Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe,
mit Anwendung auf die Theorie partieller Differential-
Gleichungen.

VON SOPHUS LIE IN CHRISTIANIA.

I.

Die rasche Entwicklung der Geometrie in unserem Jahrhundert ist bekanntlich innig mit philosophischen Betrachtungen über das Wesen der Cartesischen Geometrie verknüpft, Betrachtungen, die in ihrer allgemeinsten Form von Plücker in seinen ersten Arbeiten auseinandergesetzt worden sind. Für denjenigen, der in den Geist der Plücker'schen Werke eingedrungen ist, wird der Gedanke, dass man eine jede Curve, die von drei Parametern abhängt, als Raumelement anwenden kann, nichts wesentlich Neues enthalten, und wenn doch Niemand, soviel ich weiss, diese Idee ausgeführt hat, so glaube ich die Ursache darin suchen zu müssen, dass man derselben keinen praktischen Werth beigelegt hat. Ich bin zu einem Studium der genannten Theorie dadurch geführt worden, dass ich eine merkwürdige Transformation entdeckte, die einen genauen Zusammenhang zwischen Krümmungslinien und Haupttangenten-Curven darlegt, und es ist meine Absicht, in der folgenden Abhandlung die Resultate, die ich in dieser Weise erhalten habe, auseinander zu setzen.

Im ersten Abschnitte beschäftige ich mich mit Curven-Complexen, das heisst mit Mannigfaltigkeiten, die von dreifach unendlich vielen Curven gebildet werden. Alle Flächen, die von einfach unendlich vielen Curven eines gegebenen Complexes gebildet werden, genügen einer partiellen Differential-Gleichung zweiter Ordnung, die als singuläres erstes Integral eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung zulässt. Für partielle Differential-Gleichungen erster Ordnung erhalte ich in dieser Weise eine neue geometrische Interpretation, die insbesondere, wenn der besprochene Complex ein Plücker'scher Linien-Complex ist, Interesse darbietet. — Ebenso wie die allgemeine Gleichung $F(xyz XYZ) = 0$ als aequatio directrix eine Reciprocität im

Räume bestimmt, zeige ich, dass auch das simultane Gleichungssystem:

$$F_1(xyz\ X\ Y\ Z) = 0, \quad F_2(xyz\ X\ Y\ Z) = 0$$

ein Entsprechen zwischen den Flächen-Elementen zweier Räume feststellt. Diese beiden Arten von Transformationen, zusammen mit allen Punkt-Transformationen, sind die einzigen räumlichen Umformungen, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist, und also beruhen alle solche Transformationen entweder auf einem Wechsel des Raumelements oder auf der Einführung eines neuen Coordinaten-Systems. Endlich betrachte ich die Anwendung solcher Transformationen auf partielle Differential-Gleichungen.

Im zweiten Abschnitte setze ich voraus, dass die Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ hinsichtlich beider Systeme von Veränderlichen linear sind, und zwar untersuche ich insbesondere das System:

$$-Zz = x - (X + iY), \quad (X - iY)z = y - Z$$

und die dadurch bestimmte räumliche Abbildung. Es transformiren sich dabei die Geraden des Raumes (xyz) in die Kugeln des zweiten Raumes, d. h. alle Flächen-Elemente, die zwei consecutive Punkte einer Geraden enthalten, gehen in die Elemente einer Kugel über. Gerade, die sich schneiden, bilden sich hierbei als Kugeln ab, die sich berühren. *Hierauf begründe ich einen genauen und nach meiner Auffassung fundamentalen Zusammenhang zwischen Linien-Geometrie und Kugel-Geometrie und demzufolge zwischen mehreren projectivischen und metrischen Theorien, einen Zusammenhang, der sein Haupt-Interesse darin erhält, dass die Haupttangenten-Curven gewissermassen dieselbe Stelle in der ersten Geometrie, wie die Krümmungslinien in der zweiten einnehmen.* Diese Theorie giebt die Bestimmung der Haupttangenten-Curven für viele particuläre Flächen, insbesondere für die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten. Endlich beweise ich, dass die allgemeinste Transformation des Raumes $(X\ Y\ Z)$, bei welcher einerseits Berührung eine invariante Beziehung ist, andererseits Krümmungslinien covariante Curven sind, durch meine Abbildung der allgemeinen linearen oder dualistischen Transformation des Raumes (xyz) entspricht. Alle diese Transformationen können aus Transformationen durch reciproke Radian und aus Parallel-Transformationen (Dilatationen) zusammengesetzt werden.

Im dritten Abschnitte bestimme ich mit Anwendung der Begriffe: Linien- und Kugel-Complex, Linien- und Kugel-Congruenz, alle partiellen Differential-Gleichungen erster und zweiter Ordnung, deren Charakteristiken Haupttangenten-Curven oder Krümmungslinien auf den Integralfächen sind. Unter den besprochenen Gleichungen zweiter Ordnung gelingt es mir, alle, welche ein allgemeines erstes Integral,

bezüglich zwei allgemeine erste Integrale besitzen, anzugeben, und dabei zeigt es sich, dass, wenn ein allgemeines erstes Integral existirt, dasselbe, wie auch das zugehörige singuläre erste Integral, immer aufgestellt werden kann. Ich komme hier auf die bekannten Untersuchungen über Flächen, deren Krümmungslinien eben oder sphärisch sind, über Flächen, die eine gegebene sphärische Abbildung besitzen u. s. w.

Im vierten Abschnitte gebe ich endlich einige Theorien, die sich an das Vorangehende anschliessen.

Während ich mich mit diesen Entwicklungen beschäftigte, bin ich im lebhaften Verkehr gewesen mit Hrn. F. Klein, dem ich viele der hier verarbeiteten Ideen verdanke, mehr, als es mir durch Citate anzugeben möglich gewesen ist.

Ich bemerke auch, dass die hier dargestellten Theorien einige Berührungspunkte mit meinen früheren Untersuchungen über die Repräsentation des Imaginären haben; wenn ich in meiner jetzigen Darstellung diesen Zusammenhang nicht hervortreten lasse, so geschieht es einerseits, weil ich denselben für einigermassen zufällig halte, andererseits, weil ich nicht von der gewöhnlichen Sprache der Mathematik abzuweichen wünschte. *)

Erster Abschnitt.

Ueber eine neue Reciprocität im Raum.

In den beiden ersten Paragraphen dieses Abschnitts gebe ich eine kurze Uebersicht über einige bekannte Theorien, um dadurch das Verständniss des Paragraphen 4. zu erleichtern. Dieser letzte Paragraph giebt alle Voraussetzungen, die nothwendig sind, um den zweiten Abschnitt verstehen zu können; für den dritten und vierten Abschnitt benutze ich ausserdem noch die folgenden Paragraphen.

*) Die wesentlichsten Gesichtspunkte und Resultate dieser Abhandlung finden sich in einer kurzen Note (October 1870) und in zwei grösseren Arbeiten (1871), die in die Verhandlungen der Akademie zu Christiania aufgenommen sind. Den Zusammenhang zwischen Haupttangenten-Curven und Krümmungslinien, wie überhaupt zwischen Linien-Geometrie und Kugel-Geometrie theilte ich derselben Gesellschaft im Juli 1870 mit. Vergl. auch die Comptes Rendus vom October 1870, sowie eine von Hrn. Klein und mir veröffentlichte Note in den Monatsberichten der Berliner Akademie, 15. Decbr. 1870.

§ 1.

Reciprocität zwischen zwei Ebenen oder zwei Räumen.

1. Die Poncelet-Gergonne'sche Reciprocitäts-Theorie der Ebene kann bekanntlich aus der Gleichung:

$$(1) \quad X(a_1x + b_1y + c_1) + Y(a_2x + b_2y + c_2) + (a_3x + b_3y + c_3) = 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$x(a_1X + a_2Y + a_3) + y(b_1X + b_2Y + b_3) + (c_1X + c_2Y + c_3) = 0$$

entwickelt werden, vorausgesetzt, dass man x, y und X, Y als Cartesische Punkt-Coordinationen zweier Ebenen interpretirt.

Bezeichnet man nämlich als conjugirt zwei Punkte, deren Coordinaten-Werthe (xy) und (XY) der Gleichung (1) genügen, so kann man sagen, dass die einem Punkte conjugirten Punkte der zweiten Ebene eine Gerade bilden, und dieselbe betrachten wir als dem gegebenen Punkte entsprechend. Alle Punkte einer Geraden haben einen gemeinsamen conjugirten Punkt in der zweiten Ebene und somit gehen ihre entsprechenden Geraden durch diesen gemeinsamen Punkt.

Die beiden Ebenen werden also durch (1) so auf einander bezogen, dass die Geraden jeder Ebene sich als die Punkte der zweiten Ebene abbilden. Den Punkten einer Geraden λ entsprechen hierbei die durch den Bildpunkt von λ gehenden Geraden. Diese gegenseitige Beziehung ist das Fundamental Princip der besprochenen Reciprocität.

Sei nun gegeben in der einen Ebene ein Polygon und in der zweiten Ebene dasjenige Polygon, dessen Seiten sich als die Ecken des ersten abbilden; nach dem Vorstehenden ist dann klar, dass auch die Ecken des letzten Polygons den Seiten des ersten entsprechen, dass also die beiden Polygone in reziproker Beziehung stehen. Aus diesen Polygonen erhält man durch Grenz-Uebergang zwei Curven, die, wie man sich ausdrückt, einander hinsichtlich der Gleichung (1) reziprok sind. Es ist einleuchtend, dass die Tangenten jeder Curve sich als die Punkte der reciproken abbilden.

2. Plücker*) gründet eine Verallgemeinerung der eben entwickelten Theorie auf die Interpretation der allgemeinen Gleichung:

$$(2) \quad F(xy \ XY) = 0.$$

Die einem Punkte (xy) conjugirten Punkte (XY) bilden nun eine Curve C , die durch (2) dargestellt wird, wenn (xy) als Parameter, (XY) dagegen als laufende Coordinaten aufgefasst werden; umgekehrt bilden die einem Punkte (XY) conjugirten Punkte (xy) eine Curve c , welche ebenfalls durch (2) dargestellt wird. Die beiden Ebenen werden also durch (2) derart aufeinander bezogen, dass den Punkten der einen

*) Analytisch geometrische Entwicklungen. T. 1. Zweite Abtheilung.

Ebene in der zweiten die Curven eines Curven-Netzes (C oder c) entsprechen. Ganz wie früher sieht man ein, dass den Punkten einer Curve C diejenigen Curven c entsprechen, welche durch die Bildpunkte von C gehen.

Einem Curven-Polygone ($C_1 C_2 \dots C_n$) entspricht ein Punkt-System ($p_1 p_2 \dots p_n$), und offenbar liegen diese Punkte paarweise ($p_1 p_2$), ($p_2 p_3$) ... auf denjenigen Curven c , deren Bildpunkte Ecken des gegebenen krummlinigen Polygons sind. Durch Grenz-Uebergang erhält man auch hier Curven, die in solcher Beziehung stehen, dass den Punkten der einen solche Curven c oder C entsprechen, welche die zweite umhüllen. Doch ist das Reciprocitäts-Verhältniss im Allgemeinen nicht vollständig. Ist nämlich Σ die Umhüllungs-Curve aller C , die sich als die Punkte einer Curve σ abbilden, so umhüllen freilich die den Punkten von Σ entsprechenden c die gegebene Curve σ , aber im Allgemeinen ausserdem eine zweite Curve.

3. Plücker *) gründet die allgemeine Reciprocität zwischen zwei Räumen r und R auf die allgemeine Gleichung:

$$F(x y z X Y Z) = 0.$$

Wenn insbesondere F hinsichtlich beider Systeme von Veränderlichen linear ist, so erhält man die Poncelet-Gergonne'sche Reciprocität zwischen den Punkten und den Ebenen der beiden Räume.

Es ist nun meine Absicht, in dieser Abhandlung, und insbesondere im ersten Abschnitte derselben, eine neue, der Plücker'schen coordinirte Reciprocität zu betrachten, die durch das Gleichungs-System

$$F_1(x y z X Y Z) = 0, \quad F_2(x y z X Y Z) = 0$$

bestimmt wird, vorausgesetzt, dass man ($x y z$) und ($X Y Z$) als Punkt-Coordinaten zweier Räume r und R auffasst.

§ 2.

Curven, die von drei Parametern abhängen, können als Raumelement eingeführt werden.

4. Die Transformation geometrischer Theoreme, die sich auf die Poncelet-Gergonne'sche oder Plücker'sche Reciprocitäts-Theorie gründet, kann, wie Gergonne und Plücker hervorgehoben haben, unter einem höheren Gesichtspunkte, den wir sogleich angeben, betrachtet werden. Dasselbe gilt von unserer neuen Reciprocität.

Die Cartesische analytische Geometrie übersetzt beliebige geometrische Theoreme in algebraische, und macht dadurch aus der

*) Es ist correct, glaube ich, Plücker diese Reciprocität zuzuschreiben, obgleich ich keinen Ort in Plücker's Werken angeben kann, wo er explicite die Reciprocität des Raumes in dieser Weise begründet.

Geometrie der Ebene eine sinnliche Darstellung der Algebra zweier Variabeln und ebenso aus der Geometrie des Raumes eine Repräsentation einer Algebra, die drei variable Grössen umfasst. Nun hat insbesondere Plücker die Aufmerksamkeit darauf gerichtet, dass die Cartesische Geometrie eine zweifache Willkürlichkeit enthält.

Descartes stellt ein Werth-System der beiden Variabeln x und y durch einen Punkt in der Ebene dar; er hat, wie man zu sagen pflegt, den Punkt zum Elemente der ebenen Geometrie gewählt, während man ebenso gut die Gerade oder überhaupt eine beliebige, zwei Parameter enthaltende Curve als Element anwenden könnte. Man kann aber bekanntlich die durch die Poncelet-Gergonne'sche Reciprocität vermittelte Transformation als auf dem Uebergange vom Punkte als Element zur Geraden als Element beruhend auffassen, und ebenso besteht gewissermassen die Plücker'sche Reciprocität der Ebene in dem Uebergange vom Punkte als Element zu einer von zwei Parametern abhängenden Curve als Element.

Ferner stellt Descartes das Werth-System (xy) durch denjenigen Punkt in der Ebene dar, dessen Abstände von zwei gegebenen Geraden — den Coordinaten-Axen — bezüglich gleich x und y sind; er hat unter den unbegrenzt vielen möglichen Coordinaten-Systemen ein bestimmtes gewählt.

Es ist bekannt, dass die Fortschritte der Geometrie in unserem Jahrhundert sich wesentlich darauf gründen, dass die beiden besprochenen Willkürlichkeiten in der Cartesischen Repräsentation klar als solche aufgefasst worden sind, und es liegt somit nahe, zu versuchen, aus dieser fruchtbaren Quelle noch mehr zu schöpfen.

5. Die im Folgenden dargestellten neuen Theorien beziehen sich darauf, dass man als Raumelement eine jede Raumcurve, die von drei Parametern abhängt, anwenden kann. Erinnert man sich z. B., dass die Gleichungen einer Raumgeraden vier wesentliche Constanten enthalten, so sieht man ein, dass man die geraden Linien, welche eine Bedingung befriedigen, als Element einer Raumgeometrie, die eine sinnliche Darstellung einer Algebra mit drei Variabeln giebt, wählen kann. Da aber hierdurch ein Geraden-System — ein Plücker'scher Linien-Complex — ausgezeichnet wird, so ist es einleuchtend, dass eine bestimmte Repräsentation der angegebenen Art nur eine begrenzte Anwendung finden kann. Wenn man sich indessen mit einem Studium des Raumes hinsichtlich eines Linien-Complexes beschäftigt, so kann es sehr vorthellhaft sein, die Linien dieses Complexes als Raumelemente zu benutzen.

In der metrischen Geometrie ist z. B. der unendlich weit entfernte imaginäre Kreis und in Folge dessen der Complex imaginärer Geraden, welche denselben schneiden, ausgezeichnet, und es könnte somit

a priori wahrscheinlich scheinen, dass es, um gewisse metrische Probleme zu behandeln, vortheilhaft ist, diese imaginären Linien als Elemente einzuführen.

Wenn wir eben gesagt haben, dass es beispielsweise möglich ist, die Geraden eines Linien-Complexes als Raumelement zu wählen, so muss man wohl bemerken, dass dieses etwas ganz anderes, etwas, wenn man will, mehr Particuläres ist, als die Ideen, welche Plücker in seinem letzten Werke: „Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement“, entwickelt hat. Plücker hatte schon früh*) die Aufmerksamkeit darauf gerichtet, dass es möglich ist, eine Repräsentation einer Algebra mit beliebig vielen Variablen zu schaffen, indem man nämlich ein Gebilde, das ebenso viele Parameter enthält, als Raumelement einführt. Insbesondere hob er hervor, dass die Raumgerade vier Coordinaten besitzt, dass man also eine Geometrie einer Mannigfaltigkeit mit vier Dimensionen erhält, wenn man die Gerade als Element des Raumes betrachtet.

§ 3.

Curven-Complexe. Neue geometrische Interpretation partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Haupttangenten-Curven eines Linien-Complexes.

6. Nach Plücker nennt man den Inbegriff der Geraden, die einer Bedingung unterworfen sind, welche also noch von drei wesentlichen Constanten abhängen, einen Linien-Complex. In Analogie damit werde ich im Folgenden ein jedes System von Curven c , deren Gleichungen drei unabhängige Parameter enthalten, als einen *Curven-Complex* bezeichnen. Die Gleichungen:

$$(1) \quad f_1(x y z a b c) = 0, \quad f_2(x y z a b c) = 0,$$

in denen a, b, c Constanten sind, stellen also einen Curven-Complex dar. Durch Differentiation dieser beiden Gleichungen hinsichtlich x, y, z und Elimination der Grössen a, b, c erhält man eine Resultante:

$$(2) \quad f(x y z dx dy dz) = 0,$$

die, wenn dx, dy, dz als Bestimmungselemente einer Richtung aufgefasst werden, jedem Punkte des Raumes einen Kegel zuordnet, den Inbegriff nämlich der Richtungen aller Complex-Curven c , die durch den betreffenden Punkt gehen. Diese Kegel nenne ich *elementare Complex-Kegel*; ebenso wende ich den Ausdruck *elementare Complex-Richtung* an, um ein beliebiges Linien-Element ($dx dy dz$) einer Complex-

*) Geometrie des Raumes n. 258. (1816).

Curve c zu bezeichnen. Den Inbegriff aller einem Punkte entsprechenden elementaren Complex-Richtungen bildet der dem betreffenden Punkte zugeordnete elementare Complex-Kegel.

Einem gegebenen Systeme (1), oder, wie man auch sagen kann, einem gegebenen Curven-Complex entspricht eine bestimmte Differential-Gleichung ($f=0$); dagegen giebt es unbegrenzt viele Systeme (1), welche auf dieselbe Differential-Gleichung ($f=0$) führen. Wählt man nämlich eine beliebige Relation:

$$\psi(xyz dx dy dz \alpha) = 0,$$

in welcher α eine Constante bezeichnet, und sind:

$$(3) \quad \varphi_1(xyz \alpha \beta \gamma) = 0, \quad \varphi_2(xyz \alpha \beta \gamma) = 0$$

die Integrale des simultanen Systems:

$$f = 0, \quad \psi = 0,$$

so ist es klar, dass auch die Gleichungen (3) durch Differentiation hinsichtlich x, y, z und Elimination der Grössen α, β, γ als Resultat:

$$f = 0$$

geben. Es existiren also unbegrenzt viele Curven-Complexe, deren Gleichungen eine gegebene Relation $f(xyz dx dy dz) = 0$ befriedigen. Eine jede Curve eines solchen Complexes wird von Curven c des ursprünglichen Complexes umhüllt, indem alle ihre Elemente Complex-Richtungen sind.

7. Eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung zwischen den Variablen x, y, z ist nach Monge mit dem Problem äquivalent: die allgemeine Fläche zu finden, die in allen ihren Punkten einen dem betreffenden Punkte nach einem beliebigen Gesetze zugeordneten Kegel berührt. Indem man hierbei in der gegebenen partiellen Differential-Gleichung

$$F(xyz p q) = 0$$

x, y, z als Parameter, p und q dagegen als Ebenen-Coordinationen auffasst, kann man sagen, dass $F=0$ die allgemeine Gleichung des besprochenen Kegel-Systems in Ebenen-Coordinationen darstellt. Lagrange und Monge haben die Integration einer partiellen Differential-Gleichung erster Ordnung auf die Bestimmung eines gewissen Curven-Complexes, die sogenannten Charakteristiken, zurückgeführt, indem sie gezeigt haben, dass wenn einfach unendlich viele Charakteristiken eine Curve umhüllen, sie immer eine Integralfäche erzeugen. Es ist zu bemerken, dass die Differential-Gleichung der Charakteristiken:

$$f(xyz dx dy dz) = 0$$

mit der partiellen Differential-Gleichung als äquivalent aufzufassen ist; beide Gleichungen geben nämlich die analytische Definition des besprochenen Kegel-Systems.

8. Sei nun gegeben eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung D_1 , die zugehörige Differential-Gleichung der Charakteristiken $f = 0$, und endlich dreifach unendlich viele Curven c , die ebenso $f = 0$ genügen. Betrachten wir hier eine beliebige Integralfäche U_0 , eine auf derselben gelegene Charakteristik k_0 und ferner eine Complex-Curve c_0 , die k_0 berührt, so behaupte ich, dass c_0 die Fläche U_0 dreipunktig berührt.

Neunen wir nämlich die beiden gemeinsamen, unendlich nahen Punkte der Curven c_0 und k_0 , p_1 und p_2 , ferner die nächstfolgenden Punkte unserer Curven bezüglich π und p_3 , so ist es klar, dass der elementare Complex-Kegel, dessen Spitze in p_2 liegt, das Flächenelement $(p_2 p_3 \pi)$ enthält. Nun berührt der Kegel die Integral-Fläche U_0 nach der Erzeugenden $p_2 p_3$, und also gehört das Element $(p_2 p_3 \pi)$ zugleich der Fläche U_0 an, welche somit den Punkt π enthält. Unsere Behauptung ist also erwiesen.

Dieser Satz lässt sich dahin verallgemeinern, dass wenn c_0 n consecutive Punkte mit der Charakteristik k_0 gemein hat, $(n + 1)$ Schnittpunkte von c_0 und der Integralfäche U_0 zusammenfallen.*)

9. Die Forderung, dass eine Fläche $z = F(xy)$ in einem jeden Punkte drei consecutive Punkte mit einer Complex-Curve c gemein haben soll, drückt sich durch eine Differential-Gleichung zweiter Ordnung D_2 **) aus, und zwar sieht man leicht, dass einfach unendlich viele c immer eine Integralfäche bilden. Man kennt somit das allgemeine zweite Integral der Gleichung D_2 mit zwei arbiträren Functionen. Nun sagt der Satz der letzten Nummer, dass auch die Integralfächen der Gleichung D_1 — die im Allgemeinen nicht von Complex-Curven c erzeugt werden — in einem jeden ihrer Punkte dreipunktig von einer c berührt werden, und also ist D_1 ein singuläres erstes Integral unserer Differential-Gleichung zweiter Ordnung. Ich behaupte, dass es sonst kein weiteres singuläres Integral giebt.

Sei nämlich Φ eine Integralfäche der Gleichung D_2 , die nicht von Curven c gebildet wird. Es gehen dann durch jeden Punkt der Fläche zwei zusammenfallende Curven c , die dieselbe in diesem Punkte berühren. Hieraus folgt, dass der zugehörige elementare Complex-Kegel die Fläche berührt, dass also dieselbe der Gleichung D_1 genügt. — Die beiden letzten Nummern geben die folgende bemerkenswerthe geometrische Interpretation partieller Differential-Gleichungen erster Ordnung zwischen drei Variablen.

*) Entsprechende Sätze gelten für einen Raum mit beliebig vielen Dimensionen.

**) Diese Differential Gleichung hat die folgende Form:

$$r + 2Ns + N^2t + M = 0,$$

wobei N und M von x, y, z, p, q abhängen.

Die Aufgabe: alle Flächen zu finden, die mit zweifach unendlich vielen Curven eines gegebenen Complexes jedesmal drei consecutive Punkte gemein haben, drückt sich durch eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung aus. Alle Complexe, deren Gleichungen einer gegebenen Relation:

$$f(x y z dx dy dz) = 0$$

genügen, führen auf dieselbe partielle Gleichung, und zwar befriedigen die zugehörigen Charakteristiken die Gleichung $f = 0$.

10. Corollar. *Die Aufgabe: alle Flächen zu finden, deren zweifach unendlich viele Haupttangenten des einen Systems einem gegebenen Linien-Complexes gehören, führt auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Charakteristiken von den Geraden des Complexes umhüllt werden. Die Charakteristiken sind in diesem Falle auf den Integralfächen*) Haupttangenten-Curven des einen Systems.*

Ich werde andeuten, wie man diesen Satz selbständig beweisen könnte.

Die partielle Differential-Gleichung erster Ordnung, deren Charakteristiken von den Geraden eines Linien-Complexes umhüllt werden, ist bekanntlich der Ausdruck des folgenden Problems: die allgemeine Fläche zu finden, die in allen ihren Punkten den betreffenden Complex-Kegel berührt. Nun ist die Osculationsebene einer Curve, deren Tangenten einem Linien-Complex angehören, eine Tangentenebene des entsprechenden Complex-Kegels, und also berühren in unserem Falle die Osculationsebenen der Charakteristiken jedesmal die zugehörigen Integralfächen. Die Charakteristiken sind folglich Haupttangenten-Curven.

Ein jeder Linien-Complex bestimmt also dreifach unendlich viele Curven, die von Complex-Linien umhüllt werden und dabei die Eigenschaft besitzen, Haupttangenten-Curven auf einer jeden Fläche zu sein, die einfach unendlich viele solche Curven enthält, vorausgesetzt, dass immer zwei consecutive dieser Curven sich schneiden. Diese Curven, die in der Theorie der Linien-Complexes eine wichtige Rolle spielen werden (vergl. den dritten Abschnitt dieser Abhandlung), nenne ich *die Haupttangenten-Curven des Linien-Complexes*.

Herr Klein hat mir die Bemerkung gemacht, dass die Complex-Linien, die Plücker als singuläre Linien des Complexes bezeichnet, Haupttangenten-Curven desselben sind. Wird der Complex von den Tangenten einer Fläche oder von den Linien, die eine Curve schneiden, gebildet, so sind alle Complex-Linien singuläre Linien und also zugleich die Haupttangenten-Curven des Complexes.

*) Herr Darboux, dem ich diesen Satz im Sommer 1870 mittheilte, kannte damals denselben. Vergl. den Anfang und Schluss des zweiten Theiles.

§ 4.

Das Gleichungs-System $F_1(xyzXYZ) = 0$, $F_2(xyzXYZ) = 0$ bestimmt eine Reciprocität zwischen zwei Räumen.

11. Wir beginnen (cfr. § 1.) nun ein Studium der räumlichen Reciprocität, die durch die beiden Gleichungen:

$$(1) \quad F_1(xyzXYZ) = 0, \quad F_2(xyzXYZ) = 0$$

bestimmt wird, wenn (xyz) und (XYZ) als Punkt-Coordinationen zweier Räume r und $R^*)$ interpretirt werden.

Bezeichnet man als *conjugirt* zwei Punkte (xyz) und (XYZ) , deren Coordinaten-Werthe den Gleichungen (1) genügen, so kann man sagen, dass die einem Punkte (xyz) conjugirten Punkte (XYZ) eine Curve C bilden; dieselbe wird durch (1) dargestellt, vorausgesetzt, dass man x, y, z als Parameter, X, Y, Z dagegen als laufende Coordinaten auffasst. Den Punkten des Raumes r entsprechen somit dreifach unendlich viele Curven C , und ebenso tritt im Raume r ein Curven-Complex auf, dessen Curven c in demselben Verhältnisse zu den Punkten des Raumes R stehen. Die Punkte einer c haben hierbei einen gemeinsamen conjugirten Punkt in R , und also gehen ihre entsprechenden C durch diesen gemeinsamen Punkt.

Die beiden Räume r und R werden durch die Gleichungen (1) so auf einander bezogen, dass den Punkten des einen Raumes die Curven eines Complexes im zweiten Raume entsprechen. Complex-Curven, die durch einen gegebenen Punkt gehen, bilden sich hierbei als die Punkte der dem gegebenen Punkte entsprechenden Complex-Curve ab.

12. Es lässt sich nun zeigen, dass die Gleichungen (1) eine allgemeine Reciprocität zwischen Gebilden der beiden Räume bestimmen, und zwar insbesondere zwischen Curven, die von Complex-Curven c und C umhüllt werden.

Wenn zwei Complex-Curven des einen Raumes einen gemeinsamen Punkt haben — was offenbar im Allgemeinen nicht der Fall ist —, so liegen ihre Bildpunkte auf einer Complex-Curve des zweiten Raumes; insbesondere ist zu bemerken, dass zwei unendlich nahen sich schneidenden Complex-Curven im anderen Raume Punkte entsprechen, deren infinitesimale Verbindungs-Linie eine Complex-Richtung ist. Man betrachte nun eine von einfach unendlich vielen c umhüllte Curve σ und die den Punkten dieser letzten Curve entsprechenden C ; es ist einleuchtend, dass jedesmal zwei consecutive C sich schneiden, dass also ihr Inbegriff eine Umhüllungs-Curve Σ bestimmt. Führt man die

*) Gebilde des Raumes r werden mit kleinen Buchstaben bezeichnet; dagegen brauche ich grössere Buchstaben für Alles, was dem Raume R angehört.

entsprechende Operation auf Σ aus, so erhält man eine von Complex-Curven c umhüllte Curve σ' , und zwar behaupte ich, dass σ' eben die ursprüngliche Curve σ ist.

Um dieses zu beweisen, betrachte man einerseits ein von Complex-Curven c gebildetes krummliniges Polygon, andererseits die den besprochenen Curven zugehörigen Bildpunkte, welche offenbar paarweise auf Complex-Curven C liegen, auf denjenigen nämlich, die den Ecken des gegebenen Polygons entsprechen. Dieses neue Polygon und das gegebene stehen also in einem vollständigen reciproken Verhältnisse.

Durch Grenz-Uebergang erhält man zwei von Complex-Curven c und C umhüllte Curven, die in solcher gegenseitiger Beziehung stehen, dass den Punkten der einen diejenigen Complex-Curven entsprechen, welche die zweite umhüllen.

Eine jede von Complex-Curven umhüllte Curve bildet sich also für eine zweifache Auffassung ab als eine andere ebenso von Complex-Curven umhüllte Curve, die wir als die *reciproke* der gegebenen hinsichtlich des Gleichungs-Systems (1) bezeichnen; und offenbar kann man, wenn die Gleichungen der einen Curve gegeben sind, diejenigen der reciproken durch einfache Operationen — Differentiation und Elimination — bestimmen. Es ist auch zu bemerken, dass die *elementaren Complex-Richtungen* ($dx\ dy\ dz$) und ($dX\ dY\ dZ$) sich paarweise als *reciproke zusammenordnen*, dass also zwei von Complex-Curven umhüllte Curven, zwischen denen Berührung stattfindet, sich als eben solche Curven im zweiten Raume abbilden.

13. Auch unter anderen Raumgebilden bestimmen die Gleichungen (1), und zwar für eine zweifache Auffassung, ein Entsprechen, welches aber im Allgemeinen keine *vollständige* Reciprocität ist.

Die elementaren Complex-Kegel, deren Spitzen auf einer Fläche f liegen, schneiden die entsprechenden Tangentenebenen jedesmal nach n Geraden — n bezeichnet die Ordnung der Complex-Kegel — und ordnen dadurch jedem Punkte der Fläche n elementare Complex-Richtungen zu. Die *continuirliche* Aufeinanderfolge dieser Richtungen bilden eine die Fläche n fach *bedeckende* Schaar von Curven σ , die sämtlich von Complex-Curven c umhüllt werden. Die entsprechenden reciproken Curven Σ erzeugen eine Fläche F , die wir als Bildfläche der gegebenen auffassen. Dass das Reciprocitäts-Verhältniss nicht vollständig ist, liegt darin, dass durch jeden Punkt der Fläche F im Allgemeinen nur eine Curve Σ geht. Ausserdem liegen also auf F eine Schaar von Curven Σ' , die ebenso von Complex-Curven C umhüllt sind, und zwar gehen $(N - 1)$ Σ' durch jeden Punkt unserer Fläche, vorausgesetzt, dass N die Ordnung der elementaren Complex-Kegel des Raumes R bezeichnet. Die den Curven Σ' zugehörigen reciproken

bilden eine Fläche φ , die gewissermassen der gegebenen Fläche f associirt ist.

Durch jeden Punkt der Fläche f gehen, wie gesagt wurde, n Curven σ , und also ist dieser Punkt das Bild einer Complex-Curve C , welche n Curven Σ berührt; demzufolge berührt unsere C die Fläche F in n Punkten. Andererseits geht durch jeden Punkt der Fläche F nur eine Σ , dagegen $(N - 1) \Sigma'$ und also ist unser Punkt das Bild einer Complex-Curve c , welche f in einem Punkte, φ dagegen in $(N - 1)$ Punkten berührt. Führen wir nun -- in Analogie mit der für Linien-Systeme gebräuchlichen Terminologie -- die Bezeichnungen „Curven-Congruenz“ und „Brennfläche^{*)} einer Curven-Congruenz“ ein, so können wir das Obenstehende folgendermassen zusammenfassen:

Die Punkte einer Fläche f bilden sich in R ab als zweifach unendlich viele Complex-Curven C , als eine Curven-Congruenz, deren Brennfläche F wir als Bildfläche der gegebenen betrachten. Ebenso bilden die Punkte der Fläche F sich als zweifach unendlich viele Curven c ab, und zwar enthält die zugehörige Brennfläche die gegebene Fläche f als reductiblen Theil.

14. Die vorstehenden Betrachtungen gelten auch, wenn f und F Flächen-Elemente sind. Unsere Reciprocität bestimmt ein Entsprechen zwischen Flächen-Elementen. Einem gegebenen Elemente des Raumes r entsprechen n Elemente des zweiten Raumes; andererseits entsprechen jedem Elemente des Raumes R N Elemente in r . Sollen also die Gleichungen (1) eine vollständige Reciprocität, das heisst ein eindeutiges Entsprechen zwischen Flächen-Elementen bestimmen, so müssen die beiden Zahlen n und N gleich 1 sein. Hierher gehört, wie ich beiläufig bemerke, die Ampère'sche Transformation (cfr. § 7., 22.). Dagegen haben wir gefunden, dass das Entsprechen zwischen elementaren Complex-Richtungen im Allgemeinen ein eindeutiges ist, und in der That erhält man die klarste Vorstellung über unsere Reciprocität, wenn man eine jede Figur als von elementaren Complex-Richtungen gebildet auffasst. Beispielsweise können wir sagen, dass die zweifach unendlich vielen elementaren Complex-Richtungen einer Fläche f sich als die elementaren Complex-Richtungen der entsprechenden Fläche F abbilden.

Sei nun gegeben eine Curve k , die wir als eine Röhrenfläche von infinitesimalem Querschnitt auffassen. Alle elementaren Complex-Richtungen, die k schneiden, geben zweifach unendlich viele Complex-Richtungen ($dX \ dY \ dZ$), deren Inbegriff im Allgemeinen eine Fläche

^{*)} Definiert man eine Curven-Congruenz durch eine lineare partielle Differential-Gleichung erster Ordnung, so ist die Brennfläche dasjenige, was man im Allgemeinen als das *singuläre Integral* der betreffenden Differential-Gleichung bezeichnet.

F bilden, welche das Bild von k ist. Diese Definition der Bildfläche ist mit den beiden folgenden äquivalent: F enthält einfach unendlich viele Curven C , die sich als die Punkte der Curve k abbilden. Alle Complex-Curven c , die k schneiden, bilden sich als die Punkte der Fläche F ab.

Die Gleichungen $F_1(xyz XYZ) = 0$, $F_2(xyz XYZ) = 0$ führen somit beliebig gegebene Gebilde in neue über und sie können also dazu dienen, geometrische Theoreme und Probleme zu transformiren. Im zweiten Abschnitte machen wir für eine particuläre Form der Abbildungs-Gleichungen wichtige Anwendungen von diesem Transformations-Princip.

§ 5.

Bestimmung aller Raum-Transformationen, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist.

15. In der Theorie der partiellen Differential-Gleichungen spielen bekanntlich Transformationen, die sich folgendermassen ausdrücken lassen :

$$(1) \quad X = f_1(xyz pq), \quad Y = f_2(xyz pq), \quad Z = f_3(xyz pq)$$

eine wichtige Rolle. Es sollen hier p und q , wie auch später P und Q , die partiellen Derivirten $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial Z}{\partial X}$, $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ bezeichnen. Bemerkenswerth ist insbesondere der Fall, dass aus den Gleichungen (1) sich Ausdrücke für P und Q , die ebenso nur von $(xyz pq)$ abhängen, herleiten lassen. Alsdann besitzt unsere Transformation die Eigenschaft, Flächen, die sich berühren, in eben solche überzuführen, und zwar werde ich in diesem Paragraphen eine wie es scheint neue analytisch-geometrische Eintheilung dieser Transformationen in drei Classen geben.

Die Gleichungen (1) ordnen einem beliebigen Flächen-Elemente $(xyz pq)$ einen Punkt $(X Y Z)$ zu, und also entsprechen den Elementen einer Fläche f alle Punkte einer Fläche F , die freilich in eine Curve oder sogar in einen Punkt ausarten kann. Lässt man eine Fläche π variiren, in solcher Weise, dass ein Flächen-Element derselben ungeändert bleibt, so berühren sich die entsprechenden Π in einem (oder mehreren) gemeinsamen Elementen E . Wenn Π in eine Curve ausartet, so enthält dieselbe, wie eine Continuitäts-Betrachtung zeigt, zwei consecutive Punkte des Elementes E . Wird endlich Π eine Punkt-Kugel (unendlich kleine Kugel), so liegt dieselbe auf E .

Man betrachte nun dreifach unendlich viele Flächen f , die ganz beliebig gewählt sind, und die entsprechenden Gebilde F des zweiten Raumes, die entweder Flächen oder Curven oder Punkt-Kugeln sind. Eine Fläche ϕ wird von zweifach unendlich vielen f umhüllt, und nach dem Vorstehenden berühren dann die entsprechenden zweifach

unendlich vielen F die Bildfläche Φ . Hierin liegt eine allgemeine geometrische Definition unserer Transformationen.

16. Wählen wir insbesondere als Flächen f alle Punkt-Kugeln des Raumes r , so finden wir die analytische Definition der Gebilde F , indem wir zwischen den Gleichungen:

$$X = f_1(x y z p q), \quad Y = f_2(x y z p q), \quad Z = f_3(x y z p q)$$

p und q eliminiren. Es sind hier drei Fälle möglich; entweder existirt nur eine Relation zwischen $(x y z X Y Z)$, und dann gehört die Transformation*) unter die von Plücker aufgestellte allgemeine Reciprocität; oder es finden sich zwei solche Relationen, was der von mir aufgestellten Reciprocität entspricht; oder es existiren drei unabhängige Gleichungen zwischen den Punkt-Coordinationen der beiden Räume, was bei allen Punkt-Transformationen der Fall ist.

Es giebt drei distincte Classen von Transformationen, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist; die erste entspricht der Plücker'schen Reciprocität des Raumes, und wird durch eine aequatio directrix:

$$F(x y z X Y Z) = 0$$

definirt; die zweite entspricht der von mir aufgestellten Reciprocität; dieselbe wird durch zwei Gleichungen:

$$F_1(x y z X Y Z) = 0, \quad F_2(x y z X Y Z) = 0$$

definirt; die dritte endlich umfasst alle Punkt-Transformationen; dieselbe wird durch drei Gleichungen:

$$F_1(x y z X Y Z) = 0, \quad F_2(x y z X Y Z) = 0, \quad F_3(x y z X Y Z) = 0$$

*bestimmt**).*

Die beiden ersten Classen von Transformationen beruhen auf der Einführung eines neuen Raumelements, die letzte auf der Anwendung eines neuen Coordinaten-Systems.

§ 6.

Transformation partieller Differential-Gleichungen.

17. Legendre***) hat eine allgemeine Methode gegeben, um — in der Sprache der modernen Geometrie — eine partielle Differential-Gleichung zwischen Punkt-Coordinationen x, y, z in eine zwi-

*) Vergl. Du-Bois-Reymond, partielle Differential-Gleichungen. § 75–81.

**) Für einen Raum mit n Dimensionen giebt es n distincte Classen von Transformationen, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist. Bezeichnet m eine beliebige ganze, positive Zahl, die nicht grösser als n ist, so können wir sagen, dass eine jede Classe durch m Gleichungen zwischen den Coordinaten des neuen und des transformirten Raumes definirt wird.

***) Die hier gegebene allgemeine Auffassung der sogenannten Legendre'schen Transformation gehört wohl Plücker. Crelle IX. 1831.

schen Ebenen-Coordinaten t, u, v überzuführen; hierbei kann man t, u, v auch als Punkt-Coordinaten eines auf den gegebenen reciprok bezogenen Raumes betrachten. Ebenso ist es, wenn man die Curven oder Flächen eines Complexes als Raumelemente einführt, möglich eine Differential-Gleichung in den Variablen x, y, z in eine zwischen den Coordinaten X, Y, Z des neuen Elementes zu transformiren. Auch hier ist zu bemerken, dass man in der neuen Gleichung X, Y, Z als Punkt-Coordinaten des Raumes R interpretiren kann, und zwar wird diese Auffassung die hervortretende in unserer Darstellung sein.

Der analytische Beweis für die Wahrheit der vorstehenden Behauptung liegt darin, dass der besprochene Wechsel des Raumelements sich durch fünf Relationen zwischen $(x\ y\ z\ p\ q)$ und $(X\ Y\ Z\ P\ Q)$ ausdrücken lässt. Wenn man aber in eine partielle Differential-Gleichung:

$$\Pi(x\ y\ z\ p\ q) = 0$$

tatt x, y, z, p, q die Werthe dieser Grössen durch X, Y, Z, P, Q einsetzt, so erhält man eine neue partielle Differential-Gleichung erster Ordnung. Geometrisch kann man dasselbe in folgender Weise ansehen.

Es sei gegeben eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung $\Pi(x\ y\ z\ p\ q) = 0$ und alle Flächen φ , die ein sogenanntes vollständiges Integral bilden; hierbei ist zu erinnern, dass eine jede andere Integrallfläche f von einfach unendlich vielen φ umhüllt wird. Man betrachte ferner die zugehörigen Bildflächen Φ und F ; wir werden beweisen, dass jede F von einfach unendlich vielen Φ umhüllt wird. Aus den Entwicklungen des letzten Paragraphen folgt, dass wenn zwei Flächen einander nach einer Curve berühren, das heisst einfach unendlich viele Flächen-Elemente gemein haben, die Bildflächen in denselben gegenseitigen Verhältnisse stehen. Dieses vorausgesetzt betrachte man eine Integrallfläche f_0 , ferner alle einfach unendlich vielen φ_0 , welche dieselbe nach einer Charakteristik berühren und endlich die entsprechenden Flächen F_0 und Φ_0 . Es ist klar, dass jede φ_0 die Fläche F_0 nach einer Curve berührt, dass also F_0 die Umhüllungsfläche der Φ_0 ist. Wir sehen somit, dass unsere Transformation alle Integrallflächen einer partiellen Differential-Gleichung $\Pi(x\ y\ z\ p\ q) = 0$ in die Integrallflächen einer neuen partiellen Differential-Gleichung $F(X\ Y\ Z\ P\ Q) = 0$ überführt, und das war eben unsere Behauptung.

18. Wir betrachten nun eine, durch zwei auf einander bezogene Curven-Complexe c und C definirte Transformation; wenden wir dieselbe auf die dem Curven-Complex c zugehörige (§ 3., 9.) partielle Differential-Gleichung erster Ordnung an, so zerfällt die entsprechende Diffe-

rential-Gleichung zwischen X, Y, Z in zwei Gleichungen, unter denen die eine eben dem Curven-Complex C entspricht.

Sei nämlich gegeben eine Fläche f , die in allen ihren Punkten die zugehörigen elementaren Complex-Kegel berührt. Diese Kegel bestimmen in jedem Flächen-Elemente (§ 4., 13.) n elementare Complex-Richtungen, unter denen jedesmal zwei zusammenfallen. Die auf f gelegenen Curven, die von Complex-Curven c umhüllt werden, theilen sich also in zwei Schaaren: die Charakteristiken der Fläche f und eine Schaar, die dieselbe $(n - 2)$ fach bedeckt. Die Punkte unserer Fläche bilden sich somit ab als zweifach unendlich viele Curven C , deren Brennfläche in zwei Flächen F_1 und F_2 zerfallen ist, und zwar berühren die Curven C die Fläche F_1 in zwei zusammenfallenden Punkten, dagegen die Fläche F_2 in $(n - 2)$ getrennten Punkten. Die Fläche F_1 genügt also nach § 3., 9. der den Complex-Curven C zugehörigen partiellen Differential-Gleichung erster Ordnung, während F_2 eine andere Differential-Gleichung befriedigt. Unsere Behauptung ist also erwiesen.

Unser Satz ist mit den beiden folgenden identisch:

Wenn ein Flächen-Element des Raumes r einen elementaren Complex-Kegel berührt, so bildet dasselbe sich in R ab durch $(n - 1)$ Elemente, unter denen das eine zweifach zählt und dabei einen elementaren Complex-Kegel berührt).*

Die Complex-Curven c und C bestimmen zwei partielle Differential-Gleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken reciproke Curven hinsichtlich der Gleichungen $F_1 = 0, F_2 = 0$ sind.

19. Die letzte Form unseres Satzes giebt die folgende Methode zur Transformation partieller Differential-Gleichungen erster Ordnung.

Man bestimme die Differential-Gleichung $f(x y z dx dy dz) = 0$ der Charakteristiken und wähle eine beliebige Relation:

$$\psi(x y z dx dy dz X) = 0,$$

in welcher X eine Constante bezeichnet. Es seien:

$$F_1(x y z X Y Z) = 0, \quad F_2(x y z X Y Z) = 0$$

die Integrale mit zwei arbiträren Constanten Y und Z des simultanen Systems:

*) Einem Elemente des einen Raumes entsprechen im Allgemeinen n bezüglich N Elemente des zweiten Raumes. Demzufolge ordnen die Elemente jedes Raumes sich in Gruppen auf n oder N zusammen, wir werden sagen als *associirte* Elemente. Wenn unsere Transformation durch zwei Gleichungen ($F_1 = 0$), ($F_2 = 0$) defnirt wird, so giebt es nach den Entwicklungen des Textes in jedem Raume vierfach unendlich viele Elemente, die mit einem associirten zusammengefallen sind, und zwar ist es bemerkenswerth, dass ein solches Element sich als ein ähnliches im zweiten Raume abbildet. Der Satz des Textes gilt in dieser Form auch für Transformationen, die durch eine Gleichung $F(x y z X Y Z) = 0$ defnirt werden.

$$f = 0, \psi = 0.$$

Die Gleichungen $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$ geben durch Differentiation und Elimination ein Resultat:

$$F_3(X Y Z dX dY dZ) = 0,$$

welche wir auffassen als bestimmend eine partielle Differential-Gleichung:

$$F_4\left(X Y Z \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial Z}{\partial Y}\right) = 0,$$

die sich nach gewöhnlichen Methoden finden lässt.

Die gegebene partielle Differential-Gleichung und die eben gefundene ($F_4 = 0$) sind äquivalente Probleme, in dem Sinne, dass die zugehörigen Charakteristiken reciproke Curven hinsichtlich des Systems $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ sind.

Es ist nicht schwer, die Wahrheit der beiden folgenden Behauptungen, die ich als Beispiele aufstelle, zu erkennen.

Transformirt man nach der angegebenen Methode die einem Linien-Complex (§ 3., 10.) zugehörige partielle Differential-Gleichung erster Ordnung, so ist die neue Gleichung $F_4 = 0$ nur vom zweiten Grade. Dieses liegt darin, dass die Geraden einer Linien-Congruenz die Brennfläche in zwei Punkten berühren*).

Transformirt man dagegen die einem Kegelschnitt-Complex zugehörige partielle Differential-Gleichung (§ 3., 9.), so ist die neue Differential-Gleichung im Allgemeinen vom dreissigsten Grade. Dieses liegt darin, dass wenn zweifach unendlich viele Kegelschnitte eine Congruenz bilden, jeder Kegelschnitt die Brennfläche in sechs Punkten berührt. Demzufolge sind die neuen elementaren Complex-Kegel von sechster Ordnung und also von dreissigster Classe u. s. w.

20. Hier mögen noch die folgenden Bemerkungen, auf deren Beweis ich nicht eingehe, ihren Platz finden.

a. Wenn in der letzten Nummer $f = 0$ die Form:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0^{**})$$

besitzt, so sind die Charakteristiken der partiellen Differential-Gleichung $F_4 = 0$ eben diejenigen Curven, die durch $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ dargestellt werden, wenn man $x y z$ als Parameter auffasst. Wir können hieraus als wesentliche Eigenschaft der Charakteristiken einer partiellen Differential-Gleichung erster Ordnung die folgende schliessen:

*) Die hier angedeutete einfache Form, welche die einem Linien-Complex zugehörige partielle Differential-Gleichung annehmen kann, gründet sich nach den Entwicklungen in § 2. (vergl. auch den dritten Abschnitt dieser Abhandlung) darauf, dass man die Geraden des betreffenden Linien-Complexes als Raumelemente einführt.

**) X, Y, Z sollen hier beliebige Funktionen von $x y z$ bezeichnen.

Die Curven eines gegebenen Complexes sind Charakteristiken einer partiellen Differential-Gleichung erster Ordnung, wenn in einer beliebigen, diesem Complex angehörigen Congruenz jede Curve*) die Brennfläche nur in einem Punkte berührt. Hierbei wird von der allen solchen Congruenzen möglicherweise gemeinsamen Brennfläche abgesehen.

Wenn die elementaren Complex-Kegel beider Räume in ebene Strahl-Büschel zerfallen, so liegen die dreifach unendlich vielen Complex-Curven jedes Raumes auf *einfach* unendlich vielen Flächen — das heisst, die Gleichungen:

$$f(x y z dx dy dz) = 0, \quad F_3(X Y Z dX dY dZ) = 0$$

die hinsichtlich der Differentiale linear sind, können integrirt werden. Dieser Satz ist, wie ich bei einer anderen Gelegenheit zeigen werde, von Bedeutung, wenn man insbesondere alle eindeutigen Transformationen sucht.

b. Alle Transformationen, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist, besitzen die charakteristische Eigenschaft, die Monge-Ampère'sche partielle Differential-Gleichung zweiter Ordnung:

$$A(rt - s^2) + Br + Cs + Dt + E = 0$$

in eine ähnliche Gleichung überzuführen. Wenn die gegebene Gleichung ein allgemeines erstes Integral zugiebt, so ist dieses offenbar auch mit der neuen der Fall. (Cfr. eine Abhandlung von Boole in Crelle-Borchardt's Journal, Bd. 61.)

c. Im Allgemeinen entsprechen bei unseren Transformationen einem gegebenen Elemente eine endliche Zahl Elemente des zweiten Raumes. Es giebt indessen Ausnahm-Elemente, die sich als unbegrenzt viele Elemente abbilden. Ohne auf eine vollständige Discussion dieser wichtigen Theorie einzugehen, bemerke ich, dass wenn ein Element einfach unendlich viele Complex-Richtungen enthält, dasselbe ein Ausnahm-Element ist. Dieses liegt unmittelbar darin, dass ein Element sich im Allgemeinen in so viele Elemente transformirt, wie dasselbe Complex-Richtungen enthält (§ 4., 13. und 14.). Wenn die elementaren Complex-Kegel des Raumes r in ebene Büschel zerfallen sind, so erhalten wir also in diesem Raume *dreifach* unendlich viele Ausnahm-Elemente, deren Inbegriff den *vierfach* unendlich vielen Elementen entsprechen, welche sämtliche elementare Complex-Kegel des Raumes R umhüllen.

*) Jede Curve einer solchen Congruenz schneidet nur *eine* unendlich benachbarte Curve.

Zweiter Abschnitt.

Die Plücker'sche Linien-Geometrie*) lässt sich in eine Kugel-Geometrie transformiren.

In diesem Abschnitte betrachte ich einen besonderen Fall der früher entwickelten allgemeinen Theorie, denjenigen nämlich, in welchem die beiden auf einander bezogenen Curven-Complexe Linien-Complexe sind. Doch ist es nur ein Degenerations-Fall, den ich einem näheren Studium unterwerfe. Indessen glaube ich, dass es Interesse darbieten würde, sowohl den allgemeinen Fall wie alle möglichen Special-Fälle genau zu untersuchen.

§ 7.

Die beiden Curven-Complexe sind Linien-Complexe.

21. Setzen wir voraus, dass die beiden Gleichungen der Reciprocität hinsichtlich $(x\ y\ z)$ und $(X\ Y\ Z)$ linear sind:

$$(1) \quad \begin{cases} X(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + Y(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) \\ + Z(a_3x + b_3y + c_3z + d_3) + (a_4x + b_4y + c_4z + d_4) = 0 \\ X(\alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1z + \delta_1) + Y(\alpha_2x + \beta_2y + \gamma_2z + \delta_2) \\ + Z(\alpha_3x + \beta_3y + \gamma_3z + \delta_3) + (\alpha_4x + \beta_4y + \gamma_4z + \delta_4) = 0, \end{cases}$$

so bilden offenbar die einem gegebenen Punkte conjugirten Punkte des zweiten Raumes eine Gerade. Die beiden Curven-Complexe sind Plücker'sche Linien-Complexe, und also bestimmen die Gleichungen (1) ein Entsprechen zwischen r und R , welches die folgenden Eigenschaften besitzt:

a) *In jedem Raume findet sich ein Linien-Complex, dessen Gerade sich als die Punkte des zweiten Raumes abbilden.*

b) *Wenn ein Punkt eine Complex-Linie beschreibt, so dreht sich die entsprechende Gerade um den Bildpunkt der durchlaufenen Linie.*

c) *Curven, deren Tangenten bez. den beiden Complexen angehören, ordnen sich paarweise als reciproke zusammen, dergestalt, dass die Tangenten der einen sich als die Punkte der zweiten abbilden.*

d) *Einer Fläche f wird für eine zweifache Auffassung eine Fläche F zugeordnet. Einerseits ist F die Brennfläche derjenigen Linien-Congruenz, deren Gerade den Punkten von f entsprechen; andererseits sind*

*) Hinsichtlich der Theorie der Complexe setze ich als bekannt voraus: Plücker, Neue Geometrie des Raumes... 1868, 69; Klein, Zur Theorie der Complexe... Math. Ann. II, 2. Herrn Battaglini's Arbeiten über Linien-Complexe kann ich nicht citiren, weil sie mir unzugänglich sind.

die Punkte von F das Bild aller Tangenten der Fläche f , welche dem betreffenden Linien-Complexe angehören*).

e) Auf den eben besprochenen Flächen ordnen sich alle Curven paarweise als conjugirte zusammen. Die Punkte einer solchen Curve transformiren sich in die Erzeugenden einer Linienfläche, welche die conjugirte Curve enthält und nach derselben die Fläche f oder F berührt.

f) Einer Curve, deren Tangenten dem betreffenden Complexe angehören, entspricht als conjugirte eine ebenso von Complex-Linien umhüllte Curve und zwar eben diejenige, die wir als die reciproke der gegebenen bezeichnet haben.

Der Beweis für die unter e) aufgestellte Behauptung liegt darin, dass eine Complex-Linie und ein auf derselben gelegener Punkt sich als ein Punkt und eine durch denselben gehende Complex-Linie abbilden.

22. Eine jede der Gleichungen (1) bestimmt ein homographisches Entsprechen zwischen den Punkten und Ebenen der beiden Räume, und also lässt sich jeder unserer Complexe definiren als der Inbegriff der Durchschnitts-Geraden von homographisch entsprechenden Ebenen oder der Verbindungs-Linien von homographisch zusammen gehörenden Punkten. Der hierdurch bestimmte Linien-Complex zweiten Grades ist nach den Untersuchungen des Herrn Reye**) mit demjenigen Linien-Systeme identisch, welches Binet zuerst als den Inbegriff stationärer Umdrehungs-Axen eines materiellen Körpers betrachtet hat, und welches später mehrere Mathematiker, insbesondere die Herren Chasles und Reye, untersucht haben.

Wenn die Constanten der Gleichungen (1) particularisirt sind, so können die Complexe entweder eine specielle gegenseitige Lage erhalten — sie können z. B. zusammenfallen, welchen Fall Herr Reye in seiner Geometrie der Lage betrachtet, indem er zugleich die hier untersuchte Abbildung des Complexes wie auch den unter b) angeführten Satz angiebt — oder selbst particularisirt werden. Ohne hier auf eine Discussion aller möglichen Fälle einzugehen, hebe ich die beiden folgenden wichtigsten Degenerationen hervor***).

Die beiden Complexe können specielle lineare Complexe sein. Dieser Fall führt auf die bekannte Ampère'sche Transformation, die also darauf beruht, dass man alle Geraden, die eine feste Gerade

*) Dass die Reciprocität nicht vollständig ist, liegt darin, dass die Fläche F die vollständige Brennfläche der zugehörigen Congruenz ist; dagegen umhüllen die Linien der zweiten Congruenz ausser f noch eine zweite Fläche.

**) Reye, Geometrie der Lage, II. Abtheilung 1868, p. 116—172.

****) Lie, Repräsentation des Imaginären, Acad. zu Christiania. Februar und August 1869. Die in dieser Abhandlung § 17., § 25., § 27.—29. betrachtete räumliche Verwandtschaft ist mit unserer jetzigen identisch. In § 25. bespreche ich die erste der beiden Degenerationen.

schneiden, als Raumelement anstatt des Punkts oder der Ebene einführt. Die Ampère'schen Transformations-Gleichungen:

$$X = p, \quad Y + y = 0, \quad Z + z + px = 0$$

geben nämlich zwischen $(x y z X Y Z)$ die beiden Relationen:

$$Y + y = 0; \quad Z + z + Xx = 0,$$

welche offenbar eine particuläre und symmetrische Form der Gleichungen (1) bilden.

Der eine Complex kann in den Inbegriff aller Geraden, die einen festen Kegelschnitt schneiden, übergehen; alsdann ist der zweite Complex ein allgemeiner linearer*). Diese Degeneration werde ich im Folgenden unter der Voraussetzung, dass der fundamentale Kegelschnitt der unendlich weit entfernte imaginäre Kreis ist, näher untersuchen.

23. Wir wissen, dass die beiden Curven-Complexe Linien-Complexe sind, wenn die Gleichungen der Reciprocität hinsichtlich der beiden Systeme von Variabeln $(x y z)$ und $(X Y Z)$ linear sind, und wir stellen uns nun die Frage, ob diese hinreichende Bedingung auch nothwendig ist. Es ist dies, wie jetzt gezeigt werden soll, allerdings der Fall, wenn man die Bedingung hinzufügt, dass das Entsprechen ein eindeutiges sein soll. Ich bemerke übrigens, dass diese Frage, die an und für sich Interesse darbietet, für die folgenden Theorien keine Bedeutung hat.

Wenn der eine Complex ein Linien-Complex ist, so müssen die elementaren Complex-Kegel des zweiten Complexes, der im Allgemeinen ein Curven-Complex ist, in eine Anzahl von Kegeln zweiten Grades zerfallen. Der Beweis dieses Satzes liegt darin, dass die Geraden einer allgemeinen Linien-Congruenz die Brennfläche nur in zwei Punkten berühren. Wird insbesondere der eine Complex von den Tangenten einer Fläche gebildet, so zerfallen die elementaren Kegel des zweiten Complexes in ebene Strahl-Büschel. Stellt man nun die Forderung, dass die Abbildung eine eindeutige sein soll, so sind nur noch die drei folgenden Fälle möglich: 1) Die beiden Linien-Complexe sind allgemeine Complexe zweiten Grades. 2) Der eine Complex ist ein specieller Complex zweiten Grades, der zweite ein allgemeiner linearer.

*) Herr Nöther hat diese Abbildung des linearen Complexes, die ich übrigens selbständig gefunden habe, bereits gelegentlich gegeben. (Götting. Nachr. 1869: Zur Theorie der algebraischen Functionen.) Die für uns fundamentale Auffassung, dass die beiden Räume einen Complex enthalten, dessen Linien sich als die Punkte des zweiten Raumes abbilden, ist in der besprochenen Note nicht angedeutet. Ich möchte ferner hinzufügen, dass ich die Idee, ein Entsprechen zwischen den Flächen-Elementen zweier Räume auf die Abbildung eines Complexes zu begründen, nirgendwo ausgesprochen gefunden habe.

3) Die beiden Complexe sind specielle lineare. Wir deuten an, wie sich hieraus herleiten lässt, dass die Gleichungen (1) die allgemeinste eindeutige gegenseitige Abbildung zweier Linien-Complexe definiren, wobei jedoch der Fall, dass beide Linien-Complexe specielle lineare sind, nicht vollständig in Betracht genommen ist*)

Wenn die beiden Complexe allgemeine Complexe zweiten Grades sind, so können die zugehörigen Singularitätenflächen, wie man leicht findet, keine *krummen* Flächen sein. Von jedem Punkte der Singularitätenfläche gehen nämlich zwei ebene Strahlen-Büschel aus, deren Gerade sich im zweiten Raume als die Punkte *einer* Geraden abbilden. Alle Geraden des einen Büschels transformiren sich hierbei in einen einzigen Punkt. Der Inbegriff aller Geraden, die keine selbstständige Abbildung haben, kann nicht ein Complex, höchstens eine Anahl von Congruenzen sein. Da jedoch alle ebenen Strahl-Büschel, deren Spitzen auf einer *krummen* Fläche liegen, nothwendigerweise einen Complex bilden, so muss die Singularitätenfläche aus Ebenen bestehen, und hieraus lässt sich schliessen, dass die beiden Complexe zweiten Grades solche sind, wie sie Binet zuerst betrachtet hat.

Wenn ein specieller Complex zweiten Grades und ein allgemeiner linearer auf einander abgebildet sind, so wären a priori zwei Fälle denkbar. Die Linien des Complexes zweiten Grades könnten einen Kegelschnitt schneiden oder eine Fläche zweiten Grades umhüllen. Durch Betrachtungen, auf welche ich hier nicht eingehe, habe ich bewiesen, dass nur der erste Fall stattfindet.

§ 8.

Reciprocität zwischen einem linearen Complexe und dem Inbegriff aller Geraden, die den imaginären unendlich weit entfernten Kreis schneiden.

24. Wir wenden uns nun zu den Gleichungen:

$$(1) \quad -Zz = x - (X + iY), \quad (X - iY)z = y - Z,$$

die, wie man sieht, hinsichtlich $(x\ y\ z)$ und $(X\ Y\ Z)$ linear sind, welche somit ein Entsprechen zwischen zwei Linien-Complexen bestimmen. Zuerst suchen wir die Gleichungen dieser Complexe in Plücker'schen Linien-Coordinationen.

Plücker schreibt die Gleichungen der geraden Linie in der Form:

$$rz = x - \rho \quad sz = y - \sigma.$$

*) Man stelle ein eindeutiges Entsprechen fest zwischen den Ebenen zweier linearen Büschel. Man beziehe darnach die Geraden jeder Ebene dualistisch auf die Punkte der entsprechenden Ebene. Man erhält hierdurch eine gegenseitige Abbildung zweier specieller linearer Complexe, die allgemeiner als diejenige ist, welche durch die Ampère'schen Gleichungen bestimmt wird.

und betrachtet dabei die fünf Grössen $r, s, \rho, \sigma, (r\sigma - s\rho)$ als Linien-Coordinaten. Also stellen die Gleichungen (1), wenn man in denselben X, Y, Z als Parameter auffasst, ein System von Geraden dar, deren Coordinaten den folgenden Relationen genügen:

$$r = -Z, \quad \rho = X + iY, \quad s = X - iY, \quad \sigma = Z,$$

aus denen:

$$(2) \quad r + \sigma = 0$$

hervorgeht. Der Linien-Complex im Raume r ist somit ein linearer, und zwar ein allgemeiner linearer Complex, der die unendlich weit entfernte Gerade*) der $x\bar{y}$ -Ebene enthält.

Um den Complex des Raumes R zu bestimmen, ersetze man das System (1) durch das äquivalente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[z - \frac{1}{z} \right] Z &= X - \frac{1}{2} \left[x + \frac{y}{z} \right] \\ \frac{1}{2i} \left[z + \frac{1}{z} \right] Z &= Y - \frac{1}{2i} \left[x - \frac{y}{z} \right], \end{aligned}$$

welches bei Vergleichung mit den allgemeinen Gleichungen einer Geraden:

$$(3) \quad RZ = X - P \quad SZ = Y - \Sigma$$

die folgenden Relationen giebt:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \left[z - \frac{1}{z} \right] & P &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{y}{z} \right] \\ S &= \frac{1}{2i} \left[z + \frac{1}{z} \right] & \Sigma &= \frac{1}{2i} \left[x - \frac{y}{z} \right] \end{aligned}$$

und somit finden wir als Gleichung des besprochenen Complexes:

$$(4) \quad R^2 + S^2 + 1 = 0.$$

Nun geben die Relationen (3):

$$R = \frac{dX}{dZ}, \quad S = \frac{dY}{dZ}$$

und also kann (4) auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0.$$

Der Linien-Complex des Raumes R wird von den imaginären Geraden, deren Länge gleich Null**) ist, gebildet.

Die Gleichungen (1) beziehen die beiden Räume so aufeinander, dass den Punkten des Raumes r die imaginären Geraden, deren Länge

*) Diese Gerade tritt bei der Abbildung als Fundamental-Gebilde auf. Ich bezeichne diese Gerade zuweilen als die Fundamental-Gerade des Raumes r .

**) Indem ich der bequemen französischen Terminologie folge, bezeichne ich als Gerade von der Länge Null eine jede Linie, die den unendlich weit entfernten imaginären Kreis schneidet.

gleich Null ist, entsprechen, während die Punkte des Raumes R sich als die Linien des linearen Complexes $r + \sigma = 0$ abbilden.

Es ist zu bemerken, dass wenn ein Punkt eine Linie des Complexes $r + \sigma = 0$ durchläuft, die entsprechende Bildlinie eine infinitesimale Kugel, eine Punkt-Kugel beschreibt.

25. Nach der allgemeinen Theorie reciproker Curven (§ 4., 12.) lässt sich, wenn eine Curve bekannt ist, deren Tangenten dem einen Complexes gehören, die von Geraden des zweiten Complexes umhüllte Bildcurve durch einfache Operationen — Differentiation und Elimination — bestimmen. Nun hat Lagrange die allgemeinen Gleichungen aller Curven gefunden, deren Tangenten den imaginären Kreis schneiden, und somit ist es auch möglich die allgemeinen Gleichungen derjenigen Curven hinzuschreiben, deren Tangenten einem linearen Complexes gehören.

Um uns nicht von unserem Ziele zu entfernen, gehen wir auf die einfachen geometrischen Relationen, die zwischen reciproken Curven der beiden Complexes stattfinden, nicht näher ein*).

Das durch die Gleichungen (1) bestimmte Entsprechen zwischen Flächen der beiden Räume besitzt einige Eigenthümlichkeiten, die ich kurz angeben werde, indem ich sonst auf die allgemeinen Entwicklungen des Paragraphen 4. verweise.

Wenn die Fläche f eine allgemeine Lage in r hat, so umhüllen die Tangenten derselben, die dem linearen Complexes gehören, ohnedies eine zweite Fläche φ . Die auf diesen beiden Flächen gelegenen Curven, deren Tangenten Complex-Linien sind, nennen wir σ_f und σ_φ . Die entsprechenden reciproken Curven Σ_f und Σ_φ erzeugen dieselbe Fläche F , die das Bild der gegebenen Fläche f , wie auch dasjenige der Fläche φ ist.

Nimmt man dagegen eine beliebige Fläche Φ des Raumes R , so umhüllen die Complex-Linien, welche Φ berühren, keine andere Fläche. Die von Complex-Linien umhüllten Curven Σ unserer Fläche bilden eine *irreductible* Schaar, die Φ zweifach bedeckt. Die reciproken Curven σ erzeugen die Bildfläche, die keine weiteren Curven enthält, deren Tangenten dem linearen Complexes gehören.

Endlich möchte ich aussprechen, dass unsere Abbildung die beiden folgenden Probleme in einander überführt: Auf der Brennfläche einer

*) Ich möchte darauf aufmerksam machen, dass einer Spitze der einen Curve eine stationäre Tangente im zweiten Raume entspricht. Ueberhaupt treten stationäre Tangenten als *regelmässige Singularitäten* auf, wenn man Curven als Linien-Gebilde, das heisst als von den Geraden eines gegebenen Complexes umhüllt, auffasst.

Congruenz, deren Linien einem linearen Complex angehören, die Rückkehrkanten der Developpablen zu bestimmen; und: auf einer gegebenen Fläche die geodätischen Curven, deren Länge gleich Null ist, aufzufinden.

26. Ich werde mich später zuweilen auf die beiden folgenden Sätze stützen:

a. *Eine Fläche F n^{ter} Ordnung, die den unendlich weit entfernten, imaginären Kreis als p -fache Linie enthält, ist das Bild einer Congruenz, deren Ordnung und Classe gleich $(n - p)$ sind.*

Eine imaginäre Linie, deren Länge gleich Null ist, schneidet nämlich F in $(n - p)$ im endlichen Raume gelegenen Punkten und also gehen ebensoviele Geraden der besprochenen Congruenz durch jeden Punkt des Raumes r . Bei einer Congruenz, die einem linearen Complex angehört, ist aber bekanntlich die Classe gleich der Ordnung.

b. *Eine Curve C n^{ter} Ordnung, die den imaginären Kreis in p Punkten schneidet, bildet sich als eine Linienfläche $(2n - p)^{\text{ter}}$ Ordnung ab.*

Eine Gerade des linearen Complexes $r + \sigma = 0$ schneidet nämlich die besprochene Linienfläche in eben so vielen Punkten, wie die Curve C und eine infinitesimale Kugel gemein haben, wobei jedoch die unendlich weit entfernten Punkte nicht mitzuzählen sind.

§ 9.

Die Plücker'sche Linien-Geometrie lässt sich in eine Kugel-Geometrie transformiren.

27. *In diesem Paragraphen begründe ich einen fundamentalen Zusammenhang zwischen der Plücker'schen Linien-Geometrie und einer Geometrie, deren Element die Kugel ist.*

Die Gleichungen (1) des letzten Paragraphen transformiren die Geraden des Raumes r in die Kugeln des zweiten Raumes, und zwar in zweifacher Auffassung. Einerseits gehen diejenigen Linien des linearen Complexes $r + \sigma = 0$, die eine beliebige Gerade l_1 und also zugleich die ihr hinsichtlich des Complexes zugeordnete reciproke Polare l_2 schneiden, nach einem früheren Satze (26. a.) in die Punkte einer Kugel über; andererseits transformiren die Punkte der Linien l_1 und l_2 sich in die geradlinigen Erzeugenden dieser Kugel (26. b.).

Durch folgende analytische Betrachtungen findet man die Relationen, welche zwischen den Coordinaten der Linien l_1 und l_2 , und andererseits den Mittelpunkts-Coordinaten X', Y', Z' und dem Radius H' der entsprechenden Kugel stattfinden. Sind:

$$r z = x - \varrho, \quad s z = y - \sigma$$

die Gleichungen der Geraden l_1 oder l_2 , und erinnert man sich, dass die Linien des Complexes $r + \sigma = 0$ sich folgendermassen darstellen lassen:

$$-Zz = x - (X + iY), \quad (X - iY)z = y - Z,$$

so sieht man, dass man zwischen diesen vier Gleichungen x, y, z eliminiren muss, um die Geraden (1) der Bedingung zu unterwerfen, l_1 zu schneiden. In dieser Weise findet man, dass die Coordinaten X, Y, Z unserer Complex-Linien, oder was auf dasselbe hinauskommt, dass die Coordinaten X, Y, Z der entsprechenden Bildpunkte die Relation:

$$[X - (\varrho + s)]^2 + [Y - i(s - \varrho)]^2 + [Z - (\sigma - r)]^2 = [\sigma + r]^2$$

befriedigen. Unsere frühere Behauptung ist hierdurch analytisch bewiesen; zugleich erhalten wir die folgenden Formeln:

$$(2) \quad X' = \varrho + s; \quad iY' = \varrho - s; \quad Z' = \sigma - r; \quad \pm H' = \sigma + r$$

oder die äquivalenten:

$$(3) \quad \begin{aligned} \varrho &= \frac{1}{2}(X' + iY'); \quad s = \frac{1}{2}(X' - iY'); \quad \sigma = \frac{1}{2}(Z' \pm H'); \\ r &= -\frac{1}{2}(Z' \mp H'), \end{aligned}$$

in denen man die Accente ohne Weiteres weglassen kann; für unsere Auffassung ist nämlich der Punkt des Raumes R eine Kugel, deren Radius unendlich klein ist.

Die Formeln *) (2) und (3) zeigen, dass eine gegebene Gerade des Raumes r in eine vollständig bestimmte Kugel übergeht; dagegen bilden eine gegebene Kugel $[X, Y, Z, H^2]$ sich ab durch zwei Linien:

$$(X, Y, Z, +H), \quad (X, Y, Z, -H),$$

welche reciproke Polaren hinsichtlich des linearen Complexes:

$$\pm H = r + \sigma = 0$$

sind. Jene Gleichungen bestimmen offenbar, wenn man H gleich Null setzt, die eindeutige Beziehung zwischen den Punkt-Kugeln des Raumes R und den Geraden des Complexes $H = 0$.

Eine Ebene, das heisst eine Kugel, deren Radius unendlich gross ist, transformirt sich nach den Gleichungen (2) in zwei Linien l_1 und l_2 , welche die unendlich weit entfernte Gerade der xy -Ebene schneiden. Dabei sind nach dem Vorstehenden die Punkte der Linien l_1 und l_2 das Bild aller Geraden unserer Ebene, welche durch die zugehörigen imaginären Kreispunkte gehen. Insbesondere bildet eine

*) Aus diesen Formeln in Verbindung mit dem auf dieselben analytisch begründeten Satze der nächsten Nummer lässt sich, wie mir Herr Klein bemerkte, die Relation zwischen Linien- und Kugel-Geometrie unmittelbar herleiten.

Ebene, die den imaginären Kreis berührt, sich als eine mit der xy -Ebene parallele Complex-Linie ab.

28. *Zwei sich schneidende Gerade l und λ bilden sich als Kugeln ab, zwischen denen Berührung stattfindet.*

Denn die reciproken Polaren der gegebenen Geraden hinsichtlich des Complexes $H = 0$ schneiden einander auch, und also enthalten die Bild-Kugeln zwei gemeinsame Geraden, die verschiedenen Erzeugungen gehören. Wenn aber der Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades in einen Kegelschnitt und ein Geraden-Paar zerfällt, so berühren die Flächen einander in drei Punkten, den Doppelpunkten der Schnittcurve nämlich. Die beiden Kugeln haben also drei Berührungs-Punkte, unter denen indessen zwei, welche imaginär und unendlich entfernt sind, nicht in Betrachtung kommen. Analytisch beweist man unser Theorem in folgender Weise. Die Bedingung des Schneidens der beiden Geraden:

$$\begin{array}{ll} r_1 z = x - q_1 & r_2 z = x - q_2 \\ s_1 z = y - \sigma_1 & s_2 z = y - \sigma_2 \end{array}$$

wird durch:

$$(r_1 - r_2)(\sigma_1 - \sigma_2) - (s_1 - s_2)(q_1 - q_2) = 0$$

dargestellt, und diese Gleichung geht durch Anwendung der Formeln (3) in:

$$(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2 = (H_1 \pm H_2)^2$$

das heisst in die Bedingung der Berührung der beiden Bild-Kugeln über.

Zwei Kugeln, die sich berühren, transformiren sich in zwei Linien-Paare, deren gegenseitige Lage eine solche ist, dass jede Linie des einen Paares eine Gerade des zweiten schneidet.

§ 10.

Verschiedene Abbildungen.

29. Man betrachte die Geraden eines ebenen Strahlen-Büschels im Raume r , ferner die zugehörigen reciproken Polaren hinsichtlich $H = 0$, die ebenso einen ebenen Strahlen-Büschel bilden, und endlich die entsprechenden Bild-Kugeln. Es ist leicht zu erkennen, dass alle diese Kugeln zwei gemeinsame Gerade enthalten, diejenigen nämlich, welche den Scheiteln der beiden Strahlen-Büschel entsprechen, und also berühren unsere Kugeln sich in dem Durchschnittspunkte dieser beiden Linien. *Die Geraden eines ebenen Strahlen-Büschels bilden sich als alle Kugeln ab, die einander in einem gemeinsamen Punkte berühren.* Hieraus folgt, dass eine Fläche f und alle ihre Tangenten in einem gegebenen Punkte sich als eine Fläche und alle dieselbe in einem Punkte berührende Kugeln abbilden (§ 5., 15.). Dies findet seinen einfachsten Ausdruck in dem folgenden Satze:

Alle Flächen-Elemente des Raumes r , die zwei consecutive Punkte

einer Geraden enthalten, gehen bei unserer Abbildung in die Elemente der entsprechenden Bild-Kugel über.

Eine auf der Fläche f gelegene Gerade, welche also dieselbe in unendlich vielen Punkten berührt, wird eine Kugel, welche die Bildfläche unendlich oft, das heisst nach einer Curve berührt. Hieraus lässt sich schliessen, dass eine Linienfläche in eine Kugel-Envelope (eine Röhrenfläche) übergeht. Eine developpable Fläche transformirt sich in die Umhüllungsfläche von einfach unendlich vielen Kugeln, die der Bedingung unterworfen sind, dass jedesmal zwei consecutive einander berühren. Man erhält also die von Monge betrachteten imaginären Linienflächen, deren beide Schaaren von Krümmungslinien in die geradlinigen Erzeugenden zusammengefallen sind. Aus der Bemerkung, dass eine Linienfläche in eine Kugel-Envelope übergeht, folgt, dass eine Fläche zweiten Grades, die ja bekanntlich zwei Schaaren von Geraden enthält, sich in eine Fläche transformirt, die auf zwei Weisen, als Kugel-Envelope aufgefasst werden kann, und zwar erhalten wir die allgemeinste Fläche — die Dupin'sche Cyclide, — welche diese Eigenschaft besitzt.

30. Aus einem früheren Satze folgt unmittelbar, dass alle Geraden, die eine feste Gerade schneiden, sich als die eine gegebene Kugel berührenden Kugeln abbilden, und wir kennen somit die Abbildung des speciellen linearen Complexes.

Die Gleichung des allgemeinen linearen Linien-Complexes ist nach Plücker:

$$(1) \quad (r\sigma - s\rho) + mr + n\sigma + p\rho + qs + t = 0$$

und hieraus geht als Gleichung des entsprechenden linearen Kugel-Complexes:

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 - H^2) + MX + NY + PZ + QH + T = 0 \quad *)$$

hervor. Es bezeichnen hier M, N, P, Q, T Constanten, die von m, n, p, q, t abhängen, während X, Y, Z, H als nicht homogene Kugel-Coordinationen aufzufassen sind.

Die letzte Gleichung bestimmt, wie man leicht sieht, alle Kugeln, die eine feste Kugel:

$$(X^2 + Y^2 + Z^2) + MX + NY + PZ + T = 0$$

unter constantem Winkel schneiden, und zwar ist diese Kugel das Bild aller Geraden, die zugleich dem gegebenen Complexe (1) und $H = 0$ gehören. Wenn die simultane Invariante dieser beiden Complexe gleich Null ist, wenn dieselben also in Involution liegen, so ist, wie man sich leicht überzeugt, der betreffende constante Winkel gleich 90° .

*) Diese Gleichung lässt sich auch folgendermassen schreiben:

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 + (iH - iH_0)^2 = \text{Const.}$$

Die eine gegebene Kugel unter constantem Winkel schneidenden Kugeln transformiren sich in die Geraden zweier linearer Complexe, die einander hinsichtlich $H = 0$ conjugirt sind. Insbesondere sind die Orthogonal-Kugeln einer gegebenen Kugel das Bild der Geraden eines linearen Complexes, der mit $H = 0$ in Involution liegt.

Eine Gleichung der Form:

$$(2) \quad ar + b\sigma + c\rho + ds + e = 0$$

gibt eine lineare Gleichung zwischen den Kugel-Coordinationen X, Y, Z, H , und also wird der betreffende Kugel-Complex von allen Kugeln gebildet, die eine gegebene Ebene unter constantem Winkel schneiden. Dieses könnte man auch daraus schliessen, dass der Complex (2) die unendlich weit entfernte Gerade der xy -Ebene enthält, dass also die Complexe (2) und $H = 0$ einander nach einer linearen Congruenz schneiden, deren Directricen mit der xy -Ebene parallel sind. — Wenn endlich die Complexe (2) und $H = 0$ in Involution liegen, so erhält man alle Kugeln, deren Mittelpunkte in einer festen Ebene liegen.

Die vier Complexe:

$$\begin{aligned} X = 0 &= \rho + s; & i \ Y = 0 &= \rho - s \\ Z = 0 &= \sigma - r; & H = 0 &= \sigma + r \end{aligned}$$

liegen, wie man leicht erkennt, paarweise in Involution, und enthalten dabei eine gemeinsame Gerade, die unendlich weit entfernte in der xy -Ebene nämlich. Es bilden also die fünf Complexe:

$$X = 0, \ Y = 0, \ Z = 0, \ H = 0, \ \text{Const.} = 0$$

indem man den letzten, der als specieller Complex mit sich selbst in Involution ist, doppelt zählt, ein System, welches als eine Degeneration der sechs Fundamental-Complexe des Herrn Klein aufzufassen ist. Es ist einleuchtend, dass man die vier Kugel-Coordinationen X, Y, Z, H zugleich als nicht homogene Linien-Coordinationen auffassen kann.

Bemerkenswerth ist endlich auch, dass jeder unter den einfach unendlich vielen Linien-Complexen, die sich durch die Gleichung darstellen lassen:

$$H = \text{Const.}$$

sich als alle Kugeln einer gegebenen Grösse abbilden. Diese Complexe berühren einander nach einer gemeinsamen speciellen Congruenz, deren beide Directricen in die unendlich weit entfernte Gerade der xy -Ebene zusammengefallen sind. Die Geraden dieser Congruenz bilden sich alle als Ebenen ab, welche den unendlich weit entfernten imaginären Kreis berühren.

31. Es ist bekanntlich eine unmittelbare Consequenz der Plücker'schen Auffassung, dass wenn $l_1 = 0$ und $l_2 = 0$ die Gleichungen zweier linearer Complexe sind, die Gleichung:

$$l_1 + ul_2 = 0,$$

in welcher u einen Parameter bezeichnet, eine Schaar linearer Complexe darstellt, die eine gemeinsame lineare Congruenz enthalten. Unsere Abbildung transformirt diesen Satz in den folgenden:

Die Kugeln K , welche zwei feste Kugeln S_1 und S_2 unter gegebenen Winkeln V_1 und V_2 schneiden, stehen in demselben Verhältnisse zu unendlich vielen Kugeln S . Es giebt, den Directricen der besprochenen Congruenz entsprechend, zwei S , die von allen K berührt werden.

Der variable Linien-Complex $l_1 + ul_2 = 0$ schneidet den Complex $H = 0$ nach einer linearen Congruenz, deren beide Directricen eine Fläche zweiten Grades — die Durchschnitts-Fläche der drei Complexe $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $H = 0$ — beschreiben, und also umhüllen die genannten Kugeln S eine Dupin'sche Cyclide, die freilich in einen diesen Kugeln gemeinsamen Kreis ausgeartet ist.

Hier möchte ich auch darauf aufmerksam machen, dass unsere Abbildung gegebene interessante, discontinuirliche Linien-Gruppen in entsprechende Kugel-Gruppen überführt. Beispielsweise schliessen wir aus der bekannten Theorie der 27 Geraden auf der Fläche dritten Grades die Existenz einer Gruppe, bestehend aus 27 Kugeln, deren jede zehn andere Kugeln der Gruppe berührt. Andererseits gehen Kugel-Configurationen in eigenthümliche Geraden-Configurationen über.

§ 11.

Entsprechen zwischen Aufgaben, die sich auf Kugeln, und solchen, die sich auf Linien beziehen.

32. In diesem Paragraphen erledigen wir einige bekannte, sehr einfache Aufgaben, welche sich auf Kugeln beziehen, die gewissen Bedingungen unterworfen sind, indem wir die entsprechenden Linien-Probleme betrachten.

a. *Wie viele Kugeln berühren vier gegebene Kugeln?*

Die vier Kugeln transformiren sich in vier Linien-Paare $(l_1 \lambda_1)$ $(l_2 \lambda_2)$ $(l_3 \lambda_3)$ $(l_4 \lambda_4)$. Nehmen wir nun eine Gerade aus jedem Paare und fassen die so erhaltenen vier Linien zu einer Gruppe zusammen, so sucht man nach den beiden Transversalen dieser Gruppe. Wir finden 16 verschiedene Gruppen, die indessen paarweise, wie z. B.:

$$l_1 \lambda_2 l_3 l_4 \qquad \lambda_1 l_2 \lambda_3 \lambda_4$$

hinsichtlich $H = 0$ conjugirt sind. Offenbar sind die beiden Transversalen-Paare:

$$t_1 t_2 \qquad \tau_1 \tau_2$$

zweier solchen Gruppen selbst conjugirt, und bilden sich also nur als zwei Kugeln ab. *Es giebt 16, in 8 Paaren geordnete Kugeln, die vier gegebene Kugeln berühren.*

b. *Wie viele Kugeln giebt es, die vier gegebene Kugeln unter gegebenen Winkeln schneiden?*

Kugeln, die eine gegebene Kugel unter demselben Winkel schneiden, bilden sich ab als die Geraden zweier linearen Complexe, die einander hinsichtlich $H = 0$ conjugirt sind. Wir müssen also vier Paare linearer Complexe $(l_1 \lambda_1) (l_2 \lambda_2) (l_3 \lambda_3) (l_4 \lambda_4)$ betrachten und dieselben zunächst auf alle mögliche Weisen in Gruppen zu vier ordnen, dergestalt, dass niemals zwei Complexe einer Gruppe denselben Index haben, zweitens alle Linien finden, die den vier Complexen einer jeden Gruppe angehören. Vier lineare Complexe enthalten zwei gemeinsame Gerade und also erhält man, indem man wie im ersten Probleme verfährt, als Lösung unserer Aufgabe 16 in 8 Paare gruppirte Kugeln.

Unser Problem vereinfacht sich, wenn ein oder mehrere der gegebenen Winkel gleich 90° sind, indem die Orthogonal-Kugeln einer Kugel sich als die Geraden *eines* Complexes, der mit $H = 0$ in Involution liegt, abbilden. Sind endlich alle vier Winkel gleich 90° , so fragt man nach den gemeinsamen Geraden von vier linearen Complexen, die mit $H = 0$ in Involution liegen. Die erhaltenen beiden Geraden sind hinsichtlich $H = 0$ conjugirt, und es giebt also nur *eine Kugel*, die vier gegebene Kugeln orthogonal schneidet.

c. *Alle Kugeln zu construiren, die fünf gegebene Kugeln unter demselben Winkel schneiden.*

Unsere Abbildung führt diese Aufgabe darauf zurück, fünf gegebene Paare von Geraden $(l_1 \lambda_1) (l_2 \lambda_2) \dots (l_5 \lambda_5)$ auf alle mögliche Weisen in Gruppen zu 5 zu ordnen, doch mit der Beschränkung, dass niemals zwei Gerade einer Gruppe denselben Index haben dürfen, und sodann alle linearen Complexe zu finden, welche jedesmal alle Linien einer Gruppe enthalten. Es giebt 32 verschiedene Gruppen, die paarweise hinsichtlich $H = 0$ conjugirt sind. Dem entsprechend erhalten wir 32 paarweise conjugirte lineare Complexe, die sich als 16 lineare Kugel-Complexe abbilden. Die 16 Kugeln, deren jede von den Kugeln eines solchen Complexes unter constantem Winkel geschnitten werden, sind die Lösungen unserer Aufgabe.

Zwei Linien-Gruppen wie:

$$l_1 \lambda_2 \lambda_3 l_4 l_5 \qquad l_1 \lambda_2 \lambda_3 l_4 \lambda_5$$

enthalten vier gemeinsame Gerade $(l_1 \lambda_2 \lambda_3 l_4)$, und also schneiden die entsprechenden linearen Complexe einander nach einer linearen Congruenz, deren Directricen d_1, d_2 die beiden Transversalen der vier besprochenen Linien sind. Der Complex $H = 0$ schneidet diese Congruenz nach einer Fläche zweiten Grades, die das Bild eines Kreises ist, des Durchschnitts-Kreises zweier der gesuchten Kugeln, zugleich aber der beiden Kugeln, welche d_1 und d_2 entsprechen. Diese letzten

Kugeln lassen sich nun auch dadurch definiren, dass sie vier der fünf gegebenen berühren, und also kann man auf jeder unter den sechszehn Kugeln, welche fünf gegebene unter demselben Winkel schneiden, fünf Kreise bestimmen, vorausgesetzt, dass man die Kugeln, welche vier gegebene berühren, construiren kann.

§ 12.

Unsere Abbildung führt die Haupttangenten-Curven einer Fläche f in die Krümmungslinien der Bildfläche F über.

33. Die in den letzten Paragraphen betrachtete Abbildung erhält ein grosses Interesse durch den folgenden merkwürdigen Satz:

Die Krümmungslinien einer Fläche F transformiren sich in Linienflächen, die die Bildfläche f nach Haupttangenten-Curven berühren.

Die Tangenten der Fläche f verwandeln sich in Kugeln, die F berühren, und somit liegt der Gedanke nahe, dass die Haupttangenten der ersten Fläche sich als die Haupt-Kugeln der letzten abbilden. Dies ist in der That der Fall. Die Fläche f wird nämlich von einer Haupttangente in drei zusammenfallenden Punkten geschnitten, und somit berühren drei consecutive auf der Bild-Kugel gelegene Gerade die Fläche F . Die Schnittcurve dieser Flächen, hat also im betreffenden Punkte eine Spitze, und in Folge dessen ist die Kugel eine Haupt-Kugel. Bemerkt man nun ferner, dass die Richtung dieser Spitze die Tangente einer Krümmungslinie ist, so sieht man, dass zwei consecutive Punkte einer Haupttangenten-Curve sich als zwei imaginäre Gerade abbilden, welche F in consecutiven Punkten einer Krümmungslinie berühren, dass also alle Punkte der Haupttangenten-Curve sich in die Erzeugenden einer Linienfläche transformiren, welche F nach einer Krümmungslinie berührt. Hieraus folgt aber unser Theorem (§ 7., 21 c.).

Die beiden folgenden Beispiele bestätigen unseren Satz. Eine Kugel transformirt sich in eine lineare Congruenz, als deren Brennfläche die beiden Directricen aufzufassen sind. Nun ist bekanntlich jede auf einer Kugel gelegene Curve eine Krümmungslinie, und in der That sind auch die Directricen einer linearen Congruenz Haupttangenten-Curven auf einer jeden dieser Congruenz zugehörigen Linienfläche. Andererseits wissen wir, dass ein Hyperboloid f sich als eine Dupin'sche Cyclide abbildet. Es sind nun die Linienflächen des Complexes $H = \mathcal{Q}_2$, die f nach seinen Haupttangenten-Curven — den geradlinigen Erzeugenden — berühren, selbst vom zweiten Grade, und also finden wir den bekannten Satz wieder, dass die Krümmungslinien der Dupin'schen Cyclide zwei Kreisschaaren sind.

Als eine interessante Anwendung unseres Satzes, ist die folgende zu betrachten.

Die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechszehn Knotenpunkten hat algebraische Haupttangenten-Curven sechszehnter Ordnung, die den vollständigen Berührungs-Durchschnitt der Fläche mit Linienflächen achter Ordnung bilden.)*

Die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechszehn Knotenpunkten ist bekanntlich die Brennfläche der allgemeinen Congruenz zweiter Ordnung und Classe. Dieses Linien-System (§ 8. 26 a.) bildet sich, wenn es $H = 0$ angehört, als eine Fläche vierter Ordnung F_4 ab, und hierbei enthält F_4 den unendlich weit entfernten imaginären Kreis als Doppel-Kegelschnitt. Nun haben die Herren Darboux und Moutard gefunden, dass die Krümmungslinien einer solchen Fläche F_4 Curven achter Ordnung sind; dieselben schneiden den imaginären Kreis in acht Punkten, und also (§ 8. 26 b.) sind ihre Bildflächen Linienflächen achter Ordnung, deren Erzeugende Doppeltangenten der Kummer'schen Fläche sind. Hieraus folgt unser Satz unmittelbar.

Es ist einleuchtend, dass auch die Degenerationen der Kummer'schen Fläche, z. B. die *Wellenfläche*, die Plücker'sche Complex-Fläche, die Steiner'sche**) Fläche vierter Ordnung und dritter Classe, einige Linienflächen vierter Ordnung mit zwei Doppellinien, die zusammenfallen können, die Linienfläche dritter Ordnung u. s. w. algebraische Haupttangenten-Curven haben.

34. Herr Darboux hat gezeigt, dass man auf einer jeden Fläche im Allgemeinen eine im endlichen Raume gelegene Krümmungslinie angeben kann, die Berührungs-Curve nämlich mit der imaginären Developpabeln, die der gegebenen Fläche und dem imaginären Kreise zugleich umgeschrieben ist.

Dem entsprechend lässt sich im Allgemeinen auf der Brennfläche einer jeden Congruenz, die einem linearen Complex angehört, eine Haupttangenten-Curve angeben, der geometrische Ort nämlich aller Punkte, für welche die Tangentenebene zugleich die dem betreffenden Punkte durch den linearen Complex zugeordnete Ebene ist.

Die unendlich kleinen Kugeln, die eine Fläche F berühren, theilen sich nämlich in zwei Systeme, erstens die Punkte der Fläche, zweitens die Punkte der oben genannten imaginären Developpabeln.

*) Herr Klein, dem ich mittheilte, dass die Haupttangenten-Curven algebraisch sind, fand, dass dieselben mit einem Curven-Systeme, welches er schon früher unter einem anderen Gesichtspunkt betrachtet hatte, identisch sind (diese Annalen II. p. 219). Vergleiche unsere gemeinsame Note in den Monats-Berichten der Berliner Akademie. Decbr. 1870.

**) Herr Clebsch hat die Haupttangenten-Curven der Steiner'schen Fläche gefunden; es sind Curven vierter Ordnung (Borchardt's Journal Bd. 67).

Also zerfallen auch die Linien des linearen Complexes $H = 0$, welche die Bildfläche f berühren, in ein System Doppeltangenten und den Inbegriff aller Geraden, die f in den Punkten einer Curve c berühren. Diese Curve ist aber als das Bild einer imaginären Linienfläche, die F' nach einer Krümmungslinie berührt, eine Haupttangente-Curve auf f . Diese Bestimmung wird jedoch illusorisch, wenn nicht die Congruenz, sondern ihre Brennfläche — oder eigentlich ein reductibler Theil derselben — allgemein gegeben wird. Auf einer Fläche findet sich nämlich im Allgemeinen nur eine endliche Zahl von Punkten, deren Tangentenebene dem betreffenden Punkte durch einen linearen Complex zugeordnet wird. — Das Vorstehende findet seinen einfachsten Ausdruck in folgendem Satze:

Wenn eine Fläche ihre eigene reciproke Polare hinsichtlich eines linearen Complexes ist, so enthält dieselbe eine Haupttangente-Curve, deren Tangenten dem Complexe angehören. Diese ausgezeichnete Curve kann durch Differentiation und Elimination bestimmt werden.)*

Bemerkt man, dass eine jede Linienfläche, deren Erzeugende einem linearen Complexe gehören, ihre eigene reciproke Polare hinsichtlich des Complexes ist, so lässt sich der folgende Satz aussprechen:

*Auf einer jeden Linienfläche, die in einem linearen Complexe enthalten ist, liegt eine im Allgemeinen krumme Haupttangente-Curve**), deren Tangenten dem Complexe gehören. Dieselbe kann immer ohne Integration gefunden werden.*

Herr Clebsch hat nun gezeigt (Borchardt's Journal Bd. 68.), dass wenn auf einer Linienfläche eine Haupttangente-Curve ausser den Erzeugenden bekannt ist, sich die Bestimmung der übrigen auf eine Quadratur zurückführen lässt. Also hängt die Auffindung der Haupttangente-Curven auf einer Regelfläche, die einem linearen Complexe gehört, nur von einer Quadratur ab.

Indem wir unsere Transformations-Methode auf dieses Theorem des Herrn Clebsch, wie auch auf die aus demselben angeführte Consequenz anwenden, erhalten wir die beiden folgenden Sätze:

Wenn auf einer Röhrenfläche (Kugel-Envelope) eine nicht kreisförmige Krümmungslinie bekannt ist, so können die übrigen durch Quadratur gefunden werden.

Wenn einfach unendlich viele Kugeln eine Kugel S unter con-

*) Diese Curve ist, nach einer Bemerkung von Herrn Klein, zugleich eine Curve vierpunktiger Berührung für die Fläche.

**) Eine interessante Anwendung dieses Satzes ist die folgende. Die Geraden einer linearen Congruenz gehören nach Plücker einfach unendlich vielen linearen Complexen an. Demzufolge enthält eine jede Regelfläche, deren Linien zwei feste Gerade schneiden, einfach unendlich viele algebraische Haupttangente-Curven, unter denen jede von den Geraden eines linearen Complexes umhüllt wird (vergl. auch Cremona, Annali di mat. Ser. II. t. I.).

stantem Winkel schneiden, so kann man auf der Umhüllungs-Fläche zuerst eine Krümmungslinie durch Differentiation und Elimination finden und darnach die übrigen durch Quadratur bestimmen.

Dass man eine Krümmungslinie auf der betrachteten Röhrenfläche finden kann, schliesst man auch unmittelbar daraus, dass diese Fläche und die Kugel S einander unter constantem Winkel schneiden. Die Durchschnits-Curve ist nun eine Krümmungslinie auf der Kugel S , und steht also nach einem bekannten Satze in demselben Verhältnisse zu der Röhrenfläche.

§ 13.

Entsprechen zwischen Transformationen der beiden Räume.

35. Unsere Abbildung drückt sich bekanntlich (§ 5.) durch Gleichungen aus, die eine jede Grösse aus einer der Gruppen

$$(xyzpq), (XYZPQ)$$

als Function der Grössen in der zweiten Gruppe bestimmen. Wird nun der eine Raum z. B. r einer Transformation unterworfen, bei welcher Flächen, die sich berühren, in eben solche übergehen, so besitzt die entsprechende Umformung des zweiten Raumes dieselbe Eigenschaft. Die besprochene Transformation drückt sich nämlich durch fünf Gleichungen zwischen $(x_1 y_1 z_1 p_1 q_1)$ und $(x_2 y_2 z_2 p_2 q_2)$ aus — die beiden Indices beziehen sich auf die beiden Zustände des Raumes r — und diese Relationen werden mittelst der Abbildungs-Gleichungen in fünf Relationen zwischen $(X_1 Y_1 Z_1 P_1 Q_1)$ und $(X_2 Y_2 Z_2 P_2 Q_2)$ übergeführt, womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Beschränken wir uns auf lineare Transformationen des Raumes r , so finden wir unter den entsprechenden Umformungen des zweiten Raumes: alle Bewegungen (Translation, Rotation und Schrauben-Bewegung), Parallel-Transformation*) — darunter den Uebergang von einer Fläche zu einer Parallelfäche verstanden —, eine von Herrn Bonnet angegebene reciproke Transformation, eine reciproke Umformung hinsichtlich einer Cyclide . . . u. s. w., welche alle, als linearen Transformationen des Raumes r entsprechend, die Eigenschaft besitzen, Krümmungslinien in Krümmungslinien der transformirten Fläche überzuführen. Ich beweise endlich, dass diese Transformationen des Raumes R die einzigen sind, bei denen Flächen, die sich nach einer Krümmungslinie berühren, in eben solche übergehen.

36. Betrachten wir nun zunächst diejenigen linearen Punkt-Transformationen des Raumes r , denen *lineare* Umformungen des zweiten Raumes entsprechen, so ist es klar, dass wir nur solche

*) Herrn Bonnet's Dilatation.

lineare Transformationen des Raumes R treffen können, bei denen der unendlich weit entfernte imaginäre Kreis seine Lage behält, und umgekehrt erhalten wir diese auch alle. Eine solche Transformation führt nämlich einerseits Gerade, die den imaginären Kreis schneiden, in eben solche Linien über, andererseits Kugeln in Kugeln, und also ist die entsprechende Umformung des Raumes r zugleich eine Punkt- und Linien-Transformation, das heisst eine lineare Punkt-Transformation, was zu beweisen war.

Die allgemeine lineare Transformation, bei welcher der imaginäre Kreis seine Lage behält, enthält sieben wesentliche Constanten, und lässt sich bekanntlich aus Translationen, Rotationen und Aehnlichkeits-Transformationen zusammensetzen. Die entsprechende Umformung des Raumes r , die ebenso von 7 Constanten abhängt, kann dadurch charakterisirt werden, dass sie den linearen Complex $H = 0$ und eine Gerade desselben ($\text{Const.} = 0$) in sich überführt. Diese Transformation ist zugleich die allgemeinste, die eine specielle lineare Congruenz in sich transformirt.

Durch analytische Betrachtungen findet man in folgender Weise die einer Translation des Raumes R entsprechende lineare Punkt-Transformation des Raumes r . Eine Translation drückt sich, als Kugel-Transformation aufgefasst, durch die Gleichungen:

$$X_1 = X_2 + A, \quad Y_1 = Y_2 + B, \quad Z_1 = Z_2 + C, \quad H_1 = H_2$$

aus, und dieselben geben durch Benutzung der Formeln (2) in § 9.:

$$r_1 = r_2 + a, \quad s_1 = s_2 + b, \quad \varrho_1 = \varrho_2 + c, \quad \sigma_1 = \sigma_2 + d.$$

Bei Einsetzung dieser Ausdrücke in die Gleichungen einer geraden Linie:

$$r_1 z = x - \varrho_1, \quad s_1 z = y - \sigma_1$$

findet man als Definition der besprochenen Transformation:

$$z_1 = z_2, \quad x_1 = x_2 + a z_2 + c, \quad y_1 = y_2 + b z_2 + d.$$

Ebenso ist es leicht, die einer Aehnlichkeits-Transformation entsprechende Umformung des Raumes r zu bestimmen. Die Gleichungen:

$$X_1 = m X_2; \quad Y_1 = m Y_2; \quad Z_1 = m Z_2; \quad H_1 = m H_2$$

geben nämlich durch Anwendung der Formeln (2) des § 9.:

$$r_1 = m r_2, \quad s_1 = m s_2, \quad \varrho_1 = m \varrho_2, \quad \sigma_1 = m \sigma_2,$$

welche Gleichungen eine Transformation definiren, die auch durch:

$$z_1 = z_2, \quad x_1 = m x_2, \quad y_1 = m y_2$$

bestimmt werden kann. Die letzten Gleichungen definiren eine lineare Punkt-Transformation, bei welcher die Punkte zweier Geraden ihre Lage behalten.

Durch geometrische Betrachtungen werde ich beweisen, dass auch Rotations-Bewegungen des Raumes R in Transformationen der eben

besprochenen Art übergehen. Sei A die Rotations-Axe, M, N seien die beiden Punkte des imaginären Kreises, die bei der Rotation nicht verschoben werden. Es ist dann einleuchtend, dass alle imaginären Geraden, die A schneiden, und zugleich durch M oder N gehen, während der Rotation ihre Lage behalten, und demzufolge bleiben auch die diesen Geraden zugehörigen Bildpunkte, die auf zwei Geraden liegen, während der entsprechenden Umformung des Raumes r ungeändert.

37. *Transformation durch reciproke Radien* des Raumes R transformirt Punkte in Punkte, Kugeln in Kugeln und endlich Gerade, die den imaginären Kreis schneiden, in ähnliche Linien, und also ist die entsprechende Umformung des Raumes r eine lineare Punkt-Transformation, die den linearen Complex $H = 0$ in sich überführt. Bemerkt man ferner, dass jede Transformation durch reciproke Radien die Punkte und geradlinigen Erzeugenden einer Kugel ungeändert lässt, so sieht man, dass bei der entsprechenden reciproken Punkt-Transformation des Raumes r die Punkte zweier Geraden ihre Lage behalten. Herr Klein hat darauf aufmerksam gemacht, dass diese Transformation sich aus zwei reciproken Transformationen hinsichtlich zweier in Involution liegender linearer Complexe zusammensetzen lässt, und zwar ist in unserem Falle $H = 0$ der eine Complex, während der andere sich als das System solcher Kugeln abbildet, welche die bei der Transformation durch reciproke Radien zu Grunde gelegte rechtwinklig schneiden.

Eine Fläche F , die bei einer Transformation durch reciproke Radien in sich selbst übergeführt wird, bildet sich somit im Raume r als eine Congruenz ab, die ihre eigene reciproke Polare hinsichtlich eines mit $H = 0$ in Involution liegenden linearen Complexes ist. Die zugehörige Brennfläche ist ihre eigene reciproke Polare hinsichtlich eines jeden der beiden in Involution liegenden Complexe und demzufolge zerfällt das System ihrer Doppeltangenten in drei Congruenzen, von denen die eine dem Complexe $H = 0$ gehört, während die zweite in dem zweiten Complexe enthalten ist.

38. Man betrachte die allgemeinste Linien-Transformation des Raumes r , bei welcher Schneiden zwischen Geraden eine invariante Beziehung ist, und andererseits im Raume R die entsprechende Umformung, die offenbar Kugeln in Kugeln, Kugeln, die sich berühren, in eben solche überführt. Bei der besprochenen Linien-Transformation transformiren alle Tangenten einer Fläche sich in diejenigen einer zweiten, und dabei entsprechen insbesondere die Haupttangente der beiden Flächen einander, und zwar sowohl, wenn die betreffende Transformation eine lineare Punkt-Transformation, als wenn sie eine lineardualistische Umformung ist. Bei der entsprechenden Transformation des Raumes R gehen alle dreifach unendlich viele Kugeln, die eine

Fläche F_1 berühren, in alle Kugeln über, die in demselben Verhältnisse zu einer anderen Fläche F_2 stehen, und insbesondere entsprechen die Haupt-Kugeln der beiden Flächen einander. Hieraus folgt, dass die Krümmungslinien der Flächen einander in dem Sinne entsprechen, dass wenn eine Gleichung:

$$(1) \quad F(X_1, Y_1, Z_1, P_1, Q_1) = 0$$

für alle Punkte einer Krümmungslinie auf F_1 stattfindet, auch die Gleichung, die man erhält, indem man in (1) statt $(X_1, Y_1, Z_1, P_1, Q_1)$ die Werthe dieser Grössen durch $(X_2, Y_2, Z_2, P_2, Q_2)$ setzt, für alle Punkte einer Krümmungslinie auf F_2 gilt.

Ich werde nun beweisen, dass wir alle Transformationen erhalten, bei denen einerseits Berührung eine invariante Beziehung ist, andererseits Krümmungslinien covariante Curven sind, wenn wir unsere Abbildung auf alle linearen Punkt-Transformationen (oder linear-dualistischen Umformungen) des Raumes r anwenden.

Zum Beweise bemerke ich, dass es zwei Arten von Flächen giebt, deren sämtliche Curven Krümmungslinien sind: die Kugeln und die imaginären Developpablen, die den unendlich weit entfernten imaginären Kreis enthalten. Es ist klar, dass die gesuchte Transformation eine jede solche Fläche in eine, die ebenso einer dieser beiden Kategorien gehört, überführen muss, und zwar liegt die Vermuthung nahe, dass insbesondere Kugeln in Kugeln übergehen müssen. Dies ist auch der Fall. Die besprochenen imaginären Developpablen genügen nämlich der partiellen Differential-Gleichung:

$$1 + P^2 + Q^2 = 0,$$

und also befriedigen die entsprechenden Flächen in r auch eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Unter den Integralflächen derselben können sich höchstens dreifach unendlich viele Kugeln finden, und also können Kugeln im Allgemeinen nicht in imaginäre Developpable übergehen.

Unsere Transformation ist also eine Kugel-Transformation und zwar nach unserer Voraussetzung eine, bei welcher Kugeln, die sich berühren, in eben solche übergehen. Die entsprechende Umformung des Raumes r ist also eine *Linien*-Transformation, bei welcher Schneiden zwischen Geraden eine invariante Beziehung ist, und dies ist bekanntlich nur für die linearen Punkt-Transformationen und die linear-dualistischen Umformungen der Fall.

Bemerkt man, dass alle Punkt-Transformationen, bei denen Krümmungslinien covariante Curven sind, *infinitesimale* Kugeln in *infinitesimale* Kugeln überführen, und dass in Folge dessen diese Umformun-

gen zugleich die allgemeinsten Punkt-Transformationen sind, bei denen Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen beibehalten wird, so kann man den folgenden Satz aufstellen:

Alle linearen Transformationen des Raumes r , die den linearen Complex $H = 0$ in sich überführen, gehen durch unsere Abbildung in alle Punkt-Transformationen über, bei denen Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen beibehalten wird.

Zugleich finden wir, mit Berücksichtigung unserer früheren Sätze, ohne Schwierigkeit das folgende, zuerst von Herrn Liouville bewiesene Theorem wieder:

Eine jede Punkt-Transformation, bei welcher Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen beibehalten wird, lässt sich aus einer Transformation durch reciproke Radien und einer Bewegung zusammensetzen.

39. Parallel-Transformation — darunter verstanden den Uebergang von einer Fläche zu einer Paralleelfläche — führt bekanntlich Krümmungslinien in Krümmungslinien über, und in der That ist es leicht, zu erkennen, dass dieselbe das Bild einer linearen Transformation des Raumes r ist. Den Gleichungen

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad Z_1 = Z_2, \quad H_1 = H_2 + A$$

entsprechen nämlich (36) Relationen der folgenden Form:

$$z_1 = z_2, \quad x_1 = x_2 + az_2 + b, \quad y_1 = y_2 + cz_2 + d,$$

womit meine Behauptung erwiesen ist.

Herr Bonnet hat mehrmals eine Transformation betrachtet, die er durch die Gleichungen:

$Z_1 = iZ_2\sqrt{1 + P_2^2 + Q_2^2}$; $X_1 = X_2 + P_2Z_2$; $Y_1 = Y_2 + Q_2Z_2$ defnirt. Herr Bonnet zeigt, dass diese Transformation eine reciproke ist, dass die Krümmungslinien in Krümmungslinien übergeführt werden, dass endlich die Relationen:

$$(1) \quad \xi_1 = iH_2, \quad H_1 = -i\xi_2$$

stattfinden, vorausgesetzt, dass H_1 und H_2 Krümmungs-Radien entsprechender Punkte bezeichnen, dass ferner ξ_1 und ξ_2 die z -Ordinaten der zugehörigen Krümmungs-Centren sind.

Die Bonnet'sche Transformation ist, wie wir sogleich beweisen werden, das Bild einer reciproken Umformung des Raumes r hinsichtlich des linearen Complexes

$$Z + iH = 0.$$

Nach Herrn Klein genügen nämlich die Coordinaten zweier Geraden $(X_1 Y_1 Z_1 H_1)$, $(X_2 Y_2 Z_2 H_2)$, die einander hinsichtlich dieses Complexes conjugirt sind, den Relationen:

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad Z_1 = iH_2, \quad H_1 = -iZ_2.$$

Diese Gleichungen aber bestimmen, wenn X, Y, Z, H als Kugel-

Coordinaten aufgefasst werden, ein Entsprechen zwischen allen Kugeln des Raumes und zwar dasselbe wie die Bonnet'sche Transformation.*)

Unter den linearen Transformationen des Raumes spielen bekanntlich die reciproken Umformungen hinsichtlich Flächen zweiten Grades eine fundamentale Rolle, und es liegt somit nahe, die entsprechenden linearen Kugel-Transformationen zu betrachten. Dieselben beziehen sich jedesmal auf die beiden Kugel-Gruppen einer Dupin'schen Cyclide, und zwar in der folgenden Weise. Eine gegebene Kugel Q_1 berührt zwei Kugeln aus jeder Gruppe, S_1, S_2 und Σ_1, Σ_2 ; es giebt nun bekanntlich ausser Q_1 fünfzehn Kugeln, welche diese S und Σ berühren, und unter denselben wählt man diejenige Q_2 , die Q_1 in dem bekannten Sinne zugeordnet ist. Durch die betreffende Kugel-Transformation sind Q_1 und Q_2 einander zugeordnet. Bemerkenswerth ist insbesondere der Fall, dass die Erzeugenden des einen Systems auf der ursprünglich angenommenen Fläche zweiten Grades dem linearen Complexe $H = 0$ angehören. Alsdann reducirt sich die Cyclide auf einen Kreis; ferner ist die Kugel-Transformation eine Punkt-Transformation. Wir finden also hier eine ausgezeichnete conforme Punkt-Transformation, bei welcher ein im endlichen Raume gelegener Kreis als Fundamental-Gebilde auftritt.

Die wichtigsten Ergebnisse dieses Paragraphen resumire ich folgendermassen:

Durch meine Abbildung entsprechen sich:

a. alle linearen Punkt-Transformationen und linear-dualistischen Umformungen des Raumes;	a. alle Transformationen, bei denen Berührung längs Krümmungslinien eine invariante Beziehung ist;
b. alle ∞^{10} linearen Transformationen, bei denen ein linearer Linien-Complex in sich übergeführt wird;	b. alle conformen Punkt-Transformationen des Raumes;
c. alle ∞^7 linearen Transformationen, die eine specielle lineare Congruenz in sich überführen.	c. alle conformen Punkt-Transformationen, die homographische Transformationen sind, bei denen der unendlich weit entfernte imaginäre Kreis seine Lage behält.

Diese Entwicklungen geben zu wichtigen Theorien Veranlassung. Beispielsweise sei angeführt:

*) Die Bonnet'sche Transformation ordnet den Punkten des Raumes Kugeln zu, deren Centra in einer Ebene liegen. Ersetzt man hier die Kugel jedesmal durch den Durchschnittskreis derselben mit jener Ebene, so findet man einen interessanten Zusammenhang zwischen der Bonnet'schen Transformation und einer von Möbius herrührenden Idee (Abhandlungen der Sächs. Akad. 1854). Es bietet sich hier die Idee, als Element einer Geometrie mit drei Dimensionen den Kreis in der Ebene, und als Coordinaten Centra-Coordinaten und Radius desselben anzuwenden.

Alle Transformationen, bei denen Gerade, die sich schneiden, in eben solche übergehen, können nach einer Bemerkung des Herrn Klein aus reciproken Umformungen hinsichtlich linearer Complexe zusammengesetzt werden. Dementsprechend findet man, dass alle unsere Transformationen, bei denen Krümmungslinien covariante Gebilde sind, sich aus Transformationen durch reciproke Radien und Parallel-Transformationen (Dilatationen) zusammensetzen lassen.

Betrachtet man, wie Herr Klein es vorgeschlagen hat, die Linien- oder Kugel-Geometrie mit Zugrundelegung der Coordinaten X, Y, Z, H als eine metrische Geometrie zwischen vier Variabeln, so findet man leicht, dass meine lineare Kugel-Transformation eben mit dem Inbegriff aller conformen Punkt-Transformationen dieses Kugel-Raumes identisch sind.*)

Uebrigens hoffe ich in einer anderen Abhandlung, deren Gegenstand überhaupt die Geometrie eines Raumes mit n Dimensionen sein wird, eine erschöpfende Darstellung dieser letzten Theorien, und zwar für einen jeden Raum geben zu können.**)

*) Den entsprechenden Satz habe ich in den Göttinger Nachrichten (1871. Nr. 7.) für einen Raum mit n Dimensionen aufgestellt. Weiter sei bemerkt, dass alle conformen Punkt-Transformationen eines Raumes R_n sich aus Bewegungen, Aehnlichkeitstransformationen und Transformationen durch reciproke Radien zusammensetzen lassen. Hiermit in Verbindung steht der Satz, dass wenn $x_1 x_2 \dots x_n$ als solche Functionen von $y_1 y_2 \dots y_n$ gegeben sind, dass $\Sigma dx^2 = \Phi(y_1 \dots y_n) \Sigma dy^2$ ist, auch eine Gleichung der Form gilt:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - x'_i)^2 = \Pi(y_1 \dots y_n) \cdot \Pi(y'_1 \dots y'_n) \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - y'_i)^2.$$

**) Ich führe noch an, dass jeder Satz der Linien- oder Kugel-Geometrie sich in interessanter Weise transformiren lässt in einen Satz über Flächen, die aus einer beliebig gewählten durch Anwendung aller Translationen und Parallel-Transformationen hervorgehen. Wichtig sind auch die beiden folgenden Bemerkungen, die sich mir zu spät darbieten, um im Texte Platz finden zu können. 1) Im Linien-Raume r giebt es bekanntlich zweierlei Transformationen, bei denen Gerade, die sich schneiden, in eben solche übergehen. Die entsprechenden Transformationen des Raumes R zerfallen *nicht* in zwei Classen, wenn Punkt-Coordinaten zu Grunde gelegt werden. 2) Linien-Transformationen, bei denen (Const. = 0) ihre Lage behält, geben sämtliche Transformationen von R , bei denen Flächen mit gemeinsamem sphärischen Bilde in eben solche Flächen übergehen. Das neue sphärische Bild entsteht aus dem alten durch eine conforme Punkt-Transformation der Bild-Kugel. Hierher gehört die Bonnet'sche Transformation.

Christiania, 10. October 1871.

II.

Im ersten Theile dieser Abhandlung habe ich, wie ich glaube, die erste vollständige analytisch-geometrische Interpretation aller Raum-Transformationen gegeben, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist. Ich betrachtete insbesondere eine derartige Verwandtschaft — ich bezeichne dieselbe zuweilen der Kürze wegen als eine *Kugel-Abbildung* —, welche die Geraden eines Raumes r in die Kugeln des Raumes R überführte, was so zu verstehen war, dass alle Flächen-Elemente, welche zwei consecutive Punkte einer Geraden enthielten, in die Elemente einer Kugel übergingen. Ich begründete hierauf einen genauen und nach meiner Auffassung fundamentalen Zusammenhang zwischen Linien-Geometrie und Kugel-Geometrie und demzufolge zwischen mehreren projectivischen und metrischen Theorien. Insbesondere zeigte es sich, dass die Haupttangenten-Curven einer Fläche f sich in die Krümmungslinien der Bildfläche F transformirten.

Wenn ich eben das Wort Kugel-Geometrie benutzt habe, so muss ich bemerken, dass meines Wissens eine solche Geometrie seither noch nicht existirte, ob auch viele particuläre Probleme und Theorien, die sich auf Kugeln beziehen, schon erledigt waren. Nachdem ich aber Herrn Darboux*) die folgende Abhandlung, die, in etwas anderer Form, das erste Mal in den Berichten der Akademie zu Christiania, Sommer 1871, erschien, zugeschickt habe, erfahre ich, dass er 1868 bei der Pariser Akademie eine noch nicht veröffentlichte Abhandlung einreichte, in welcher er sich mit solchen Kugel-Systemen beschäftigte, die ich als Kugel-Complexe bezeichnet habe. Bei derselben Gelegenheit theilte er mir mit, dass er eben eine Note vorbereite, in welcher er mehrere Probleme behandeln würde, die ich in den Paragraphen 15., 24. meiner jetzigen Abhandlung betrachtet habe. Wo ich dazu im Stande bin, werde ich im Folgenden hierauf bezügliche Citate machen, indem ich im Uebrigen auf Herrn Darboux's Arbeiten, die hoffentlich bald erscheinen werden, verweise.

Wenn aber sowohl eine Kugel-Geometrie wie eine Linien-Geometrie schon existirten, so scheint doch der eigenthümliche Zusammenhang zwischen diesen beiden Disciplinen zuerst von mir bemerkt zu sein. Plücker, dem man überhaupt die Idee verdankt, eine sinnliche Darstellung einer Algebra mit vier oder mehreren Variablen zu geben, wählte die Gerade als Element des Raumes R_4 . Diese Wahl ist ohne Zweifel gut; es würde aber nach meiner Auffassung ebenso zweckmässig sein, die Kugel zu benutzen. Freilich besitzt die Linien-

*) Während der Correctur erfahre ich neue Beziehungen zwischen Darboux's und meinen Arbeiten. Vergl. den Schluss.

Geometrie Vorzüge, die der Kugel-Geometrie fehlen; das Umgekehrte ist aber auch wahr. Dies liegt darin, dass sowohl die Gerade wie die Kugel sich in eigenthümlicher Weise der Anschauung darbieten, andererseits auch darin, dass es einen einfachen Cyclus von Kugel-Transformationen giebt, die denjenigen Linien-Transformationen entsprechen, bei denen Schneiden eine invariante Beziehung ist. *Es wird daher fruchtbar sein, die Linien-Geometrie und die Kugel-Geometrie, wie ich es begonnen habe, neben einander zu entwickeln, indem man immer die Resultate der einen Geometrie durch meine Abbildung für die andere Geometrie verwerthet.* Wenn es mir zuweilen gelungen ist, schwierige Probleme zu erledigen, so liegt dies wesentlich darin, dass ich *abwechselnd* an Linien- und Kugel-Vorstellungen anknüpfe. Diese Methode, die für mich der Weg der Entdeckung gewesen ist, habe ich in meiner jetzigen Darstellung beibehalten, obgleich ich fürchten muss, dass der häufige Wechsel des geometrischen Bildes dem Leser Schwierigkeiten bereiten wird.

Dritter Abschnitt.

Zur Theorie partieller Differential-Gleichungen zwischen drei Variablen.

In diesem Abschnitte werde ich versuchen, einerseits die von Plücker in seinem letzten Werke eingeführten geometrischen Begriffe, andererseits die eben besprochenen Entwicklungen für die Theorie partieller Differential-Gleichungen zu verwerthen. Man erkennt leicht, dass eine partielle Differential-Gleichung beliebiger Ordnung, deren Charakteristiken *Haupttangenten-Curven* auf den Integralfächen sind, durch die obengenannte Transformation in eine Differential-Gleichung derselben Ordnung, deren Charakteristiken *Krümmungslinien* sind, übergeführt wird. Es gründet sich hierauf ein interessanter Parallelismus zwischen mehreren wichtigen Classen partieller Differential-Gleichungen. An die Seite derselben stellen sich, wie wir später sehen werden, gewisse Differential-Gleichungen, deren Charakteristiken *geodätische Curven* sind.

Die folgenden Entwicklungen werden gewissermassen einen particulären Charakter haben, insofern ich mich nur mit *besonderen* Classen von Differential-Gleichungen beschäftige. Doch möchte ich hervorheben, dass der hier eingeschlagene Weg: nämlich die Behandlung von partiellen Differential-Gleichungen an erweiterte geometrische Begriffe anzuknüpfen, eine Methode zu sein scheint, aus welcher man überhaupt Fortschritte in der von Monge eingeschlagenen Richtung erwarten darf.

Ueber einige partielle Differential-Gleichungen erster Ordnung.

Zunächst betrachte ich drei in einander transformirbare Classen partieller Differential-Gleichungen erster Ordnung, die ich der Kürze wegen mit den Symbolen D_{11} , D_{12} , D_{13} bezeichnen werde.

1) D_{11} . Die Charakteristiken sind Haupttangenten-Curven auf den Integralf Flächen. Die Gleichungen D_{11} entsprechen, wie ich später zeigen werde, gewissermassen den Linien-Complexen und Linien-Congruenzen.

2) D_{12} . Die Charakteristiken sind Krümmungslinien. Eine jede D_{12} entspricht entweder einem Kugel-Complex oder einer Kugel-Congruenz.

3) D_{13} . Die Charakteristiken sind geodätische Curven. Bezeichnet H eine beliebige, bekannte Function von x , y , z und wie gewöhnlich p , q die partiellen Derivirten von z hinsichtlich x und y , so lässt eine jede D_{13} sich folgendermassen schreiben:

$$\frac{\partial H}{\partial x} p + \frac{\partial H}{\partial y} q - \frac{\partial H}{\partial z} = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2 - 1}.$$

Diese Gleichungen sind, wie zu bemerken ist, nur vom zweiten Grade hinsichtlich p und q .

Aus dem Inhalte des folgenden Capitels hebe ich noch hervor, dass die Bestimmung der geodätischen Curven einer Fläche gewissermassen darauf hinauskommt, eine particuläre D_{12} oder D_{11} zu integrieren. Demzufolge lässt sich die bisherige Theorie geodätischer Curven für die neue Theorie der Plücker'schen Complexe verwerthen.

§ 14.

Partielle Differential-Gleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Haupttangenten-Curven auf den Integralf Flächen sind.

40. Wir haben gefunden (§ 3., 10.), dass wenn die charakteristischen Curven einer partiellen Differential-Gleichung erster Ordnung von den Geraden eines Linien-Complexes umhüllt werden, die Charakteristiken Haupttangenten-Curven auf den Integralf Flächen sind.*) Es ist andererseits leicht zu erkennen, dass einer jeden Linien-Congruenz eine lineare partielle Differential-Gleichung erster Ordnung entspricht, deren zweifach unendlich viele Charakteristiken — die Geraden der Congruenz nämlich — als Haupttangenten-Curven auf den Integral-

*) Herr Darboux, dem ich im Sommer 1870 in einem Gespräche mittheilte, dass jeder Linien-Complex eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung bestimmt, deren Charakteristiken Haupttangenten-Curven sind, kannte damals diesen Satz.

flächen auftreten. Umgekehrt werden wir beweisen, dass es keine weiteren partiellen Differential-Gleichungen erster Ordnung giebt, welche die besprochene Eigenschaft besitzen, als die genannten beiden Arten.

Schreiben wir eine allgemeine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung in der Form:

$$F(x y z p q) = 0,$$

so müssen wir F , als Function von x, y, z, p, q aufgefasst, in allgemeinster Weise so bestimmen, dass in einem beliebigen Punkte einer Integralfäche die Richtung der Charakteristik mit derjenigen der Trajectorie zusammenfällt. Die beiden besprochenen Richtungen liegen nämlich hinsichtlich der beiden entsprechenden Haupttangente harmonisch, und wenn sie also zusammenfallen, so werden sie zugleich mit der einen Haupttangente identisch. Nach Monge bestimmen aber:

$$\frac{\partial F}{\partial p} dy - \frac{\partial F}{\partial q} dx = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z}\right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z}\right) dy = 0$$

bezüglich die Richtungen der Charakteristik und der Trajectorie, und also kommt unser Problem darauf hinaus, das allgemeine Integral der partiellen Differential-Gleichung:

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial p} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial q} \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z}\right) = 0$$

zu bestimmen. Diese Gleichung lässt sich nach den gewöhnlichen Methoden integrieren; da wir jedoch hierdurch die Lösung in einer Form erhalten, die sich nicht unmittelbar interpretiren lässt, so wird es vortheilhafter sein, einen indirecten Weg einzuschlagen.

41. Setzen wir nun zunächst voraus, dass die gesuchte partielle Differential-Gleichung $F = 0$ keine lineare ist, so entsprechen derselben bekanntlich dreifach unendlich viele Charakteristiken, und also befriedigen diese Curven nur eine Gleichung von der Form:

$$f(x y z dx dy dz) = 0.$$

Setzen wir hier statt y und z die äquivalenten Ausdrücke:

$$y = \frac{(y dx - x dy) + x dy}{dx}, \quad z = \frac{x dz - (x dz - z dx)}{dx},$$

so erhält die Gleichung der Charakteristiken ($f = 0$) die Form:

$$\chi[dx, dy, dz, (x dz - z dx), (y dx - x dy), \varphi(x)] = 0$$

und zwar wissen wir, dass wenn $\varphi(x)$ eine Constante ist, und nur dann, die Charakteristiken von den Geraden eines Linien-Complexes umhüllt werden. Indem man nun nach den gewöhnlichen Regeln unter den Gleichungen:

$$\chi = 0, \quad \chi'_{dx} = \varphi p, \quad \chi'_{dy} = \varphi q, \quad \chi'_{dz} = -\varphi$$

die Grössen dx, dy, dz eliminirt, wobei φ wegfällt, erhält man die ursprüngliche partielle Differential-Gleichung ($F = 0$) in der Form:

$$\pi [x y z p q \varphi(x)] = 0,$$

und zwar fragt es sich hier, ob der Ausdruck π der Gleichung (1) in anderen Fällen genügen kann, als wenn $\varphi(x)$ eine Constante ist.

Führt man auf π die durch (1) angegebenen Operationen aus, so bleibt nach einer Reduction, die sich darauf gründet, dass π in dem angegebenen Falle die Gleichung (1) befriedigt, nur zurück:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} \cdot \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

eine Gleichung, die in drei zerfällt:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = 0; \quad \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Ist erstens $\frac{\partial \pi}{\partial p}$ gleich Null, so kommt p gar nicht in der Gleichung $\pi = 0$ vor, und also lässt sich dieselbe auf die *lineare* Form:

$$q = \Phi(x y z)$$

bringen; diesen Fall haben wir aber beiläufig ausgeschlossen. Die Gleichungen $\frac{\partial \pi}{\partial \varphi} = 0$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ sagen bezüglich, dass π nicht die Grösse φ enthält, und dass φ eine Constante ist, und somit ist meine anfängliche Behauptung, insofern sie sich auf nicht-lineare Gleichungen bezog, erwiesen.

Wir gehen nun zu dem Falle über, dass $F = 0$ eine lineare partielle Differential-Gleichung ist. Es giebt alsdann zweifach unendlich viele Charakteristiken, und es ist leicht zu erkennen, dass dieselben gerade Linien sein müssen, wenn die fragliche Eigenschaft eintreten soll. Betrachten wir nämlich einen Punkt p , die durch denselben gehende Charakteristik c und endlich eine variable, unendlich nahe Charakteristik c' . Es ist klar, dass die Tangentenebene der entsprechenden Integralfläche im Punkte p mit c' variirt; es soll aber diese Ebene die Curve c in diesem Punkte osculiren, und also muss c die Eigenschaft besitzen, dass ihren Punkten eine unbestimmte Osculationsebene entspricht. Dieses ist aber nur für die gerade Linie der Fall.

Die hiermit abgeleiteten Resultate lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

Es giebt zwei distincte Classen partieller Differential-Gleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Haupttangenten-Curven auf den Integralflächen sind; die eine besteht aus linearen Differential-Gleichungen, deren geradlinige Charakteristiken eine Congruenz bilden. Die zweite Classe entspricht den Plücker'schen Linien-Complexen, in dem Sinne, dass die Charakteristiken einer solchen Differential-Gleichung von den Geraden eines Complexes umhüllt werden. Alsdann kommt die Aufgabe der Integration darauf hinaus: die allgemeinste Fläche zu

finden, deren zweifach unendlich viele Haupttangenten des einen Systems einem gegebenen Linien-Complex angehören. Den Inbegriff dieser beiden Classen bezeichnen wir mit dem Symbole D_{11} .*)

Entspricht die D_{11} einer Linien-Congruenz, so ist die zugehörige Brennfläche das singuläre Integral. In dem zweiten Falle finden sich unter den Integralfächen, wie mir Herr Klein bemerkt, die Developpablen der singulären Linien, wie auch die Singularitätenfläche des betreffenden Linien-Complexes.

42. In Verbindung mit dem Inhalte dieses Paragraphen steht der folgende Satz:

Auf einer Fläche liegen einfach unendlich viele Curven, deren Tangenten einem gegebenen Linien-Complex gehören. Haben diese Curven eine Umhüllungs-Curve, was im Allgemeinen nicht stattfindet, so sind zwei Fälle möglich. Entweder berühren diejenigen Complex-Kegel die Fläche, deren Spitzen auf der Umhüllungs-Curve liegen, und dann ist dieselbe eine Haupttangenten-Curve; oder die Tangenten der Umhüllungs-Curve sind Doppelkanten des betreffenden Complex-Kegels, in dem letzten Falle lässt sich nichts schliessen.

Es war durch Anwendung dieses Satzes, dass ich die Haupttangenten-Curven der tetraedral-symmetrischen Flächen (Götting. Nachr. Jan. 1870) bestimmte. [Durch eine andere Methode war Herr Clebsch, wie ich später erfahren habe, schon früher auf diese Bestimmung geführt worden, ohne indess etwas hierüber veröffentlicht zu haben. Später (Bulletin, Novbr. 1870, p. 8) erhielt Herr Darboux dasselbe Resultat als Corollar einer allgemeineren Bestimmung.] Jede tetraedral-symmetrische Fläche steht in der besprochenen Beziehung zu jedem Linien-Complex, dessen Gerade das der Fläche zugehörige Fundamental-Tetraeder nach constantem Doppel-Verhältnisse schneiden.

§ 15.

Partielle Differential-Gleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Krümmungslinien auf den Integralfächen sind.

43. Wir wissen, dass unsere Kugel-Abbildung die Elemente einer Fläche f in die Elemente einer Fläche F überführt. Es wird hierbei offenbar ein paarweises Zusammengehören zwischen allen Curven der beiden Flächen festgestellt, und zwar entsprechen sich insbesondere

*) Herr Klein macht mich darauf aufmerksam, dass die Resultate dieses Paragraphen sich leicht und übersichtlich durch geometrische Betrachtungen beweisen lassen.

die Haupttangenten-Curven auf f und die Krümmungslinien auf F . Hieraus folgt, dass zwei Flächen f_1 und f_2 , die einander nach einer Haupttangenten-Curve berühren, im Allgemeinen in Flächen F_1 und F_2 übergehen, die in demselben gegenseitigen Verhältnisse längs einer Krümmungslinie stehen. Dieser Satz erleidet jedoch eine wichtige Ausnahme (die freilich im Folgenden nicht in Betracht kommt), und um Alles möglichst klar zu stellen, gehe ich hierauf etwas näher ein.)*

Nach § 6., 18. 20. wissen wir, dass wenn die beiden Räume r und R durch ein Gleichungs-System:

$$F_1(xyzXYZ) = 0, \quad F_2(xyzXYZ) = 0$$

reciprok auf einander bezogen sind, sich ein Flächen-Element des einen Raumes, welches einen elementaren Complex-Kegel berührt, im anderen Raume als ein ähnliches Element abbildet. Nun giebt es offenbar im Allgemeinen in jedem Raume *vierfach* unendlich viele Elemente von dieser ausgezeichneten Lage. Wenn aber die elementaren Complex-Kegel des Raumes r *ebene* Strahl-Büschel sind, so giebt es in r nur *dreifach* unendlich viele solche Elemente — ich bezeichne sie mit dem Buchstaben e —, welche den *vierfach* unendlich vielen ausgezeichneten Elementen E des Raumes R entsprechen. *Einem Elemente e entsprechen alsdann einfach unendlich viele Elemente E .*

Dies tritt insbesondere bei unserer Kugel-Abbildung ein. Durch jeden Punkt in r geht nur *ein* ausgezeichnetes Element, dasjenige nämlich, welches dem betreffenden Punkte durch den linearen Complex $H = 0$ zugeordnet wird. Andererseits sind die ausgezeichneten Elemente E diejenigen, welche der Gleichung:

$$1 + P^2 + Q^2 = 0$$

genügen, wo P und Q wie früher die partiellen Derivirten von Z hinsichtlich X und Y bezeichnen sollen. Wie eine geometrische Betrachtung zeigt, *sind es jedesmal die einfach unendlich vielen Elemente E , die sich an eine Gerade von der Länge Null anschliessen, welche demselben Elemente e des Raumes r entsprechen.*

44. Nach den obenstehenden Entwicklungen können wir den folgenden Satz aussprechen:

Wenn zwei Flächen f_1 und f_2 einander nach einer Haupttangenten-Curve berühren, und die Tangenten dieser Curve nicht dem linearen Complexe $H = 0$ angehören, so berühren die Bildflächen F_1 und F_2 einander nach einer Krümmungslinie. In dem ausgeschlossenen Falle gehören alle Tangenten der Flächen f_1 und f_2 , die durch einen Punkt der

*) Es muss einer anderen Arbeit vorbehalten sein, eine eingehende Discussion aller Eigenthümlichkeiten zu geben, die bei der Nöther'schen Abbildung des linearen Complexes und meiner darauf begründeten Kugel-Abbildung hinsichtlich der Fundamental-Gebilde der beiden Räume stattfinden.

gemeinsamen Haupttangenten-Curve gehen, dem Complexe $H = 0$ an, und alsdann kann man nur schliessen, dass die Bildflächen F_1 und F_2 in eine gemeinsame Developpable, welche den unendlich entfernten imaginären Kreis enthält, eingeschrieben sind (§ 26, 84 b.).

Berücksichtigt man indessen, dass es keine partielle Differential-Gleichung giebt, deren krummlinige Charakteristiken sämmtlich von Geraden des linearen Complexes $H = 0$ umhüllt werden, so lässt sich schliessen (§ 6., 17.), dass unsere Kugel-Abbildung eine jede D_{11} in eine partielle Differential-Gleichung, deren Charakteristiken Krümmungslinien sind, überführt. Andererseits erhalten wir in dieser Weise alle Differential-Gleichungen von dieser Eigenschaft, weil der folgende Satz ohne Ausnahme gilt:

Zwei Flächen F_1 und F_2 , die einander nach einer Krümmungslinie berühren, geben in r Bildflächen, die sich nach einer gemeinsamen Haupttangenten-Curve berühren.

Es gehen also die im vorangehenden Paragraphen erhaltenen Resultate in die folgenden über.

Es giebt zwei distincte Classen partieller Differential-Gleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Krümmungslinien auf den Integralfächen sind. Gleichungen der ersten Classe können dadurch charakterisirt werden, dass sie als vollständiges Integral den Inbegriff von zweifach unendlich vielen Kugeln — eine Kugel-Congruenz — gestatten. Das allgemeine Integral wird also von Röhrenflächen gebildet, und deren kreisförmige Krümmungslinien sind die Charakteristiken. Die zweite Classe entspricht den Kugel-Complexen. Die Aufgabe, eine solche Differential-Gleichung zu integriren, kommt geometrisch darauf hinaus: die allgemeinste Fläche zu finden, deren zweifach unendlich viele Haupt-Kugeln des einen Systems einem gegebenen Complexe angehören. Den Inbegriff dieser beiden Classen werde ich mit dem Symbole D_{12} bezeichnen.)*

45. In seinem Werke: *Partielle Differential-Gleichungen* pag. 127—129 stellt Herr Du Bois-Reymond die Aufgabe, die wir eben erledigt haben. Er macht darauf aufmerksam, dass, wenn die Charakteristiken Krümmungslinien sind, dieses auch mit den Trajectorien der Fall ist. Alsdann schneiden aber Charakteristiken und Trajectorien einander orthogonal und dadurch wird das besprochene Problem (§ 14., 40.) darauf zurückgeführt, die partielle Differential-Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \left[\frac{\partial F}{\partial q} + q \left(p \cdot \frac{\partial F}{\partial p} + q \frac{\partial F}{\partial q} \right) \right] - \frac{\partial F}{\partial y} \left[\frac{\partial F}{\partial p} + p \left(p \frac{\partial F}{\partial p} + q \frac{\partial F}{\partial q} \right) \right] + \frac{\partial F}{\partial z} \left[p \frac{\partial F}{\partial q} - q \frac{\partial F}{\partial p} \right] = 0$$

*) Herr Darboux theilt mir mit, dass er auch bemerkt hat, dass die Aufgabe, eine Fläche durch eine Eigenschaft der Haupt-Kugeln zu bestimmen, in gewissem Sinne nur auf eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung führt. (Vergl. das auf Darboux bezügliche Citat in § 24.)

zu integrieren. Herr Du Bois-Reymond führt diese Integration in einigen sehr einfachen Fällen*) aus, und äussert dabei die Vermuthung, dass auch der allgemeine Fall keine erheblichen analytischen Schwierigkeiten bieten würde. Jedenfalls hat die vorstehende Lösung ein eigenenthümliches Interesse.

Hier mag auch die Bemerkung ihren Platz finden, dass, wenn zwei Flächen f_1 und f_2 mit einander eine Berührung n^{ter} Ordnung nach einer Haupttangenten-Curve haben, die Bildflächen im Allgemeinen in demselben gegenseitigen Verhältnisse längs einer Krümmungslinie stehen. Demzufolge wird eine partielle Differential-Gleichung n^{ter} Ordnung, deren Charakteristiken des einen Systems Haupttangenten-Curven auf den Integralfächen sind, durch unsere Kugel-Abbildung in eine Gleichung derselben Ordnung übergeführt, deren Charakteristiken des einen Systems Krümmungslinien sind.

46. Ich werde hier kurz andeuten, wie sich einige metrische Theorien verallgemeinern lassen.

Der Begriff der Krümmungslinien einer Fläche erweitert sich bekanntlich folgenderweise. Es seien gegeben vierfach unendlich viele Flächen U , eine beliebige Fläche F und ein Punkt p derselben. Es giebt immer einige U , die eine stationäre Berührung mit F in p haben, und also F in einer Curve mit Spitze schneiden. Betrachtet man die Tangente dieser Spitze als eine dem Punkte p zugeordnete Richtung, so bildet die continuirliche Aufeinanderfolge einander schneidender zugeordneter Richtungen Curven, welche ich als die *U-Krümmungslinien* der Fläche F bezeichnen werde.

Bemerkenswerth ist der Fall, dass alle U aus einer gewissen Fläche U_0 durch Anwendung aller Translationen und Parallel-Transformationen hergeleitet werden können. Alle Theorien über Krümmungslinien und insbesondere die in dieser Abhandlung gegebenen erweitern sich in gewissem Sinne auf diesen Fall (§ 13., Schluss). Es ist alsdann beispielsweise immer möglich, alle Flächen zu finden, deren *U-Krümmungslinien* die Eigenschaft besitzen, dass die in ihren Punkten errichteten Flächen-Normalen mit einer Ebene parallel sind. Diese Aufgabe entspricht nämlich durch eine gewisse Transformation der von Herrn Bonnet gelösten: alle Flächen mit ebenen Krümmungslinien zu finden. Es gelten ferner die Sätze: a) Wenn eine Fläche nach der gewöhnlichen Methode auf einer Kugel abgebildet wird, so

*) Die beiden ersten Arten D_{12} des Herrn Du Bois-Reymond: die um eine Fläche umgeschriebenen Developpablen, und die einer gegebenen Axe zugehörigen Rotationsflächen, entsprechen *Congruenzen* eines *linearen* Kugel-Complexes. Die geometrische Bedeutung seiner dritten Art sehe ich im Augenblick nicht.

gehen die U -Krümmungslinien in eine Schaar *orthogonaler* Curven über. b) Die Bestimmung der U -Krümmungslinien einer Fläche F lässt sich darauf zurückführen, die Krümmungslinien einer gewissen anderen Fläche Φ zu finden. Sind insbesondere U_0 und F Minimalflächen oder Parallellflächen solcher, so ist auch Φ eine derartige Fläche, und dann können also die U -Krümmungslinien von F bestimmt werden.

Auch der Fall, dass alle Flächen U ähnlich und ähnlich gelegen sind, verdient eine besondere Untersuchung. Alsdann haben die einem Punkte zugehörigen Richtungen der U -Krümmungslinien paarweise eine harmonische Lage hinsichtlich der Haupttangente der Fläche, wie hinsichtlich der Haupttangente der stationär berührenden U .

Setzt man endlich voraus, dass alle U unendlich dünne Cylinder, das heisst gerade Linien sind, so werden die U -Krümmungslinien mit den Haupttangente-Curven der betreffenden Fläche identisch.

§ 16.

Partielle Differential-Gleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken geodätische Curven auf den Integralfächen sind.

47. Die Entwicklungen dieses Paragraphen lassen sich auf den bekannten Satz gründen: Wenn zwei Flächen I und U mit einander eine Berührung n^{ter} Ordnung nach einer Krümmungslinie haben, so stehen ihre Centerflächen C_i und C_u in demselben gegenseitigen Verhältnisse hinsichtlich einer gemeinsamen geodätischen Curve.

Betrachtet man nun einerseits die Integralfächen I einer D_{12} und unter denselben die Flächen U eines vollständigen Integrals, andererseits die zugehörigen Centerflächen C_i und C_u , so sieht man leicht (§ 6., 17.), dass die Flächen C_i einer partiellen Differential-Gleichung erster Ordnung D_{13} genügen, deren Charakteristiken geodätische Curven sind, und hierbei bilden die Flächen C_u ein vollständiges Integral.

Allgemein können wir sagen, dass den Integralfächen einer partiellen Differential-Gleichung n^{ter} -Ordnung D_{n2} , deren Charakteristiken des einen Systems Krümmungslinien sind, Centerflächen entsprechen, welche einer Differential-Gleichung derselben Ordnung D_{n3} genügen, und zwar sind die Charakteristiken des einen Systems geodätische Curven.*)

Nach dem Obenstehenden entspricht jeder D_{n2} eine Differential-Gleichung, deren Charakteristiken geodätische Curven sind; das Umge-

*) Einer jeden Differential-Gleichung n^{ter} Ordnung entsprechen Integralfächen, deren Centerflächen einer gewissen Gleichung $(n + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung genügen. Ausser den Centerflächen besitzt die letzte Gleichung im allgemeinen Falle noch andere Integralfächen.

kehrte ist dagegen nicht wahr, und demzufolge sind die D_{n3} nicht die einzigen partiellen Differential-Gleichungen, welche die Eigenschaft besitzen, dass ihre Charakteristiken geodätische Curven sind.

48. Zur Bestimmung der allgemeinen Form der Gleichungen D_{13} schlagen wir einen anderen Weg ein, indem wir uns auf die im ersten Abschnitte entwickelte Theorie reciproker Curven-Complexe stützen.

Sei nämlich im Raume r ein beliebiger Linien-Complex und in R der entsprechende Kugel-Complex gegeben, die sich beide durch eine Gleichung:

$$F(XYZH) = 0$$

darstellen lassen; hierbei muss man X, Y, Z, H einerseits als Linien-Coordinaten (§ 10., 30.) hinsichtlich vier paarweise in Involution liegender linearer Complexe, andererseits als Kugel-Coordinaten auffassen. Indem wir nun den Mittelpunkt (XYZ) einer beliebigen Kugel $(XYZH)$ des besprochenen Kugel-Complexes als das Bild der Geraden $(XYZH)$ auffassen, erhalten wir eine Abbildung des Linien-Complexes $F(XYZH) = 0$ im Punktraume R , bei welcher einer jeden Complex-Linie ein bestimmter Punkt entspricht, während es eine Anzahl von Complex-Geraden giebt, die sich als derselbe Punkt abbilden — so viele nämlich, wie der Grad der Gleichung $F(XYZH) = 0$ hinsichtlich H beträgt. Den Complex-Linien, die durch einen Punkt gehen, entsprechen die Punkte einer Curve C , und es ist einleuchtend, dass alle C einen Curven-Complex bilden, der zu unserem Linien-Complex in der reciproken Beziehung steht, die wir im ersten Abschnitte betrachtet haben. Hierbei müssen wir erinnern, dass die zwei reciproken Curven-Complexen zugehörigen partiellen Differential-Gleichungen erster Ordnung in dem Sinne mit einander äquivalent sind, dass die Lösung der einen diejenige der anderen giebt.

Setzt man (§ 9., 27.) in die Gleichungen einer Geraden:

$$rz = x - \varrho, \quad sz = y - \sigma$$

die Werthe:

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{1}{2}(X + iY), & s &= \frac{1}{2}(X - iY), \\ \sigma &= \frac{1}{2}(Z \pm H), & r &= -\frac{1}{2}(Z \mp H) \end{aligned}$$

ein, so bestimmen die hervorgehenden Relationen:

$$\begin{aligned} -(Z \mp H)z &= 2x - (X + iY) \\ (X - iY)z &= 2y - (Z \pm H) \end{aligned}$$

in denen man H als die durch $F(XYZH) = 0$ bestimmte Function von X, Y, Z auffasst, die eben besprochene Abbildung der beiden Räume. Indem man nun (§ 3., 6.) hinsichtlich X, Y, Z differentiirt:

$$\begin{aligned} -(dZ \mp dH)z &= -(dX + idY) \\ (dX - idY)z &= -(dZ \pm dH), \end{aligned}$$

und zwischen diesen beiden (und den ursprünglichen) Gleichungen

x, y, z eliminirt, erhält man die *Differential-Gleichung des Curven-Complexes in R* :

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 + (i dH)^2 = 0,$$

oder, wie man auch schreiben kann:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dH^2,$$

eine Gleichung, deren geometrische Bedeutung ist, dass die beiden Kugeln $(XYZH)$ und $(X + \Delta X, Y + \Delta Y, Z + \Delta Z, H + \Delta H)$ einander berühren, dass also die entsprechenden Geraden sich schneiden.

Die elementaren Complex-Kegel:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \left(\frac{\partial H}{\partial X} dX + \frac{\partial H}{\partial Y} dY + \frac{\partial H}{\partial Z} dZ \right)^2$$

berühren, wie ihre Gleichung zeigt, den unendlich weit entfernten, imaginären Kreis in den beiden Durchschnittspunkten desselben mit der Ebene:

$$\frac{\partial H}{\partial X} dX + \frac{\partial H}{\partial Y} dY + \frac{\partial H}{\partial Z} dZ = 0,$$

und also sind sie Umdrehungs-Kegel, deren Axe die Richtungs-Cosinus: $\frac{\partial H}{\partial X}, \frac{\partial H}{\partial Y}, \frac{\partial H}{\partial Z}$ besitzt. Wir erhalten somit die folgende übersichtliche Vorstellung von diesem Curven-Complex:

Die elementaren Complex-Kegel, deren Scheitel auf einer beliebigen Fläche aus der Schaar $H = \text{Const.}$ liegen, sind Umdrehungs-Kegel, deren Axe die entsprechende Normale der genannten Fläche ist. Die Winkel-Oeffnung dieser Kegel variirt, wie die Gleichung:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dH^2$$

zeigt, in solcher Weise, dass die unendlich nahen Flächen $H = C$ und $H = C + \Delta C$ auf den Erzeugenden dieser Kegel Segmente derselben Grösse abschneiden. Hieraus folgt, wie wir sogleich zeigen werden, dass die Flächen $H = C$ die Integralflächen unserer D_{13} noch äquidistanten Curven schneiden; hierbei sind die zugehörigen orthogonalen Curven bekanntlich geodätische Linien und zugleich Charakteristiken hinsichtlich der D_{13} . Diese geometrische Interpretation einer D_{13} giebt leicht als allgemeine Form derselben:

$$\frac{\partial H}{\partial X} P + \frac{\partial H}{\partial Y} Q - \frac{\partial H}{\partial Z} = \sqrt{1 + P^2 + Q^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial Z}\right)^2} - 1,$$

welche Gleichung wir später durch eine analytische Methode finden werden.

Man betrachte eine beliebige auf $H = C$ gelegene Curve k und die den Punkten derselben zugehörigen elementaren Complex-Kegel, deren infinitesimale Durchschnitts-Curven mit der Fläche $H = C + \Delta C$ zwei Umhüllungs-Curven k' bestimmen, unter denen wir die eine wählen; bekanntlich gehört der zwischen k und k' gelegene Flächen-Streifen einer Integralfläche an. Durch Wiederholung

dieser Operation findet man auf den successiven Flächen $H = C$ eine Schaar Curven k , deren Inbegriff eine Integralfäche bildet, und dabei folgt aus dem Vorstehenden, dass alle k äquidistante Curven sind. Nun stehen immer die Tangente einer k und die Axe des zugehörigen Complex-Kegels senkrecht auf einander, und also berührt dieser Kegel die betreffende Integralfäche nach einer Richtung, die ebenso die Tangente von k orthogonal schneidet. *Die Charakteristiken und die Curven k bilden, wie früher behauptet, ein Orthogonal-System.* Die Curven k sind aber äquidistant, und also finden wir den Satz wieder, dass die Charakteristiken einer D_{13} geodätische Curven auf den Integralfächen sind.

Um die der Differential-Gleichung:

$$W = dX^2 + dY^2 + dZ^2 - \left(\frac{\partial H}{\partial X} dX + \frac{\partial H}{\partial Y} dY + \frac{\partial H}{\partial Z} dZ \right)^2 = 0$$

zugehörige partielle Differential-Gleichung zu bestimmen, muss man unter den Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \varrho P, \quad \frac{\partial W}{\partial Y} = \varrho Q, \quad \frac{\partial W}{\partial Z} = -\varrho$$

die Grössen dX , dY , dZ eliminiren, und hierbei findet man als *allgemeine Form der partiellen Differential-Gleichungen D_{13}* :

$$\frac{\partial H}{\partial X} P + \frac{\partial H}{\partial Y} Q - \frac{\partial H}{\partial Z} = \sqrt{1 + P^2 + Q^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial Z} \right)^2 - 1},$$

vorausgesetzt, dass H eine beliebige bekannte Function von X , Y , Z bezeichnet.

Aus unseren früheren Entwicklungen (§ 6., 18.) folgt, dass die Integration einer D_{13} auf die Bestimmung der Haupttangenten-Curven des entsprechenden Linien-Complexes zurückgeführt werden kann. Die betreffenden Charakteristiken sind ja reciproke Curven hinsichtlich der Abbildungs-Gleichungen:

$$\begin{aligned} -(Z \mp H)z &= 2x - (X + iY) \\ (X - iY)z &= 2y - (Z \pm H), \end{aligned}$$

und wenn man also die allgemeine Gleichung des einen Curven-Systems kennt, so findet man diejenige des anderen durch Differentiation und Elimination. Wenn wir andererseits sagen, dass die Integration einer D_{13} mit derjenigen einer D_{12} äquivalent ist, so kommt dies, geometrisch aufgefasst, darauf hinaus, statt eine Fläche durch eine Eigenschaft der Haupt-Kugeln zu bestimmen, die entsprechende Centerfläche zu suchen. Herr Bonnet benutzt eine solche Transformation bei seiner Bestimmung aller Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien.

Die obenstehende Form einer D_{13} theilte ich der Akademie zu Christiania (October 1870) in einer Note mit, in welcher ich unter anderem die drei Classen D_{11} , D_{12} , D_{13} aufstellte. Eine symmetrische

Form erhält man, wenn man die Aufgabe folgendermassen stellt: Es soll eine Gleichung $\Phi(XYZH) = 0$ gefunden werden, die, mit derjenigen des betreffenden Kugel-Complexes $\Pi(XYZH) = 0$ verbunden, Z als die verlangte Function von X und Y giebt. Diese Bemerkung, oder eigentlich eine damit äquivalente, verdanke ich Herrn Klein, der darauf durch seine liniengeometrischen Untersuchungen geführt wurde (vergl. dessen zweite, hier folgende Arbeit). Andererseits theilt Herr Darboux mir eben (October 1871) mit, dass er eine entsprechende Form durch Untersuchungen über Kugel-Complexe gefunden hat.

Die wichtigsten Resultate der drei vorangehenden Paragraphen fasse ich folgendermassen zusammen:

Partielle Differential-Gleichungen n^{ter} Ordnung, deren Charakteristiken Haupttangenten-Curven oder Krümmungslinien sind, und eine Classe, deren Charakteristiken geodätische Linien sind, bilden äquivalente Probleme in dem Sinne, dass sie gegenseitig in einander transformirt werden können. Ist insbesondere n gleich 1, so entsprechen diesen Problemen Untersuchungen über Congruenzen und Complexe, deren Elemente gerade Linien oder Kugeln sind.

Hier soll auch darauf aufmerksam gemacht werden, dass ebenso wie es einen Cyclus von Verwandtschaften giebt, welche die Gleichungen D_{n1} in Gleichungen derselben Art überführen, alle linearen Punkt-Transformationen nämlich zusammen mit allen dualistischen Umformungen des Raumes, es auch einen Cyclus von Verwandtschaften giebt, welche bezüglich die Gleichungen D_{n2} und D_{n3} ihren Charakter behalten lassen.

§ 17.

Ueber Linien-Complexe, welche infinitesimale lineare Transformationen in sich selbst besitzen.*)

49. Linien-Complexe, die sich durch eine Gleichung der Form:

$$F(XYZ) = 0$$

darstellen lassen, bilden sich als die Kugeln ab, deren Mittelpunkte auf der Fläche $F(XYZ) = 0$ liegen. Dieser Kugel-Complex wird nun offenbar durch eine beliebige Parallel-Transformation, oder was auf dasselbe hinauskommt, durch eine infinitesimale solche in sich selbst übergeführt, und also können wir nach § 13., 38. den Linien-Complex

*) Cfr. *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces* par Klein et Lie, Comptes rendus 1870. Ueber vertauschbare lineare Transformationen von Klein und Lie, Math. Ann. Bd. 4.

$F(XYZ) = 0$ dadurch charakterisiren, dass er eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$z_1 = z_2; \quad x_1 = x_2 + az_2 + b; \quad y_1 = y_2 + cz_2 + d$$

gestattet.

Nun ist es bekannt, dass die Aufgabe, die allgemeine Fläche zu finden, deren Krümmungs-Centra des einen Systems auf einer gegebenen Fläche liegen, darauf hinauskommt, die geodätischen Curven dieser Fläche zu finden. Unsere früheren Theorien geben also den folgenden interessanten Satz: *Die Bestimmung der Haupttangenten-Curven des Linien-Complexes $F(XYZ) = 0$ und die Auffindung der geodätischen Curven auf der Fläche $F(XYZ) = 0$ sind äquivalente Probleme.* Es ist zu bemerken, dass der Grad des Linien-Complexes gleich der Ordnung der Fläche ist; während aber die Fläche eine beliebige ist, muss der Complex die besprochene infinitesimale Transformation in sich selbst besitzen.

Unter den linearen Tangential-Complexen des Kugel-Complexes $F(XYZ) = 0$ betrachte ich den folgenden:

$$\frac{\partial F_0}{\partial X_0}(X - X_0) + \frac{\partial F_0}{\partial Y_0}(Y - Y_0) + \frac{\partial F_0}{\partial Z_0}(Z - Z_0) = 0,$$

dessen Kugeln eine Tangential-Ebene der Fläche $F(XYZ) = 0$ orthogonal schneiden (§ 10., 30.). Eine beliebige Parallel-Transformation führt sowohl den gegebenen Complex wie den Tangential-Complex in sich selbst über, und also sehen wir, dass diese Complexe einander in einfach unendlich vielen gemeinsamen Kugeln berühren. Der Complex $F(XYZ) = 0$ lässt sich in Folge dessen als Enveloppe-Gebilde von zweifach unendlich vielen linearen Complexen auffassen. Wenden wir uns zu den Linien-Vorstellungen, so können wir den entsprechenden Linien-Complex definiren als Enveloppe-Gebilde von zweifach unendlich vielen linearen Complexen, die mit einem gegebenen linearen Complexe $H = 0$ in Involution liegen, und ausserdem eine gemeinsame Gerade desselben (die Fundamental-Gerade des Raumes r) enthalten (cfr. § 10., 30.).

Zweifach unendlich viele lineare Complexe, die mit einem gegebenen in Involution liegen und ausserdem eine Gerade dieses letzten Complexes enthalten, umhüllen einen Linien-Complex, dessen Haupttangenten-Curven sich dadurch bestimmen lassen, dass man die geodätischen Curven einer gewissen Fläche aufsucht.

Im nächsten Abschnitte werde ich auf den Inhalt dieser Nummer zurückkommen.

50. Durch die Entwicklungen der vorangehenden Nummer wird man darauf geführt, sich die Frage zu stellen, ob die Bestimmung der Haupttangenten-Curven sich immer vereinfachen lässt, wenn der betreffende Linien-Complex eine infinitesimale lineare Transformation

gestattet. Die Antwort liegt unmittelbar in den obengenannten Arbeiten von Herrn Klein und mir (vergl. besonders diese Annalen Bd. 4. p. 80.). Wir haben nämlich überhaupt die Aufmerksamkeit darauf gerichtet, dass wenn bei einem Gebilde eine infinitesimale Transformation bekannt ist, sich die Bestimmung von anderen Gebilden, die mit dem gegebenen in einer durch die betreffende Transformation unzerstörbaren Beziehung stehen, im Allgemeinen durch passende Coordinaten-Wahl vereinfachen lässt.

Hierbei muss man diejenigen Curven anwenden, die den geometrischen Ort bilden für die infinitesimalen Wege, welche alle Punkte des Raumes während der besprochenen Transformation beschreiben. Setzen wir insbesondere voraus, dass die bekannte Transformation eine lineare ist, so werden diese Curven eben die von Herrn Klein und mir unter der Bezeichnung Raum-Curven W untersuchten. Man ordne die betreffenden, zweifach unendlich vielen Curven W auf zwei Weisen zusammen in Flächen-Schaaren:

$$U_1 = A; \quad U_2 = B.$$

Es geht alsdann jede Fläche U_1 oder U_2 durch die zugehörige Transformation in sich über. Man wähle ferner eine dritte Schaar: diejenigen Flächen

$$V = C$$

nämlich, die aus einer beliebig gewählten durch continuirliche Anwendung der betreffenden Transformation hervorgehen, und hierbei soll C der Parameter der Transformation sein.

Führt man nun U_1 , U_2 und V als Punkt-Coordinationen ein, so nimmt beispielsweise die Gleichung einer jeden Fläche, die jene Transformation gestattet, die Form an:

$$F(U_1, U_2) = 0.$$

Ebenso kann eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung, deren Inbegriff von elementaren Complex-Kegeln durch die Transformation ungeändert bleibt, folgenderweise geschrieben werden:

$$F\left(U_1, U_2, \frac{\partial V}{\partial U_1}, \frac{\partial V}{\partial U_2}\right) = 0,$$

was bekanntlich ein Schritt vorwärts ist. Dieses ist insbesondere der Fall mit der D_1 , eines Linien-Complexes, der selbst ungeändert bleibt.

Betrachten wir z. B. die vier paarweise in Involution liegenden linearen Complexe $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, $H=0$ und einen Linien-Complex, dessen Gleichung die folgende ist:

$$F\left(\frac{X}{H}, \frac{Y}{H}, \frac{Z}{H}\right) = 0,$$

so ist es einleuchtend, dass eine jede Transformation unter den unendlich vielen:

$$X_1 = m X_2, \quad Y_1 = m Y_2, \quad Z_1 = m Z_2, \quad H_1 = m H_2$$

unseren Complex in sich überführt, und also nimmt die zugehörige D_{11} die obenstehende Form an. Hierher gehört, wie im nächsten Abschnitte gezeigt werden soll, ein Complex zweiten Grades mit 17 Constanten, und zwar ist derselbe der allgemeine Complex zweiten Grades, dessen Singularitäten-Fläche eine Regelfläche ist. Die Complexe zweiten Grades mit 18 und 19 Constanten gestatten keine infinitesimale lineare Transformation.*)

51. Ebenso ist es für die Untersuchung von räumlichen Gebilden, welche zwei infinitesimale und permutable lineare Transformationen gestatten, vortheilhaft, eine besondere Coordinaten-Wahl zu machen. Erstens nimmt man die einfach unendlich vielen Flächen

$$V = A,$$

die durch unsere Transformationen ungeändert bleiben. Man wähle ferner zwei distincte *infinitesimale* Transformationen β, γ aus unserem geschlossenen Systeme und endlich zwei Flächen B_0 und C_0 . Durch continuirliche Anwendung der Transformationen β und γ auf diese Flächen erhält man zwei Flächen-Schaaren:

$$U_1 = B, \quad U_2 = C,$$

wo B und C Transformations-Constanten bezeichnen. Wählt man nun V, U_1 und U_2 zu Punkt-Coordinaten, so nimmt die D_{11} eines Linien-Complexes, der durch unsere Transformationen ungeändert bleibt, die Form:

$$F\left(V \frac{\partial V}{\partial U_1} \frac{\partial V}{\partial U_2}\right) = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung lässt sich bekanntlich auf eine Quadratur zurückführen.

Wir treffen somit eine Classe Complexe, deren Haupttangenten-Curven wir bestimmen können. Hierher gehört z. B. der Complex zweiten Grades, dessen Singularitäten-Fläche in zwei Flächen zweiten Grades zerfallen ist, welche dann nothwendig vier Erzeugende gemein haben.

*) Der Linien-Complex $F\left(\frac{X}{H} \frac{Y}{H} \frac{Z}{H}\right) = 0$ lässt sich auch definiren als Enveloppe-Gebilde von zweifach unendlich vielen linearen Complexen, die mit zwei gegebenen linearen Complexen in Involution liegen. Unter den Haupttangenten-Curven eines solchen Complexes giebt es einfach unendlich viele ausgezeichnete Schaaren. Jede besteht aus einfach unendlich vielen Complex-Curven eines linearen Complexes $X^2 + Y^2 + Z^2 - H^2 = \text{Const.}$ Das eben ausgesprochene Theorem ist zu gleicher Zeit eine Transformation und Verallgemeinerung des bekannten Satzes: Unter den geodätischen Curven einer Fläche giebt es einfach unendlich viele, deren Tangenten den imaginären Kugel-Kreis schneiden. Die hier betrachteten Linien-Complexe besitzen die charakteristische Eigenschaft, dass ihre Singularitäten-Flächen Regelflächen mit zwei geraden Leitlinien sind. Jede krumme Haupttangenten-Curve einer solchen Regelfläche wird ausk von Geraden eines linearen Complexes $X^2 + Y^2 + Z^2 - H^2 = \text{Const.}$ umhüllt.

Man erhält hier beispielsweise eine allgemeine Bestimmung der geodätischen Curven auf einer jeden Schraubenfläche. Der Inbegriff aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer solchen Fläche liegen, gestattet nämlich zwei permutable infinitesimale Transformationen in sich selbst: eine Schrauben-Bewegung und eine Parallel-Transformation, und nach § 13. entsprechen solche Umformungen des Kugel-Raumes R linearen Punkt-Transformationen des Linien-Raumes r . Es gehört also diejenige D_{11} , deren Integration mit der Bestimmung jener geodätischen Curven äquivalent ist, in die in N. 51. besprochene Kategorie, womit meine Behauptung erwiesen ist.

Sucht man die geodätischen Curven auf einer Fläche, die eine infinitesimale lineare Punkt-Transformation gestattet, bei welcher der imaginäre Kugel-Kreis seine Lage behält, so kann man nach der in N. 50. auseinander gesetzten Methode dieses Problem darauf zurückführen, eine gewöhnliche Differential-Gleichung erster Ordnung zwischen zwei Variablen zu integrieren. Die Krümmungslinien und Haupttangenten-Curven dieser Flächen können bestimmt werden. (Vergl. die citirte Arbeit Math. Ann. Bd. 4. p. 84.)

52. Als letztes Beispiel betrachte ich endlich die bekannte Aufgabe: alle Flächen zu finden, deren Normalen einem gegebenen Linien-Complex angehören. *) Herr Abel Transon hat gezeigt, dass dieses Problem, welches unmittelbar auf eine Gleichung der Form:

$$F(xyzpq) = 0$$

führt, immer eine Vereinfachung zulässt. **) Dieselbe kann auf die folgende einfache Bemerkung des Herrn Darboux (Bulletin, Novbr. 1870, p. 3) gestützt werden: Die Parallelfächen einer Integralfäche sind selbst Integralfächen. Der Inbegriff aller Integralfächen gestattet also eine infinitesimale Parallel-Transformation, und somit gehört die Gleichung $F = 0$ in die Kategorie der Nummer 50.

Setzen wir nun weiter voraus, dass der Linien-Complex eine infinitesimale Bewegung zulässt, so wird $F = 0$ integrabel. Dies ist insbesondere der Fall, wenn der Complex durch Rotation einer Linien-Congruenz um eine feste Axe beschrieben werden kann. Hierher gehört der lineare Complex, und es ist in der That auch bekannt, obgleich

*) Es ist vielleicht nirgendwo ausgesprochen worden, dass diese Aufgabe in gewissem Sinne mit der folgenden äquivalent ist: alle Flächen zu finden, die eine Schaar geodätische Curven enthalten, deren Tangenten einem gegebenen Linien-Complex angehören. Sieht man ab von den Developpablen des betreffenden Linien-Complexen, so drückt sich das eben besprochene Problem unmittelbar durch eine partielle Gleichung erster Ordnung aus.

**) Journal de l'Ecole Polytechnique* 1861.

es vielleicht nirgendwo explicite ausgesprochen worden ist, dass alle Schraubenflächen, die einer gewissen Schrauben-Bewegung entsprechen, der betreffenden Gleichung $F=0$ genügen.*) Hierher gehört ferner ein Complex zweiten Grades, dessen Singularitäten-Fläche aus einer Kugel und zwei parallelen Tangenten-Ebenen derselben besteht, endlich auch der bekannte Complex, dessen Gerade ein Tetraeder nach constantem Doppel-Verhältnisse schneiden, unter der Voraussetzung, dass zwei Tetraeder-Ecken auf dem imaginären Kugel-Kreise liegen.

Herr Darboux findet mittelst seiner obenstehenden Bemerkung, dass es eine andere homographische Particularisation dieses Complexes giebt, die von Binet und Chasles betrachtete nämlich, dessen zugehörige $F=0$ sich integrieren lässt. Dies liesse sich auch daraus schliessen, dass man in diesem Falle, wie Herr Reye bemerkt hat, zweifach unendlich viele Flächen zweiten Grades angeben kann, deren Normalen Complexlinien sind.

§ 18.

Trajectorie-Kreis. Trajectorie-Curve.

53. Auf jeder Kugel eines Kugel-Complexes liegt ein ausgezeichneteter Kreis, der gewissermassen als Repräsentant der benachbarten Kugeln aufzufassen ist. Um den Sinn dieser Behauptung zu erklären, um ferner die Gleichung dieses Kreises zu finden, wird es vorthellhaft sein, sich auf die Linien-Geometrie zu stützen.

Nach Plücker giebt es einfach unendlich viele lineare Complexe, die einen gegebenen Complex $F(XYZH)=0$ in einer Geraden $(X_0 Y_0 Z_0 H_0)$ desselben berühren; dies ist so zu verstehen, dass die unendlich benachbarten Geraden allen diesen Complexen gemein sind. In unserem Coordinaten-Systeme ist ein Tangential-Complex ausgezeichnet, der folgende nämlich:

$$H - H_0 = \frac{\partial H_0}{\partial X_0} (X - X_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Y_0} (Y - Y_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Z_0} (Z - Z_0).$$

Derselbe besteht, wenn wir zu den Kugel-Vorstellungen zurückkehren, aus allen Kugeln, welche die Ebene:

$$-H_0 = \frac{\partial H_0}{\partial X_0} (X - X_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Y_0} (Y - Y_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Z_0} (Z - Z_0)$$

*) Ein linearer Complex gestattet zwei infinitesimale und permutable Bewegungen. In Folge dessen besitzt die zugehörige $F=0$ drei infinitesimale und permutable Transformationen in sich selbst. Die entsprechende partielle Differential-Gleichung des Linien-Raumes r gestattet drei solche Transformationen, die lineare Punkt-Transformationen sind. Hieraus lässt sich z. B. schliessen, dass eine jede Schrauben-Bewegung zweifach unendlich viele Schraubenflächen giebt, auf denen die betreffenden Schraubenlinien Krümmungslinien sind.

unter demselben Winkel schneiden, wie die Kugel:

$$H_0^2 = (X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2.$$

Man sieht, dass die beiden letzten Gleichungen oder der durch dieselben dargestellte Kreis die benachbarten Kugeln definiert. Insbesondere wird die Kugel $(X_0 Y_0 Z_0 H_0)$ in den Punkten dieses Kreises von einfach unendlich vielen benachbarten Kugeln berührt. Man kann bemerken, dass unser Kreis zugleich auf dem der Kugel H_0 zugehörigen elementaren Complex-Kegel:

$$\begin{aligned} & (X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 \\ &= \left[\frac{\partial H_0}{\partial X_0} (X - X_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Y_0} (Y - Y_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Z_0} (Z - Z_0) \right]^2 \end{aligned}$$

liegt, und dies ist geometrisch evident, indem dieser Kegel alle Richtungen definiert, nach denen man aus dem Punkte $(X_0 Y_0 Z_0)$ gehen muss, wenn die zugehörige Kugel die ursprüngliche $(X_0 Y_0 Z_0 H_0)$ berühren soll.

Erinnert man nun die geometrische Bedeutung des Problems: die einem Kugel-Complexe zugehörige D_{12} zu integrieren, so sieht man, dass jede Integralfläche, die eine stationäre Berührung mit der Kugel H_0 hat, dieselbe in einem Punkte jenes Kreises berührt; hierbei ist, wie ich sogleich beweisen werde, die zugehörige Tangente PT (siehe die Figur) des Kreises jedesmal die entsprechende Trajectorien-Richtung der Integralfläche.

Die Gerade $PO - O$ ist der Mittel-Punkt unserer Kugel — berührt nämlich in O eine auf der Centerfläche unserer Integralfläche gelegene geodätische Curve, deren Tangenten die Integralfläche in den Punkten einer Charakteristik (Krümmungslinie) treffen. Bezeichnet nun P' einen von diesen Punkten, der P unendlich nahe liegt, so osculirt die Ebene OPP' die besprochene geodätische Curve in O , und steht in Folge dessen senkrecht auf der Ebene OPT , die zugleich den elementaren Complex-Kegel

$$\begin{aligned} & (X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 \\ &= \left[\frac{\partial H_0}{\partial X_0} (X - X_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Y_0} (Y - Y_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Z_0} (Z - Z_0) \right]^2 \end{aligned}$$

nach der Geraden OP und die Centerfläche im Punkte O berührt. Die elementare Linie PT schneidet also die Krümmungs-Richtung

PP' orthogonal — PT ist die Trajektorien-Richtung. Es soll darum unser Kreis der Trajektorien-Kreis der Kugel H_0 heissen.

Jede Kugel eines Kugel-Complexes wird in den Punkten eines gewissen Kreises von benachbarten Kugeln des Complexes berührt. Alle Integralflächen der zugehörigen D_{12} , für welche die Kugel Haupt-Kugel ist, berühren dieselbe in einem Punkte jenes Kreises, und hierbei ist die entsprechende Tangente des Kreises jedesmal die Trajektorien-Richtung. Dieser Kreis, den ich als Trajektorien-Kreis der Kugel bezeichne, spielt eine bedeutende Rolle in Untersuchungen über Kugel-Complexe.

Alle Kugeln des Raumes, die eine gegebene Kugel eines Complexes in den Punkten des Trajektorien-Kreises berühren, bilden eine Kugel-Congruenz, die das Bild derjenigen speciellen linearen Linien-Congruenz ist, welche allen einer Complexlinie zugehörigen linearen Tangential-Complexen gemein ist.

54. Eine sinnliche Vorstellung des Problems, eine gegebene D_{12} zu integrieren, erhält man folgenderweise. Eine jede partielle Differential-Gleichung ersten Grades:

$$F(xyzpq) = 0$$

scheidet aus den fünffach unendlich vielen Flächen-Elementen des Raumes vierfach unendlich viele aus. Die einer D_{12} entsprechenden Flächen-Elemente vertheilen sich insbesondere in dreifach unendlich viele Schaaren, deren jede von einfach unendlich vielen Elementen gebildet ist, die auf einer Kugel des gegebenen Complexes liegen und sich an den Trajektorien-Kreis derselben anschliessen.

Hier mag die Bemerkung ihren Platz finden, dass man aus der Gleichung eines Kugel-Complexes $H = F(XYZ)$ folgendermassen die Differential-Gleichung zwischen $XYZ dX dY dZ$ finden kann, welche die Trajektorien der zugehörigen D_{12} befriedigen. Aus den beiden Gleichungen des Trajektorien-Kreises:

$$U = (X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 - H_0^2 = 0$$

$$V = H_0 + \frac{\partial H_0}{\partial X_0} (X - X_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Y_0} (Y - Y_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Z_0} (Z - Z_0) = 0$$

und den entsprechenden Differential-Gleichungen:

$$\frac{\partial U}{\partial X} dX + \frac{\partial U}{\partial Y} dY + \frac{\partial U}{\partial Z} dZ = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} dX + \frac{\partial V}{\partial Y} dY + \frac{\partial V}{\partial Z} dZ = 0$$

eliminiert man $X_0 Y_0 Z_0$, und es geht die gesuchte Gleichung hervor.

Um endlich die partielle Differential-Gleichung D_{12} selbst aus der Gleichung des Kugel-Complexes zu finden, könnte man in folgender Weise vorgehen. Der Trajektorien-Kreis genügt der Gleichung:

$$(1) \quad H_0 + \frac{\partial H_0}{\partial X_0} (X - X_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Y_0} (Y - Y_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Z_0} (Z - Z_0) = 0,$$

ferner gelten für die Flächen-Elemente unserer Kugel, die sich an diesen Kreis anschliessen, welche somit der Gleichung D_{12} genügen, die folgenden Relationen:

$$X - X_0 = \frac{H_0 P}{\sqrt{1 + P^2 + Q^2}}; \quad Y - Y_0 = \frac{H_0 Q}{\sqrt{1 + P^2 + Q^2}}; \quad Z - Z_0 = \frac{-H_0}{\sqrt{1 + P^2 + Q^2}};$$

Bei Einsetzung dieser Werthe in (1) findet man:

$$\sqrt{1 + P^2 + Q^2} + P \frac{\partial H_0}{\partial X_0} + Q \frac{\partial H_0}{\partial Y_0} - \frac{\partial H_0}{\partial Z_0} = 0,$$

und in diese Gleichung muss man statt $X_0 Y_0 Z_0$ setzen die aus (2) genommenen Werthe dieser Grössen, ausgedrückt durch X, Y, Z, P und Q .

In den letzten analytischen Entwicklungen dachten wir uns immer H_0 als eine gegebene Function von $X_0 Y_0 Z_0$.

55. Unter den elementaren Complex-Kegeln einer D_{12} , deren Scheitel in einer Ebene liegen, giebt es einfach unendlich viele, welche diese Ebene berühren. Der Ort der betreffenden Scheitel ist eine Curve c , deren Tangente (als Trajektorien-Richtung) jedesmal senkrecht steht hinsichtlich der Berührungs-Richtung des entsprechenden Complex-Kegels (die Richtung der Charakteristik). Die Curve c liesse sich auch definiren als *geometrischer Ort aller Flächen-Elemente unserer Ebene, welche der gegebenen D_{12} genügen*.

Man könnte ebenso alle elementaren Complex-Kegel, deren Scheitel auf einer beliebigen Kugel liegen, betrachten und den Ort der Punkte suchen, deren zugehöriger Kegel die Kugel berührt. Ich behaupte, dass auch *die Tangente dieser Curve und die entsprechende Berührungs-Richtung des Kegels orthogonal sind*. Zum Beweis ist nur erforderlich, eine Transformation durch reciproke Radien auszuführen, in solcher Weise nämlich, dass die Kugel in eine Ebene, der Kugel-Complex in einen neuen Kugel-Complex übergeht. Die besprochene Curve nennen wir die Trajektorien-Curve unserer Kugel, und es ist klar, dass wenn die Kugel dem Complexe gehört, dass dann die Trajektorien-Curve in den Trajektorien-Kreis und eine zweite Curve zerfällt. Wir können auch sagen, dass *die Trajektorien-Curve einer Kugel der geometrische Ort für alle Flächen-Elemente derselben ist, welche der gegebenen D_{12} genügen*.

Wenn die Kugel infinitesimal wird, so umhüllen diejenigen Flächen-Elemente derselben, die sich an die Trajektorien-Curve anschliessen, den betreffenden elementaren Complex-Kegel.

Der Kegel, dessen Spitze im Centrum einer beliebigen Kugel liegt und welcher die Trajektorien-Curve derselben enthält, geht, wenn die Kugel infinitesimal wird, in den entsprechenden *Normalen-Kegel* über, das heisst in denjenigen Kegel, dessen Erzeugende Normalen aller Integralfächen sind, die durch den betreffenden Punkt gehen.