Über den kartographischen Vierfarbensatz.

Von

P. Wernicke in Göttingen.

Unter *Karte* wollen wir eine Teilung der Kugelfläche durch beliebige auf ihr gelegenen Kurven verstehen. Zerschnitte man sie längs dieser Kurven, so zerfiele sie in mehrere Teile, die *Länder* der Karte heißen sollen. Die Punkte, in denen sich die Kurven treffen, nennen wir *Ecken*, und die Kurvenstücke von einer Ecke bis zur nächsten gerechnet, aus denen die Begrenzung eines Landes besteht, *Grenzen*. Zwei Länder sind *benachbart*, wenn sie eine Grenze (oder mehrere) gemein haben.

Der Vierfarbensatz, der seit Francis Guthrie*) und De Morgan seitens der Mathematiker Beachtung gefunden hat, während er vorher nur negatives Resultat der kartographischen Erfahrung war, sagt nun aus, *daß auf jeder Karte zur Unterscheidung benachbarter Länder vier Farben ausreichen.* Wäre die Karte auf einer mehrfach zusammenhängenden Fläche ausgeführt, so wäre die *chromatische Zahl*, wie wir die geringste Anzahl von Farben bezeichnen dürfen, mit denen Nachbarländer stets unterschieden werden können, größer als vier (auf der Ringfläche z. B. sieben). Heawood**) hat, indem er zugleich die Unzulänglichkeit eines früheren Beweises des Vierfarbensatzes nachwies, obere Grenzen für die chromatischen Zahlen von Flächen beliebigen Geschlechts angeben. Heffter***) zeigte, daß bei bestimmten Werten der Geschlechtszahl p der Fläche ihre chromatische Zahl die Heawoodsche Grenze erreicht, da diese die Anzahl der „spatia confinia", d. h. Länder, die so auf die Fläche gelegt werden können, daß sie einander alle benachbart sind, für die betreffenden p-Werte angibt. Für die Kugelfläche (resp. Ebene) ist jedoch Heawoods Grenze fünf. Endlich hat G. Tait†) das Problem auf ein anderes zurückzuführen gesucht, welches er für leichter lösbar hielt, das sich aber mit dem Vierfarbensatz völlig äquivalent erweisen wird.

*) cf. F. Guthrie in Proc. Roy. Soc. Edinb. X, 1878/80.

**) Quart. Journ. of Math. 1890.

***) Über das Problem der Nachbargebiete, Math. Ann. 1891.

†) Collected papers XI, p. 7; Proc. Roy. Soc. Edinb. X, 1880, sowie in dem Aufsatz: Listings Topology. Philos. Mag. 5 ser., vol. 17, 1884.

I. Erste Spezialisierung der zu färbenden Karte.

Auf den Karten (M), die wir betrachten wollen, schließen wir zunächst das Vorkommen mehrfach zusammenhängender Länder aus. Ist nämlich L ein solches, so zerfällt seine Begrenzung in mehrere Ränder $(R_1, R_2 \cdots R_m)$, deren jeder aus „Grenzen" besteht. Nun teilt (Fig. 1) R_1 die

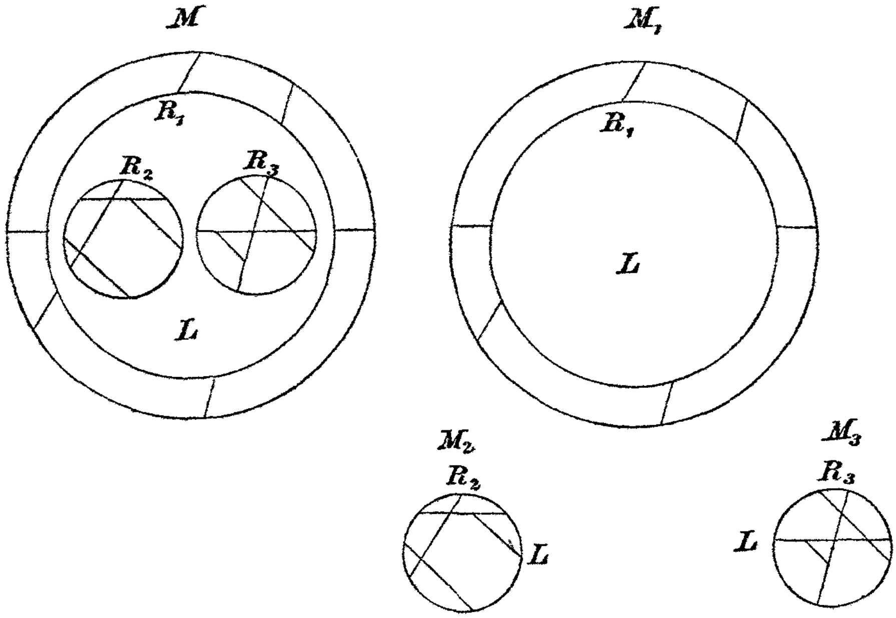


Fig. 1. $M = M_1 + M_2 + M_3$. Bei jeder Karte ist das äußere Land (der unendliche Teil der Ebene, resp. der restierende der Kugelfläche) mitzuzählen.

Kugelfläche in zwei Teile, von denen wir den L nicht enthaltenden das Innere nennen. Wir bilden Teilkarten $M_1, M_2 \cdots M_m$ bestehend aus dem Inneren je *eines* Randes $R_1 \cdots R_m$ und L (zu dessen Fläche das Innere der anderen Ränder hinzugefügt wurde). Können wir diese Teilkarten in vier Farben a, b, c, d ausführen, und benutzen wir jedesmal eine solche Permutation derselben, die L die Farbe a erteilt, so ist sofort klar, wie sich M, richtig gefärbt, aus den Teilkarten zusammensetzt.

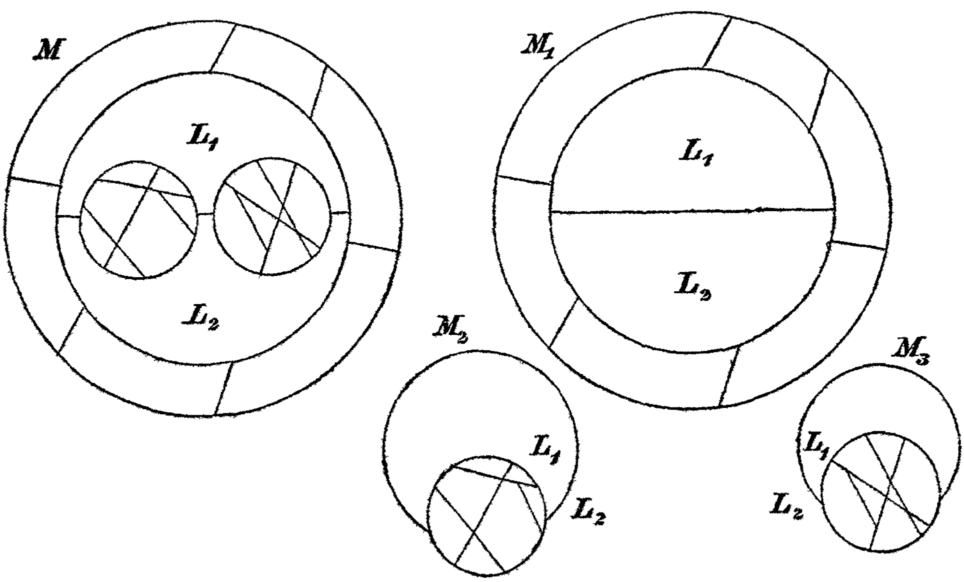


Fig. 2. $M = M_1 + M_2 + M_3$.

Analog ließen sich (Fig. 2) mehrfach zusammenhängende Gebiete von zwei oder drei Ländern ($L_1 + L_2$, $L_1 + L_2 + L_3$) ausschließen. Damit verschwänden von M alle Teile des Kartennetzes, die mit dem Übrigen nur durch zwei oder drei Grenzen verbunden sind, insbesondere zweieckige und dreieckige Länder.

Falls ein Land an sich selbst grenzt, so müßte an die Grenze beiderseits dieselbe Farbe stoßen. Für uns kommen solche „falschen Grenzen" nicht in Betracht und wir wollen sie uns von der Karte entfernt denken.

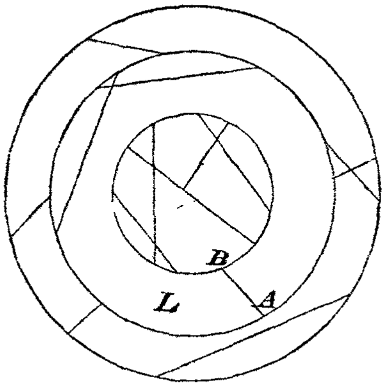


Fig. 3. AB ist eine „falsche Grenze".

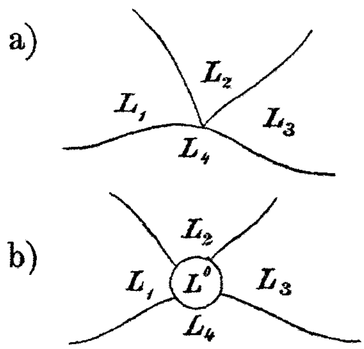


Fig. 4. Statt einer Ecke wie bei a) ist ein Ländchen L^0 wie bei b) einzuführen.

Weiter können wir annehmen, daß in jeder Ecke nur drei Grenzen zusammentreffen. Andernfalls sehen wir den Eckpunkt als Grenzfall eines dehnbaren Kreises an, der ein Ländchen $L^{(0)}$ umschließt. Dies ändert die Nachbarschaft der übrigen Länder nicht und gibt uns Ecken der gewünschten Art. Gelingt es, die Karte mit den $L^{(0)}$ wie verlangt zu färben, so ist beim Übergange zur Grenze auch die ursprüngliche Karte mit vier (oder gar drei) Farben gefärbt.

II. Das Grenzenproblem $\mathfrak{G}$. Weitere Spezialisierung.

Auf der so spezialisierten Karte betrachten wir nun das System der *Grenzen*, deren zwei wir *benachbart* nennen, wenn sie sich in einer Ecke treffen. Es läßt sich die völlige Äquivalenz der beiden Aufgaben zeigen:

$\mathfrak{L}$) Unter Anwendung von 4 Farben (a, b, c, d) benachbarte Länder zu unterscheiden,

und

$\mathfrak{G}$) Unter Anwendung von 3 Indizes (α, β, γ) benachbarte Grenzen zu unterscheiden.

Ist nämlich $\mathfrak{L}$ gelöst, so wird, da nur drei Farben an eine Ecke stoßen, keine b von c trennende Grenze mit einer a von d trennenden benachbart sein. Beide Arten können den Index α erhalten. Ebenso die c von a und die b von d trennenden den Index β; die a von b und die c von d trennenden den Index γ; wodurch $\mathfrak{G}$ gelöst ist. Liegt dagegen eine

Lösung von $\mathfrak{G}$ vor, so ordnen wir den Grenzen α, β, γ bezw. die Substitutionen $s_\alpha = (bc)(ad)$, $s_\beta = (ca)(bd)$, $s_\gamma = (ab)(cd)$ zu, geben einem Lande L eine beliebige Farbe, den benachbarten die, welche daraus durch die Substitutionen der gemeinsamen Grenzen hervorgehen, usw. Es ist zu zeigen, daß dabei kein Land mehr als eine Farbe erhält. Dazu legen wir von einem Punkte A eines Landes L einen kontinuierlichen Weg beliebig über die Karte (doch nicht gerade durch Ecken) nach einem Punkte B desselben Landes. Von A mit der Farbe des Landes L (sie sei a) ausgehend, wechseln wir beim Überschreiten jeder Grenze gemäß der zugeordneten Substitution die Farbe. Wir wollen zeigen, daß wir ohne Änderung der Endfarbe, mit der wir in B anlangen, den Weg in einen solchen zusammenziehen können, der L nicht verläßt, woraus folgt, daß die Endfarbe a ist. Das zu Beweisende folgt nun aus den Relationen der Vierergruppe: I) $s_\alpha^2 = s_\beta^2 = s_\gamma^2 = 1$, II) $s_\beta s_\gamma = s_\alpha$, $s_\gamma s_\alpha = s_\beta$, $s_\alpha s_\beta = s_\gamma$, III) $s_\alpha s_\beta s_\gamma = 1$.

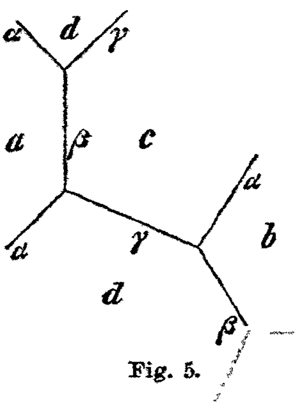


Fig. 5.

Wegen I) kann man ein Stück des Weges, das eine Grenze $2n$-mal hintereinander kreuzt, durch eins ersetzen, das sie nicht überschreitet, wegen II) eins, das über zwei benachbarte Grenzen geht, durch ein die dritte, beiden benachbarte, Grenze kreuzendes; endlich wegen III) ein alle drei Grenzen einer Ecke überschreitendes durch ein an der Ecke vorübergehendes Stück. Diese Umformungen leisten *auf einfach zusammenhängenden Flächen* das Verlangte, während auf einer Ringfläche z. B. der Weg sich möglicherweise überhaupt nicht so zusammenziehen ließe, daß er L nicht verläßt. Für Flächen vom Geschlecht $p = 0$ können wir daher schreiben:

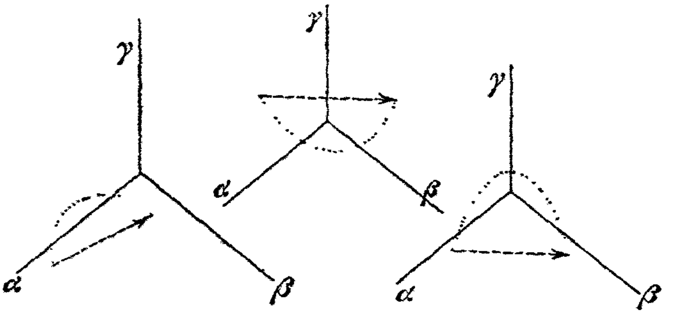


Fig. 6. Das punktierte Stück des Weges kann überall durch das gestrichelte ersetzt werden, und umgekehrt.

$$\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{G}.$$

Nun bilden wir Ketten $K_{\alpha\beta}$ von Grenzen, indem wir von einer Ecke aus zu derjenigen weitergehen, die mit ihr durch ein α verbunden ist, dann auf einem β fortschreiten u. s. f. abwechselnd auf α und β. Man berührt so jede Ecke, zu der man gelangt, nur einmal. Wegen der endlichen Anzahl der Ecken schließt sich die Kette. Es kann mehrere $K_{\alpha\beta}$ geben, die sich aber nicht durchsetzen. Sie trennen Regionen (R_{ab}) von Ländern, die nur die Farben a und b tragen, von Regionen (R_{cd}), auf der nur c und d vorkommen, denn die übrigbleibenden γ-Grenzen trennen nur a von b, resp. c von d. Ebenso gibt es Ketten $K_{\beta\gamma}$ und $K_{\gamma\alpha}$.

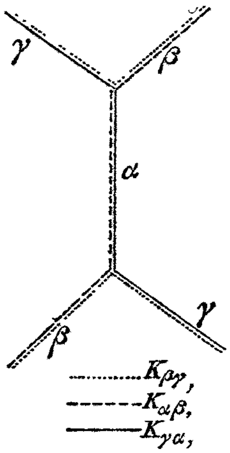


Fig. 7.

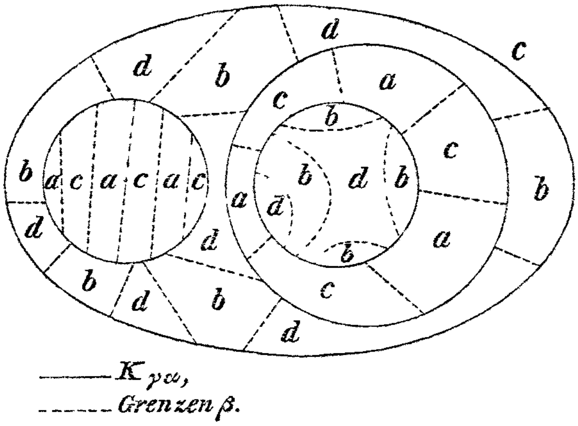


Fig 8

Offenbar ist es gestattet, auf einer $K_{\alpha\beta}$ für sich die Indizes α, β zu permutieren, was einer Permutation der beiden Farben auf gewissen Regionen R_{ab} und R_{cd} gleichkommt. Auch können wir mit richtiger Färbung eine Karte herstellen, die ein Land mehr enthält. Wir nehmen dazu auf zwei Grenzen *einer* $K_{\alpha\beta}$, die zugleich zur Begrenzung *eines* Landes L gehören, je eine neue Ecke an und verbinden letztere durch eine „neue" Grenze, die wir quer durch L ziehen. Von der neuen Grenze sagen wir, sie *trenne* (durch ihre Ecken) die Kette $K_{\alpha\beta}$. Auf dem einen Teile der getrennten $K_{\alpha\beta}$ vertauschen wir nun α mit β, während wir der neuen Grenze den Index γ erteilen. Die so hergestellte richtig gefärbte Karte hat ein Land, drei Grenzen und zwei Ecken mehr, als die ursprüngliche.

Jedesmal nun, wenn man auf einer Karte eine neue Grenze einführt, die einem Zweieck oder Dreieck angehört, trennt man damit eine Kette ($K_{\alpha\beta}$, $K_{\beta\gamma}$ oder $K_{\gamma\alpha}$), da die zwei neuen Ecken auf einer alten Grenze resp.

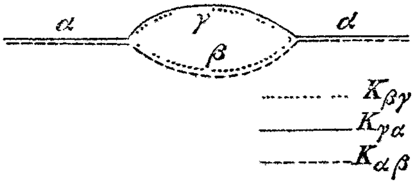


Fig. 9. Zweieck.

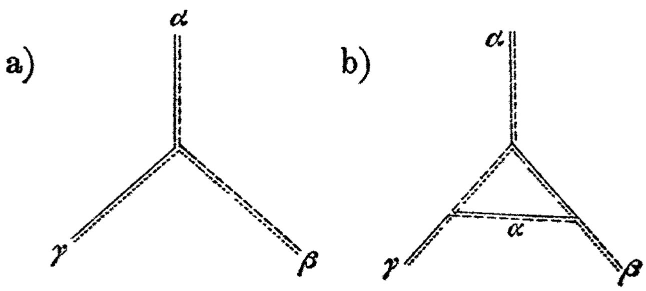
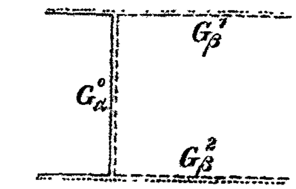


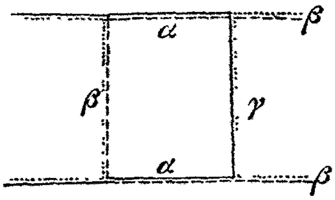
Fig. 10. Einführung eines Dreiecks. Aus a) wird b).

auf zwei benachbarten liegen werden. Es gelingt also stets, wenn eine Karte bereits richtig gefärbt ist, noch beliebig oft Zweiecke und Dreiecke einzuführen. Ist daher eine vorgelegte Karte zu färben, so entfernen wir von ihr alle Zweiecke durch Löschen je einer Grenze, sodann ein Dreieck ebenso, dann wieder ein etwa entstandenes Zweieck, dann das nächste Dreieck, usw. bis alle Zwei- und Dreiecke verschwunden sind, oder etwa die Anzahl der Länder sich auf vier reduziert. Es ist die Aufgabe, die restierende Karte zu färben.

a)



Doch auch die Vierecke lassen sich noch aus demselben Grunde von der Karte entfernen. Soll nämlich auf einer bereits gefärbten Karte durch Ziehen *einer* Grenze ein Viereck eingeführt werden, so mögen die neuen Ecken (Endpunkte der zu ziehenden Grenze) auf den alten Grenzen G^1 und G^2 zu liegen kommen.



b)

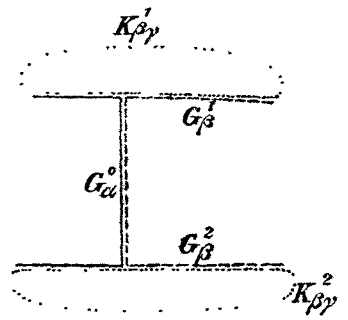


Fig. 11. Unter b) ist angedeutet daß $K^1_{\beta\gamma} \neq K^2_{\beta\gamma}$ ist.

Das neue Viereck wird außer der neuen Grenze G und Teilen der alten Grenzen G^1 und G^2 noch die G^1 und G^2 benachbarte Grenze G^0 haben. Der Kürze halber bedienen wir uns weiterhin folgender Bezeichnungen:

Es bedeute $K^{\lambda,\mu,\nu}_{\alpha\beta}$ die *Kette* der Indizes α, β, welche (unter andern) die Grenzen G^λ, G^μ, G^ν enthält, dementsprechend:

das Operationszeichen $\lfloor K^{\lambda,\mu,\nu}_{\alpha,\beta}\rceil$ die *Vertauschung der Indizes* α und β auf $K^{\lambda,\mu,\nu}_{\alpha,\beta}$.

G^λ_α schreiben wir, wenn G^λ den Index α hat.

1) Bei *gleichen* Indizes (β) von G^1 und G^2 haben wir dann das Schema G^0_α, G^1_β, G^2_β (G^0_γ ergibt nichts Neues, da es nur auf Verschiedenheit dieses Index von dem von G^1 und G^2 ankommt). Es existiert also eine $K^{0,1,2}_{\alpha\beta}$, die durch die neue Grenze G getrennt wird. (Fig. 11a.)

2) Bei *verschiedenen* Indices haben wir: G^0_α, G^1_β, G^2_γ. Existiert nun $K^{1,2}_{\beta\gamma}$, so wird sie durch G getrennt. Sind aber $K^1_{\beta\gamma}$ und $K^2_{\beta\gamma}$ verschiedene Ketten, so erhält man durch $\lfloor K^{1,2}_{\beta\gamma}\rceil$ das obige Schema G^0_α, G^1_β, G^2_γ wieder. (Fig. 11b.)

III. Die Karte ohne Zwei-, Drei- und Vierecke.

Die successive Entfernung der Zwei-, Drei- und Vierecke, wobei die Entstehung „falscher" Grenzen zu vermeiden ist*), kann auf eine Karte von nur vier Ländern führen, dann ist die Aufgabe gelöst. Im allgemeinen wird jedoch eine kompliziertere Karte übrig bleiben, von der wir beweisen:

*) Statt eine Vierecksgrenze zu entfernen und dadurch die gegenüberliegende zur falschen zu machen, bildet man nach pag. 413 Teilkarten oder entfernt eine andere Vierecksgrenze, etc., s. a. pag. 425.

1) Sie enthält Fünfecke (mindestens 12).

2) Wenigstens *ein* Fünfeck grenzt an ein Land von nicht mehr als sechs Ecken. (Dies im Interesse fernerer Übersichtlichkeit.)

Sei l die Anzahl der Länder,
l_ν „ „ „ ν-ecke darunter,
g „ „ „ Grenzen,
e „ „ „ Ecken,

so gilt, wie man sich leicht überzeugt, Eulers Polyedersatz:

$$l - g + e = 2,$$

oder wegen

$$2g = 3e = \Sigma \nu l_\nu \qquad (\nu = 5, 6, \cdots)$$

und

$$l = \Sigma l_\nu,$$

$$\sum_\nu (6-\nu) l_\nu = 12,$$

d. h.

$$l_5 = 12 + \Sigma(\nu - 6)\, l_\nu \qquad (\nu = 7, 8, \cdots),$$

womit die erste Behauptung erwiesen ist.

Außerdem folgt $g = 3(l-2)$, $e = 2(l-2)$. Grenzten nun die Fünfecke nirgends aneinander, so trügen sie schon allein $5l_5$ zur Anzahl der Ecken bei; und grenzten auch die Sechsecke an keine Fünfecke (aber beliebig oft aneinander), so würden sie noch mehr als $\frac{6l_6}{3} = 2l_6$ hinzufügen. Es müßte daher

$$5l_5 + \overset{2}{\cancel{3}}\, l_6 < e,$$

aber

$$e = 2\Sigma l_\nu - 4 \qquad (\nu = 5, 6, \cdots)$$

also

$$3l_5 < 2\Sigma l_\nu - 4 \qquad (\nu = 7, 8, \cdots).$$

Daraus ergäbe sich:

$$40 + \sum_\nu (3\nu - 20)\, l_\nu < 0 \qquad (\nu = 7, 8, \cdots)$$

was nicht angeht. Es würden sogar, wenn die Fünfecke paarweise aneinander (aber an keine Sechsecke) grenzten, noch zu viele Ecken herauskommen.

Bei der ferneren Reduktion beschränken wir uns also auf das Auslöschen von solchen Grenzen, die zwischen zwei Fünfecken oder zwischen Fünfeck und Sechseck verlaufen. Daß man auf bereits gefärbter Karte solche Grenzen wieder einführen, d. h. Sechsecke (auf sechs Weisen) in zwei Fünfecke, Siebenecke in ein Fünf- und ein Sechseck jedesmal *unter Trennung einer Kette* zerlegen kann, muß nun gezeigt werden.

IV. Teilung eines Sechsecks in zwei Fünfecke.

Die Sechsecksgrenzen seien in natürlicher Folge G^1, G^2, G^3, $\cdots G^6$ (Umlaufssinn gleichgültig). Es sei beabsichtigt, die neuen Ecken auf G^1 und G^4 zu legen, von denen wir gleich annehmen, daß sie nicht auf einer Kette liegen, und denen wir daher denselben Index geben können. G^2, G^3 müssen dann die anderen Indizes haben: so erhalten wir das Schema: G^1_β, G^2_α, G^3_γ, G^4_β, dazu G^5_α, G^6_γ (oder G^5_γ, G^6_α, was wir später betrachten), $K^{1,2}_{\alpha\beta} \neq K^{4,5}_{\alpha\beta}$, $K^{1,6}_{\beta\gamma} \neq K^{4,3}_{\beta\gamma}$ und zunächst $K^{2,3}_{\gamma\alpha} = K^{5,6}_{\gamma\alpha}$. Durch $\lfloor K^4_{\alpha\beta} \rceil$ und $\lfloor K^1_{\beta\gamma} \rceil$ könnte man nun eine $K^{1,2,3,4}_{\gamma\alpha}$ herstellen, wenn eine dieser Operationen die Kette der anderen intakt ließe. Es soll also ferner $\lfloor K^4_{\alpha\beta} \rceil$ eine $K^{1,3}_{\beta\gamma}$, $\lfloor K^1_{\beta\gamma} \rceil$ eine $K^{4,2}_{\alpha\beta}$ hervorbringen, desgl. wegen der Symmetrie $\lfloor K^4_{\beta\gamma} \rceil$ eine $K^{1,5}_{\alpha\beta}$, $\lfloor K^1_{\alpha\beta} \rceil$ eine $K^{4,6}_{\beta\gamma}$.

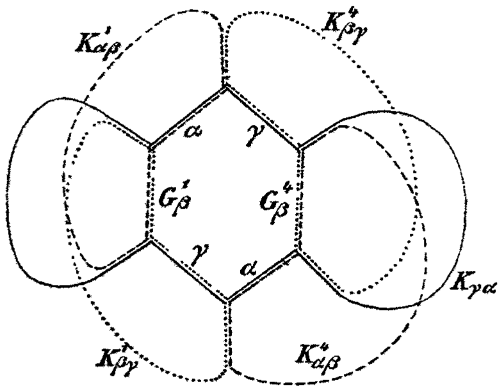


Fig. 12. Von den Ketten ist nur gezeigt, wie sie sich schließen.

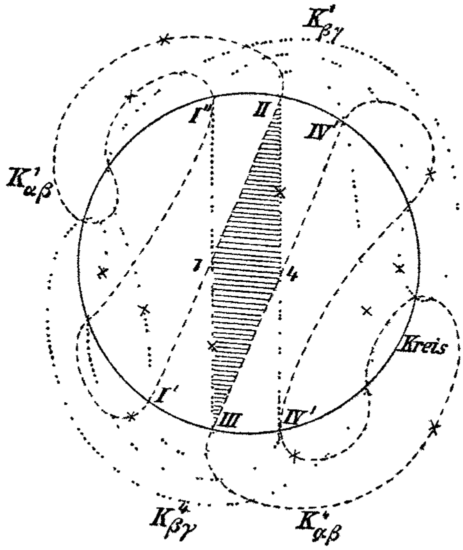


Fig. 13. Hulfsfigur zu Fig. 12. Die Ketten sind nach Belieben weiter verschlungen. Die mit Kreuzen bezeichneten Stücke bilden ein Beispiel eines „zusammengesetzten Weges".

Nun ziehe man noch unmittelbar außerhalb der $K^1_{\gamma\alpha}$, d. h. auf der Seite, die das Sechseck nicht enthält, eine geschlossene Kurve, die der $K^1_{\gamma\alpha}$ in ihrem ganzen Verlaufe folgt, die also die β-Grenzen, welche von der $K^1_{\gamma\alpha}$ auswärts gehen — aber keine andern Grenzen — schneidet. Auf dieser Kurve, die wir einfach den *Kreis* nennen wollen, liegen also in gerader Anzahl Schnittpunkte mit Ketten $K_{\alpha\beta}$, die zugleich solche mit $K_{\beta\gamma}$ sind. Weder die $K_{\alpha\beta}$ durchdringen einander, noch die $K_{\beta\gamma}$. Insbesondere werden die Ketten $K^1_{\alpha\beta}$ und $K^4_{\alpha\beta}$ von $K^1_{\beta\gamma}$ und $K^4_{\beta\gamma}$ so durchsetzt, daß unser Sechseck, oder wenn wir sämtliche β-Grenzen so verkürzen, daß sie nur noch als Durchdringungsstellen der $K_{\alpha\beta}$ und $K_{\beta\gamma}$ anzusehen sind, ein Viereck entsteht, von dem zwei Ecken (II und III) auf dem Kreise, zwei (1 und 4) innerhalb desselben liegen.

Wir beweisen den *Hülfssatz*, *daß bei dieser Anordnung ein Weg, der von* 1 *auf der* $K_{\alpha\beta}$ *bis zum Kreise fortschreitet, dann von dort außerhalb des Kreises auf* $K_{\beta\gamma}$ *bis zum nächsten Schnittpunkte mit dem Kreise, dann innerhalb auf* $K_{\alpha\beta}$ *u. s. f. immer innerhalb auf* $K_{\alpha\beta}$, *außerhalb auf* $K_{\beta\gamma}$, *den Punkt* 4 *berühren muß, ehe er zu* 1 *zurückkehrt.*

Bezeichnet man noch mit I′, I″ die zweiten Punkte, bei denen man von 1 ausgehend auf $K_{\beta\gamma}$, $K_{\alpha\beta}$ aus dem Kreise heraustritt, mit IV′, IV″ die entsprechenden, welche man von 4 aus erreicht, und numeriert von III aus in beliebiger Richtung die Schnittpunkte des *Kreises*, so erhalten *die* Schnittpunkte, die beim Umlauf um eine *Kette* aufeinanderfolgen, abwechselnd gerade und ungerade Nummern.

Geht man nun von 1 aus über III abwechselnd innerhalb des Kreises auf $K_{\alpha\beta}$, außerhalb aber auf $K_{\beta\gamma}$ weiter, so zerschneidet dieser zusammengesetzte Weg (der sich bei 1 schließen muß, da er jeden seiner Schnittpunkte nur einmal berührt) den Kreis in eine gerade Anzahl Teile, deren jeder eine gerade Anzahl von Schnittpunkten umfaßt. Ginge der Weg durch II, so käme man von dort nach 4. Andernfalls müßten die Endpunkte des Kreisteiles, auf dem II liegt, von II selbst beide um eine ungerade (in den späteren Hülfsfiguren auch beide um eine gerade) Anzahl Schnittpunkte entfernt liegen. Hierzu zwingt an der einen Seite der Verlauf der $K^4_{\alpha\beta}$, auf der andern der der $K^1_{\beta\gamma}$, die sich in II treffen. Da II selbst noch hinzukommt, so läge eine ungerade Anzahl Schnittpunkte zwischen einem ungerade und einem gerade numerierten, worin ein Widerspruch liegt.

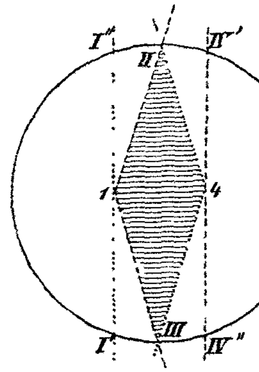


Fig. 14.

Auf der Karte können wir nun den „zusammengesetzten Weg“ durch $[K_{\gamma\alpha}]$ auf allen $K_{\gamma\alpha}$ *außerhalb* $K^2_{\gamma\alpha}$ zu *einer* $K^{1,4}_{\alpha\beta}$ machen. Zugleich entsteht eine $K^{1,4}_{\beta\gamma}$. Die $[K_{\gamma\alpha}]$ vertauscht nämlich außen überall $K_{\alpha\beta}$ mit $K_{\beta\gamma}$. Auch bei G^5_γ, G^6_α führt dieses Verfahren zum Ziele, nur daß die Seiten des zu betrachtenden Vierecks *einer* $K_{\alpha\beta}$ resp. *einer* $K_{\beta\gamma}$ angehören. Den Fall endlich, daß $K^2_{\gamma\alpha} \neq K^5_{\gamma\alpha}$ ist, behandeln wir in dem Abschnitt über Kreuzung der Grenzen.

V. Teilung des Siebenecks in Fünf- und Sechseck.

Wieder seien G^1_β, G^4_β die Grenzen, welche die neuen Ecken tragen sollen. Nach dem früheren können wir gleich das Schema ansetzen, welches allein Schwierigkeiten bietet:

$$G^1_\beta,\ G^2_\alpha,\ G^3_\gamma,\ G^4_\beta,\ K^1_{\alpha\beta} \neq K^4_{\alpha\beta},\ K^1_{\beta\gamma} \neq K^4_{\beta\gamma},\ \text{zunächst}\ K^{2,5,7}_{\gamma\alpha};$$

dazu

1) G^6_β mit den Unterfällen G^5_α, G^7_γ oder G^5_γ, G^7_α

oder

2) $K^{5,6,7}_{\gamma\alpha}$ „ „ „ $G^5_\alpha, G^6_\gamma, G^7_\alpha$ „ $G^5_\gamma, G^6_\alpha, G^7_\gamma$.

Die 1) entsprechenden Figuren des Hülfssatzes unterscheiden sich von denen beim Sechseck dadurch, daß der Punkt III, in dem sich $K^1_{\alpha\beta}$ und $K^4_{\beta\gamma}$ treffen, in das Innere des Kreises rückt, so daß wir noch die weiteren Punkte III′ und III″ erhalten, in denen $K^4_{\beta\gamma}$, $K^1_{\alpha\beta}$ aus dem Kreise treten. Dabei können III III′, III III″, da sie ja auf der Karte in *eine* Grenze zusammenfallen, ebensowenig von einer Kette überschritten werden, wie die Seiten des charakteristischen Vierecks der Figur. Zwischen III′ und III″ kann der Kreis von $K_{\alpha\beta}$ sowohl wie von $K_{\beta\gamma}$ nur eine gerade Anzahl von Malen überschritten werden. Auf diese Figur findet die frühere Überlegung sofort Anwendung, indem man wieder dasjenige von dem „zusammengesetzten Wege“ ausgeschnittene Stück des Kreises betrachtet, welches den Punkt II enthält.

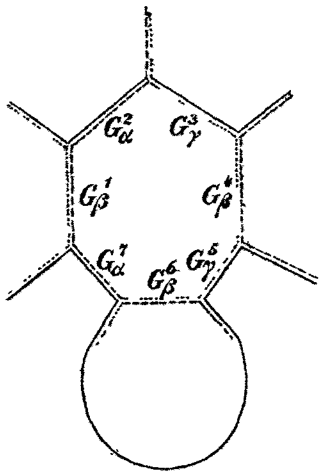


Fig. 15.

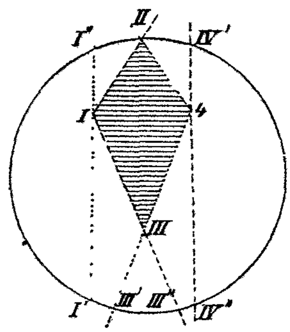


Fig. 16. Hülfsfigur zu Fig. 15.

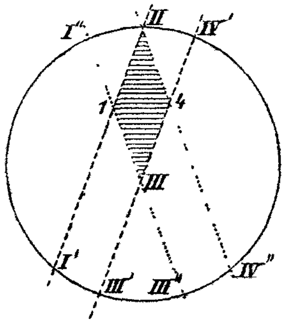


Fig. 17.

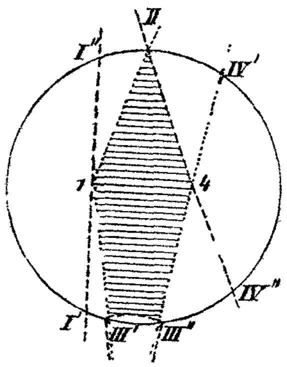


Fig. 18.

Schließlich gilt dasselbe von dem zweiten Falle, in welchem der Punkt III der Hülfsfigur in zwei, III′ und III″ auseinanderfällt, zwischen denen aber, da sie auf der Karte durch eine γ-Grenze (resp. α-Grenze) verbunden sind, keine weiteren Schnittpunkte des Kreises liegen.

VI. Das Kreuzen der Grenzen.

Um in dem noch restierenden Falle, daß $K^2_{\gamma\alpha} \neq K^5_{\gamma\alpha}$ ist — $K^5_{\gamma\alpha} \neq K^7_{\gamma\alpha}$ brauchen wir nicht zu berücksichtigen, da $[K^7_{\gamma\alpha}]$ sofort eine $K^{1,4}_{\alpha\beta}$ oder $K^{1,4}_{\beta\gamma}$ schaffen würde — den Anschluß an das Bewiesene zu gewinnen, bedienen wir uns der *Kreuzung der Grenzen.* Darunter verstehen wir, falls die Grenze $\mathfrak{G}^0$ mit $\mathfrak{G}^1$ und $\mathfrak{G}^2$ in der Ecke $\mathfrak{E}^1$, mit $\mathfrak{G}^3$ und $\mathfrak{G}^4$ in $\mathfrak{E}^3$ zusammenstößt*), den Ersatz von $\mathfrak{G}^0$ durch eine Grenze $\mathfrak{G}$, die sich in einer Ecke $\mathfrak{E}^2$ mit $\mathfrak{G}^2$ und $\mathfrak{G}^3$, in der andern $\mathfrak{E}^4$ mit $\mathfrak{G}^1$ und $\mathfrak{G}^4$ trifft.

Unterscheiden wir nun die Ecken einer gefärbten Karte durch Vorzeichen ($\pm$) jenachdem die cyklische Folge $(\alpha\beta\gamma)$ ihrer Grenzen um sie herum in einer festgesetzt positiven Drehrichtung läuft oder umgekehrt, so ist klar, daß sich jede Grenze kreuzen läßt, deren Enden gleiche Vorzeichen aufweisen. (Fig. 19, 20.) Daß dann die beiden Länder, die durch die Kreuzung zu benachbarten werden, bereits verschieden gefärbt sind, kann man auch aus dem Schema der Farbenfolge in positiver Richtung bei einer $+$ Ecke ersehen, nämlich (abc), (dba), (dac) und (dcb), während die übrigen vier Cyklen einer negativen Ecke entsprechen.

Die Vertauschung der Indizes einer Kette ändert die Vorzeichen sämtlicher Ecken, durch die sie geht.

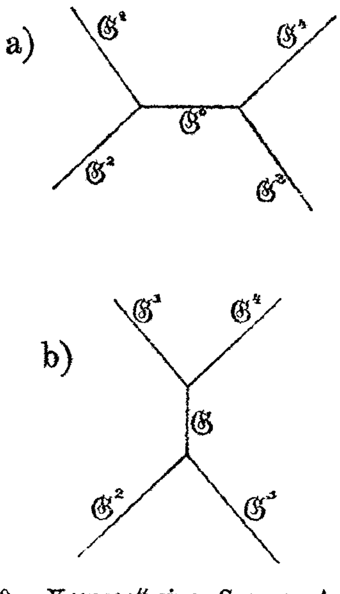


Fig. 19. „Kreuzen" einer Grenze. Aus a) wird b).

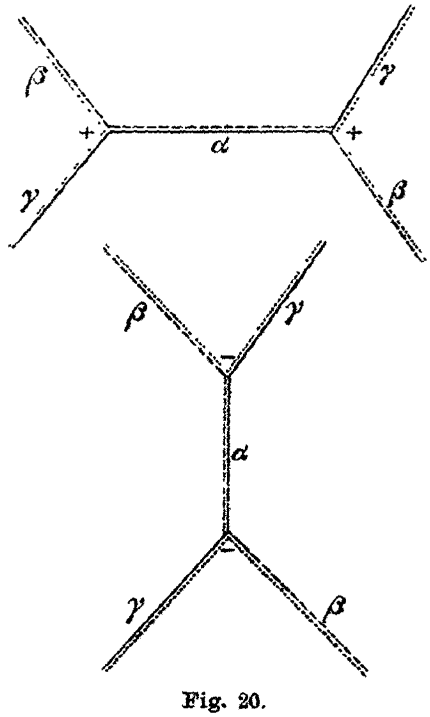


Fig. 20.

Ist nun $K^2_{\gamma\alpha} \neq K^4_{\gamma\alpha}$ und gibt es β-Grenzen, die beide verbinden, so können die $K_{\gamma\alpha}$ durch Kreuzung einer β-Grenze zusammengeschlossen werden, wobei noch $[K^4_{\gamma\alpha}]$ nötig werden kann, um die Ecken der β-Grenze auf gleiches Zeichen zu bringen. Aber $[K^4_{\gamma\alpha}]$ kann nur zu einem anderen bereits besprochenen Typus der Figur führen, indem für G^5_α, G^7_γ die Indizierung G^5_γ, G^7_α eintritt. Entsteht dabei etwa schon eine $K^{1,4}_{\alpha\beta}$ oder $K^{1,4}_{\beta\gamma}$, so ist die Aufgabe gelöst; andernfalls tritt das frühere Verfahren

*) $\mathfrak{G}^1\mathfrak{G}^2\mathfrak{G}^3\mathfrak{G}^4$ soll die Reihenfolge um $\mathfrak{G}_0$ herum sein.

in seine Rechte. Der Verlauf der $K_{\alpha\beta}$ und $K_{\beta\gamma}$ wird, wie man sich leicht überzeugt, durch Kreuzung einer β-Grenze nicht gestört. Die Ecken der gekreuzten Grenze haben unter sich gleiche, den früheren entgegengesetzte Vorzeichen.

Um uns nun zu überzeugen, daß die notwendigen Kreuzungen — denn es können mehrere nötig werden, um $K^2_{\gamma\alpha}$ mit $K^5_{\gamma\alpha}$ zusammenzuschließen — später wieder rückgängig gemacht werden können, bemerken wir, 1) daß die noch auszuführende „$[K_{\gamma\alpha}]$ außerhalb des Kreises" die Ecken der gekreuzten Grenze, die ja innerhalb des Kreises liegen, nicht berührt, 2) daß die teilweise $[K_{\alpha\beta}]$ oder $[K_{\beta\gamma}]$, die beim Ziehen der Fünfecksgrenze erfolgt, beide Ecken an der gekreuzten Grenze gleichmäßig affiziert.

VII. Das Eckenproblem, Vereinfachungen und Folgerungen.

Umläuft man ein Land in positiver Richtung, so findet man, daß der Index der Grenze, auf der man sich jeweils befindet, beim Passieren einer positiven Ecke gemäß der cyklischen Substitution $(\alpha\gamma\beta)$, bei einer negativen hingegen gemäß $(\alpha\beta\gamma)$ geändert wird. Da man bei vollem Umlaufe zu demselben Index zurückkehren muß, so ist, wenn p positive, n negative Ecken auf der Begrenzung eines Landes liegen:

$$(\alpha\gamma\beta)^p \cdot (\alpha\beta\gamma)^n = 1,$$

oder wegen

$$(\alpha\beta\gamma)^2 = (\alpha\gamma\beta), \quad (\alpha\gamma\beta)^2 = (\alpha\beta\gamma), \quad (\alpha\beta\gamma)^3 = (\alpha\gamma\beta)^3 = 1,$$

$$p \equiv n, \ (3).$$

Gelingt es, alle Ecken einer Karte mit Vorzeichen $\pm$ zu versehen, so daß für die Begrenzung jedes Landes die Differenz der positiven und negativen Eckenzahlen durch drei teilbar ist, so ist dadurch offenbar sofort eine richtige Indexverteilung für die Grenzen gegeben. Bezeichnen wir die genannte Aufgabe als *Eckenproblem* ($\mathfrak{E}$), so läßt sich die auf pag. 416 gegebene Äquivalenz zu folgender ergänzen:

$$\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{G} \equiv \mathfrak{E}.$$

Es zeigt sich von diesem Standpunkte aus:

1) Zweiecke erhalten die Signatur $+-$, welche vertauschbar ist $(-+)$.

2) Dreiecke $+++$ oder $---$, und zwar das erstere, wenn die *alte* Ecke, an der sie angebracht wurden, das Minuszeichen hatte. Daraus folgt, daß man jede Karte durch Anbringen von Dreiecken an ihren Minusecken in eine solche verwandeln kann, auf der die Eckenzahl jedes Landes durch drei teilbar ist — denn sie hat nun nur noch Plusecken. Dasselbe geschieht, wenn man Dreiecke an den Plusecken allein anbringt. Schließlich ergibt sich daraus der Polyedersatz:

Jedes Polyeder, in dessen Ecken sich je drei Kanten treffen, läßt sich durch Kappen höchstens der Hälfte seiner Ecken in ein solches verwandeln, dessen sämtliche Seiten durch drei teilbare Eckenzahlen besitzen.

3) Vierecke werden signiert $++--$ oder $+-+-$. Es ergibt sich dabei leicht, daß man sie auch durch Ziehen *zweier* ihrer Gegengrenzen einführen kann. Man trennt dadurch nämlich außer dem Viereck zwei Teile eines alten Landes ab, dessen Eckensumme durch drei teilbar war. Entweder ist die Eckensumme jedes dieser Teile durch drei teilbar, dann signieren wir das Viereck $+-+-$, wobei jedes Nachbarland den

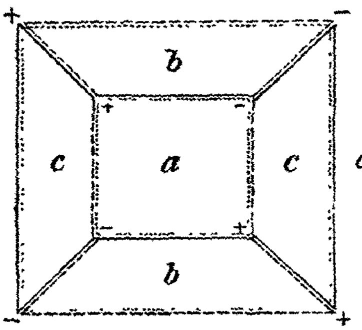


Fig 21. Wurfel (vierfarbig).

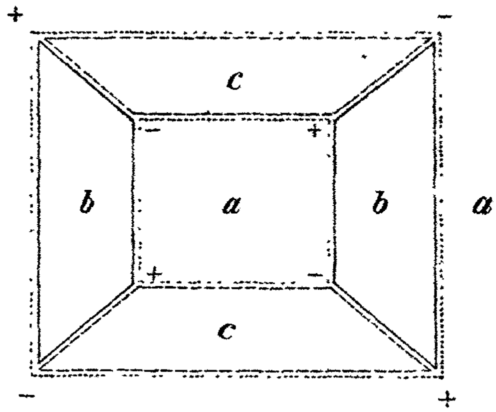


Fig. 22. Wurfel (dreifarbig).

Zuwachs 0 zur Eckensumme erhält. Oder es fehlt dem einen Teile ein $+$, dem andern zwei $+$, dann signieren wir $--++$, indem wir für ein $+$ zwei $-$ geben, und umgekehrt. Auch hierdurch kann man bei der Zerstörung der Vierecke dem Auftreten falscher Grenzen vorbeugen.

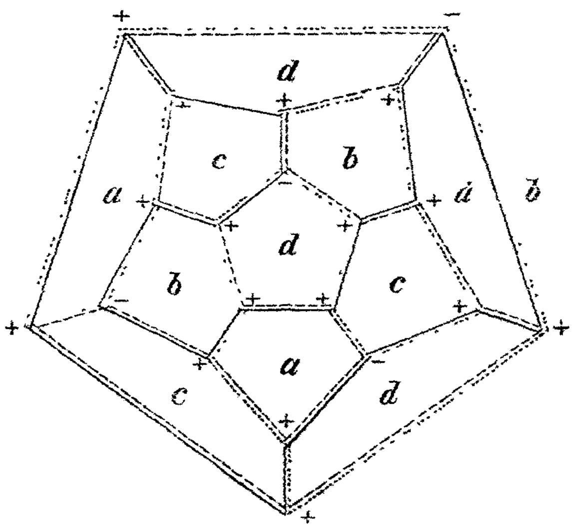


Fig. 23. Pentagon-Dodekaeder.
Die Minusecken bilden ein reg. Tetraeder, deren sich auf diese Weise zehn dem reg. Dodekaeder einschreiben lassen. Es gibt je *eine* $K_{\beta\gamma}$, $K_{\gamma\alpha}$ und $K_{\alpha\beta}$.

4) Bei Fünfecken muß eine Ecke ein von den übrigen verschiedenes Vorzeichen haben: $++++-$. Es läßt sich auch beweisen, daß jede Ecke des Fünfecks zu dieser ausgezeichneten gemacht werden kann. Beim Ikosaeder ergeben sich hieraus z. B. zehn Färbungen, welche nicht durch einfache Permutation der Farben a, b, c, d auseinander hervorgehen.

5) Man wird oft die Zerstörung der Drei-, Vier- und Fünfecke so leiten können, daß eine Karte entsteht, die nur Länder gerader Eckenzahl aufweist. Letztere ist leicht, und zwar mit drei Farben zu färben. Da die Ecken nämlich von einer be-

stimmten aus teils stets ungerade teils stets gerade Nummern erhalten, auf welcher Grenzenfolge man sie auch abzählt, so gebe man den geraden und ungeraden verschiedenes Vorzeichen. Die Folge ist, daß die Begrenzung jedes Landes eine Kette wird, und da eine Grenze, welche Ecken verschiedenen Zeichens verbindet, mit ihren Enden an gleichgefärbte Länder stößt, so ist ersichtlich, daß jede $K_{\gamma\alpha}$ dieselbe Farbe umschließt; ebenso alle $K_{\alpha\beta}$, und alle $K_{\beta\gamma}$. Man hat hier den Vorteil, daß die zunächst zu ziehende Grenze (und wahrscheinlich mehrere) ohne weiteres eine Kette trennt. (S. Fig. 21.)

6) Hieraus ergibt sich noch — was auch sonst klar ist —, daß eine Karte, in deren Ecken sich je eine *gerade* Anzahl von Grenzen treffen, in zwei Farben auszuführen ist. Die einzuführenden Hülfs-Ländchen L^0 (s. pag. 415) machen nämlich alle Begrenzungen geradzahlig, haben selbst eine gerade Anzahl Ecken und erhalten bei obiger Ausführung der Karte in drei Farben sämtlich dieselbe Farbe.

7) Der Vierfarbensatz und die Beweismethode scheinen sich auch auf Einteilungen des dreidimensionalen Raumes verallgemeinern zu lassen, wobei aber mehrfach zusammenhängende Raumzellen (etwa infolge von Röhrenleitungen usw.) nicht vorkommen dürfen. Allerdings ist die chromatische Zahl des Raumes noch nicht festgestellt.

Göttingen, 1. Mai 1903.