Q}^{2n-1}$; $\mathfrak{R}^{2n-1}$; $\mathfrak{S}^{2n-1}$; ... bilden eine Involution und gehören der Reihe nach zu den Involutionen $y_1^\sigma \mathfrak{y}_{P3}^{\varrho-1}$, $\mathfrak{y}_3^\varrho y_{P1}^{\sigma-1}$; $y_1^\sigma \mathfrak{y}_{Q3}^{\varrho-1}$, $\mathfrak{y}_3^\varrho y_{Q1}^{\sigma-1}$; $y_1^\sigma \mathfrak{y}_{R3}^{\varrho-1}$, $\mathfrak{y}_3^\varrho y_{R1}^{\sigma-1}$; ...

K^{4n-2} hat also Y zum $(\varrho+3\sigma-2)$-fachen Punkt. Als Tangenten stellen sich einmal die Doppelstrahlen von y_1^σ, y_2^σ heraus, da sie Tangenten aller Curven des ersten Büschels sind. Ferner ergeben sich als Tangenten von K^{4n-2} nur noch die Strahlen der beiden Gruppen y_1^σ, $\mathfrak{y}_3^\varrho$. Wird XP z. B. mit einem Strahl von $\mathfrak{y}_3^\varrho$ identisch, so wird er auch in der Polargruppe $\mathfrak{y}_{P3}^{\varrho-1}$ von $\mathfrak{y}_3^\varrho$ hinsichtlich seiner und folglich auch in allen Gruppen der Involution $y_1^\sigma \mathfrak{y}_{P3}^{\varrho-1}$, $\mathfrak{y}_3^\varrho y_{P1}^{\sigma-1}$ vorkommen und eine gemeinsame Tangente von P^{2n-1}, $\mathfrak{P}^{2n-1}$ und K^{4n-2} sein. Nach Ablösung von a und K_1^n von K^{4n-2} bleibt die Jacobi'sche Curve übrig, die also Y zum $(\varrho+2\sigma-2)$-fachen Punkt hat; sie berührt die Gruppe $\mathfrak{y}_3^\varrho$ und die Doppelstrahlen der Involution y_1^σ, y_2^σ. Ganz ebenso verfährt man im dritten Fall, nur nimmt man in das Büschel $K_1^n K_2^n K_3^n \ldots$ die Curven auf, welche Y ϱ-fach enthalten und greift das zweite Büschel, von dem alle Curven bis auf eine Y σ-fach enthalten, beliebig heraus. Das Resultat ist hier, dass Y $(2\varrho+\sigma-2)$-fach der Jacobi'schen Curve angehört; dieselbe berührt die σ den allgemeinen Netzcurven gemeinsamen Tangenten und überdies die Doppelstrahlen der zu K_1^n, K_2^n gehörigen Involution.

Beide Ergebnisse lassen sich in folgender Weise zusammenziehen.

(12.) *„Schliesst sich jede Curve eines Netzes zweiter Stufe in einem bestimmten Punkte Y entweder einer Gruppe einer Involution λ ter Ordnung oder einer festen Gruppe von μ Strahlen an, so wird die Jacobi'sche Curve des Netzes Y $(2\lambda+\mu-2)$-fach enthalten, sie berührt ausser den letzteren μ Strahlen die Doppelstrahlen der Involution."*

Ganz anders ist in dem Falle zu verfahren, wo alle Curven des Netzes Y ϱ-fach enthalten. Wir heben irgend zwei Curvenbüschel $K_1^n K_2^n K_3^n \ldots$ und $K_1^n \mathfrak{K}_2^n \mathfrak{K}_3^n \ldots$ heraus und ermitteln die zugehörigen Büschel

$$P^{2n-1} Q^{2n-1} R^{2n-1} S^{2n-1} \ldots \ \overline{\wedge}\ \mathfrak{P}^{2n-1} \mathfrak{Q}^{2n-1} \mathfrak{R}^{2n-1} \mathfrak{S}^{2n-1} \ldots$$

die K^{4n-2} erzeugen. Während für jedes Büschel $2\varrho-2$ Tangenten festgelegt sind, beschreibt eine letzte bewegliche in beiden Fällen das Büschel $Y(PQRS\ldots)$. Da sonach je zwei homologe Curven einander in Y längs einer beweglichen Tangente berühren, enthält K^{4n-2} den Punkt Y $(4\varrho-1)$-fach*), und es sind nun die Tangenten, die nicht auch K_1^n berühren, zu bestimmen; p oder YP sei eine von ihnen. In dem Büschel von Netzcurven, die p in Y berühren, wird sich im allgemeinen *eine* finden, in deren Tangentengruppe p doppelt vorkommt. Diese Curve sei oben mit K_2^n bezeichnet. Da dann p ein Doppelstrahl der zu K_1^n, K_2^n gehörigen Involution ist, so berühren alle Curven des Büschels $P^{2n-1}Q^{2n-1}R^{2n-1}\ldots$ den Strahl p einfach. Hingegen wird nur eine Curve, $\mathfrak{P}^{2n-1}$, des Büschels $\mathfrak{P}^{2n-1}\mathfrak{Q}^{2n-1}\mathfrak{R}^{2n-1}\ldots$ p berühren.

Die Schnittpunkte von K^{4n-2} mit p sind Coincidenzpunkte der beiden Involutionen

$$p(P^{2n-1}Q^{2n-1}R^{2n-1}S^{2n-1}\ldots)\barwedge p(\mathfrak{P}^{2n-1}\mathfrak{Q}^{2n-1}\mathfrak{R}^{2n-1}\mathfrak{S}^{2n-1}\ldots).$$

Von der ersteren Involution löst sich Y 2ϱ-fach ab, da alle Curven p in Y berühren. Von der zweiten Involution hingegen nur $(2\varrho-1)$-fach. Ausserhalb Y können die beiden Involutionen nur

$$4n-2-2\varrho-2\varrho+1=4n-4\varrho-1$$

Punkte gemeinsam haben. Da p eine Tangente von K^{4n-2} sein soll, so muss noch einer dieser Punkte mit Y identisch werden, es muss in den beiden Involutionen zwei homologe Gruppen geben, die Y bez. $(2\varrho+1)$-fach und 2ϱ-fach enthalten. Da nun allein $\mathfrak{P}^{2n-1}$ p in Y 2ϱ-fach schneidet, so muss P^{2n-1} $(2\varrho+1)$-fach treffen. Das kann aber nur dann der Fall sein, wenn K_2^n die Tangente p in $\varrho+2$ bei Y vereinigten Punkten trifft. Die untersuchte Gruppe P^{2n-1} enthält nämlich die Coincidenzpunkte der Involutionen

$$p(K_1^n K_2^n K_3^n\ldots)\barwedge p(P_1^{n-1}P_2^{n-1}P_3^{n-1}\ldots);$$

ausserhalb Y finden wir auf P^{2n-1} einmal den Punkt P selbst und dann die $2n-2\varrho-2$ Doppelpunkte der eigentlichen Involution, welche nach Abscheidung des ϱ-fachen Punktes Y von der Involution $p(K_1^n, K_2^n)$ übrig bleibt. Von diesen $2n-2\varrho-1$ Punkten muss noch ein einzelner nach Y fallen; es muss Y ein Doppelpunkt der durch ihn bestimmten Gruppe der Involution $(n-\varrho)$ter Ordnung oder ein $(\varrho+2)$-facher Punkt von $p(K_2^n)$ sein. Die Singularität, welche K_2^n aufweist, kann folglich als Vereinigung einer Schnabelspitze mit anderen zweifachen Punkten gedeutet werden. Es gilt der Satz:

(13.) „*Enthalten alle Curven eines Netzes zweiter Stufe einen Punkt Y ϱ-fach, so ist derselbe im allgemeinen ein $(3\varrho-1)$-facher*

*) Vergl. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen, S. 383.

Punkt der Jacobi'schen Curve. Jede ihrer Tangenten ist zugleich diejenige einer Schnabelspitze, durch deren Vereinigung mit anderen zweifachen Punkten man bei einer bestimmten Netzcurve die Singularität in Y erklären kann."

Weniger bestimmtes lässt sich in dem allein übrigen vierten Fall behaupten, wo die allgemeinen Netzcurven Y τ-fach enthalten und eine Gruppe y_3^τ berühren, die Curven eines Büschels, K_2^n, K_3^n, $K_4^n, \ldots$, ihn zum σ-fachen Punkt haben und dieselbe Gruppe y_2^σ berühren, eine bestimmte Curve K_1^n desselben aber Y ϱ-fach enthält und die Gruppe y_1^ϱ berührt. Die Curven P^{2n-1}, Q^{2n-1}, $R^{2n-1}, \ldots$, die zu dem ausgezeichneten Büschel gehören, enthalten $Y(\varrho + \sigma - 1)$-fach, die Tangentengruppen gehören der Reihe nach den Involutionen an $y_1^\varrho y_{P2}^{\sigma-1}, y_2^\sigma y_{P1}^{\varrho-1}$; $y_1^\varrho y_{Q2}^{\sigma-1}, y_2^\sigma y_{Q1}^{\varrho-1}$; $y_1^\varrho y_{R2}^{\sigma-1}, y_2^\sigma y_{R1}^{\varrho-1}; \ldots$ und bilden ihrerseits eine Involution. Wählt man ein zweites K_1^n umfassendes Büschel $K_1^n \mathfrak{K}_2^n \mathfrak{K}_3^n \ldots$, so enthalten die zugehörigen Curven $\mathfrak{P}^{2n-1}, \mathfrak{Q}^{2n-1}, \mathfrak{R}^{2n-1}, \ldots$ den Punkt Y $(\varrho + \tau - 1)$-fach, und ihre Tangentengruppen bestimmen sich ähnlich, wie vorher. Y ist mithin ein $(2\varrho + \sigma + \tau - 2)$-facher Punkt von K^{4n-2} und ein $(\varrho + \sigma + \tau - 2)$-facher Punkt von K^{3n-3}. Aus der Entstehungsweise der Curve geht hervor, dass als Tangente der Jacobi'schen Curve jeder Strahl anzusehen ist, der in zwei verschiedenen der drei Gruppen y_1^ϱ, y_2^σ, y_3^τ überhaupt, oder in einer von ihnen mehrfach auftritt.

Bestimmteres lässt sich über die Tangentengruppe in dem Falle sagen, wenn zwei verschiedene der drei Strahlengruppen, etwa y_2^σ und y_3^τ, zu Strahlenvielfachen, von PY bez. QY, werden. Alsdann muss PY $(\sigma - 1)$-fach, QY $(\tau - 1)$-fach als Tangente der Jacobi'schen Curve zählen. Die Gruppe der übrigen tritt in einer Involution auf, in welcher y_1^ϱ und jeder der Strahlen YP und YQ zusammen mit der Polargruppe von y_1^ϱ hinsichtlich des anderen Strahles vorkommt. Man überzeugt sich leicht, dass P^{2n-1} den Strahl YP σ-fach und ausserdem die Gruppe $y_{P1}^{\varrho-1}$ berührt. Q^{2n-1} hingegen berührt YP nur $(\sigma - 1)$-fach und daneben eine Gruppe $\{y_1^\varrho,\ YP\, y_{Q1}^{\varrho-1}\}$ der Involution, die durch y_1^ϱ und $YP\, y_{Q1}^{\varrho-1}$ bestimmt wird. Ganz ähnliche Erwägungen gelten, mit Vertauschung von P und Q, für $\mathfrak{P}^{2n-1}$ und $\mathfrak{Q}^{2n-1}$. Mithin bilden die Tangenten, die ausserhalb YP und YQ an K^{4n-2} auftreten, eine Gruppe der Involution $YP\, YQ\, y_{P1}^{\varrho-1} y_{Q1}^{\varrho-1}$, $\{y_1^\varrho,\ YP y_{Q1}^{\varrho-1}\}\ \{y_1^\varrho;\ YQ y_{P1}^{\varrho-1}\}$ oder ein Glied des aus den Gruppen $y_1^\varrho y_1^\varrho$; $y_1^\varrho\, YQ\, y_{P1}^{\varrho-1}$; $y_1^\varrho\, YP\, y_{Q1}^{\varrho-1}$; $YP\, YQ\, y_{P1}^{\varrho-1} y_{Q1}^{\varrho-1}$ zu bildenden Netzes. Dasselbe ist aber nur von der zweiten Stufe, da die projectivischen Reihen

$$Y(PQRS \ldots) \barwedge y_{P1}^{\varrho-1}\, y_{Q1}^{\varrho-1}\, y_{R1}^{\varrho-1}\, y_{S1}^{\varrho-1} \ldots$$

y_1^ϱ zur Coincidenzgruppe haben, und mithin y_1^ϱ; $YP\, y_{Q1}^{\varrho-1}$; $YQ\, y_{P1}^{\varrho-1}$

zu einer Involution gehören. Dasselbe gilt auch von den drei ersten der vier vorliegenden Gruppen. Da nun $K^{4n-2}\, K_1{}^n$ mit der Tangentengruppe $x_1{}^\varrho$ zum Bestandtheil hat, so müssen die gesuchten Tangenten nothwendig eine Gruppe der Involution $y_1{}^\varrho\, YP\, y_{Q1}^{\varrho-1};\; y_1{}^\varrho\, YQ\, y_{P1}^{\varrho-1}$ bilden.

Fallen YP und YQ zusammen, so gilt dieser Strahl als Tangente der Jacobi'schen Curve $(\sigma+\tau-1)$-fach, und die übrigen $\varrho-1$ Tangenten bilden die Polargruppe von $y_1{}^\varrho$ hinsichtlich YP. Dass Y nicht etwa ein mehr als $(\varrho+\sigma+\tau-2)$-facher Punkt der Jacobi'schen Curve sein kann, zeigt sich, wenn man dem ganzen Verfahren die Büschel

$$K_2{}^n\,\mathfrak{K}_2{}'^n\,\mathfrak{K}_3{}'^n\,\mathfrak{K}_4{}'^n \dots \quad \text{und} \quad K_1{}^n\,K_2{}^n\,K_3{}^n\,K_4{}^n \dots$$

zu Grunde legt.

Endlich betrachte man den Fall, wo $K_1{}^n$, $K_2{}^n$, $\mathfrak{K}_2{}^n, \dots$ sämmtlich nur einen und denselben Strahl YP berühren.

Alsdann enthalten Q^{2n-1} und $\mathfrak{Q}^{2n-1}$ Y genau $(\varrho+\sigma-1)$-fach bez. $(\varrho+\tau-1)$-fach und berühren nur YP. P^{2n-1} bez. $\mathfrak{P}^{2n-1}$ enthalten Y hingegen im allgemeinen und mindestens $(\varrho+\sigma)$- bez. $(\varrho+\tau)$-fach. Von den Tangenten sind σ, bez. τ mit YP identisch, da $\varrho>\sigma$, $\varrho>\tau$ ist. K^{4n-2}, als Glied des Büschels $P^{2n-1}\,\mathfrak{Q}^{2n-1}$, $\mathfrak{P}^{2n-1}\,Q^{2n-1}$ enthält also Y im allgemeinen und mindestens $(2\varrho+\sigma+\tau-1)$-fach und berührt YP $(\varrho+\sigma+\tau-1)$-fach, während für die übrigen Tangenten eine einfache Bestimmung sich nicht ergiebt.

Von den Besonderheiten, die sich ergeben, wenn die Polare einer Netzcurve hinsichtlich eines Punktes von YP Y öfter enthält als diese selbst, wollen wir nur die bei der Hesse'schen Curve möglichen betrachten.

Die entwickelten Resultate lassen sich so aussprechen:

(14.) „*Schliesst sich jede Curve eines Netzes zweiter Stufe in einem Punkte Y einer der drei Gruppen $y_1{}^\varrho$, $y_2{}^\sigma$, $y_3{}^\tau$ an, so enthält die Jacobi'sche Curve des Netzes Y $(\varrho+\sigma+\tau-2)$-fach und berührt jeden Strahl, der mehrfach in einer oder überhaupt in zwei der drei Gruppen auftritt. Arten zwei Gruppen in Strahlenvielfache von YP und YQ aus, so enthält die Jacobi'sche Curve jeden dieser Strahlen als Tangente einmal weniger, als er der betreffenden Tangentengruppe angehört. Ihre übrigen Tangenten bilden eine Gruppe einer Involution, in der zu jedem der beiden Strahlen YP oder YQ die Polargruppe der dritten Tangentengruppe hinsichtlich des anderen Strahles gehört.*“

„*Fallen YP und YQ zusammen, so berührt die Jacobi'sche Curve die Polargruppe der dritten Tangentengruppe hinsichtlich dieses Strahls, überdies aber nur noch ihn selbst. Sind alle drei Tangentengruppen Vielfache desselben Strahles, so ist er eine $(\sigma+\tau-1)$-fache Tangente der Jacobi'schen Curve, die Y $(\varrho+\sigma+\tau-1)$-fach im allgemeinen enthält $(\varrho>\sigma>\tau)$.*“

IV.

Die Hesse'sche Curve.

Bei der Hesse'schen Curve fallen alle diese Sätze viel bestimmter aus, indem man von dem Satze von der gemischten Polare ausgiebigsten Gebrauch machen kann.

Die Hesse'sche Curve einer Curve n^{ter} Ordnung, als Jacobi'sche Curve des Netzes ihrer ersten Polaren, ist eine Curve K^{3n-6} $(3n-6)^{ter}$ Ordnung.

Ein Punkt H derselben komme zunächst nur in den Polaren eines Büschels vor, er liege also ausserhalb der Curve K^n selbst, oder er sei ein einfacher Wende- bez. Undulationspunkt derselben. Der erste Fall ist nun der, dass eine Polare H_1^{n-1} den Punkt H ϱ-fach enthält, während die von H_1 verschiedenen Punkte $H_2, H_3, H_4, \ldots$ der Polargeraden H^1 Polaren H_2^{n-1}, H_3^{n-1}, H_4^{n-1}, ... ergeben, die H nur σ-fach enthalten $(\varrho > \sigma)$. Ist $\sigma > 1$, so gehört die ganze Polargerade H^1 zur Steiner'schen Curve, im anderen Falle dagegen nur H_1 selbst.

Man benutze jetzt die Identität der beiden Curven $(H_1, H_2)^{n-2}$ und $(H_2, H_1)^{n-2}$. H_1^{n-1} enthält H ϱ-fach, ihre Polare hinsichtlich H_2 also mindestens $(\varrho-1)$-fach. Daher enthält die Polare von H_2^{n-1} hinsichtlich H_1 den Punkt H mindestens eben so oft, als H_2^{n-1} selbst, denn es ist $\varrho - 1 > \sigma$. Demzufolge müssen die σ Tangenten der Curven H_2^{n-1}, H_3^{n-1}, H_4^{n-1}, ... *sämmtlich mit HH_1 identisch sein.* (Satz 7) K^{3n-6} berührt daher (Satz 11) einmal $(\sigma-1)$-fach die Linie HH_1, zweitens aber die Tangenten von H_1^{n-2}, wofern diese Curve H nur $(\varrho-1)$-fach enthält, also nicht sämmtliche Tangenten von H_1^{n-1} mit HH_1 zusammenfallen.

Ehe wir diesem Specialfall näher treten, untersuchen wir die Ordnung der Berührung, welche die einzelnen Zweige von K^{3n-6} mit denen von H_1^{n-2} eingehen. Hierbei wird sich ein geometrischer Beweis für den in der Einleitung erwähnten Satz des Herrn Voss ergeben. Man lege dem Verfahren zur Herstellung von K^{4n-6}, die sich von K^{3n-6} um a und H_1^{n-1} unterscheidet, die beiden Büschel

$$H_1^{n-1} H_2^{n-1} H_3^{n-1} \ldots \quad \text{und} \quad H_1^{n-1} \mathfrak{H}_2^{n-1} \mathfrak{H}_3^{n-1} \ldots$$

zu Grunde, benutze aber eine von H ausgehende Hülfsgerade $H_1 Q R S \ldots$, so dass für unser früheres P (Beweis zu Satz 8) jetzt H_1 eintritt. Für P^{2n-1} tritt das Erzeugniss H_1^{2n-3} der Büschel

$$H_1^{n-1} H_2^{n-1} H_3^{n-1} \ldots \barwedge H_1^{n-2} (H_1, H_2)^{n-2} (H_1, H_3)^{n-2} \ldots$$

ein. Alle Curven des zweiten Büschels enthalten H $(\varrho-1)$-fach; ihre Tangentengruppen fallen im allgemeinen nicht zusammen, nämlich dann nicht, wenn $H_1 H_2$ von $H_1 H$ verschieden ist. H_1^{2n-3}, $H_2^{n-1} H_1^{n-2}$, $H_1^{n-1}(H_1, H_2)^{n-2}$ sind drei Curven eines Büschels; die zweite von ihnen enthält H $(\varrho+\sigma-1)$-fach, die dritte hingegen $(2\varrho-1)$-fach. Auch H_1^{2n-3} enthält also H $(\varrho+\sigma-1)$-fach, hat aber mit jedem Zweige von H_1^{n-2} $2\varrho-1$ H benachbarte Punkte gemeinsam. Mit jedem Zweige von H_1^{n-2} geht ein Zweig von H_1^{2n-3} eine $(\varrho-\sigma+1)$-punktige Berührung ein. Jede andere Curve Q^{2n-3}, R^{2n-3}, $S^{2n-3}, \ldots$ des ersten ins Auge zu fassenden Büschels enthält H ebenfalls $(\varrho+\sigma-1)$-fach. Jetzt betrachten wir ebenso $\mathfrak{H}_1^{2n-3}$, das Erzeugniss der Büschel

$$H_1^{n-1}\mathfrak{H}_2^{n-1}\mathfrak{H}_3^{n-1}\ldots \barwedge H_1^{n-2}(H_1, \mathfrak{H}_2)^{n-2}(H_1, \mathfrak{H}_3)^{n-2}\ldots$$

Die Curven des zweiten Büschels enthalten H sämmtlich $(\varrho-1)$-fach. Nun gehören $\mathfrak{H}_1^{2n-3}$, $H_1^{n-1}(H_1, \mathfrak{H}_2)^{n-2}$, $\mathfrak{H}_2^{n-1} H_1^{n-2}$ zu einem Büschel. Da $\mathfrak{H}_2^{n-1}$ H nicht enthält, so kann $H_1^{n-2}\mathfrak{H}_2^{n-1}$ H nur $(\varrho-1)$-fach enthalten; dasselbe gilt (Satz 2) von $\mathfrak{H}_1^{2n-3}$, da H ein $(2\varrho-1)$-facher Punkt von $H_1^{n-1}(H_1\mathfrak{H}_2)^{n-2}$ ist. Mit jedem Zweige von H_1^{n-2} hat $\mathfrak{H}_1^{2n-3}$ $2\varrho-1$ in H vereinigte Punkte gemeinschaftlich, oder jeden dieser Zweige berührt einer der ihrigen $(\varrho+1)$-punktig.

Die beiden homologen Curven H_1^{2n-3} und $\mathfrak{H}_1^{2n-3}$ der zu betrachtenden Büschel

$$H_1^{2n-3}Q^{2n-3}R^{2n-3}S^{2n-3}\ldots \barwedge \mathfrak{H}_1^{2n-3}\mathfrak{Q}^{2n-3}\mathfrak{R}^{2n-3}\mathfrak{S}^{2n-3}\ldots$$

enthalten mithin $\varrho-1$ Paare von Zweigen, die einander und Zweige von $H_1^{n-2}(\varrho-\sigma+1)$-punktig berühren. Demzufolge müssen $\varrho-1$ verschiedene Zweige der Hesse'schen Curve die Zweige von $H_1^{n-2}(\varrho-\sigma+1)$-punktig berühren.

Die Ordnung der Berührung wird um eine Einheit höher, wenn H ein einfacher Curvenpunkt ist. $\varrho-1$ Zweige von $\mathfrak{H}_1^{2n-3}$ berühren, wie vorher, diejenigen von $H_1^{n-2}(\varrho+1)$-punktig. Da H^{n-1} zu den H enthaltenden Curven gehört, so ist $\sigma=1$; $H_2, H_3, H_4, \ldots$ liegen auf HH_1, und zu einem Büschel gehören nun H_1^{2n-3}, $H^{n-1} H_1^{n-2}$, $H_1^{n-1}(H, H_1)^{n-2}$. $(H, H_1)^{n-2}$ enthält H offenbar ϱ-fach, da es sich um die Polare von H_1^{n-1} hinsichtlich H handelt, und H ein ϱ-facher Punkt dieser Curve ist. Demnach enthält H_1^{2n-3} den Punkt H $(\varrho+\sigma-1)$-fach und je einer von ihren Zweigen geht mit je einem von H_1^{n-2} eine $(\varrho-\sigma+2)$-punktige, das heisst eine $(\varrho+1)$-punktige Berührung ein. Dasselbe gilt von der Hesse'schen Curve. Die bisher bewiesenen Thatsachen sind in folgendem Satze ausgedrückt:

(15.) „*Von den ersten Polaren einer K^n möge eine, H_1^{n-1}, H zum ϱ-fachen Punkt haben, während er in den übrigen Polaren eines Büschels, H_2^{n-1}, H_3^{n-1}, $H_4^{n-1}, \ldots$, σ-fach vorkomme. Wenn nun nicht alle Tangenten von H_1^{n-1} mit HH_1 zusammenfallen, so enthält die Hesse'sche Curve H $(\varrho+\sigma-2)$-fach, sie hat HH_1 zur $(\sigma-1)$-fachen Tangente,* *und mit jedem Zweige von H_1^{n-2} geht einer der übrigen im allgemeinen eine $(\varrho-\sigma+1)$-punktige Berührung ein, jedoch eine $(\varrho+1)$-punktige, wenn H ein einfacher Punkt der Grundcurve ist, und demnach $\sigma=1$ wird.*"*)

Eine Specialisirung ergiebt eben den Satz des Herrn Voss. Für einen gewöhnlichen Wendepunkt ist $\varrho=2$, $\sigma=1$. Gehört also zu einem gewöhnlichen Wendepunkt H der K^n der Punkt H_1 der Steiner'schen Curve, so geht die Hesse'sche Curve eine dreipunktige Berührung mit H_1^{n-2} ein; nur wenn H ein Wendepunkt dieser Curve ist, ist er auch ein solcher der Hesse'schen Curve.**)

Es ist nun der Fall zu untersuchen, wo auch die ϱ Tangenten von H_1^{n-1} mit HH_1 identisch sind, so dass die Hesse'sche Curve nach unseren allgemeinen Entwickelungen (Satz 11) H zum $(\varrho+\sigma-1)$-fachen Punkt haben muss. Zunächst giebt es auf HH_1 einen Punkt L von der Art, dass alle Curven des Büschels $(H_1, L)^{n-2}(H_2, L)^{n-2}(H_3, L)^{n-2}\ldots$ H mehr als σ-fach enthalten. In der That enthält ja $(H_1, H_1)^{n-2}$ den Punkt H $(\varrho-1)$-fach; L ist also mit H_1 identisch, wenn $\varrho>\sigma+1$ ist; wenn aber $\varrho=\sigma+1$ wird, so berührt doch z. B. $(H_2, H_1)^{n-2}$ ebenso wie $(H_2, H)^{n-2}$ die Gerade HH_1 σ-fach. Nun gehören, wenn auch M auf HH_1 liegt, die Curven $(H, H_2)^{n-2}$, $(H_1, H_2)^{n-2}$, $(M, H_2)^{n-2}$ zu demselben Büschel. Da die allgemeinen Curven dieselbe Tangentengruppe besitzen, so muss eine Curve desselben, $(L, H_2)^{n-2}$, H mehr als σ-fach enthalten; da ferner $(L, H_1)^{n-2}$, $(L, H_2)^{n-2}$, $(L, H_3)^{n-2}$, ... zu einem Büschel gehören, so muss überhaupt $(L, H_i)^{n-2}$ H mehr als σ-fach enthalten.

Die Tangentengruppen der Curven $(H, H_1)^{n-2}$, H_1^{n-2}, $(L, H_1)^{n-2}$, $(M, H_1)^{n-2}$, ... bilden im allgemeinen eine Involution mit dem ϱ-fachen Strahle HH_1 als Gruppe, im besonderen Falle enthält eine von ihnen mehr als ϱ Strahlen, während jede andere aus dem ϱ-fachen Strahle HH_1 besteht. Letzteres wollen wir zunächst ausschliessen. Die Hilfsgerade ziehen wir von H_1 aus. Dann werden Q^{2n-3} und $\mathfrak{Q}^{2n-3}$ nothwendig genau $(\varrho+\sigma-1)$-fach, bez. $(\varrho-1)$-fach H enthalten und nur HH_1 berühren. Für die letzte Curve ist dies selbstverständlich, da ja $\mathfrak{Q}^{2n-3}$, $H_1^{n-1}(Q, \mathfrak{H}_2)^{n-2}$, $(Q, H_1)^{n-2}\mathfrak{H}_2^{n-1}$ zu einem Büschel gehören, und $(Q, H_1)^{n-2}$ $(\varrho-1)$-fach, H_1^{n-1} aber ϱ-fach sich HH_1 anschliesst. Q^{2n-3} aber ist das Erzeugniss der beiden Büschel

$$H_1^{n-1}H_2^{n-1}H_3^{n-1}\ldots \barwedge (Q, H_1)^{n-2}(Q, H_2)^{n-2}(Q, H_3)^{n-2}\ldots$$

und hat daher mit HQ ausser H und Q noch die von H verschiedenen

*) Die in dem obigen liegende Bestimmung der Tangenten der Hesse'schen Curve geht wirklich für den gewöhnlichen Punkt derselben ($\varrho=2$, $\sigma=1$) in die allbekannte über; in dieser Allgemeinheit hat sie Herr Del Pezzo a. a. O., § II auf analytischem Wege entwickelt.

**) Vergl. a. a. O., S. 423.

Doppelpunkte der Involution gemeinsam, die von $QH(H_1^{n-1}, H_2^{n-1})$ nach Abscheidung des σ-fachen Punktes H übrig bleibt. Die Anzahl dieser Punkte aber ist $2n-3-\varrho-\sigma$. Daher kann H nicht mehr als $(\varrho+\sigma-1)$-fach in Q^{2n-3} vorkommen. Weiter liegen H_1^{2n-3}, $H_1^{n-1}(H_1, H_2)^{n-2}$, $H_2^{n-1}H_1^{n-2}$ in einem Büschel. H_1^{2n-3} berührt mithin immer HH_1 σ-fach; die anderen Tangenten sind mit denen von H_1^{n-2} nothwendig identisch, wenn L mit H_1 zusammenfällt, also $(H_1, H_2)^{n-2}$ H mehr als σ-fach enthält. Ist aber L von H_1 verschieden, so sind die $\sigma\,(=\varrho-1)$ Tangenten von $(H_1, H_2)^{n-2}$ mit HH_1 identisch und H_1^{2n-3} berührt daher HH_1 σ-fach und daneben die Tangenten einer Curve $(N, H_1)^{n-2}$, wo N *einen von* H_1 *verschiedenen Punkt von* HH_1 *bedeutet* (vergl. vorige Seite). $\mathfrak{H}_1^{2n-3}$ hingegen berührt stets H_1^{n-2}, denn $\mathfrak{H}_1^{2n-3}$, $H_1^{n-1}(\mathfrak{H}_2, H_1)^{n-1}$, $H_1^{n-2}\mathfrak{H}_2^{n-1}$ sind drei Curven eines Büschels. K^{4n-6} als Glied des Büschels $Q^{2n-3}\mathfrak{H}_1^{2n-3}$, $\mathfrak{Q}^{2n-3}H_1^{2n-3}$ enthält gewiss H $(\varrho+\sigma-1)$-fach, wenn L und demnach N von H_1 verschieden sind; dann nämlich zeigen die letzteren Curven von einander verschiedene Tangentengruppen. Man sieht, dass $\varrho+\sigma-1$ Tangenten von K^{4n-3}, also $\sigma-1$ Tangenten der Hesse'schen Curve mit HH_1 zusammenfallen, die übrigen aber eine Curve $(M, H_1)^{n-2}$ berühren, wo M ein von H_1 verschiedener Punkt der Geraden HH_1 ist. Ist dagegen L mit H_1 identisch, so wird K^{4n-6} H im allgemeinen $(\varrho+\sigma-1)$-fach enthalten, alsdann aber HH_1 $(\sigma-1)$-fach berühren und ausserdem die Tangenten von H_1^{n-2} besitzen.

Ebenso sieht man, dass K^{4n-3} $H(\varrho+\sigma-1)$-fach (im allgemeinen) enthält und nur HH_1 berührt, wenn eine Polare $(L_1, H_1)^{n-2}$ den Punkt H mehr als ϱ-fach enthält.

Das Gesagte bedarf noch einer kleinen Modification für den Fall, dass H der Curve angehört, und mithin $\sigma=1$ ist. Alsdann liegen alle Punkte H_2, H_3, H_4, ... auf der ϱ-fachen Tangente HH_1 von H_1^{n-1}. Demnach ist H ein mindestens ϱ-facher Punkt von $(H_\lambda, H_1)^{n-2}$, und es ist der Punkt L der obigen Deduction auch dann mit H_1 identisch, wenn $\varrho=\sigma+1=2$ sein sollte.

Unser Lehrsatz lautet folgendermassen:

(16.) „*Ist ein Punkt* H *in einer Polare* H_1^{n-1} ϱ-*fach enthalten, in den anderen Polaren eines Büschels aber* σ-*fach* $(\varrho>\sigma)$, *und fallen alle Tangenten von* H_1^{n-1} *mit* HH_1 *zusammen, so enthält die Hesse'sche Curve den Punkt* H *im allgemeinen und mindestens* $(\varrho+\sigma-1)$-*fach; während* $\sigma-1$ *Tangenten mit* HH_1 *identisch sind, fallen die übrigen mit denen einer Curve* $(H_1, M)^{n-2}$ *zusammen, wo* M *ein von* H_1 *verschiedener Punkt von* HH_1 *nur dann ist, wenn* $\varrho=\sigma+1$ *ist, und* H *ausserhalb der Curve liegt.*" *)

*) Die Ordnung der Berührung zwischen den Zweigen von H^{3n-6} und H_1^{n-2} ist gleich $\varrho-\sigma$, bez. ϱ, jenachdem H ausserhalb der Curve liegt, oder

Viel leichter erledigt sich der Fall, wo alle Polaren G_1^{n-1}, G_2^{n-1}, $G_3^{n-1}, \ldots$ eines Büschels einen Punkt G ϱ-fach enthalten; wir wissen aus der allgemeinen Theorie (Satz 10), dass K^{3n-6} den Punkt $G\,(2\varrho-2)$-fach enthält und sich dabei der Gruppe der Strahlen anschliesst, deren jeder als Tangente einer der betrachteten Polaren doppelt zählt.*)

Die gewonnenen Criterien für die Vielfachheit eines Punktes H in der Hesse'schen Curve lassen sich zusammenziehen, wenn man die successiven Polaren des Punktes ins Auge fasst. Enthält H_1^{n-m} den Punkt H ϱ-fach, so muss $H^{m+\varrho-1}$ den Punkt H_1 ϱ-fach enthalten; da hier $m=1$ ist, so muss H^ϱ in eine Strahlengruppe mit dem Centrum H_1 ausarten. Enthalten alle Polaren H_2^{n-1}, H_3^{n-1}, $H_4^{n-1}, \ldots$, die zu von H_1 verschiedenen Punkten der Polargeraden H^1 gehören, den Punkt H σ-fach, so enthält H^σ jeden einzelnen Punkt $H_1, H_2, H_3, \ldots$ σ-fach und artet daher in die σ-fach zählende Polargerade aus. Enthält auch H_1^{n-2} den Punkt H ϱ-fach, so liegt H_1 ϱ-fach in $H^{\varrho+1}$; ($m=2$; $\varrho=\varrho$). Mit Rücksicht auf das Erwiesene folgt also:

(17.) „*Es sei ein Punkt H der Hesse'schen Curve nicht zugleich ein mehrfacher Punkt der Grundcurve. Von den successiven Polaren der Grundcurve hinsichtlich desselben mögen die ϱ letzten in Strahlengruppen mit dem Centrum H_1, die σ letzten in Vielfache der Polargeraden H^1 ausarten. Man entscheide noch, ob $H^{\varrho+1}$ den Punkt H_1 ϱ-fach enthält oder nicht. Im zweiten Fall enthält die Hesse'sche Curve H stets $(\varrho+\sigma-2)$-fach, im ersten Fall im allgemeinen und mindestens $(\varrho+\sigma-1)$-fach, wenn $\varrho>\sigma$ ist, sonst aber $(2\varrho-2)$-fach. Allemal dann, wenn $\sigma>1$ ist, gehört zu H kein bestimmter Punkt der Steiner'schen Curve.*“

„*Soll also H ein Doppelpunkt der Hesse'schen Curve sein, so muss der Polarkegelschnitt H^2 entweder in eine Doppelgerade ausarten oder einen für beide mehrfachen Punkt mit der cubischen Polare H^3 gemein haben.*“**)

Für die Curven dritter Ordnung ergiebt sich der bekannte Satz:

(18.) „*Die Hesse'sche Curve einer vorliegenden allgemeinen K^3 ist entweder allgemein, oder sie zerfällt in drei Gerade QR, RP, PQ.*

---

ein Undulationspunkt derselben ist. Herr Del Pezzo untersucht (§ 2) von dem obigen nur einen sehr speciellen Fall, wo nämlich $\varrho=r$, $\sigma=1$ ist und überdies die Polare H_1^{n-2} den Punkt H $2(r-1)$-fach enthält; von besonderer Wichtigkeit ist der besondere Fall, wo $\varrho=r=2$, $\sigma=1$ ist. Die Hesse'sche Curve hat in Herrn Del Pezzo's allgemeinem Fall H zum $2(r-1)$-fachen Punkt.

*) Auch dies letztere zeigt Herr Del Pezzo a. a. O., § II.

**) Diese Criterien sind in der That von Herrn Del Pezzo a. a. O., §§ III und IV entwickelt worden. Dass die Hesse'sche Curve im ersten Fall einen Doppelpunkt besitzt, hat schon Herr Geiser a. a. O. gezeigt.

*In jedem der drei Punkte P, Q, R treffen sich drei Wendetangenten von K^3".**)

Einen Doppelpunkt P zeigt die Hesse'sche Curve einer K^3 dann und nur dann, wenn P^2 in eine Doppelgerade von P^1 ausartet. Da nun die Hesse'sche Curve von K^3 zugleich ihre Steiner'sche Curve ist, so zerfällt sie in die Gerade P^1 und zwei andere in P sich kreuzende Gerade die P^1 in Q und R treffen. Auch die Polarkegelschnitte von Q und R arten in Doppelgerade aus, nämlich in die zweifach gezählten Geraden RP und QP. Von jedem der drei Punkte P, Q, R gehen drei Wendetangenten aus, deren Wendepunkte je auf der gegenüberliegenden Seite des Dreieckes PQR liegen.

Bei der Curve vierter Ordnung entwickelt Herr Del Pezzo nachstehenden Lehrsatz:

(19.) *„Wenn von der Steiner'schen Curve einer K^4 eine Gerade sich nicht ablöst, so treten die etwaigen, von den mehrfachen Punkten von K^4 verschiedenen Doppelpunkte der Hesse'schen Curve nur paarweise auf. Die Punkte eines solchen Paares HH_1 entsprechen sich wechselseitig als homologe Punkte der Hesse'schen und der Steiner'schen Curve."***)

Damit H ein Doppelpunkt der Hesse'schen Curve sei, muss bei den gemachten Voraussetzungen H^2 einen Doppelpunkt, H^3 entweder einen zwei- oder einen dreifachen Punkt in H_1 haben. Aus der ersten Festsetzung geht hervor, dass H_1^3 einen mindestens zweifachen Punkt in H hat, aus der zweiten ergiebt sich entweder unmittelbar, dass $H_1^2\,H$ zum Doppelpunkt hat, oder zunächst, dass H_1^3 einen dreifachen Punkt in H besitzt, wo dann selbstverständlich H_1^2 wieder H zum Doppelpunkt hat. Demnach ist H_1 auch ein Doppelpunkt der Hesse'schen Curve und H entspricht ihm auf der Steiner'schen Curve.

Wir fassen jezt die im allgemeinen nicht vorhandenen mehrfachen Punkte der Grundcurve ins Auge. In einem σ-fachen Punkte $F(\sigma \geqq 2)$ seien zunächst nicht alle Tangenten mit einander identisch. Alsdann enthält die einzige Polare F^{n-1} den Punkt F σ-fach, während er in allen anderen Polaren $(\sigma - 1)$-fach auftritt. Dieselben schliessen sich den Polargruppen der gegebenen Tangentengruppe hinsichtlich der von F ausgehenden Strahlen an. Nach der allgemeinen Entwickelung (Satz 12) ist mithin F ein $(3\sigma - 4)$-facher Punkt der Hesse'schen Curve; dieselbe berührt einmal alle Tangenten von F^{n-1}, also von K^n, zweitens diejenigen Strahlen, die als Tangenten der allgemeinen Polaren je eines F^{n-1} enthaltenden Büschels doppelt zählen.

*) Vergl. z. B. Clebsch-Lindemann, „Vorlesungen über Geometrie", S. 553.

**) Vergl. a. a. O., § III. H und H_1 sind jedenfalls mehrfache Punkte auch der Steiner'schen Curve, da H^3 und H_1^3 entweder beide dreifache Punkte oder beide Spitzen besitzen. Vergl. Clebsch-Lindemann „Vorlesungen etc.", S. 368, 369.

Fallen alle Tangenten in eine, f, zusammen, so zeigt im allgemeinen jeder Punkt P dieser Geraden eine Polare mit σ-fachem Punkt F; die Tangentengruppen dieser Polaren bilden eine Involution mit dem σ-fachen Strahl f. Die ferneren Doppelstrahlen der Involution bilden also die Polargruppe irgend einer Involutionsgruppe hinsichtlich f, oder sie berühren, wenn P ein von F verschiedener Punkt von f ist, die Polare P^{n-2}. Die Polaren aller Punkte ausserhalb f enthalten F $(\sigma-1)$-fach und haben f zur $(\sigma-1)$-fachen Tangente. Nach der allgemeinen Theorie hat die Hesse'sche Curve hiernach F zum $(3\sigma-3)$-fachen Punkt, sie berührt die Tangentengruppe der allgemeinen Netzcurve, ferner die Doppelstrahlen der zu dem ausgezeichneten Büschel gehörigen Tangenteninvolution. In unserem Fall zählt also f als Tangente $(2\sigma-2)$-fach und die anderen Tangenten gehören zu P^{n-2}.

Mithin gilt der Lehrsatz:

(20.) „*In einem σ-fachen Punkte F einer Curve K^n hat ihre Hesse'sche Curve einen $(3\sigma-4)$-fachen Punkt, wenn nicht alle Tangenten von K^n zusammenfallen. Die Hesse'sche Curve schliesst sich einmal den Tangenten von K^n, zweitens den Strahlen an, die als Tangenten der ersten Polaren eines F^{n-1} enthaltenden Büschels mehrfach auftreten.**) *Ein μ-facher Strahl der Tangentengruppe zählt als $(3\mu-2)$-fache Tangente der Hesse'schen Curve.*“

„*Sind alle σ Tangenten einer Curve K^n in einem σ-fachen Punkte F in einem σ-fachen Strahle f vereinigt, und zeigt die zweite Polare P^{n-2} irgend eines von F verschiedenen Punktes von f einen genau $(\sigma-1)$-fachen Punkt in F, so enthält die Hesse'sche Curve F genau $(3\sigma-3)$-fach,***) *und berührt ausser f selbst die Tangenten von P^{n-2}.*“

In besonderen Fällen kann es auf f einen bestimmten Punkt P geben, dessen Polare F mehr als σ-fach, etwa ϱ-fach, enthält. Es seien nämlich von einer Strahlengruppe p^n mit dem Centrum P σ Strahlen mit f identisch, während K_1^n $F(\varrho+1)$-fach enthält. Alsdann wird jede Curve K^n des Büschels p^n, K_1^n F σ-fach enthalten und f zur σ-fachen Tangente haben. Alle diese Curven haben aber hinsichtlich P dieselbe Polare wie K_1^n, also eine Polare, die F ϱ-fach enthält. Tritt diese Anordnung ein,***) so wird nach der allgemeinen Ent-

*) Vergl. wegen dieser Bestimmung der K^n nicht berührenden Tangenten die Arbeit des Herrn Brill: „Ueber die Hesse'sche Curve“, diese Zeitschr., Bd. 13, S. 176—182 (Seite 178). Sie lassen sich, wie auch aus der geometrischen Entwickelung hervorgeht, durch die Hesse'sche Determinante der jene σ Tangenten bestimmenden binären Form darstellen.

**) ibidem, S. 178, Fussnote 2.

***) Es ist klar, dass sich in unendlicher Nähe von F selbst nun noch andere mehrfache Punkte der Grundcurve finden. Ist F z. B. ein Selbstberührungspunkt der Curve, so wird $\varrho = 3$, $\sigma = 2$, und die folgende Entwickelung ergiebt im Einwickelung F im allgemeinen ein $(2\sigma+\varrho-3)$-facher Punkt der Hesse'schen Curve sein, dieselbe wird P^{n-2} berühren und f zur $(2\sigma-2)$-fachen Tangente haben. Berührt freilich P^{n-1} nur die Tangente f, so enthält die Hesse'sche Curve F mindestens $(2\sigma+\varrho-2)$-fach, und es handelt sich um die Bestimmung der Tangenten.

Wir wollen annehmen, dass P^{n-2} F ν-fach enthalte, wobei $\nu=\varrho-1$ ist, wenn P^{n-1} nicht blos f berührt, im allgemeinen gleich ϱ ist, wenn alle Tangenten von P^{n-1} mit f zusammenfallen, aber dann auch grösser als ϱ sein kann. Dem Verfahren zur Herstellung von K^{4n-6} legen wir für $\nu \geqq \varrho$ die beiden Büschel

$$F^{n-1}P_1^{n-1}P_2^{n-1}P_3^{n-1}\ldots \quad \text{und} \quad F^{n-1}F_1^{n-1}F_2^{n-1}F_3^{n-1}\ldots$$

zu Grunde, wo P_1, P_2, P_3, ..., Punkte von f sind, F_1, F_2, F_3, ... aber auf einer anderen von F ausgehenden Geraden liegen. Nun gehören K^{4n-6}; $P^{2n-3}\mathfrak{Q}^{2n-3}$; $\mathfrak{P}^{2n-3}Q^{2n-3}$ zu einem Büschel, wo Q irgend ein Punkt ausserhalb f ist. Q^{2n-3} und $\mathfrak{Q}^{2n-3}$ enthalten F genau $(\sigma+\varrho-1)$-fach, bez. $(2\sigma-2)$-fach; beide haben f zur einzigen Tangente. Ferner gehören auch

$$\mathfrak{P}^{2n-3},\ F^{n-1}(F_1, P)^{n-2},\ F_1^{n-1}(F, P)^{n-2}$$

zu einem Büschel. Nun enthält $(F_1, P)^{n-2}$ F $(\varrho-1)$-fach und berührt nur f, $(F, P)^{n-2}$ hingegen berührt f ϱ-fach. $\mathfrak{P}^{2n-3}$ enthält also F im allgemeinen und mindestens $(\varrho+\sigma-1)$-fach und berührt dann nur f. Schliesslich ist F ein mindestens $(2\varrho+2\sigma-2)$-facher Punkt der Curve $\mathfrak{P}^{2n-3}Q^{2n-3}$ und f im allgemeinen ihre einzige Tangente

Drei Glieder eines Büschels sind ferner

$$P^{2n-3},\ F^{n-1}P^{n-2},\ P^{n-1}(F,P)^{n-2}.$$

F ist ein $(\sigma+\nu)$-facher Punkt der zweiten, dagegen ein 2ϱ-facher Punkt der dritten Curve. Jenachdem also $\sigma+\nu<2\varrho$ oder $\sigma+\nu>2\varrho$ ist, schliesst sich P^{2n-3} der ersteren oder der letzteren Curve an. Im ersten Fall sind σ Tangenten von P^{2n-3} mit f identisch, während die übrigen P^{n-2} berühren, im zweiten Falle sind alle Tangenten mit f identisch. Im Zwischenfall $\sigma+\nu=2\varrho$ ist ebenfalls F ein 2ϱ-facher Punkt von P^{2n-3}.

$P^{2n-3}\mathfrak{Q}^{2n-3}$ enthält F $(\nu+3\sigma-2)$-fach, also nicht so oft, wie $\mathfrak{P}^{2n-3}Q^{2n-3}((2\varrho+2\sigma-2)$-fach), sobald $\nu+\sigma<2\varrho$ ist. Daher schmiegt sich K^{4n-6} der ersteren Curve an, enthält F $(\nu+3\sigma-2)$-fach und berührt ausser den Tangenten von P^{n-2} nur die Gerade f. Ist hingegen $\nu+\sigma>2\varrho$, so berühren im allgemeinen $P^{2n-3}\mathfrak{Q}^{2n-3}$ und $\mathfrak{P}^{2n-3}Q^{2n-3}$ f $(2\varrho+2\sigma-2)$-fach, dasselbe gilt von K^{4n-6}; auch für

---

klang mit Herrn Brill's Resultat, (a. a. O., S. 178) dass die Hesse'sche Curve F vierfach enthält und f zur zweifachen Tangente hat.

$\nu + \sigma = 2\varrho$ enthält K^{4n-6} $F(2\varrho + 2\sigma - 2)$-fach, aber nur noch $2\sigma - 2$ Tangenten stimmen mit f überein.

Lösen wir die Hülfsgerade PQ und die Curve F^{n-1} ab, und berücksichtigen wir, dass der allgemeine Fall $\nu = \varrho - 1$ bereits erledigt ist, so erhalten wir den Lehrsatz:

(21.) „*Kommt ein σ-facher Punkt F einer Curve $n$ter Ordnung in der ersten Polare P^{n-1} eines Punktes P ϱ-fach $(\varrho > \sigma)$, in der zweiten Polare desselben Punktes aber ν-fach $(\nu \geqq \varrho - 1)$ vor, so enthält die Hesse'sche Curve von K^n denselben Punkt F genau $(\nu + 2\sigma - 2)$-fach, sobald $\nu + \sigma < \varrho$ ist; sie berührt dann die Tangenten von P^{n-2} und daneben $(2\sigma - 2)$-fach den Strahl FP oder f. Ist $\nu + \sigma \geqq 2\varrho$, so enthält die Hesse'sche Curve F im allgemeinen und mindestens $(2\varrho + \sigma - 2)$-fach. Alle Tangenten derselben sind mit f identisch, sobald $\nu + \sigma > 2\varrho$ ist, dagegen nur $2\sigma - 2$ von ihnen, wenn $\nu + \sigma = 2\varrho$ ist.*“

Berlin, October 1888.