Transcendenz von e und π.

Von

P. Gordan in Erlangen.

Hermite hat die Transcendenz von e und Lindemann die von π bewiesen, d. h. sie haben gezeigt, dass keine ganze Function mit ganzzahligen Coefficienten e oder π zur Wurzel hat.

Neuerdings haben Hilbert und Hurwitz Vereinfachungen des Beweises angebracht, in Folge deren er sich folgendermassen gestaltet.

Die Function e^x ist durch die Reihe definirt:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots .$$

Dieselbe geht, wenn man die symbolische Bezeichnung einführt:

$$r! = h^r$$

und mit dieser Grösse und einer beliebigen ganzen Zahl c_r multiplicirt, in die Formel über:

$$(1) \qquad c_r h^r e^x = c_r (x+h)^r + c_r x^r u_r \ldots$$

wo u_r die Reihe:

$$u_r = \frac{x}{r+1} + \frac{x^2}{r+1 \cdot r+2} + \cdots$$

bedeutet. Ist:

$$\xi = \text{mod.}\, x$$

so hat man:

$$\text{mod.}\, u_r < e^\xi$$

und wenn man:

$$u_r = q_r e^\xi$$

setzt:

$$\text{mod.}\, q_r < 1 .$$

Aus der Formel (1) folgen nun die folgenden:

$$c_r h^r e^x = c_r (x+h)^r + c_r x^r q_r e^\xi,$$

$$e^x \sum_{r=0}^{r=s} c_r h^r = \sum_{r=0}^{r=s} c_r (x+h)^r + e^\xi \sum_{r=0}^{r=s} c_r q_r x^r$$

und, wenn man:

$$\sum_{r=0}^{r=s} c_r x^r = \varphi(x); \qquad \sum_{r=\nu}^{r=s} c_r q_r x^r = \psi(x)$$

setzt:

(2) $$e^x \varphi(h) = \varphi(x+h) + e^{\xi} \psi(x).$$

Giebt es nun eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} C_\varkappa e^\varkappa = 0,$$

so wird aus Formel (2):

(3) $$0 = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} C_\varkappa \varphi(\varkappa+h) + \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} C_\varkappa \psi(\varkappa) e^\varkappa.$$

Wählt man für φ die Function:

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(1-x, 2-x \ldots n-x)^p$$

und für p eine Primzahl grösser als die Zahlen $\cancel{m}$ n und C_0, so werden in F. (3) die Grössen:

$$\varphi(h+\varkappa)$$

ganze Zahlen.

$$\varphi(h+1), \ \varphi(h+2) \ldots \varphi(h+n)$$

haben den Factor p,

$$C_0 \varphi(h)$$

hat ihn nicht.

Lässt man p wachsen, so werden φ und ψ beliebig klein, Formel (3) ist unmöglich und die Zahl e transcendent.

Wäre $i\pi$ die Wurzel einer Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten

(4) $$c(x-w_1)(x-w_2)\ldots(x-w_\varrho) = 0,$$

so hätte man die Formel:

(5) $$(1+e^{w_1})(1+e^{w_2})\cdots(1+e^{w_\varrho}).$$

Befinden sich unter den Summen

$$w_\varkappa; \ \ w_i + w_\varkappa; \ \ w_i + w_\varkappa + w_\lambda \ldots$$

$C-1$ verschwindende Grössen und bezeichnet man die übrigen durch:

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3 \ldots \alpha_n$$

und ihre Moduln durch:

$$a_1, \ a_2, \ a_3 \ldots a_n,$$

so wird Formel (5):

(6) $$0 = C + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} e^{\alpha_\varkappa}.$$

Sowohl die symmetrischen Functionen der $cw_\varkappa$ als auch die der $c\alpha_\varkappa$ sind ganze Zahlen.

Nach Formel (2) wird dann:

$$0 = C\varphi(h) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \varphi(\alpha_\varkappa + h) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} e^{o_\varkappa}\,\psi(\alpha_\varkappa). \tag{7}$$

Dieses Mal sei:

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\, c^{np+p-1}(x - \alpha_1 \cdot x - \alpha_2 \cdots x - \alpha_n)^p$$

und p eine Primzahl grösser als die Zahlen:

$$C;\; n;\; c;\; c^n \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n.$$

Die Grössen $\varphi(h)$ und $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \varphi(\alpha_\varkappa + h)$ sind ganze Zahlen:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \varphi(\alpha_\varkappa + h)$$

hat den Factor p; $C\varphi(h)$ aber nicht.

Wächst p, so werden die Moduln von φ und ψ beliebig klein. Die Formel (7) ist unmöglich und daher π eine transcendente Zahl.

Erlangen im Mai 1893.