

Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici.

Nota di

CORRADO SEGRE a Torino.

Indem die Mathematik darnach strebt, Ausnahmen von Regeln zu beseitigen und verschiedene Sätze aus einem Gesichtspunkte aufzufassen, wird sie häufig genöthigt, Begriffe zu erweitern oder neue Begriffe aufzustellen, was beinahe immer einen Fortschritt in der Wissenschaft bezeichnet.)*

Con queste parole si apre l'opera profonda in cui lo STAUDT ha dato alla scienza la teoria sintetica degli elementi imaginari. Esse caratterizzano un importante indirizzo della Matematica: quell'indirizzo appunto da cui son derivate in particolare le estensioni dei numeri e degli elementi geometrici *reali* in numeri ed elementi *complessi*.

Lo stesso indirizzo, lo scopo di generalizzare sempre più, e di toglier via le eccezioni, distinzioni di casi, ecc., conduce a nuove estensioni. Anzitutto, — introdotti gli elementi complessi, — gli enti **) definiti da legami *analitici, funzionali* fra le coordinate degli

*) Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Vorwort.

**) Gli *enti* di cui parliamo e parleremo possono esser composti in diversi modi: cioè *varietà di elementi* — punti, rette, piani, ecc., — (o dei *numeri* che rappresentano analiticamente questi elementi); ed anche ad esempio varietà di *coppie di elementi*, cioè *corrispondenze*: usando questo vocabolo (come c'accadrà pure in seguito) nel senso più largo, abbracciante i connessi, ecc., sicchè ad un elemento ne possano anche corrispondere infiniti.

Quando di un elemento od ente qualsiasi non si dica altro, s'intenderà sempre che è *complesso*, cioè *reale od imaginario*. L'ente *coniugato* di un dato è quello che ha per elementi i coniugati degli elementi di questo: così la *corrispondenza coniugata* di una data è quella in cui si corrispondono due elementi quando sono i coniugati di due elementi omologhi della data, ecc. L'ente si dirà *reale* oppure *imaginario* secondo che coincide o no col coniugato. Non esigiamo dunque per chiamar *reale* un ente che esso si componga solo di elementi reali, e nemmeno che ne contenga; ma invece che per ogni suo elemento esso contenga anche il coniugato.

elementi (come le curve e superficie, i complessi e sistemi di rette, ecc.) si posson generalizzare in quelli definiti da analoghi legami *fra le componenti reali* (parti reali e coefficienti di i) di quelle coordinate — o, ciò che è lo stesso, fra le coordinate stesse e le loro coniugate. In particolare quando i detti legami siano *algebrici* si vengono a generalizzare gli *enti algebrici* in quelli che io chiamo *enti iperalgebrici*. D'altra parte, come per lo studio degli enti algebrici fu necessaria l'introduzione degli elementi complessi, così per quello più vasto degli enti iperalgebrici si rivela necessaria, od almeno utilissima, una nuova estensione di questi elementi in quelli che dico *elementi bicomplex*.

Lo studio degli enti iperalgebrici si può fare *direttamente* con procedimenti analoghi a quelli usati per gli enti algebrici. Così, a quel modo che le più semplici corrispondenze algebriche, *le proiettività*, servono per la generazione e lo studio successivo delle varietà algebriche di 2^o, 3^o, . . . ordine, ecc., così le più semplici corrispondenze iperalgebriche, *le antiproiettività*, servono a generare ed a studiare successivamente i più semplici enti iperalgebrici. Di questo procedimento, per così dire *elementare*, ho dato un Saggio in un lavoro che, sotto il titolo «*Un nuovo campo di ricerche geometriche*», ho pubblicato (e non ancora completamente) negli ultimi volⁱ (XXV e XXVI) degli Atti dell' Accademia di Torino. *)

Un' altra via per lo studio degli enti iperalgebrici parte dalle *rappresentazioni* di questi con enti *algebrici reali*, le quali si hanno mediante rappresentazioni reali degli elementi complessi delle forme fondamentali di 1^a, 2^a, . . . specie. È questa la via che sarà seguita nel presente lavoro: essa ci farà ritrovare alcuni dei risultati di quel Saggio**), ma ci condurrà pure in modo semplice ad alcune proposizioni molto più generali che quelle ivi contenute. Scegliendo fra le rappresentazioni reali delle forme fondamentali quelle che meglio soddisfano ai requisiti desiderabili in tali rappresentazioni (ad esempio quelle, perfettamente univoche, delle forme semplici sulla sfera reale, delle forme fondamentali doppie su una certa varietà reale a 4 dimensioni e del 6^o ordine di S_8 luogo di due schiere di piani imaginari, ecc.), si hanno dalla natura delle varietà imagini degli utili suggerimenti di

*) Le mie ricerche ivi esposte e quelle (già ivi annunziate) che si troveranno in questa Nota hanno alcuni punti di contatto colla Dissertazione del sig. Juel: *Bidrag til den imaginære Linies og den imaginære Plans Geometri* (Kjøbenhavn 1885), sebbene fossero fatte indipendentemente da essa. Rammaricando di non esser in grado di farne citazioni più precise, rimando senz' altro il lettore a quella Dissertazione.

**) I concetti di quel lavoro (che citerò sempre col nome di *Saggio*) che sono più essenziali per lo scopo di questo, saranno qui riportati, sicchè non sarà necessario di conoscere quello per intendere questo. Però nel *Saggio* si trovano anche molti sviluppi e dimostrazioni che qui non starò a ripetere.

proprietà e di generalizzazioni. È così che ci si presenteranno spontanei i suddetti *elementi bicompleksi* (i quali saranno poi illuminati analiticamente da considerazioni sui *numeri bicompleksi* che rientrano nelle recenti ricerche dei sigⁱ Weierstrass, Dedekind, ecc. sui numeri a più unità); e che poi saremo condotti ad estendere indefinitamente tanto questa nozione quanto quella degli enti iperalgebrici.

Non è forse inopportuno di rilevare che gli argomenti accennati in questa Nota non offrono solo interessi, sì geometrici che analitici e specialmente algebrici, per se stessi, ma possono fornire molteplici aiuti a parecchie teorie matematiche. Dovunque compajono variabili complesse accanto a cui si debbano considerare le coniugate, — o, ciò che fa lo stesso, dovunque accade di dover considerare, nelle variabili complesse o nelle loro funzioni, staccatamente le due componenti reali: quindi in generale nella teoria delle funzioni di una o più variabili complesse (ad esempio di quelle *automorfe*); nelle questioni, strettamente connesse a quella teoria, delle rappresentazioni conformi, delle superficie minime, ecc.*); in certe moderne ricerche sulla teoria dei numeri (interi complessi) e di particolari gruppi di sostituzioni**); ecc. ecc.; sempre gli enti generali introdotti in questo scritto possono giovare a generalizzare e semplificare i risultati e ad ottenerne dei nuovi.

Torino, Settembre 1891.

Indice.

	pag.
Le rappresentazioni reali delle forme semplici.	416
Le rappresentazioni reali del piano complesso ecc.	418
I gruppi fondamentali. Proiettività ed antiproiettività	424
Antiproiettività involutorie. Catene	429
Antipolarità, iperconiche, iperquadriche ecc.	432
Gli enti iperalgebrici in generale.	437
Introduzione di punti bicompleksi.	448
Confronto coi numeri bicompleksi.	455
Cenno di ulteriori indefinite estensioni	463

*) Riemann, Weierstrass, Schwarz, ecc.

***) Come le ricerche sulle *forme a variabili coniugate* iniziate dal sig. Hermite e proseguite in questi ultimi tempi dai sigⁱ Picard, Bianchi, Fricke, ecc.

Le rappresentazioni reali delle forme semplici.*)

1. Un concetto generale, che può servire ad ottenere rappresentazioni reali degli elementi imaginari di una forma qualunque, consiste nel ricorrere agli elementi reali che sono *incidenti* ad essi (o nel considerare le coppie reali costituite da quegli elementi imaginari presi coi loro coniugati). — Questo concetto conduce anzitutto alle tre principali fra le rappresentazioni reali note delle forme semplici.

Invero a rappresentante di queste forme si assuma in primo luogo un fascio di rette, il quale giaccia in un piano σ reale, ma abbia il centro C imaginario (ad esempio in un punto ciclico di σ); e come immagine di ogni elemento del fascio si prenda il suo punto reale (intersezione con l'elemento coniugato del fascio C' , coniugato al fascio C). La rappresentazione che così si avrà mediante i punti reali di σ coincide in sostanza**) con quella di Argand e di Gauss della variabile complessa $x + iy$, — l'equivalente analitico dell'elemento complesso di una forma geometrica semplice — mediante i punti reali (x, y) del piano σ . Il numero $x + iy$ si può in fatti riguardare come il parametro, o coordinata, della retta che passa pel punto (x, y) entro al fascio avente per centro uno determinato, C , dei due punti ciclici di σ : cioè della retta, che in coordinate variabili X, Y di punti ha per equazione $X + iY = x + iy$. — Questa rappresentazione presenta, com'è noto, l'inconveniente di dar luogo ad un *elemento eccezionale*: il valore ∞ della variabile complessa, ossia la retta reale del fascio C (la retta CC' , — la retta all'infinito di σ), la quale ha per immagini gl'infiniti suoi punti reali.

Seguendo la legge di dualità piana, a questa rappresentazione corrisponderebbe quella in cui i punti di una retta *imaginaria di 1^a specie* si rappresentano con le rette reali che li contengono, rette che riempiono il piano reale in cui sta quella retta imaginaria: il punto reale di questa apparirebbe quì come elemento eccezionale. Si fa sparire quest'elemento e si ottiene una seconda rappresentazione, perfettamente univoca, quella di Staudt, se a sostegno della forma semplice si prende invece una retta *s imaginaria di 2^a specie*; i punti (od i piani) di questa hanno allora par immagini le rette reali di una *congruenza lineare reale, ellittica*, cioè dotata di direttrici imaginarie: la retta s e la coniugata s' .

Basandosi sul concetto generale accennato non si ottengono altre rappresentazioni, sostanzialmente diverse da queste, se la forma semplice

*) Queste rappresentazioni sono note: però è opportuno pel seguito del lavoro che cominciamo col ricordarle brevemente.

**) Cfr. per es^o Staudt, *Beiträge*, n. 410.

che si considera è *fondamentale*. Invece assumendo per questa forma una *schiera* (*Regelschaar*) di rette immaginarie di 1^a specie, cioè una schiera di generatrici di una *quadrica reale a punti reali ellittici* (una *sfera*), e rappresentando ancora ogni retta col suo punto reale (intersezione con la retta coniugata dell'altra schiera), si ottiene una terza rappresentazione delle forme semplici, sui punti reali di quella quadrica: la rappresentazione di Riemann e Neumann (della variabile complessa $x + iy$, distesa su quella schiera di rette).

2. Queste tre rappresentazioni sono strettamente legate fra loro. La 1^a si deduce dalla 2^a segando con un piano reale le rette della congruenza lineare ellittica; e dalla 3^a, com'è noto, mediante proiezione (stereografica) della quadrica sul piano, od anche mediante degenerazione della quadrica. Infine se la congruenza si considera dal punto di vista della *geometria della retta*, nella quale le rette sono *punti* di una varietà quadratica a quattro dimensioni di S_5 , le rette della congruenza lineare reale ellittica vengono a costituire, come ben si sa, i punti di una quadrica reale ellittica: la rappresentazione di Staudt s'identifica con quella di Riemann.

È opportuno vedere in formole analitiche l'identità fra le ultime due rappresentazioni: ne trarremo poi una guida nella ricerca analoga relativa alle rappresentazioni reali delle forme fondamentali di specie superiore. Prendiamo le due direttrici s, s' di una congruenza lineare come rette fondamentali in un sistema di riferimento dello spazio: le coordinate di due loro punti qualunque x, y siano

$$\begin{aligned} x(x_1, x_2, 0, 0), \\ y(0, 0, y_1, y_2); \end{aligned}$$

allora la retta xy della congruenza avrà evidentemente 2 delle 6 coordinate spaziali nulle, e le rimanenti 4 espresse rispettivamente da

$$(1) \quad X_{11} = x_1 y_1, \quad X_{12} = x_1 y_2, \quad X_{21} = x_2 y_1, \quad X_{22} = x_2 y_2,$$

donde appare che

$$(2) \quad X_{11} X_{22} - X_{12} X_{21} = 0,$$

relazione a cui si riduce in questo caso la relazione quadratica che lega in generale le 6 coordinate di una retta. Ora se le X_{im} si considerano come le 4 coordinate di un punto dello spazio, la (2) è l'equazione di una quadrica, di cui le (1) danno la rappresentazione parametrica (mediante i due parametri $x_1 : x_2, y_1 : y_2$); e la congruenza lineare di rette viene ad equivalere, oppure ad esser riferita *linearmente*, a questa quadrica di punti. Alle due serie di fasci di rette contenuti nella congruenza, aventi i centri risp. su s, s' ed i piani per s', s , (fasci che si ottengono tenendo fisso x , oppure y), corrispondono

le due schiere di generatrici della quadrica (generatrici determinate risp. dai parametri $x_1 : x_2$ e $y_1 : y_2$); quindi (assunta reale la corrispondenza) se la congruenza lineare è ellittica, sarà pure ellittica la quadrica, e viceversa. — Aggiungiamo che nelle rette della congruenza lineare o nei punti della quadrica si ha, mediante le formole (1), una rappresentazione assai naturale delle coppie di elementi x, y di due forme semplici (distinte, o considerate come tali); rappresentazione che geometricamente si effettua assumendo risp. le due serie di fasci di rette della congruenza, ovvero le due schiere di generatrici della quadrica, come le due forme semplici in questione, e riguardando le rette della congruenza, od i punti della quadrica, come immagini delle coppie di fasci o di generatrici a cui sono comuni (nel che restano incluse in particolare le rappresentazioni reali degli elementi complessi di una forma semplice — accoppiandoli ai coniugati —, quando si supponga che quelle due serie di fasci, o schiere di rette, siano mutuamente coniugate). Così le proiettività fra le due forme semplici essendo date da equazioni del tipo

$$(3) \quad \sum a_{lm} x_l y_m = 0$$

saranno rappresentate, in forza delle (1), da

$$(4) \quad \sum a_{lm} X_{lm} = 0,$$

cioè da schiere rigate nella congruenza lineare, e dalle sezioni piane nella quadrica: cose evidenti anche geometricamente. Si ricade così in una rappresentazione lineare ben nota*) della varietà costituita dalle proiettività fra due forme semplici su quella composta dei piani dello spazio; la quadrica (2), come involuppo di piani, viene a rappresentare l'insieme delle proiettività degeneri, ecc.

Le rappresentazioni reali del piano complesso, ecc.

3. Per rappresentare gli elementi complessi di una forma fondamentale di 2^a specie, o doppia, — ad esempio i punti complessi di un piano π , — mediante i punti reali di uno spazio reale a quattro dimensioni S_4 , è naturale (per analogia colla 1^a rappresentazione reale delle forme semplici) di scegliere come forma fondamentale doppia, — a cui si può riferire collinearmente il piano π , — la rete costituita dai piani di S_4 i quali passano per una retta fissa r immaginaria di 2^a specie, cioè sghemba con la coniugata r' . Allora come immagine di ogni punto di π , cioè di ogni piano della rete, si assumerà il punto reale del piano stesso. Questo punto è unico *in generale*, cioè se il

*) V. ad es^o Stéphanos, Math. Ann. XXII; e Aschieri, Rendⁱ Ist. Lombardo, ser. 2^a, t. XXII (1889).

piano è *immaginario di 2^a specie**). Quando invece è *immaginario di 1^a specie*, e quindi sta nell' unico spazio**) reale della rete r , cioè lo spazio I che congiunge r, r' , il piano contiene infiniti punti reali costituenti una retta appoggiata ad r, r' . Allo spazio I della rete corrisponderà su π una retta i , la quale sarà dunque il luogo dei *punti eccezionali* della corrispondenza fra π ed S_4 : i punti di i avranno cioè per immagini le rette reali della congruenza lineare ellittica che ha per direttrici le rette r, r' .

Se poi consideriamo un' altra retta qualunque di π , ai suoi punti, — cioè ai piani di un fascio della rete r , giacente in uno spazio diverso da I , corrisponderanno i punti reali di questo spazio, punti che costituiscono un piano reale (d' intersezione del detto spazio col coniugato) appoggiato ad r, r' . Dunque le rette di π , fatta eccezione per la i , hanno per immagini in S_4 quei piani reali che s'appoggiano ad r, r' . E precisamente le rappresentazioni di quelle rette su questi piani reali sono rappresentazioni di Gauss, mentre la rappresentazione di i sulla congruenza lineare avente per direttrici r, r' è una rappresentazione di Staudt (cfr. n. 1). —

Appunto questa rappresentazione di π su S_4 si ottiene, quando — come già è accaduto di fare, specialmente agli analisti nello studio delle funzioni di 2 variabili complesse — si adotta per immagine del punto di π avente le coordinate $x + iy, u + iv$, — ossia per immagine di questo gruppo di valori di due variabili complesse — il punto di S_4 avente le 4 coordinate reali x, y, u, v ***). In fatti *entro la rete di piani* il cui sostegno è la retta r (all' infinito) comune agli spazi $X + iY = \text{cost.}, U + iV = \text{cost.}$, quel piano ($X + iY = x + iy, U + iV = u + iv$) che passa pel punto reale (x, y, u, v) si può appunto riguardare come avente per *coordinate* i valori $x + iy, u + iv$. Lo spazio reale I passante per r è allora lo spazio all' infinito di S_4 ; come la retta i che gli corrisponde è la retta all' infinito di π . Ecc.

4. Se per forma fondamentale doppia si prende un piano π immaginario, allora i punti complessi di questo si potranno rappresentare mediante le rette reali che li contengono; e la corrispondenza sarà in generale univoca e tale che i punti di una retta di π avranno per immagini reali le rette reali di una congruenza lineare ellittica.

*) Un piano si dice *immaginario di 1^a, 2^a, 3^a specie* secondo che il minimo spazio reale in cui è contenuto, cioè lo spazio che lo congiunge al piano coniugato, è di dimensione 3, 4, 5; vale a dire secondo che i punti reali del piano (intersezioni col piano coniugato) formano una retta reale, o si riducono ad un solo, o mancano affatto.

**) Entro S_4 parlando di spazi intendiamo spazi ordinari (S_3).

***). V. anche Palatini: *Sopra una trasformazione delle figure del piano in figure dello spazio a 4 dimensioni*, ecc. (Palmi, 1891).

Così se π è immaginario di 1^a specie, cioè sta (col coniugato π') in uno spazio ordinario reale, esso darà per immagini dei suoi punti le ∞^4 rette reali di questo spazio, le quali hanno precisamente quei punti come tracce su π . Si ottiene così una rappresentazione delle forme doppie *mediante le rette reali dello spazio ordinario*. Faranno eccezione all' univocità della corrispondenza: 1° ogni punto della retta reale di π (la retta $\pi\pi'$), perchè avrà per immagini una stella di rette reali; 2° quella stessa retta, considerata nello spazio rigato, perchè sarà immagine di tutti i suoi punti. — Questa rappresentazione, che presenta il vantaggio di *non uscire dallo spazio ordinario*, si collega a quella del n. prec. coi punti reali di S_4 , ricorrendo ad una nota corrispondenza fra le rette dello spazio ordinario ed i punti di S_4 , la quale proviene dal riferire collinearmente i due piani π, π' del primo alle due reti r, r' del secondo e far corrispondere la retta che congiunge due punti qualunque di π, π' al punto d'intersezione dei due piani omologhi di r, r' .*).

Se π è immaginario di 2^a specie, si avrà una rappresentazione dotata di un solo elemento eccezionale: l'unico punto reale di π .

Finalmente se π si suppone immaginario di 3^a specie, cioè non incontrante il suo coniugato π' , sicché il minimo spazio reale in cui esso è contenuto (con π') sia un S_5 , allora nella corrispondenza fra i punti di π e le loro rette reali, cioè le ∞^4 rette reali di S_5 appoggiate a π e π' , *non vi saranno elementi eccezionali*. — Anche in questo caso la rappresentazione che otteniamo sarà strettamente legata con quella del n. 3. Basta segare quelle ∞^4 rette reali di S_5 con un S_4 reale: i piani π, π' daranno per tracce le due rette r, r' ; ecc. —

5. Il fatto di non aver elementi eccezionali dà una speciale importanza all' ultima rappresentazione. La varietà, a cui essa ricorre, delle rette reali appoggiate ad un piano immaginario di 3^a specie, e quindi anche al coniugato, si rappresenta analiticamente in modo molto semplice, analogo a quello che abbiam tenuto per le rette di una congruenza lineare.

Prendiamo i due piani direttori π, π' come piani fondamentali opposti nella piramide a cui riferiamo i punti di S_5 . Allora se le sei coordinate omogenee di due loro punti qualunque x, y sono

$$\begin{aligned} x(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0), \\ y(0, 0, 0, y_1, y_2, y_3), \end{aligned}$$

fra le 15 coordinate omogenee della retta di S_5 che li congiunge 6 s' annulleranno, e le rimanenti 8 avranno i valori $x_1 y_1, x_1 y_2, \dots, x_3 y_3$, che possiam rappresentare brevemente con

*) Cfr. Chizzoni, Atti Acc. Gioenia (Catania), ser. 3, t. 20 (1888); Loria, e specialmente Pieri, Giornale di mat., t^o 27 (1889) e 28 (1890); Schumacher, Math. Ann. t. 37, p. 100.

$$(1) \quad X_{lm} = x_l y_m. \quad (l, m=1, 2, 3)$$

Si può dunque dire che le rette appoggiate a π e π' , od anche le coppie di punti xy di questi due piani, stanno in una varietà lineare ad 8 dimensioni — corrispondentemente alle 9 coordinate omogenee X_{lm} — e vi formano una varietà a 4 dimensioni, che è rappresentata parametricamente dalle (1), il che equivale al sistema delle equazioni quadratiche provenienti dall'annullare i determinanti di 2° ordine tolti dalla matrice quadrata di 3° ordine $|X_{lm}|$. Od in altri termini, le rette appoggiate a π , π' , ossia le coppie di punti di questi piani, si rappresentano linearmente coi punti di una varietà Σ a 4 dimensioni di un S_8 qualunque, la quale, indicando con X_{lm} le 9 coordinate omogenee di punti in S_8 , è rappresentata parametricamente dalle (1), ossia è definita dalle equazioni quadratiche anzidette.

Di questa varietà Σ ho fatto un breve studio in una Nota *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi**, alla quale rimanderò per le dimostrazioni e gli sviluppi delle proprietà di Σ che ci serviranno in seguito. Del resto le principali proprietà di questa varietà appajono subito, sia dalla rappresentazione analitica (1), sia da quella geometrica mediante le coppie di punti xy di π , π' . Così si vede subito che essa è *del 6° ordine*; e che contiene *due schiere di ∞^2 piani*, corrispondenti la 1ª alle coppie xy in cui x è fisso, la 2ª a quelle in cui y è fisso, sicchè per ogni punto di Σ passano due piani risp. delle due schiere (congiunti mediante l' S_4 tangente a Σ in quel punto). I piani dell'una schiera (1ª o 2ª) son punteggiati colinearmente (a π' o π) da quelli dell'altra, sicchè si può considerare ognuna delle due schiere, 1ª o 2ª, come una forma geometrica di 2ª specie, riferibile proiettivamente (mediante sezione con un piano qualunque dell'altra) ad un piano, π o π' . Allora ai punti di una retta di π o di π' corrispondono gli ∞^1 piani della 1ª o della 2ª schiera formanti una varietà cubica M_3^3 appartenente ad un S_5 : e si hanno così su Σ *due schiere ∞^2 di varietà cubiche* siffatte, le quali stanno risp. su *due schiere di spazi S_5* . Queste ultime godono di proprietà duali a quelle delle due schiere di piani. Due S_5 di schiere diverse stanno in un *iperpiano* di S_8 **), cioè si tagliano in un S_3 , che contiene una quadrica di Σ , quadrica d'intersezione delle due varietà cubiche di quegli S_5 . Viceversa ogni quadrica giacente in Σ ha i suoi due sistemi di generatrici rispettivamente su due ∞^1 di piani delle due schiere di Σ , costituenti due varietà cubiche delle due schiere; pel suo spazio S_3 passano dunque due spazi S_5 risp. delle due schiere. La ∞^4 degl'iperpiani Ξ passanti per gli S_5 (ogni iperpiano

*) Rendicì Circolo mat. Palermo, t. V (1891).

**) In un iperspazio S_n chiamo iperpiani gli S_{n-1} .

per due S_3 di schiere opposte) è rappresentata parametricamente dalle equazioni, duali alle (1):

$$(1') \quad \Xi_{lm} = \xi_l \eta_m. \quad (l, m = 1, 2, 3)$$

Ecc. ecc. —

La varietà Σ serve poi anche utilmente a rappresentare le corrispondenze proiettive fra π e π' . Così se una reciprocità qualunque fra questi due piani ha per equazione

$$(2) \quad \sum a_{lm} x_l y_m = 0,$$

ove xy indica una qualunque delle coppie di *punti reciproci*, i punti che su Σ saranno immagini di tali coppie formeranno, in forza delle (1), la sezione determinata su Σ dell' iperpiano

$$(2) \quad \sum a_{lm} X_{lm} = 0.$$

6. Consideriamo ora in particolare il caso, importante pei nostri scopi, che π e π' siano imaginari coniugati. Il sistema di riferimento delle coordinate X in S_8 dovrà assumersi tale che, qualunque siano l ed m , $X_{lm} = 0$ e $X_{ml} = 0$ sian sempre due iperpiani fondamentali coniugati; e più precisamente, che per punti reali si possan sempre ritenere le coordinate X_{lm} e X_{ml} conjugate: ed allora la varietà Σ definita dalle (1) conterrà ∞^4 punti reali, corrispondenti all' assumere coniugati i punti x, y di π, π' . Tutti i piani (e quindi le rette) di Σ saranno imaginari, e precisamente quelli dell' una schiera saran coniugati a quelli dell' altra; sicchè ogni piano avrà *un* punto reale (sarà cioè imaginario di 2^a specie). La rappresentazione degli elementi complessi di π , od in generale di qualunque forma fondamentale doppia, coi punti reali di Σ si potrà considerare come ottenuta sostituendo a quella forma (ossia riferendole proiettivamente) una delle due schiere di piani di Σ , e poi rappresentando i piani di questa schiera coi loro rispettivi punti reali.

Anche le due schiere di varietà cubiche, e quindi di S_5 , saranno immaginarie e conjugate l' una all' altra. Invece le quadriche di Σ nelle quali si tagliano due varietà cubiche conjugate saranno a punti reali ellittici: esse, come luoghi di questi punti reali, saranno le immagini su Σ delle rette di π (rappresentazioni di Riemann).

Dallo spazio S_3 di una di queste quadriche si può proiettare la varietà Σ su un S_4 reale (di S_8) in guisa da avere una corrispondenza, in generale univoca, fra i punti reali di Σ e quelli reali di S_4 . Gli S_5 delle due varietà cubiche immaginarie conjugate della 2^a e della 1^a schiera che si tagliano in quella quadrica danno per tracce su S_4 due rette immaginarie conjugate r, r' ; ed i piani della 1^a schiera di Σ si proietteranno nei piani di S_4 passanti per r , e quelli della 2^a nei piani per r' . Quindi la rappresentazione data al n. 3 degli elementi complessi

di una forma fondamentale doppia coi punti reali di S_4 , la quale consisteva nel ricorrere alla rete r di piani imaginari di S_4 , rappresentandoli coi loro punti reali, non è altro che una proiezione della rappresentazione su Σ . Le eccezioni all' univocità della rappresentazione, che colà si avevano nei punti di una retta i di π , ai quali venivano a corrispondere le rette reali di S_4 appoggiate ad r , r' , risultano ora da ciò, che eccezione all' univocità della nostra proiezione di Σ per quanto riguarda i punti reali fanno appunto quelli della quadrica considerata (cui corrisponderà la retta i di π), e che ognuno di questi si proietta precisamente secondo una retta di quella congruenza lineare.

7. Dopo i particolari in cui così siamo entrati sulle rappresentazioni reali degli elementi complessi di una forma fondamentale semplice o doppia, non è più necessario che ci dilunghiamo intorno alle analoghe rappresentazioni reali degli elementi complessi di una forma fondamentale di specie qualunque n , cioè dei punti complessi di uno spazio S_n qualunque. Il lettore vedrà subito come si ottengano rappresentazioni: 1° sui punti reali di un S_{2n} (aventi per coordinate le $2n$ componenti reali delle n coordinate dei punti dell' S_n), considerando in questo la forma fondamentale (riferita collinearmente all' S_n) composta degli S_n passanti per un S_{n-1} fisso *completamente imaginario*. 2° sulla ∞^{2n} delle rette reali che contengono i punti complessi dell' S_n , se questo si assume imaginario; ed allora non vi saranno elementi eccezionali per la rappresentazione se esso sarà *completamente imaginario*. 3° sugli ∞^{2n} punti reali di una varietà di dimensione $2n$ (analogha alla sfera, ed alla Σ dei n° 5 e 6, varietà atta a rappresentare le *coppie di punti* di due spazi S_n) appartenente ad $S_{n(n+2)}$ e con le coordinate rappresentate parametricamente da

$$X_{lm} = x_l y_m: \quad (l, m = 1, \dots, n+1)$$

varietà d' ordine $\binom{2n}{n}$ contenente due *schiere* ∞^n , fra loro coniugate di S_n imaginari, tali che per ogni punto della varietà passa un solo spazio di ciascuna schiera, e che gli spazi dell' una schiera son punteggiati collinearmente da quelli dell' altra, ecc. ecc. — Anche i legami fra queste rappresentazioni, — cioè l' equivalenza *matematica* (analitica) della 3ª con la 2ª (nel caso accennato in cui la 2ª non ha elementi eccezionali), la sezione e la proiezione con cui risp. dalla 2ª e dalla 3ª si passa alla 1ª, — appajono senz' altro per analogia con quanto si disse nei casi di $n = 1, 2$.

Del resto (è bene tenerlo sempre presente) in tutte queste rappresentazioni il concetto in sostanza è sempre uno stesso (cfr. n. 1). Si hanno cioè sulla varietà reale rappresentativa Φ due *schiere* coniugate di varietà particolari, tali che si può sostituire (riferire pro-

jettivamente) alla forma fondamentale oggettiva F una di queste schiere*): allora ogni elemento di quella schiera insieme col conjugato dell' altra dà una coppia reale, un ente (punto o retta) reale, che serve a rappresentare quell' elemento della 1^a schiera, e quindi l' elemento complesso di F . —

Le rappresentazioni reali dei punti di un S_n , quando si sostituiscono questi punti coi gruppi di valori di n numeri complessi — le loro coordinate —, diventano rappresentazioni che possono servire utilmente nello studio delle funzioni di n variabili complesse. D'altra parte per tale studio si presenta anche naturale di rappresentare le singole variabili complesse su altrettanti piani di Gauss, o sfere di Riemann, ecc.**); e ciò porterebbe a nuove rappresentazioni reali non solo per le funzioni di n variabili complesse, ma anche per i punti complessi di un S_n , cioè a rappresentazioni sui gruppi di n punti reali presi risp. su n piani o sfere ecc., e quindi sulla varietà degli spazi (od altri enti) reali che congiungono quei gruppi di n punti, ecc. ecc. È così che ad esempio il Weierstrass cominciava le sue *Lezioni sulle funzioni Abelianne* rappresentando il campo di 2 variabili complesse indipendenti mediante le rette congiungenti i punti reali immagini di quelle variabili su 2 piani (paralleli) di Gauss (e quindi l' *ente algebrico* dato da un' equazione algebrica fra due variabili, mediante un particolare sistema algebrico di rette reali). — Noi però non ricorremo a queste nuove rappresentazioni.

I gruppi fondamentali. Proiettività ed antiproiettività.

8. Per ben caratterizzare dal punto di vista della geometria proiettiva le rappresentazioni di cui abbiám parlato sinora, conviene anche vedere quale gruppo di trasformazioni esse faccian corrispondere al gruppo delle proiettività della forma complessa oggettiva nella sua immagine reale.

La cosa riesce molto ovvia quando per questa immagine si assume rispettivamente la sfera, la varietà Σ a 4 dimensioni, ecc. (cioè in quelle rappresentazioni che abbiamo considerate come 3^e). — Premettiamo che una trasformazione collineare della sfera, o di Σ , ecc., in se stessa

*) Nel seguito di questo lavoro ci accadrà ancora di usare i simboli F e Φ , ed il vocabolo «schiera» (di Φ) in questi significati generali.

***) Ciò sarà da preferirsi quando di una funzione importi considerare le n variabili *staccatamente*. Ma in caso contrario possono essere più opportune le rappresentazioni precedenti. Così per le funzioni che non mutano per gruppi di trasformazioni lineari delle n variabili *prese complessivamente* (funzioni linearmente *automorfe*), — come le funzioni *iperfuchsiane* di due variabili, introdotte dal sig. Picard —, sembrano più utili le rappresentazioni prima esposte, perchè con esse le trasformazioni lineari delle n variabili (collineazioni di S_n) trovano un' immagine più semplice.

genera una trasformazione proiettiva di ogni schiera (di rette, o piani, ecc.) o in se stessa (collineazioni di 1^a specie), oppure nell'altra schiera (collineazioni di 2^a specie); e che queste due trasformazioni proiettive subordinate, o di ogni schiera in se, ovvero della 1^a schiera nella 2^a e della 2^a nella 1^a, si possono assumere *ad arbitrio*, e sempre definiscono una trasformazione collineare della sfera, o di Σ , ecc. (come subito si vede, sia geometricamente, sia mediante la rappresentazione analitica $X_{lm} = x_l y_m$). Però, se si vuole che questa collineazione sia *reale*, cioè muti i punti reali in punti reali, e quindi gli elementi imaginari coniugati in elementi imaginari coniugati, si potrà assumere ad arbitrio una sola delle due proiettività, ad esempio quella che trasforma la 1^a schiera (in se, o nella 2^a), chè allora l'altra sarà la proiettività coniugata (che trasformerà la 2^a schiera in se, o nella 1^a).

Segue che una proiettività fra gli elementi della forma fondamentale semplice, doppia, ecc. (collineazione), rispecchiandosi in una trasformazione proiettiva entro la 1^a schiera di rette della sfera; o piani di Σ , ecc., avrà per immagine reale una collineazione reale di 1^a specie della sfera, o di Σ , ecc. —

Similmente si hanno due specie di trasformazioni lineari di una congruenza lineare in se stessa (ognuna delle quali si può considerare come prodotta tanto da collineazioni dello spazio quanto da reciprocità), e cioè quelle che mutano in se ciascuna delle due direttrici (ossia ciascuna delle due schiere di fasci di rette della congruenza), e quelle che le scambiano fra loro. Le proiettività della forma semplice corrispondono nella rappresentazione di Staudt alle trasformazioni lineari reali di 1^a specie della congruenza ellittica. — Analogamente per le analoghe rappresentazioni delle forme fondamentali doppie, ecc.

9. Nella rappresentazione di Gauss della forma semplice sul piano σ , come corrispondenti (proiezioni stereografiche) alle due specie di collineazioni reali della sfera, od alle due specie di trasformazioni lineari reali della congruenza ellittica, si hanno due specie di trasformazioni reali puntuali di σ tali da mutare i cerchi in cerchi (*trasformazioni circolari*, o gruppo delle inversioni). Una 1^a specie rappresenta le proiettività della forma semplice oggettiva e si compone di quelle trasformazioni che mutano in se ognuno dei due fasci di rette aventi i centri nei punti ciclici C, C' , cioè delle trasformazioni quadratiche reali dei punti di σ che si determinano fissando una proiettività arbitraria nel fascio C , e quindi la sua coniugata nel fascio C' ; la 2^a specie invece muta C in C' e quindi C' in C .*) —

*) A ciò, ed al fatto corrispondente sulla sfera, si collega, com'è noto, la proprietà di conservare inalterati *gli angoli* o di mutarne soltanto il verso, che distingue le due specie di trasformazioni circolari del piano e della sfera.

Analogamente nello spazio reale S_4 possiamo avere due sorta di trasformazioni reali fissando: o una collineazione qualunque entro la rete r , e quindi la coniugata nella rete coniugata r' , — oppure una collineazione qualunque fra la rete r e la r' , e quindi la coniugata fra r' ed r ; e considerando in ambi i casi come omologhi due punti quando stanno in piani omologhi di quelle due collineazioni fra le reti, sicchè in particolare al punto reale di un piano di r corrisponderà il punto reale del piano omologo (risp. di r o di r'). Le trasformazioni che si ottengono nel 1° caso saranno le immagini reali delle collineazioni di una forma fondamentale doppia; però molte proprietà son comuni ad entrambe le specie.

Così è chiaro anzitutto che in una tale trasformazione di S_4 , sia di 1ª o di 2ª specie, ad un piano reale appoggiato ad r, r' (cioè intersezione di due spazi delle due reti) corrisponderà un altro piano siffatto; e la corrispondenza tra i due piani sarà della natura stessa delle trasformazioni circolari dianzi accennate, cioè muterà le coniche appoggiate ad r, r' in coniche appoggiate ad r, r' . In particolare segue che ad ogni retta di S_4 (la quale giace sempre in un piano, generalmente unico, appoggiato ad r, r') corrisponde in generale una conica appoggiata ad r, r' . Dunque anche queste trasformazioni di S_4 sono trasformazioni *quadratiche*.

Abbiassi poi in S_4 un piano *qualunque*. Esso sarà in generale proiettato dalle rette r, r' mediante due reti collineari (prospettive) le quali dalle due collineazioni coniugate che son date entro o fra le reti r, r' , saran mutate in reti collineari (aventi ancora le rette r, r' per sostegni); e queste come intersezioni dei piani omologhi daranno in generale, com'è noto, i punti di una rigata cubica razionale normale di S_4 avente r, r' per generatrici. Dunque i piani di S_4 si mutano in rigate cubiche così fatte.

Similmente per vedere come si trasformi in generale uno spazio ordinario contenuto in S_4 , osserviamo che esso si può considerare come costituito da un fascio di piani avente per asse la congiungente dei suoi due punti d'incontro con r, r' , e quindi come generato da due fasci proiettivi (prospettivi) di spazi delle reti r, r' . Ora, mediante le due collineazioni fisse entro o fra queste reti, quei fasci si mutano in due fasci proiettivi di spazi (ancora della reti r, r'), i quali genereranno una varietà quadratica M_3^2 : e precisamente un cono avente il centro nel punto comune ai piani base dei due fasci, e contenente quel piano ω nel quale si tagliano i due spazi che nelle due collineazioni fisse delle reti r, r' corrispondono allo spazio I comune a queste*).

*) Ogni punto del piano ω è l'omologo di tutti i punti di una retta appoggiata ad r, r' . Analogamente ad ω si ha poi un altro piano ω_1 che dalla data trasformazione di S_4 è mutato nello spazio I . La conica che corrisponde ad una retta passante per un punto di ω_1 si spezza nella retta, appoggiata ad r, r' , in

Segue che la nostra trasformazione quadratica di S_4 muta gli spazi nei coni quadrici (a 3 dimensioni) passanti per r, r' e pel piano fisso ω (appoggiato ad r, r').*)

Se poi si considera una *qualunque* varietà quadratica M_3^2 passante per r, r' come generata da due reti reciproche aventi r, r' per sostegni, si vede subito con ragionamenti identici ai precedenti che essa si muta in una varietà quadratica passante similmente per r, r' . Tali varietà sono le proiezioni delle sezioni della Σ di S_8 cogli' iperpiani di questo spazio; poichè appunto queste sezioni iperplanari son generate su Σ dalle reciprocità fra le due schiere di piani che si proiettano nelle reti r, r' (n. 5). E come le collineazioni di Σ son caratterizzate dal mutare le sezioni iperplanari in sezioni iperplanari e dall' essere algebriche, od almeno analitiche, così avremo che le nostre trasformazioni quadratiche di S_4 sono *tutte* quelle trasformazioni analitiche che mutano in se l' insieme delle varietà quadratiche passanti per le rette fisse r, r' . Ecc. —

Analogamente alle trasformazioni circolari del piano e a quelle trasformazioni quadratiche di S_4 , si hanno più in generale due specie di trasformazioni quadratiche nell' S_{2n} reale rappresentativo delle forme fondamentali n -ple, trasformazioni che si determinano dando due collineazioni entro o fra le forme aventi per sostegni due S_{n-1} non incidenti di quello spazio, ecc. ecc.; le trasformazioni *reali* di 1^a specie (per cui quegli S_{n-1} sono imaginari coniugati) rappresentano le collineazioni delle forme fondamentali n -ple. —

Infine, se in luogo di fissare due *collineazioni*, come in questo n^0 ed in quello preced^e s' è fatto, si fissano due *reciprocità* entro o fra le due schiere di piani ecc. di Σ o di S_4 ecc., si avranno similmente due specie di trasformazioni, analoghe alle precedenti (ma non più puntuali); e le trasformazioni reali della 1^a specie (provenienti cioè da reciprocità coniugate entro le due schiere rispettivamente) saranno le imagini reali delle reciprocità della forma oggettiva.

10. Abbiamo così nei n^i 8 e 9 incontrato in ogni caso, accanto alle *trasformazioni reali di 1^a specie* — che nella imagine reale della forma fondamentale rappresentavano le trasformazioni proiettive (collineazioni o reciprocità) di questa —, quelle che abbiamo chiamate *trasformazioni reali di 2^a specie*; ed abbiamo visto molti punti di contatto di queste con quelle, sì che siamo naturalmente indotti a considerare nella forma oggettiva anche quelle trasformazioni — analoghe

cui si trasforma quel punto, ed una retta incidente ad ω : si corrispondono dunque nella nostra trasformazione le rette che si appoggiano risp. ai due piani ω_1 e ω .

*) Da ciò si deducono di nuovo le rigate cubiche corrispondenti ai piani di S_4 e si vede inoltre che esse sono soggette a tagliare secondo coniche il piano fisso ω .

alle proiettive ma essenzialmente distinte da esse — che sulla immagine son rappresentate da corrispondenze reali di 2^a specie. Sono queste le *antiproiettività* (risp. *anticollineazioni* ed *antireciprocità**)), che direttamente e con maggiori ragguagli si trovano studiate nel *Saggio***). Qui ci limitiamo ad accennarne le prime proprietà che si leggono subito su quelle rappresentazioni reali.

Anzitutto abbiamo che in una forma semplice vi sono *due* specie di corrispondenze continue***) che mutano i gruppi armonici in gruppi armonici: le *proiettività* e le *antiproiettività*. E che fra i punti di un piano vi sono *due* specie di corrispondenze continue che mutano le rette in rette, cioè oltre alle note *collineazioni* altre corrispondenze che chiamiamo *anticollineazioni*; e similmente, oltre alle *reciprocità*, vi sono in un piano altre corrispondenze continue che mutano i punti in rette e i punti di una retta nelle rette passanti per un punto: le *antireciprocità*. Analogamente per lo spazio ordinario e per quelli superiori. — E si fa poi subito il passaggio a corrispondenze tra forme distinte.

In un' antiproiettività qualunque (anticollineazione od antireciprocità) due forme fondamentali omologhe sono pure riferite antiproiettivamente. Mentre in due forme proiettive le tetradi (*Würfe*) omologhe hanno birapporti *uguali*, e quindi sono della stessa specie rispetto al verso (secondo Staudt), in forme antiproiettive le tetradi omologhe hanno birapporti *coniugati*, e sono quindi di specie opposta. Due corrispondenze antiproiettive danno per prodotto una proiettività; il prodotto di un' antiproiettività e di una proiettività (o viceversa) è ancora un' antiproiettività. †)

Un esempio ovvio di antiproiettività si ha nel *coniugio*, cioè nella corrispondenza tra gli elementi di una forma ed i loro coniugati (della forma coniugata). *Le corrispondenze antiproiettive si possono anche definire come prodotti del coniugio e di proiettività (o viceversa)*. Ed è appunto così che in sostanza ci si presentano le antiproiettività nelle loro rappresentazioni reali; poichè se per forma fondamentale oggettiva si assume la 1^a delle due schiere coniugate (cfr. n. 7) a cui ricorrono quelle rappresentazioni, l'antiproiettività in essa vien precisamente ad essere il prodotto del coniugio (che muta la 1^a schiera nella 2^a) e della

*) Questa distinzione è essenziale solo nelle forme fondamentali doppie, triple, ecc.; non in quelle semplici.

**) Come ivi è dichiarato, le antiproiettività nelle forme semplici e le anticollineazioni in quelle doppie erano state studiate prima di me dal sig. Juel nella Dissertazione già citata. V. anche là Nota dello stesso geometra: *Ueber einige Grundgebilde der projectiven Geometrie* (Acta mathematica, t. 14, 1890).

***) Riguardo alla condizione della *continuità* veggasi il n. 1 del *Saggio*.

†) In conseguenza il gruppo di corrispondenze che abbraccia tutte quelle antiproiettive si compone di esse e delle proiettive.

proiettività che si è fissata fra la 2^a e la 1^a schiera nel definire la trasformazione reale di 2^a specie che è immagine dell' antiproiettività.

Da questa, ovvero anche dalle precedenti definizioni, segue subito che un' antiproiettività tra due forme semplici, doppie, ecc., s'individua mediante coppie di elementi omologhi al modo stesso che una proiettività, cioè dando di 3, 4, ... elementi (omonimi ed indipendenti ecc.) dell' una forma gli omologhi nell' altra. Ed inoltre segue la *rappresentazione analitica delle antiproiettività*, cioè mediante equazioni

$$x'_i \equiv \sum_m a_{im} \bar{x}_m,$$

le quali esprimono le coordinate di un elemento x' dell' una forma come forme lineari nei valori coniugati \bar{x}_m delle coordinate x_m che ha l'elemento omologo x nell' altra forma. Ecc.

Antiproiettività involutorie. Catene.

11. Fra le corrispondenze antiproiettive — anticollineazioni ed antireciprocità —, hanno uno speciale interesse quelle *involutorie* — *antinvolutioni* ed *antipolarità*. Esse dànno coi loro elementi uniti le prime e più semplici varietà iperalgebriche.

Se l' antiproiettività si considera come il prodotto del coniugio \mathcal{C} e di una proiettività \mathcal{P} o viceversa (n. 10), la condizione d' involutorietà $\mathcal{C}\mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{C}$, equivale a $\mathcal{C}\mathcal{P}\mathcal{C} = \mathcal{P}^{-1}$, cioè all' avere \mathcal{P} per coniugata (trasformata mediante \mathcal{C}) la propria inversa. Questo fatto evidente vale anche se si tratta del prodotto di due corrispondenze qualunque \mathcal{C} , \mathcal{P} , quando l' una, \mathcal{C} , di esse, è involutoria: la detta relazione, che s' è presentata ripetutamente nel caso di due proiettività*), è stata chiamata *armonia*. Le antiproiettività involutorie sono dunque *i prodotti del coniugio e di proiettività armoniche al coniugio (cioè aventi per coniugate le proprie inverse)*, o viceversa.

Le trasformazioni reali di 2^a specie della varietà reale Φ (n. 7) (piano σ , sfera, o congruenza lineare; ecc.), che su questa rappresentano un' antiproiettività della forma fondamentale oggettiva F , eran definite mediante una proiettività fra la 1^a e la 2^a schiera di Φ , ed una fra la 2^a e la 1^a schiera, *coniugate* fra loro. Orbene è evidente che la condizione d' *involutorietà* per l' antiproiettività, ossia per la trasformazione reale che ne è immagine, equivale all' essere quelle due proiettività *inverse* l'una dell' altra (e quindi *armoniche al coniugio*). Ciò

*) V. ad es^o Segre, *Le coppie di elementi imaginari nella geometria proiettiva sintetica* (Memorie Acc. Torino, ser. 2^a vol. 38); e *Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux* (Journal für Math., t. 100). V. anche H. Wiener, *Ueber geometrische Analysen* (Berichte der k. sächs. Ges. t. 42, 1890), pag. 262.

si può anche esprimere in altro modo, considerando le due varietà costituite dalle intersezioni degli elementi omologhi delle due proiettività, fra loro coniugate, che si hanno tra le due schiere di Φ : l'essere queste due proiettività inverse l'una dall'altra equivale a dire che quelle due varietà, pure coniugate, coincidono; cioè che *le intersezioni degli elementi omologhi delle due schiere proiettive formano una varietà reale*. Le intersezioni poi di elementi omologhi e coniugati saranno gli elementi reali di questa varietà e rappresenteranno su Φ quegli elementi della forma fondamentale F i quali sono *uniti* par l'anti-proiettività.

12. Applicando anzitutto queste osservazioni generali al caso di un' *antinvoluzione in una forma semplice*, avremo che ad essa è congiunta una proiettività, fra i due fasci di rette C, C' del piano σ , o fra le due schiere di generatrici della sfera, o fra le due direttrici della congruenza lineare ellittica, la quale ha se stessa (o meglio la sua inversa) per coniugata: sicchè il cerchio luogo dei punti d'intersezione delle rette omologhe (o la schiera di rette generata entro la congruenza lineare) sarà coniugato di se stesso; nella sfera sarà la sezione con un piano reale. In generale questo cerchio o è affatto privo di punti reali, o ne ha infiniti (e analogamente quella schiera di rette). Dunque: *un' antinvoluzione in una forma fondamentale semplice o non ha elementi uniti o ne ha infiniti formanti una catena semplice*. Adoperiamo quì la voce introdotta dallo Staudt, il quale chiama *catena* un insieme di ∞^1 elementi di una forma fondamentale semplice, che sulla congruenza lineare imagine sia rappresentato da una schiera reale di rette, e quindi sul piano σ o sulla sfera da un cerchio reale.*) Noi vediamo che una tal catena si può anche definire come il luogo degli elementi uniti di un' antinvoluzione ben determinata.

L' imagine di un' antinvoluzione sul piano σ (o sulla sfera) non è altro che un' ordinaria *inversione*.

13. Trattisi ora di un' *antinvoluzione del piano π* .

Essa sarà rappresentata sulla varietà Σ da una collineazione reale di 2^a specie involutoria; e questa**) ha per luogo dei punti uniti, cioè dei punti in cui si tagliano i piani omologhi delle due schiere, una superficie del 4^o ordine F^4 appartenente ad un S_5 e luogo di ∞^2 coniche, ecc., cioè una *superficie di Veronese*. Sono *assi* della collineazione involutoria lo spazio S_5 di quella superficie, ed un piano.

*) Dalla loro rappresentazione reale sulla sfera appare che le antiproiettività di forme semplici si possono anche definire come quelle corrispondenze non proiettive che mutano le catene in catene (cfr. *Saggio*, nota alla fine del n. 1).

**) V. il n. 8 della Nota *Sulle varietà* ecc. citata più sopra (al n. 5).

La stessa antinvoluzione è rappresentata su S_4 dalla trasformazione quadratica involutoria di 2^a specie che è definita da una collineazione fra le reti r, r' coincidente (o meglio inversa) con la coniugata: sicchè la rigata cubica normale F^3 (proiezione di quella F^4 di Veronese) che è luogo dei punti d'incontro dei piani omologhi delle due reti, cioè dei punti uniti della trasformazione involutoria di S_4 , sarà coniugata di se stessa, e però conterrà ∞^2 punti reali. Le corde di questa rigata le quali s'appoggiano al piano ω trasformato dello spazio I di r, r' , formano un sistema ∞^3 di 1^o ordine di *rette unite* (cfr. n. 9 e specialmente la nota a pag. 426) per la trasformazione involutoria: sicchè questa si può anche definire con ciò che due punti omologhi qualunque stanno su una retta di quel sistema e sono armonici ai due punti d'incontro della retta stessa colla rigata cubica.*)

Infine si consideri la rappresentazione di π , reso immaginario di 1^a specie, sulle ∞^4 rette reali dello spazio ordinario. Un' antinvoluzione di π risulta dal prodotto pel coniugio di una collineazione fra π ed il piano conjugato π' la quale sia coniugata di se stessa (o meglio della inversa). Le rette congiungenti le coppie di punti omologhi di questa collineazione formano un sistema reale di rette (3, 1), cioè del 3^o ordine e di 1^a classe, il sistema delle tangenti doppie di una sviluppabile reale di 3^a classe tangente a π e π' : e le ∞^2 rette *reali* di questo sistema segano π nei punti uniti dell' antinvoluzione. —

Segue da queste rappresentazioni — e del resto si vede subito anche direttamente — che: Un' antinvoluzione piana ha sempre ∞^2 punti uniti, il cui insieme diremo una *catena piana* (o doppia, o di 2^a specie, ecc.), e corrisponde alla superficie F^4 di Veronese, od alla F^3 normale di S_4 , od al sistema di rette (3, 1). Inoltre essa ha ∞^2 rette unite, le *corde della catena*: mentre una retta qualunque del piano incontra la catena piana in un punto solo (quello d' intersezione con la retta che le corrisponde nell' antinvoluzione), una corda la incontra negli ∞^1 punti di una catena semplice. Queste catene semplici contenute nella catena piana corrispondono alle coniche della F^4 od F^3 **), ed alle schiere di rette reali contenute nel sistema (3, 1) di rette ***). Ecc.

*) Questa definizione mediante il piano ω e la rigata cubica F^3 è l' analoga della definizione dell' inversione piana mediante il centro ed il cerchio direttore.

**) I piani reali di S_4 , i quali come vedemmo (n. 9) fan *corpo* colle rigate cubiche reali passanti per r, r' , rappresentano quelle catene doppie di π che hanno la retta fissa i per corda.

***) La rappresentazione della catena piana col sistema di rette reali (3, 1) è già fatta dal sig. Juel, il quale rileva anche i casi particolari di degenerazione di quel sistema. Questi casi appajono subito dal ragionamento che sopra ci ha condotti a quel sistema di rette, mediante la collineazione fra i piani π e π' ,

14. Analogamente si hanno delle *antinvolutioni nello spazio ordinario* e in generale *in uno spazio qualunque* S_n ; e si hanno delle *catene n-ple*, luoghi degli ∞^n punti uniti di antinvolutioni siffatte. Per n pari ogni antinvolutione di S_n produce una tal catena (poichè due $S_{\frac{n}{2}}$ omologhi si tagliano sempre in un punto unito); mentre per

n impari vi sono anche antinvolutioni prive di punti uniti. — Nella rappresentazione dei punti complessi dell' S_n sui punti reali di S_{2n} una catena n -pla ha per immagine una varietà reale M_n^{n+1} generata dalle intersezioni degli S_n omologhi di due forme collineari aventi per sostegni i due S_{n-1} fissi*). — Nella rappresentazione sui punti reali della varietà di dimensione $2n$ e d'ordine $\binom{2n}{n}$ di $S_{n(n+2)}$ la catena n -pla ha per immagine una varietà d'ordine 2^n appartenente ad un $S_{\frac{n(n+3)}{2}}$ e rappresentabile univocamente su un S_n mediante il sistema

lineare di tutte le varietà quadratiche M_{n-1}^2 di tale spazio. — Ecc. ecc. —

Il *coniugio* su una retta, piano, o spazio reale qualunque, è una particolare antinvolutione; e quindi l'insieme (dei suoi punti uniti, cioè) dei punti reali di una retta, piano o spazio reale qualunque è una catena. Ogni catena n -pla si può trasformare proiettivamente in quella costituita dai punti reali di un S_n reale.

Antipolarità, iperconiche, iperquadriche, ecc.

15. Le considerazioni generali del n. 11 applicate alla questione delle *antireciprocità involutorie*, od antipolarità, dànno subito i risultati che ora esporremo.

Ogni antipolarità nella retta, nel piano, o nello spazio, ... si può rappresentare con un'equazione (fra punti x , y reciproci)

$$\sum a_{im} x_i \bar{y}_m = 0,$$

nella quale sia sempre $a_{mi} = \bar{a}_{im}$. Assumendo una coppia, o triangolo,

Il sistema si riduce cioè a (2, 1) se la catena piana di π ha un punto reale (il quale starà sulla retta reale $\pi\pi'$ e sarà unito per quella collineazione); ad una *congruenza lineare* (1, 1) se la catena ha una corda reale (la retta $\pi\pi'$, su cui vi saranno allora 2 punti uniti della collineazione); ad una *stella* di rette reali se la catena piana contiene tutta la catena rettilinea dei punti reali di π (la retta $\pi\pi'$ è luogo di punti uniti per la collineazione).

*) Il fatto che se l'ordine $n + 1$ di quella varietà è dispari, essa ha *sempre* ∞^n punti reali corrisponde appunto al fatto già menzionato che per n pari un'antinvolutione di S_n ha *sempre* una catena n -pla di punti uniti.

o tetraedro, . . . *polare* come sistema di riferimento, quell' equazione prende la forma *canonica*

$$\sum a_i x_i \bar{y}_i = 0.$$

ove le a_i sono reali. I *punti uniti* (ossia autoreciproci) sono quelli soddisfacenti alla equazione

$$\sum a_{im} x_i \bar{x}_m = 0,$$

ossia

$$\sum a_i x_i \bar{x}_i = 0;$$

e di qui, considerando le varie ipotesi che si posson fare intorno ai segni dei coefficienti reali a_i , appare che si possono avere vari casi, analoghi a quelli che presenta una polarità (ordinaria) reale $\sum a_i x_i y_i = 0$ nella retta, nel piano, nello spazio, . . . Possono mancare affatto i punti uniti dell' antipolarità (quando le a_i son tutte d' un segno). In caso contrario essi formeranno in generale una ∞^1 nella retta, cioè una *catena* semplice; una ∞^3 che diremo *iperconica*, nel piano; una ∞^5 , *iperquadrica*, nello spazio; e un' iperquadrica potrà essere *rigata* o no; ecc. ecc. — L' antipolarità può anche essere *degenere* (come una reciprocità): corrispondentemente a ciò la catena rettilinea può ridursi ad un sol punto (*catena nulla*, o *catena-punto*), l' iperconica ad una catena semplice di rette di un fascio, ecc. (In tali casi è nullo qualche coefficiente della forma canonica). —

Sulla varietà Σ di S_3 imagine reale del piano π , l' antipolarità fra i piani della 1^a schiera produce fra la 1^a e la 2^a schiera una reciprocità tale che i punti d' incontro dei piani reciproci costituiranno la sezione di Σ con un iperpiano *reale* (v. n.º 5 e 11). Se tra questi punti ve ne sono di reali, cioè se quell' iperpiano sega realmente Σ , i punti reali d' intersezione rappresenteranno i punti di un' iperconica di π . Sicchè *le iperconiche di π hanno per imagini su Σ le sue sezioni iperplanari reali* (come le catene di una retta hanno per imagini sulla sfera i cerchi reali di questa). Se l' iperpiano è tangente a Σ , l' iperconica corrispondente è *degenere*.

Nello spazio reale S_4 l' antipolarità della rete r induce una reciprocità fra r ed r' tale che la varietà quadratica generata dalle rette d' intersezione dei piani cogli spazi omologhi sarà reale. *Le iperconiche di π hanno per imagini in S_4 le ∞^8 varietà quadratiche M_3^2 reali e con punti reali che passano per r , r' .* Le iperconiche degeneri, o catene semplici di rette, corrispondono alle varietà *coni*: e quei

piani generatori reali di un tal cono quadrico, i quali sono incidenti ad r, r' , rappresentano le rette della catena semplice.*)

Infine rappresentando il piano π immaginario di 1^a specie sulle rette reali dello spazio ordinario, un'antipolarità di π dà luogo ad una reciprocità fra π ed il coniugato π' inversa della reciprocità coniugata; ed una retta congiungente due punti reciproci di π e π' è reale quando e solo quando quei due punti sono coniugati, cioè il punto di π è unito per l'antipolarità. Ora le rette che congiungono i punti reciproci di quella reciprocità fra π e π' formano un *complesso quadratico reale di Hirst***) (cioè un complesso quadratico reale caratterizzato dal contenere tutte le rette di π e quindi di π' , od in altri termini ancora un complesso reale di caratteristica [(11) (11)2] nella nota classificazione di Klein e Weiler): le rette reali di questo complesso (se ne esistono) segano su π l'iperconica luogo dei punti uniti (se esistono) dell'antipolarità. Così le iperconiche di π si posson riguardare come le sezioni delle rette reali dei complessi quadratici reali che contengono il piano rigato π e quindi il coniugato. — Il complesso generato dai due piani reciproci π, π' si riduce ad un complesso lineare quando la retta $\pi\pi'$ è luogo di punti uniti della reciprocità: ne segue che l'iperconica di π è rappresentata da un *complesso lineare* di rette reali quando (solo) essa contiene la catena rettilinea composta dei punti reali di π .***) —

Proprietà perfettamente analoghe si avrebbero similmente per le rappresentazioni reali delle iperquadriche, ecc.

16. Mediante queste rappresentazioni delle catene rettilinee, iperconiche, iperquadriche ecc. si ritrovano facilmente anche le proprietà delle loro intersezioni, come pure dei sistemi lineari di tali enti, il cui studio si trova avviato nel *Saggio*. Diamo qui un cenno di ciò, considerando per fissar le idee i *sistemi lineari d'iperconiche*, e quindi le loro immagini reali: che in S_4 son date dai sistemi lineari di M_3^2 reali passanti per r, r' ; su Σ dalle intersezioni con un fascio, rete, ecc., d'iperpiani; e nello spazio rigato reale ordinario da sistemi lineari di complessi quadratici reali di rette contenenti il piano rigato π (e π').

*) Abbiamo visto (n. 9) che gli spazi di S_4 equivalgono per noi a coni quadrici M_3^2 passanti per r, r' . Effettivamente uno spazio reale rappresenta una catena semplice di rette di π contenente la retta fissa i .

Il fatto che una F^3 normale di S_4 passante per r, r' è proiettata da ogni suo punto secondo un cono M_3^2 del detto sistema, corrisponde a questo: che una catena piana è proiettata da ogni suo punto secondo una catena semplice di rette.

***) Hirst, *On the complexes generated by two correlative planes* (Collectanea mathematica in mem. Chelini, pag. 51—73).

****) Ciò concorda col fatto che (v. *Saggio*, nota al n. 32) l'insieme di tutti i punti posti sulle rette reali di un complesso lineare reale è un'iperquadrica; e però è segato da un piano qualunque secondo un'iperconica.

L' ente Q d' intersezione di 2 iperconiche del piano π ha per immagine in S_4 la superficie del 4° ordine F^4 che è intersezione di due M_3^2 reali per r, r' , e che quindi è base per un fascio di M_3^2 siffatte. In questo fascio vi sono 3 coniche coi centri fuori dello spazio I di r, r' (oltre a 2 coniche coi centri in questo spazio): o tutti e tre questi centri son reali, oppure uno è reale e gli altri due — e siano A, A' — immaginari coniugati. Nel 2° caso saranno proiettivi, perchè generatori del cono A , i fasci di spazi che dai piani fissi $rA, r'A$ contenuti in quel cono proiettano i punti reali di F^4 (cioè del cono): e quindi, sostituendo al fascio $r'A$ il suo coniugato rA' , saranno antiproiettivi i fasci che dai piani rA, rA' proiettano i punti reali di F^4 . Ritornando a π segue che: in generale l' ente Q intersezione di (2 e quindi di) un fascio d' iperconiche sta o su 3 iperconiche degeneri, cioè catene semplici di rette, o su una sola; ma in questo 2° caso Q si può generare come luogo delle intersezioni dei raggi omologhi di due fasci antiproiettivi di rette. Viceversa, ecc. ecc.

Per immagine di Q nell' ordinario spazio rigato reale si ottiene in generale l' insieme delle rette reali di una congruenza reale (4, 2) (intersezione, coi due piani rigati π, π' , di un fascio di complessi quadratici) generata dalle congiungenti i punti omologhi di una corrispondenza univoca quadratica fra π e π' (la corrispondenza d' intersezione delle 2 reciprocità congiunte alle 2 iperconiche di π). Però, profittando del fatto che Q contiene sempre delle catene rettilinee (sulle rette delle iperconiche degeneri che contengono Q), si può fare che Q contenga precisamente la catena rettilinea dei punti reali di π : allora le 2 iperconiche primitive saranno (n. 15) le sezioni di 2 complessi lineari reali e quindi Q la sezione con π delle rette reali di una congruenza lineare reale. Viceversa ogni congruenza lineare reale dà in generale un tal ente Q come sezione delle sue rette reali con un piano immaginario*). I due casi che sopra abbiamo distinto per Q corrispondono risp. all' essere reali o no le 2 direttrici della congruenza. —

Tre iperconiche quando abbiano punti comuni ne hanno in generale una ∞^1 Ω cui corrisponde in generale: nello spazio rigato reale una rigata reale di 6° grado generata da due cubiche risp. dei piani π, π' in corrispondenza univoca (corrispondenza d' intersezione delle 3 reciprocità fra π, π' congiunte alle 3 iperconiche); su Σ una curva reale del 6° ordine sezione di questa varietà con un S_5 ; e su S_4 una curva reale del 6° ordine che con r, r' completa l' intersezione di 3 M_3^2 indipendenti, e quindi di una rete di tali varietà quadratiche.

*) Se il piano contiene una retta reale della congruenza, Q si spezza in questa retta ed una catena piana (cfr. la nota alla fine del n. 13).

La prima rappresentazione mette in evidenza *una cubica piana entro cui l'ente Ω è contenuto*; la considerazione della corrispondenza nominata fra quella cubica e la sua coniugata di π' semplifica lo studio di Ω (v. *Saggio* n° 54 e segⁱ). Ma si può anche ricorrere utilmente ad esempio alla rappresentazione con la curva reale nominata del 6° ordine di S_4 . Dalla definizione di questa C^6 risulta che essa avrà r, r' per trisecanti, e però sarà proiettata da r secondo un cono cubico M_3^3 . Su questo stanno pure gli ∞^1 centri dei coni della rete di varietà quadratiche M_3^2 , poichè se A è centro di un tal cono, il piano Ar di questo dovrà tagliar la rete in un fascio di coniche, cioè, oltre che in r , in un fascio di rette, sicchè quel piano proietterà un punto di C^6 e però farà parte del detto cono cubico M_3^3 ; viceversa ogni piano generatore di questo sta in un determinato cono della rete di M_3^2 . Le stesso fatto accadendo pel cono cubico che da r' proietta la C^6 , si conclude che quegli ∞^1 centri dei coni M_3^2 della rete formano anche essi una curva del 6° ordine con r, r' per trisecanti. E così si giunge a questo risultato: le ∞^2 iperconiche passanti per 6 punti dati di un piano si tagliano in generale in ∞^1 punti, i quali giacciono su una cubica; gli ∞^1 centri delle catene semplici di rette (iperconiche degeneri) che fan parte di quella rete d'iperconiche, cioè che contengono quei punti, formano una varietà che sta pure su quella cubica piana e si può a sua volta riguardare come intersezione di una rete d'iperconiche (cfr. *Saggio* n. 49 e segⁱ). —

Un S_4 di S_8 taglia la varietà Σ del 6° ordine in 6 punti, e da 5 di questi è determinato il 6°. Così pure in S_4 quattro M_3^2 passanti per r, r' si tagliano inoltre in 6 punti, per modo che solo 5 di questi si possono prendere ad arbitrio ed allora è determinato il 6°. A ciò corrisponderà il fatto che su π vi sono dei *gruppi di 6 punti associati* tali che tutte le ∞^3 iperconiche passanti per 5 punti qualunque vengono necessariamente a passare anche pel 6° associato. Una tal sestupla insieme con la coniugata danno due sestuple di coppie di punti di π, π' tali che ogni reciprocità fra questi piani la quale contenga 5 di quelle coppie contiene sempre la 6^a. —

Cose analoghe si posson dire per le intersezioni di iperquadriche dello spazio ordinario, od in generale di S_n . Così in questo si hanno dei *gruppi di $\binom{2n}{n}$ punti associati* tali che tutte le ∞^{2n-1} iperquadriche che passano per $n^2 + 1$ qualunque di quei punti, passano pure di conseguenza pei rimanenti. Ecc. ecc. — Non ci fermiamo su queste proprietà, e passiamo invece a considerare una serie di enti, di cui quelli finora accennati non sono che casi particolarissimi.

Gli enti iperalgebrici in generale.

17. Le antiproiettività in se e per gli enti che generano danno i primi e più semplici esempi di una classe di enti diversi da quelli di cui si occupa la geometria ordinaria, ma pur interessanti: classe entro cui del resto quegli enti geometrici ordinari si posson considerare inclusi, come casi particolari.

In generale, se fra i punti reali, o le rette reali, ecc., con cui noi rappresentiamo i punti complessi di un dato spazio (od anche gli elementi complessi di una varietà qualunque), consideriamo quelli che costituiscono una curva, superficie, M_3 , . . ., ovvero una rigata, congruenza, complesso, . . ., e così via; essi saranno immagini dei punti complessi di una varietà $\infty^1, \infty^2, \infty^3, \dots$, che noi chiameremo *monovarietà* o *filo*, *bivarietà* o *tela*, *trivarietà*, Così gli $\infty^2, \infty^4, \dots$ punti *complessi* di una *curva*, *superficie*, ecc. costituiscono delle particolari *bivarietà*, *tetravarietà*, ecc.*); mentre gli $\infty^1, \infty^2, \dots$ punti *reali* di un'ordinaria curva, superficie, . . . reale formano dei particolari *fili*, *tele*, ecc. Le catene rettilinee, le iperconiche, le iperquadriche, . . . sono esempi di *fili rettilinei*, di *trivarietà piane*, di *pentavarietà dello spazio*, ecc.; le catene piane, e gli enti Q (n. 16) basi di fasci d'iperconiche sono *tele*; ecc. ecc.

La rappresentazione reale di questi nuovi enti serve ad ottenerne le proprietà. Ad esempio essa permette di risolvere subito la questione delle rette, piani, . . . *tangenti* (cfr. *Saggio*, n. 15, ove la questione è trattata direttamente e in modo più completo). Per fissar le idee limitiamoci alle varietà piane. Un filo del piano oggettivo π ci dà per immagine reale in S_4 una curva; per ogni tangente (reale) di questa passa un piano reale appoggiato ad r, r' . A tali piani corrispondono in π le *rette tangenti al filo* nei suoi punti; se quella curva di S_4 ha un punto doppio, nodale od isolato, lo stesso accadrà pel filo, e questo avrà in generale due tangenti in un nodo; ecc. — Una tela di π ha per immagine in S_4 una superficie: i piani passanti per un punto ordinario di questa, i quali contengono risp. le varie tangenti (che formano il piano tangente) in quel punto e si appoggiano ad r, r' , sono evidentemente una schiera di piani di un cono quadrico M_3^2 avente quel punto per centro: corrispondentemente (n. 15) si avrà su π una *catena semplice di rette tangenti alla tela* in un suo punto ordinario. — Una trivarietà di π è rappresentata in S_4 da una M_3 reale: fra i piani

*) A partire di qui la dimensione, od indice d'infinità, di una varietà qualunque di enti sarà sempre il numero dei corrispondenti parametri *reali* indipendenti (*dimensione reale*): è perciò che alle varietà *ordinarie* (cioè curve, superficie, ecc.) i cui elementi dipendono da parametri *complessi* dobbiamo assegnare una dimensione doppia di quella che nelle considerazioni solite si pone, e che, quando occorra ancora di parlarne, distingueremo col nome di *dimensione complessa*.

tangenti a questa in un suo punto ordinario (piani che costituiscono lo spazio S_3 tangente) uno ve n' ha che s'appoggia ad r, r' : dunque la trivarietà di π ha in generale *una retta tangente* in ogni suo punto ordinario (retta cioè che incontra la trivarietà secondo un filo avente quel punto per doppio, nodale od isolato).

Si può pure parlare di *connessione* di un filo, tela, trivarietà, ecc.: sarà cioè quella della linea, superficie, varietà, ecc. *reale* che ne è l'immagine. Essa costituisce un carattere invariabile per trasformazioni univoche e continue *qualunque*.

18. Se l'ente reale, che in una delle nostre rappresentazioni è immagine di un ente complesso, è algebrico, l'ente complesso si dirà *iper-algebrico*. Questa definizione è indipendente dalla rappresentazione che si sceglie, poichè tutte le varietà reali Φ su cui noi rappresentiamo una stessa forma fondamentale F vengono con ciò ad essere fra loro in corrispondenza algebrica*). Essa equivale evidentemente a dire iper-algebrico un ente quando si compone di quegli elementi le cui coordinate (complesse) hanno le componenti reali legate da una o più equazioni algebriche date. L'ente iper-algebrico può essere una varietà di punti, rette, ecc., od anche un connesso, una corrispondenza, ecc. La denominazione scelta è motivata da ciò che il nuovo concetto abbraccia quello consueto di ente *algebrico* come caso particolare: effettivamente *nelle nostre rappresentazioni l'immagine reale di un ente algebrico è evidentemente ancora un ente algebrico (reale)**).*

Le antiproiettività e gli enti da esse generati e di cui abbi- am fatto

*) Oltre alle rappresentazioni su varietà reali a cui sempre ci riferiamo, si posson dunque considerare tutte quelle che se ne traggono mediante trasformazioni birazionali reali di quelle varietà: vale a dire tutte le rappresentazioni univoche su varietà di elementi reali le cui coordinate dipendano *algebricamente* dalle componenti reali delle coordinate degli elementi complessi aggettivi.

***) Questo fatto non sembra privo d'importanza. Nelle rappresentazioni reali che ordinariamente si considerano per gli enti algebrici non si bada che le immagini siano ancora algebriche: così ad es^o quando una curva algebrica (od un *algebraische Gebilde* qualunque) si rappresenta coi punti reali di una superficie di Riemann. Le nostre rappresentazioni danno invece per immagine reale di una curva algebrica una superficie reale *algebrica* (cfr. n. 21); e tutte le superficie che si ottengono così come immagini di una stessa curva algebrica sono fra loro in corrispondenza univoca reale *algebrica* (laddove le varie superficie Riemanniane sono in corrispondenza univoca reale *conforme*). Che le superficie reali che noi otteniamo siano in S_4 o sulla Σ di S_3 non importa: con una proiezione si porterebbero nello spazio ordinario. Del resto si può direttamente avere nel nostro spazio una superficie reale algebrica immagine di una data curva algebrica: per es^o assumendo come immagine reale di un punto qualunque di questa curva il punto medio fra esso ed il coniugato (ciò dopo aver resa immaginaria la curva data, affinchè la rappresentazione sia univoca).

cenno sono enti iperalgebrici. Alcune delle considerazioni relative ad essi si possono, come vedremo, estendere a tutti gli enti iperalgebrici.

Le *corrispondenze iperalgebriche* — cioè aventi per immagini reali delle corrispondenze algebriche — formano un *gruppo*. Ricordando che l'essenza della rappresentazione della forma oggettiva F sulla varietà reale Φ (ad es^o sulla sfera o varietà Σ , ecc.) consiste nel sostituire ad F una *schiera* (di rette, piani, ecc.) di Φ , si vede che dentro a quel gruppo si può caratterizzare il gruppo delle *corrispondenze algebriche* come quello che è rappresentato su Φ da quelle corrispondenze algebriche reali che mutano ogni schiera di Φ in se stessa (cioè in rette, piani, ecc. della stessa schiera). *) Una 2^a *specie particolare di corrispondenze iperalgebriche* è rappresentata da corrispondenze algebriche reali di Φ che trasformano gli elementi di ogni schiera in quelli dell'altra: esse si posson riguardare come i prodotti delle corrispondenze algebriche e del coniugio. Le antiproiettività sono appunto di tal natura. In generale però una corrispondenza iperalgebrica ha per immagine reale su una Φ una corrispondenza che *non* muta gli elementi (rette, piani, ecc.) delle due schiere in elementi della stessa natura.

Dall'osservazione già fatta sulla natura della rappresentazione della forma F sulla varietà reale Φ segue similmente che fra le *varietà iperalgebriche* si posson caratterizzare le *varietà algebriche* come quelle le cui immagini su Φ sono costituite dai punti . . . reali di una varietà composta di elementi (rette, piani, ecc.) di una schiera di Φ , ossia dalla intersezione di questa varietà con la coniugata dell'altra schiera.

Rispetto al gruppo delle corrispondenze iperalgebriche *gli enti iperalgebrici formano un corpo* (che abbraccia nel modo detto quello degli enti algebrici). In altri termini, per corrispondenze od operazioni iperalgebriche qualunque da enti iperalgebrici si ottengono sempre enti iperalgebrici. — La parte reale di un ente algebrico è un ente iperalgebrico (intersezione dell'ente algebrico con una catena, ecc.).

Un filo iperalgebrico ha un *genere*, invariante per trasformazioni iperalgebriche: il genere delle curve o rigate ecc. algebriche, che ne sono immagini. Similmente una tela iperalgebrica ha due *generi*, invariabili per trasformazioni iperalgebriche, e cioè i due generi delle superficie algebriche che la rappresentano. Ecc. Accanto a quei generi si hanno poi similmente dei *moduli*, relativi allo stesso gruppo di trasformazioni.

*) S'intende, qui e nel seguito, che la corrispondenza algebrica su Φ , immagine reale di una corrispondenza (iperalgebrica) di F , non si limiti solo agli elementi *reali* di Φ , ma venga estesa, *proseguita analiticamente*, anche agli elementi *immaginari*. — Così pure nelle varietà algebriche reali che su Φ rappresentano le varietà iperalgebriche di F noi considereremo non solo i punti reali, ma anche quelli immaginari.

19. Altri caratteri, soltanto *proiettivi*, delle varietà iperalgebriche si hanno considerando le varietà algebriche in cui esse son contenute e certe corrispondenze algebriche a cui esse dànno origine e che posson servire a generarle.

Se prendiamo in un piano π immaginario di 1^a specie un filo, od una tela, o trivarietà iperalgebrica, abbiamo per definizione che essi provengono risp. come intersezione di π con le rette reali di una rigata algebrica reale (involuppo piano di rette se il filo è su una retta immaginaria di 1^a specie), o di un sistema, o complesso reale algebrico di rette. Similmente in generale se in un S_n abbiamo una varietà iperalgebrica V_r (vale a dire di dimensione r , dipendente cioè da r parametri reali), reso quell' S_n immaginario (ad esempio mediante una proiezione, che si può intender fatta da un centro reale), la varietà si potrà considerare come la traccia sull' S_n delle rette reali di un sistema algebrico reale avente la dimensione *complessa* r , cioè dipendente da r parametri *complessi*. Ora le tracce sull' S_n di *tutte le rette complesse* di questo sistema formeranno una varietà algebrica avente una certa dimensione complessa k , ossia una M_k , la quale però potrà anche essere tutto l' S_n . Potrà darsi che per un punto di questa M_k passi solo una, od almeno un numero finito di rette di quel sistema; ed allora sarà evidentemente $k = r$. Ovvero ogni punto di quella M_k è traccia d'infinita rette del sistema (la M_k è *focale* pel sistema), ed allora $k < r$; e precisamente sarà allora $r - k$ la dimensione complessa del cono di rette del sistema uscente da ogni punto della M_k . Dunque: *una varietà iperalgebrica è sempre contenuta in una varietà algebrica la cui dimensione complessa non supera la dimensione reale della varietà iperalgebrica*. Così un filo iperalgebrico sta sempre in una curva algebrica; una tela iperalgebrica in una superficie algebrica; ecc. — Nel seguito con M_k intenderemo la *minima* varietà algebrica contenente la V_r .

Considerando ancora quel sistema algebrico di rette, e le coppie di punti che esso dà come tracce sul dato S_n e sul suo coniugato, si vede poi che: *Se si unisce ad ogni punto di una varietà iperalgebrica il punto coniugato, si hanno le coppie reali (cioè composte di due punti coniugati) di punti di una varietà algebrica reale di coppie*; in altri termini *i punti di una varietà iperalgebrica, insieme coi loro coniugati, dànno le coppie di punti omologhi e coniugati di una corrispondenza algebrica armonica al coniugio* (cfr. n. 11), cioè tale che i coniugati di due punti omologhi sono omologhi nella corrispondenza inversa. Diremo che quella corrispondenza algebrica è *congiunta* alla varietà iperalgebrica: essa lega la varietà algebrica M_k entro cui sta la V_r alla varietà coniugata, facendo corrispondere ad ogni punto dell' una una M_{r-k} sull' altra (sichè gl' indici della corrispondenza

sono finiti se $k = r$). Il prodotto di essa, corrispondenza algebrica armonica al coniugio, pel coniugio sarà (n. 11) una corrispondenza involutoria, iperalgebrica di 2^a specie (v. n. 18), fra i punti della varietà algebrica M_k , la qual corrispondenza avrà la varietà iperalgebrica V_r per luogo dei punti uniti (o, come anche diremo, per varietà fondamentale). Essa è la corrispondenza che si ha sulla M_k fra le tracce delle rette coniugate del sistema algebrico reale considerato.

I caratteri della M_k e quelli della corrispondenza algebrica congiunta alla V_r , o della corrispondenza iperalgebrica di 2^a specie che ha la V_r per varietà fondamentale, sono altrettanti nuovi caratteri di questa varietà iperalgebrica. In particolare se l'indice di quelle corrispondenze è finito, sicchè $k = r$, noi lo diremo *indice* della V_r . In tal caso conviene poi chiamare *grado* di questa varietà iperalgebrica il prodotto dell'indice per l'ordine della varietà algebrica M_r ; mentre la locuzione di *ordini* della V_r si può riservare per gli *ordini*, convenientemente definiti, di quelle corrispondenze. — Il grado della V_r coinciderà dunque coll'ordine della M_r quando l'indice è $= 1$: allora la corrispondenza algebrica congiunta fra la M_r e la varietà coniugata è univoca, e però l'insieme dei moduli della M_r è coniugato di se stesso, cioè reale. Segando il sistema di rette reali contenente la V_r con un iperpiano reale si ha una nuova M_r la quale sarà reale ed in corrispondenza algebrica univoca con la primitiva, sì che la V_r d'indice 1 viene trasformata (algebricamente ed univocamente) nell'insieme dei punti reali della nuova M_r , e la corrispondenza iperalgebrica involutoria che aveva quella V_r per fondamentale vien trasformata nel coniugio*). Si noti inoltre che in questo caso dell'indice 1 i generi ed i moduli della V_r (definiti alla fine del n^o. prec.) sono gli stessi che quelli della M_r che la contiene. —

Le proprietà che così (in questo n^o) abbiám lette sulla rappresentazione dei punti complessi mediante le loro rette reali, sono pure rappresentate semplicemente sulle altre varietà reali Φ di cui sogliamo servirci. La corrispondenza algebrica congiunta ad una varietà iperalgebrica si ha allora fra le due schiere di una Φ considerandovi come omologhi due elementi che passino per uno stesso punto della varietà

*) Il sig. Klein nell'opuscolo *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale* (Leipzig 1882), e specialmente nei §§ 20 e 21, considera su una superficie di Riemann le due specie di rappresentazioni conformi, cioè quelle che conservano e quelle che cambiano il segno degli angoli: come quelle di 1^a specie corrispondono alle trasformazioni *algebraiche* del corrispondente ente algebrico, così quelle di 2^a specie equivalgono alle corrispondenze *iperalgebraiche*. E la proposizione, che il Klein dimostra con semplici considerazioni funzionali, che se una superficie di Riemann è *simmetrica* (cioè ammette una trasformazione univoca involutoria di 2^a specie) l'ente algebrico corrispondente si può rendere *reale*, equivale al caso di $r = 1$ nel teorema sopra esposto.

algebraica reale che sulla Φ rappresenta quella iperalgebraica della forma oggettiva; e la corrispondenza iperalgebraica involutoria si ha entro l'una schiera fra gli elementi che vanno a due punti coniugati di quella varietà algebraica reale. Ecc.

Si avverta infine che quasi tutte le considerazioni che finora abbiamo fatto intorno agli enti *iper-algebrici*, cioè aventi per immagini reali enti *algebrici*, si potrebbero svolgere in modo pienamente analogo per classi più vaste di enti, ad es^o per gli enti, *iperanalitici*, le cui immagini reali sono enti *analitici*, cioè definiti da *funzioni analitiche* (nel senso di Weierstrass): non vi sarebbe in generale da far altro appunto che mutare le parole «*algebrico*» ed «*iper-algebrico*» in «*analitico*» ed «*iperanalitico*».

20. Applichiamo ai primi casi, cioè ai fili (monovarietà), alle tele (bivarietà), ecc. le definizioni e le proposizioni generali sulle varietà iperalgebraiche finora esposte. Ciò gioverà anche a chiarir meglio le idee in proposito.

Per un *filo* chiamiamo indifferentemente *grado* od *ordine* il prodotto del suo indice per l'ordine della curva in cui esso giace. — Allora un filo rettilineo d'ordine n avrà pure n per indice. Esso sarà rappresentato risp. sulla sfera o sul piano σ o sulla congruenza lineare mediante una corrispondenza (n, n) fra le due schiere di generatrici, o fra i due fasci C, C' di rette, o fra le punteggiate s, s' : ossia da una curva reale d'ordine $2n$ della sfera, o del piano — con C, C' per punti n -pli in questo secondo caso —*), o da una rigata reale di grado $2n$ della congruenza lineare.

Un filo piano d'ordine n e indice α è rappresentato nello spazio rigato reale da una rigata algebraica reale di grado $2n$ generata dalla curva d'ordine $\frac{n}{\alpha}$ che contiene il filo, in corrispondenza algebrica (α, α) con la coniugata. Sulla varietà Σ il filo stesso è rappresentato da una curva reale, che è incontrata dalle varietà cubiche di ciascuna schiera in n punti (distribuiti ad α ad α su $\frac{n}{\alpha}$ piani di Σ), e però è d'ordine $2n$. E su S_4 ha per immagine una curva reale che sarà pure in generale d'ordine $2n$ **), avrà le rette r, r' per n -secanti, e sarà proiettata da ciascuna di queste in modo che ogni piano proiettante

*) La curva piana può abbassarsi d'ordine (purchè sia sempre incontrata in n punti mobili dalle rette passanti per C o C'): ciò accadrà quando il filo rettilineo contenga il punto — all'infinito — corrispondente alla retta CC' di σ .

***) Ma se il filo incontra la retta all'infinito del piano π , si abbasserà l'ordine di quest'immagine.

proiettati in pari tempo α punti della curva — cioè mediante un cono d'ordine $\frac{n}{\alpha}$.

Analogamente pei fili dello spazio ordinario, ecc.

Da queste e dalle precedenti proposizioni si traggono in particolare i seguenti risultati. — Un *filo di 1° ordine* sta sempre su una retta e non è altro che una *catena semplice rettilinea*. — Un *filo di 2° ordine* o è rettilineo (ed è rappresentato sul piano σ da una quartica bicircolare, ecc., sicchè in generale sarà *di genere 1*); oppure sta su una conica e vi costituisce una *catena semplice conica*, cioè il luogo dei punti uniti di un' antinvoluzione fra i punti della conica. — Un *filo di 3° ordine* o è rettilineo, o sta su una cubica (di modulo od invariante assoluto reale). Se questa cubica è razionale (piana o sghemba), il filo è ancora il luogo dei punti uniti di un' antinvoluzione, cioè fra i punti della cubica. Se il filo cubico è ellittico, oppure se razionale è dotato di punto doppio, esso sarà piano, ed avrà per immagine in S_4 una C^6 ellittica, oppure dotata di punto doppio; e poichè una tal curva sta, come subito si vede, in $\infty^2 M_3^2$ reali che si tagliano in essa e nelle sue trisecanti r, r' , così il filo cubico sarà allora l'*intersezione di una rete d'iperconiche* (cfr. n. 16). Invece un filo cubico razionale piano privo di punto doppio sta solo in un fascio d'iperconiche. (cfr. *Saggio* n. 58).

21. Una tela iperalgebrica ha per caratteri l'ordine della superficie algebrica che la contiene, e l'indice e gli altri caratteri (ordini) della corrispondenza algebrica congiunta. Se ci limitiamo per brevità alle tele piane, ci rimangono in esse due caratteri essenziali da considerare: l'*indice* o *grado* α , e l'*ordine* ν , cioè l'indice α e l'ordine ν della corrispondenza algebrica congiunta fra π et π' (intendendo per *ordine* della corrispondenza il numero delle coppie di punti omologhi costituite da punti di due rette date di π et π'). *) — Le rette congiungenti i punti omologhi dei due piani formano nell' ordinario spazio rigato un sistema algebrico reale di rette, che, come subito si vede, ha in generale su π e π' due involucri di rette di classe $\nu + \alpha$ (con la retta $\pi\pi'$ per ν -pla), ed è esso stesso di classe ν e d'ordine $\nu + 2\alpha^{**}$): le sue rette reali saranno le immagini dei punti della tela. — In S_4 la tela medesima è rappresentata da una superficie che deter-

*) Si noti che questi due numeri non possono prendersi completamente ad arbitrio. Così l'indice α della corrispondenza algebrica non può superare il quadrato ν^2 dell'ordine (cioè il numero delle intersezioni delle curve che su π' corrispondono a due rette di π).

***) Se l'indice $\alpha = 1$, la corrispondenza fra π e π' è *Cremoniana*, e si ha una *congruenza Cremoniana* secondo la denominazione introdotta dal sig. Hirst.

mina fra le due reti di piani (proiettanti) r, r' una corrispondenza d'indice α e d'ordine ν ; donde si trae, applicando il principio di corrispondenza ad una sezione piana, che la superficie è d'ordine $\nu + 2\alpha$. Essa ha le rette r, r' per α -ple ed è segata inoltre in α punti mobili da ogni piano per r od r' , ed in ν rette appoggiate ad r, r' dallo spazio I di queste. — Infine su Σ l'immagine della tela è una superficie che viene incontrata da ogni piano di Σ in α punti e da ogni quadrica in ν punti: donde si trae che è d'ordine $2\nu + 2\alpha$.*) —

Tutto ciò va alquanto modificato, od almeno interpretato convenientemente, nel caso che la tela si riduca all'insieme dei punti (complessi) di una curva piana algebrica d'ordine m . Allora non si ha più una corrispondenza ordinaria fra π e π' , o fra le due schiere di piani di S_4 o di Σ . L'immagine reale della curva è allora in generale: il sistema reale di rette (m^2, m^2) che ha quella curva e la sua coniugata per linee focali; una superficie reale d'ordine m^2 in S_4 , intersezione di due coni coniugati M_3^m aventi per assi r, r' ed uno dei quali è proiettivo alla data curva; una superficie reale d'ordine $2m^2$ su Σ , intersezione di due varietà composte risp. di piani delle due schiere.***) Si conservano dunque in generale i risultati precedenti, purchè per l'ordine ν della tela si ponga il quadrato m^2 dell'ordine della curva, e si annulli l'indice α . —

Una tela piana di 1° ordine $\nu = 1$, la quale non sia una retta, ha per corrispondenza algebrica congiunta una collineazione. Essa ha l'indice $\alpha = 1$ ed è l'insieme dei punti uniti di un'antinvolutione piana: cioè una *catena piana*. Effettivamente la sua immagine in S_4 risulta una superficie d'ordine $\nu + 2\alpha = 3$ contenente r, r' , e quindi (non giacendo nello spazio I di r, r') una rigata cubica normale avente queste rette per generatrici (cfr. n. 13); ecc. — Una tela piana di 2° ordine e d'indice 1 ha per congiunta un'ordinaria corrispondenza univoca quadratica fra π e π' . Essa è rappresentata in S_4 da una superficie del 4° ordine passante per r, r' e segante inoltre lo spazio I secondo due rette appoggiate a quelle: questa superficie sarà perciò incontrata da ogni S_3 secondo una quartica di 1ª specie, e per due di queste ed un punto della superficie esterno ad esse si potrà far passare un sistema di M_3^2 di dimensione complessa (almeno) $14 - 4 - 2 \cdot 4 - 1 = 1$, sicchè la superficie sarà la base di un fascio di M_3^2 per r, r' . Dunque (come anche altrimenti si poteva vedere) la tela piana d'indice 1 e

*) Gli ordini $\nu + 2\alpha$ e $2\nu + 2\alpha$ delle superficie imagini in S_4 e su Σ sono pure caratteri che può esser opportuno di considerare in modo speciale nel classificare le tele piane iperalgebriche.

**) Cfr le osservazioni fatte in nota a pag. 438 su queste superficie *algebriche reali* con cui rappresentiamo i punti complessi di una curva algebrica, od in generale gli elementi di un ente algebrico.

di 2° ordine non è altro che l'intersezione Q di un fascio d'iperconiche (cfr. n. 16). — Ecc. ecc. —

In certi casi una tela piana può presentarsi come definita da una equazione algebrica

$$(1) \quad f(x, \bar{x}) = 0$$

di grado μ nelle coordinate x di punti del piano e di grado μ_1 nelle coniugate \bar{x} . Ciò significa che la si considera come luogo dei punti uniti di un connesso iperalgebrico di 2ª specie *non involutorio* (cfr. n. 19 e 22) $f(x, \bar{y}) = 0$. Indicando con \bar{f} la funzione *coniugata* di f (cioè avente i coefficienti coniugati), l'equazione (1) trae con se:

$$(2) \quad \bar{f}(\bar{x}, x) = 0.$$

La tela piana avrà una corrispondenza algebrica congiunta che si può intender definita (come *coincidenza*) dalle due equazioni (connessi algebrici fra π e π')

$$f(x, y) = 0, \quad \bar{f}(y, x) = 0.$$

Ne segue subito che per questa corrispondenza algebrica, e quindi anche per la tela piana rappresentata dalla (1) l'indice è $\mu\mu_1$ e l'ordine $\mu^2 + \mu_1^2$. Quindi, ad esempio, la superficie immagine di questa tela in S_4 sarà d'ordine $(\mu + \mu_1)^2$, e precisamente l'intersezione di due $M_3^{\mu+\mu_1}$ generate da quei due connessi algebrici (considerati fra le reti r, r'); ecc. — Così per $\mu = \mu_1 = 1$: un'antireciprocità piana ha per luogo di punti uniti la base Q di un fascio d'iperconiche; ecc.

22. Consideriamo un filo iperalgebrico sulla retta, una trivarietà iperalgebrica nel piano ed in generale una varietà iperalgebrica di dimensione $2n - 1$ in S_n . La corrispondenza algebrica congiunta sarà un connesso $f(x, y) = 0$ avente i due ordini uguali fra loro (l'ordine della varietà iperalgebrica); e l'essere questo connesso armonico al coniugio (n. 19) significa, come tosto si vede, che si può render la f tale che per ogni termine $Cx_1^{\alpha_1} \dots y_1^{\beta_1} \dots$ essa contenga anche il termine $\bar{C}x_1^{\beta_1} \dots y_1^{\alpha_1} \dots$. Ponendo poi per y il coniugato di x , si ha che l'equazione

$$f(x, \bar{x}) = 0$$

rappresenta un filo iperalgebrico rettilineo, od una trivarietà iperalgebrica nel piano, ecc., solo quando per ogni suo termine essa contenga anche il coniugato (od almeno a ciò si possa ridurre); nel qual caso, essendo coniugata di se stessa, diremo *reale* l'equazione, o la

forma $f(x, \bar{x})$. *) La stessa cosa si scorge partendo da un' equazione algebrica reale fra le componenti reali delle coordinate x_i di un punto: esprimendo queste componenti mediante le x_i e le coniugate \bar{x}_i si può ridurre l'equazione alla forma che abbiám detta. —

Servendosi dei connessi algebrici congiunti rispettivamente a quelle varietà iperalgebriche si ottengono subito le rappresentazioni reali di queste. Ciò s'è già fatto nel 1° caso, quello dei fili rettilinei (n. 20). Accenniamo ancora al caso successivo, cioè quello delle trivarietà piane (dove il lettore passerà subito al caso generale).

Se le due forme doppie tra cui è dato un connesso ternario sono ad es⁰ le due schiere di piani della varietà Σ di S_3 e questo connesso è dello stesso ordine ν rispetto ad ambe le forme, cioè dato dalla equazione $f(x, y) = 0$ di grado ν nelle x e di grado ν nelle y ; applicando le formole (n. 5) $X_{lm} = x_l y_m$ si può, ed anzi in più modi se $\nu > 1$, ridurre quell' equazione ad un' equazione fra le X_{lm} e del grado ν . Dunque il connesso è rappresentato su Σ dall' intersezione completa con una M_7^ν : intersezione che sarà d'ordine 6ν , cioè una $M_3^{6\nu}$. E quella M_7^ν si potrà assumere reale se quel connesso è armonico al coniugio, ed allora la $M_3^{6\nu}$ intersezione sua e di Σ sarà l'immagine reale della trivarietà iperalgebrica d'ordine ν di π .**) — In S_4 invece

*) Propriamente può accadere che una tal equazione non sia soddisfatta da alcun punto complesso, o che si verifichi solo per una varietà a dimensione minore di quanto sopra è detto. Ciò accade ad es⁰ per l'equazione $\Sigma a_i x_i \bar{x}_i = 0$ (equazione canonica di un' iperquadrica) quando i coefficienti che non s'annullano son tutti dello stesso segno. — Ma questa cosa sarà illuminata in seguito con l'introduzione dei punti bicompleksi.

**) In generale se le coppie di punti x, y di due S_n si rappresentano (n. 7) coi singoli punti X della varietà M_{2n} di S_N , ove $N = n(n+2)$, definita da

$$(1) \quad X_{lm} = x_l y_m;$$

varietà a cui è collegata (cfr. n. 5 e la Nota di Palermo ivi citata) quella M_{2n} d'iperpiani (rappresentante le coppie di S_{n-1} di quei due S_n)

$$(1') \quad \Xi_{lm} = \xi_l \eta_m;$$

un connesso

$$(2) \quad f(x, y) = 0$$

fra quei due S_n , il quale abbia entrambi gli ordini uguali a ν , sarà rappresentato sulla M_{2n} da una M_{2n-1} , che si può riguardare come l'intersezione completa di quella varietà con una varietà M_{N-1}^ν d'ordine ν di S_N

$$(3) \quad f(X) = 0.$$

Anzi: se $\nu > 1$, valendosi delle relazioni quadratiche

$$(4) \quad X_{lm} X_{l'm'} - X_{l'm} X_{l'm'} = 0,$$

che valgono in forza delle (1), cioè rappresentano altrettante varietà M_{N-1}^2 passanti

il connesso fra le due reti r, r' genera una $M_3^{2\nu}$ (proiezione di quella $M_3^{6\nu}$) incontrata da ogni piano di ciascuna rete in una curva mobile

per la M_{2n} , si può modificare in infiniti modi la (3); aggiungendole cioè le (4) moltiplicate per forme arbitrarie di grado $\nu - 2$. Orbene da una semplice enumerazione delle costanti del problema (le quali vengono assoggettate ad altrettante equazioni lineari) appare — e non sembra difficile completarla con qualche opportuna considerazione o con un calcolo effettivo — che fra le M_{N-1}^ν che così si posson condurre per quella M_{2n-1} ve n'è sempre una ben determinata alla quale è apolare la M_{2n} suddetta — ossia una tale che le polari quadratiche rispetto ad essa sono apolari, e cioè armonicamente circoscritte, alle varietà quadratiche analoghe alle (4)

$$(4') \quad \Xi_{lm} \Xi_{l'm'} - \Xi_{lm'} \Xi_{l'm} = 0$$

entro cui la M_{2n} (1') è contenuta, — vale a dire tale che sian soddisfatte identicamente le relazioni

$$(5) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial X_{lm} \partial X_{l'm'}} - \frac{\partial^2 f}{\partial X_{lm'} \partial X_{l'm}} = 0.$$

(Nel caso che $n = 1$, cioè che la M_{2n} sia una quadrica ordinaria, la dimostrazione si completa facilmente; e si ritrova una proposizione che il sig. Study a pag. 177 dei Sächs. Berichte 1890 ottiene come caso particolare di un suo teorema di apolarità relativo a forme quadratiche qualunque). Questa varietà, o forma, f , che possiam chiamare *normale* (come fa Clebsch in un caso analogo, sebbene diverso dall'attuale), è importante specialmente per la *polarità* rispetto al connesso. Sostituendo nella forma normale $f(X)$ le (1) e polarizzando colle $X'_{lm} = x'_l y'_m$, in forza delle (5) si trova subito

$$(6) \quad \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial y_m} x'_l y'_m \equiv \nu \sum \frac{\partial f}{\partial X_{lm}} X'_{lm}.$$

Il 1° membro di quest'identità, posto = 0, dà la *polarità* rispetto al connesso; e il 2° membro mostra che essa si riduce alla *polarità ordinaria* rispetto alla varietà normale $f(X) = 0$.

Segue che la *polarità (iperalgebraica)*, che noi possiamo costruire in base ad una varietà iperalgebraica d'ordine ν data da un'equazione reale

$$f(x, \bar{x}) = 0$$

(una V_{2n-1}^ν di S_n), polarità che deriverebbe dalla considerazione della varietà iperalgebraica d'ordine $\nu - 1$

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial \bar{x}_m} x'_l \bar{x}'_m = 0$$

come 1ª polare di x' , si può riguardare come equivalente alla polarità che in S_N è definita da una M_{N-1}^ν (normale).

[Il sig. Study, rispondendo ad una mia domanda in proposito, mi comunicò gentilmente che le proposizioni accennate su l'apolarità della M_{2n} e le M_{N-1}^ν normali ecc., come pure varie altre analoghe a quelle e già note, rientrano tutte in teoremi molto più generali di apolarità in cui, in luogo ad esempi

d'ordine ν , ed avente r, r' per rette ν -ple. — Infine nello spazio rigato reale la trivarietà piana dà come immagine un complesso reale di rette di grado 2ν con le rette dei due piani π, π' per ν -ple. —

Seguendo una trivarietà piana iperalgebrica con una retta, una pentavarietà spaziale iperalgebrica con una retta o con un piano, ecc., si ha risp. un filo rettilineo od una trivarietà piana, ecc., *dello stesso ordine*. Ciò è evidente sì per via analitica che mediante le rappresentazioni reali; ma esige restrizioni come quelle contenute nella penultima nota.

Introduzione di punti bicomplexi.

23. Le definizioni che abbiám date degli ordini e degli indici delle varietà iperalgebriche erano *indirette*, ricorrevano cioè alle corrispondenze algebriche congiunte delle varietà, oppure alle rappresentazioni reali di queste. Se si vogliono delle definizioni *dirette*, che cioè ricorrano soltanto alle varietà come luoghi di punti (involuppi di rette, ecc.), si è condotti a riportare su queste le definizioni degli ordini ecc. delle varietà reali imagini: ma allora si presentano delle difficoltà inerenti alla limitazione degli elementi rappresentativi, cioè di esser *reali*. Così per una tela piana d'ordine ν e d'indice α l'immagine in S_4 (cfr. n 21) è una superficie d'ordine $\nu + 2\alpha$ con r, r' per rette α -ple, e quindi incontrata da ogni piano reale appoggiato ad r, r' in ν punti fuori di queste rette; sicchè si avrebbe che la retta di π che ha quel piano reale per immagine taglia la tela in ν punti: cioè l'ordine di una tela piana sarebbe definibile direttamente come il numero dei punti d'incontro con una retta qualunque del suo piano. Ma un ostacolo a ciò si ha nel fatto che quei ν punti di S_4 possono, tutti od in parte, essere *imaginari*, e quindi non rappresentare più punti complessi di π : sicchè l'enunciato precedente non sarebbe esatto; si avrebbe solo che una retta qualunque sega in generale la tela d'ordine ν *al più* in ν punti (od altrimenti in un numero che ne è inferiore per un numero pari).

Inconvenienti simili si avrebbero evidentemente più in generale, se si volesse parlare dell'intersezione di due o più varietà iperalgebriche qualunque: le varietà reali che le rappresentano possono ad esempio segarsi secondo varietà prive di punti reali, od in un numero finito di punti non tutti reali, ecc. ecc.: donde una serie di distinzioni di

della varietà rappresentante le coppie di punti di due S_n , compare la varietà rappresentante i gruppi di punti, rette, ecc. (ogni elemento contato un dato numero di volte) presi risp. in dati spazi qualunque. — Auguro che il sig. Study publichi presto questi suoi teoremi. —

Giugno 1892.]

casi, enunciati complicati e poco precisi, disuguaglianze anzi che uguaglianze, ecc. — E di tal natura sono appunto alcune distinzioni di casi che già abbiamo incontrate, ad es^o a proposito delle antinvoluzioni ed antipolarità — le quali possono avere catene, iperconiche, iperquadriche, ecc. di punti uniti, od anche non averne affatto; delle intersezioni di catene, iperconiche, iperquadriche, ecc.; dei fasci d'iperconiche — che possono contenere una sola, ovvero tre iperconiche degeneri; ecc. ecc.

Tutto ciò è del resto l'analogo di quanto accade quando nello studio di varietà algebriche reali si voglion considerare in queste solo gli elementi reali. Ed appunto da questa restrizione trae origine: restrizione che qui, come già accennammo, ha luogo per le varietà reali rappresentanti le nostre iperalgebriche; in quanto che in quelle son solo i punti reali che si devon considerare, perchè solo essi sono immagini dei punti della forma oggettiva.

Ma questi inconvenienti si posson togliere, quelle distinzioni di casi si posson far cadere, seguendo quel principio dell' ampliamento delle nozioni, a cui la Matematica deve tanti progressi, e che in particolare per la geometria delle varietà algebriche aveva portato dai *punti reali* ai *punti complessi*. Ora si presenta opportuna un' ulteriore estensione. Non sono più sufficienti i punti complessi. Convienne introdurre dei *punti bicomplexi*, cioè degli enti che abbiano per immagini i punti complessi delle forme rappresentative; ed attribuire questi punti bicomplexi a date linee, superficie, fili, tele, ecc. quando i punti complessi che ne sono immagini stanno sulle varietà reali con cui quelle son rappresentate. Con ciò spariranno tutti gl' inconvenienti accennati.

24. Quanto a definire questi punti bicomplexi direttamente, cioè senza ricorrere alla rappresentazione, sarà cosa facile: basterà cioè prendere una qualunque delle note definizioni geometriche *reali* dei punti complessi dello spazio rappresentativo, ad esempio la definizione di Staudt mediante un' involuzione reale ellittica con un verso della forma, e riportarla alla forma oggettiva.

Per ciò osserviamo anzitutto che *un punto bicomplexo P sta sempre in una retta complessa determinata*; poichè ad es^o in S_4 pel punto immaginario P_1 rappresentante di P (e pel coniugato Q_1) passa un piano reale determinato σ incidente ad r, r' .

Ciò posto possiamo per brevità limitarci a considerare la rappresentazione reale di quella retta complessa che contiene P sul piano σ o sulla sfera. I cerchi reali (di σ o della sfera) che passano pel rappresentante P_1 di P (e quindi anche per Q_1) sono le immagini di un *fascio di catene semplici* di punti della retta oggettiva, ed il punto bicomplexo P va considerato come uno dei 2 punti comuni a tutte

queste catene: l'altro sarà quel punto bicompleso Q che ha per immagine il coniugato Q_1 di P_1 , e che diremo punto bicompleso *gemello* di P (sicchè proprietà caratteristica di un punto complesso fra i punti bicomplessi sarà quella di coincidere col suo gemello). Possiamo dunque considerare come definizione geometrica diretta del punto bicompleso P , o meglio della *coppia di punti bicomplessi gemelli* PQ , sulla retta complessa che li contiene, due catene rettilinee prive di punti complessi d'intersezione, ovvero il fascio di catene determinato da quelle due; si potrà poi dire per definizione ulteriore che quella coppia di punti bicomplessi è l'*intersezione* di queste catene. Si può anche assumere in uno qualunque dei cerchi reali suddetti l'involuzione reale ellittica avente P_1 e Q_1 per punti doppi; e quindi sulla retta oggettiva una catena rettilinea (del detto fascio) e *su essa* un' involuzione ordinaria che non abbia punti doppi complessi (sulla catena): quest' involuzione sulla catena si dirà «coppia di punti bicomplessi gemelli», od anche si dirà che l'involuzione ha questa coppia di *punti doppi**). Volendo poi *separare* i due punti gemelli non ci sarà che da aggiungere in questa definizione all' involuzione sulla catena un *verso* di questa: a seconda che si sceglie l'un verso o l'altro si avrà l'uno o l'altro punto.**)

25. Questi nuovi elementi, i punti bicomplessi, si possono aggiungere opportunamente, come abbiám detto, ai punti complessi di qualunque varietà iperalgebrica. Ad esempio mediante quest' aggiunta si posson subito enunciare (traendole dalle rappresentazioni viste di queste varietà) le proposizioni seguenti.

L'ordine di un filo iperalgebrico è la metà del numero dei punti d'incontro del filo con un' iperquadrica qualunque del suo spazio, ed in particolare se il filo è rettilineo, oppure piano, con una catena semplice della retta, ovvero con un' iperconica del piano.

*) Un' involuzione della retta è rappresentata sulla sfera da un' involuzione assiale avente per direttrici due rette polari fra loro rispetto alla sfera: vi sono quindi due fasci mutuamente ortogonali di cerchi uniti per quell' involuzione; ed in conseguenza sulla retta (cfr. Staudt, *Beiträge* n. 242) due fasci di catene unite per l'involuzione: l'uno ha per punti base i due punti doppi *complessi* dell' involuzione; l'altro comprende due catene nulle ridotte risp. a questi due punti ed ha poi per punti base i due punti doppi *bicomplessi* dell' involuzione.

**) Nella geometria proiettiva *reale*, cioè avente per gruppo fondamentale quello delle proiettività *reali*, ha luogo (è invariante) il concetto di punti complessi *coniugati*. Nella geometria proiettiva *complessa* questo concetto si perde (non è più invariante): il *coniugio* equivale ad un' *antinvoluzione* qualunque (avente una catena fondamentale); ma si conserva in essa (come invariante) la nozione di punti bicomplessi *gemelli* (la quale a sua volta svanirebbe poi nel passaggio alla geometria proiettiva *bicomplessa*, che più oltre accenneremo).

L'ordine di una tela piana è il numero dei suoi punti d'incontro con una retta.

L'ordine di una trivarietà piana, o di una pentavarietà spaziale, ecc. è la metà del numero dei punti d'incontro con una catena rettilinea qualunque. — Ecc. —

Naturalmente nei gruppi di *punti d'incontro* che qui son nominati i punti bicompleksi compajono sempre a coppie di punti bicompleksi gemelli. — Lo stesso vale per le proposizioni più generali che ora accenneremo, e che ancora scaturiscono subito dalle rappresentazioni reali, relative alle intersezioni di varietà iperalgebriche qualunque di una retta o di un piano.

Due curve reali di ordini 2ν , $2\nu'$ della sfera si tagliano in $2\nu\nu'$ punti: ne segue che *due fili di ordini ν , ν' di una retta si tagliano in $2\nu\nu'$ punti.*

Sulla varietà Σ di S_8 le immagini di trivarietà d'ordine ν, ν_1, \dots di π sono le intersezioni con delle M_7 d'ordine ν, ν_1, \dots . Ne segue: *Quattro trivarietà (di π) di ordini ν, ν_1, ν_2, ν_3 si tagliano in generale in $6\nu\nu_1\nu_2\nu_3$ punti. — Tre trivarietà di ordini ν, ν_1, ν_2 s'incontrano in un filo d'ordine $3\nu\nu_1\nu_2$. — Due trivarietà di ordini ν, ν_1 s'incontrano secondo una tela d'ordine $2\nu\nu_1$ e d'indice $\nu\nu_1$. — Una trivarietà d'ordine ν ed un filo d'ordine ν_1 si tagliano in $2\nu\nu_1$ punti. — Una tela d'ordine ν e d'indice α [essendo rappresentata su Σ da una superficie d'ordine $2(\nu + \alpha)$] vien segata da una trivarietà d'ordine ν_1 secondo un filo d'ordine $\nu_1(\nu + \alpha)$.*) — Quindi (combinando le ultime due proposizioni) *una tela d'ordine ν e d'indice α e due trivarietà di ordini ν_1, ν_2 si tagliano in $2\nu_1\nu_2(\nu + \alpha)$ punti. — Ecc. ecc. —**

Per queste proposizioni si può anche ricorrere (e in fondo non vi è differenza sostanziale) alle corrispondenze algebriche congiunte delle varietà iperalgebriche: si tratta allora delle (intersezioni, ossia) coppie comuni a due o più corrispondenze algebriche. Per far un esempio, possiamo risolvere in tal modo la questione dei punti comuni a due tele iperalgebriche di ordini ν, ν_1 e d'indici α, α_1 di uno stesso piano. Ciò equivarrà a cercare le coppie di punti che son comuni alle due corrispondenze algebriche congiunte fra π e π' , corrispondenze risp. d'ordini ν e ν_1 e d'indici α e α_1 ; cioè i punti uniti di una corrispondenza (prodotto di una di quelle per l'inversa dell'altra) d'indice $\alpha\alpha_1$ e d'ordine $\nu\nu_1$ fra i punti di π . Il numero di questi punti uniti è dato in generale, per una nota formola, dalla somma $\nu\nu_1 + 2\alpha\alpha_1$. Dunque: *due tele di ordini ν, ν_1 e d'indici α, α_1 di un piano si tagliano*

*) In particolare una trivarietà d'ordine μ sega una curva algebrica d'ordine m secondo un filo d'ordine μm^2 .

in generale in $\nu\nu_1 + 2\alpha\alpha_1$ punti*). — Così, posto $\nu_1 = \alpha_1 = 1$ si ha che una tela piana d'ordine ν e d'indice α è segata da una catena piana in $\nu + 2\alpha$ punti.

Quel teorema generale, supponendovi che una od ambe le tele sian date come intersezioni di trivarietà, ci ricondurrebbe a proposizioni precedenti. Supponendovi invece che l'una delle tele od entrambe siano curve, abbiamo:

Una tela d'ordine ν ed una curva d'ordine m di uno stesso piano si tagliano in νm^2 punti. — Due curve algebriche di ordini m, m_1 di un piano hanno comuni $m^2 m_1^2$ punti bicompleksi (di cui, com'è noto, solo $m m_1$ sono complessi). In particolare una curva piana d'ordine m è incontrata da una retta in m^2 punti bicompleksi (fra cui m soli complessi).**)

26. Una generalizzazione che naturalmente è suggerita dall'introduzione dei punti bicompleksi consiste nel considerare nella forma oggettiva F non più solo le precedenti varietà e corrispondenze *complesse*, le cui immagini sulle Φ sono *reali*, ma delle varietà e corrispondenze *bicomplesse* (in particolare *iperalgebriche*), che si rispecchiano nelle varietà e corrispondenze *complesse* (in particolare *algebriche*) delle Φ . — Così le ordinarie trasformazioni proiettive (*complesse*), le quali mutano gli elementi complessi in elementi complessi, sono così particolari di *proiettività bicomplesse*, le quali mutano in generale gli elementi complessi in bicompleksi, e costituiscono il gruppo fondamentale per una *geometria proiettiva bicomplessa*, nella quale l'ordinaria geometria proiettiva complessa rientra se si *fissa* la varietà costituita da tutti i punti complessi: come nella geometria proiettiva complessa rientra la geometria proiettiva reale se vi si *fissa* la varietà dei punti reali. Mentre le *proiettività complesse* di F determinano nelle due schiere di una Φ delle *proiettività coniugate*, le *proiettività bicomplesse* corrispondono a trasformazioni della Φ determinate da due *proiettività arbitrarie indipendenti* delle due schiere.

Introducendo le varietà iperalgebriche *bicomplesse* occorrono alcune modificazioni (generalizzazioni) ai caratteri: ordini, indici, ecc., che abbiam definiti per le varietà complesse. Così *ogni* curva algebrica della sfera reale che incontri le due schiere di generatrici risp. in ν, ν' punti, quand'anche questi due numeri sian diversi e quindi la curva (d'ordine $\nu + \nu'$) sia immaginaria, sarà sempre immagine di un filo

*) In particolare, basandoci su un'osservazione fatta alla fine del n. 21 abbiamo che due tele rappresentate dalle equazioni $f(x, \bar{x})=0$ di gradi λ, λ_1 , e $\varphi(x, \bar{x})=0$ di gradi μ, μ_1 si tagliano generalmente in un numero di punti espresso da $(\lambda^2 + \lambda_1^2)(\mu^2 + \mu_1^2) + 2\lambda\lambda_1\mu\mu_1$.

***) Cfr. n. 27.

rettilineo *bicompleso*, pel quale ν , ν' danno *due* caratteri (che nel caso del filo complesso coincidevano nell'unico *ordine* del filo). Similmente una varietà iperalgebrica bicomplessa qualunque avrà per corrispondenza algebrica congiunta una corrispondenza algebrica *qualunque* (cioè non più necessariamente armonica al coniugio; cfr. n. 19), e però avrà, come questa corrispondenza, *due* indici distinti α , α' ; ecc. ecc. Quindi anche i teoremi del n. prec. sulle intersezioni delle varietà iperalgebriche dovrebbero essere opportunamente modificati (estesi). — Quanto alle varietà bicomplesse *algebriche*, sarebbero da definirsi come tali quelle che hanno per immagine su una Φ l'intersezione di due varietà algebriche (complesse) qualunque delle due schiere; e analogamente per le corrispondenze bicomplesse *algebriche* (cfr. n. 18). —

Noi però non staremo ora a considerare in generale tali varietà bicomplesse: ma solo accenniamo ad una serie particolare di esse, la più semplice ed importante. Sulla retta abbiamo cioè due schiere infinite di fili, che diremo *protofili*, corrispondenti alle due schiere di generatrici delle sfera, o di rette per C , C' nel piano σ , ecc. Sul piano π abbiamo due schiere di tele, *prototele*, che corrispondono alle due schiere di piani di Σ , o di S_4 , ecc. Nello spazio S_3 (S_n) avremmo similmente due schiere di *protovarietà* a 3 dimensioni (n dimensioni) corrispondenti alle due schiere di una Φ rappresentativa. Per ogni punto della retta, o del piano, . . . , passa un sol protofilo, od una sola prototela, . . . , di ogni schiera; due protofili di una retta, o due prototele di un piano, . . . , quando siano di schiere diverse si segano in un punto. Le due schiere son sempre gemelle l'una all'altra (come le schiere immagini son coniugate); ogni protofilo della retta, o prototela del piano, . . . , contiene un sol punto complesso, quello d'incontro colla protovarietà gemella: gli altri suoi punti son bicomplessi. La geometria dei punti bicomplessi di una prototela, . . . , o protovarietà a n dimensioni, è simile — come appare dalla rappresentazione — a quella dei punti complessi di un piano, . . . , o spazio ad n dimensioni, complessi: le rette di questi hanno per analoghi dei *protofili**) in quelle, ecc. — Per trasformazioni collineari (complesse o bicomplesse) della retta, o del piano, . . . , ogni schiera di protofili, o di prototele, . . . , si muta in se stessa; mentre per anticollineazioni le due schiere si scambiano fra loro.

Dalla rappresentazione si trae subito un altro fatto relativo alle due schiere di protofili, o prototele, . . . , o protovarietà ad n dimensioni, il quale semplifica la geometria dei punti bicomplessi. Essa

*) Qui estendiamo la nozione di *protofili*: ne introduciamo cioè di quelli che non stanno su alcuna retta *complessa* e che quindi non contengono alcun punto *complesso*.

mostra cioè che ognuna di quelle schiere si può rappresentare come una forma fondamentale complessa semplice, o doppia, . . . , o di specie n , sicchè gli elementi complessi di questa corrispondono agli elementi (protovarietà) di quella schiera. Ora, potendosi ogni punto bicompleso della retta, o del piano, . . . , o dell' S_n determinare come l' intersezione di due qualunque profili, o prototele, . . . , o protovarietà (gemelle nel caso particolare che il punto sia complesso) delle due schiere; e d' altra parte ricordando un' osservazione precedente di questo stesso n° sull' effetto che una proiettività bicomplessa (o complessa) di una forma oggettiva F ha sulle due schiere di una Φ imagine; segue che:

Lo studio dei punti bicomplessi di una forma fondamentale F , retta, piano, . . . , od S_n , equivale a quello delle coppie di punti complessi di due forme fondamentali complesse della stessa specie f, f' , cioè di due rette, piani, . . . , od S_n indipendenti (imagini delle due schiere di protovarietà della forma F)): la geometria proiettiva bicomplessa (v. sopra) di F corrisponde alla geometria delle trasformazioni proiettive complesse indipendenti di f ed f' (mentre la geometria proiettiva complessa di F si avrebbe fissando una certa corrispondenza antiproiettiva tra f ed f' : quella che equivale alla corrispondenza fra gli elementi gemelli delle due schiere di protovarietà di F). I punti bicomplessi di F che stanno in una stessa protovarietà della 1^a (o 2^a) schiera corrispondono alle coppie di punti complessi di f e f' in cui il 1° (o 2°) punto è fisso. Ecc.*

27. Alcuni caratteri — gli *indici* — delle varietà iperalgebriche ottengono una definizione diretta mediante le protovarietà: sono cioè i numeri di punti d' incontro con queste.

A ciò si collega il fatto che appunto dal modo di comportarsi negl' incontri con le protovarietà si posson caratterizzare fra le varietà iperalgebriche quelle algebriche. Basta perciò riportare alle due schiere di protovarietà di F quanto abbiamo rilevato al n. 18 intorno all' imagine di una varietà algebrica di F su una Φ . Abbiamo così: *Una varietà (complessa) algebrica è caratterizzata fra le iperalgebriche dall' essere l' intersezione di una varietà composta di protovarietà dell' una schiera con la varietà gemella composta di protovarietà dell' altra schiera**).*

*) Ne segue che, ad esempio, i punti bicomplessi di una retta o piano trovano la loro *rappresentazione reale* nelle coppie di punti reali di due sfere (o piani di Gauss, ecc.), o varietà Σ , ecc.

***) Per esempio, una curva piana algebrica è l' intersezione di due varietà (trivarietà) gemelle costituite risp. da prototele delle due schiere; sicchè una prototela qualunque del piano o non incontra affatto la curva ovvero la incontra in infiniti punti (mentre una tela iperalgebrica qualunque è tagliata in generale da ogni prototela in un numero finito di punti: l' indice della tela).

Similmente (v. ancora n. 18): *una corrispondenza (complessa) algebrica è caratterizzata fra le corrispondenze iperalgebriche dal fatto di mutare ogni schiera di protovarietà in se stessa; e precisamente le due corrispondenze che così si hanno entro le due schiere sono gemelle.* Il gruppo delle protovarietà unite dell' una schiera sarà segato dal gruppo delle protovarietà gemelle (cioè delle protovarietà unite dell' altra schiera) nell' insieme dei punti uniti (bicompleksi) della corrispondenza (e precisamente fra i punti uniti contenuti in una protovarietà unita vi sarà il suo punto complesso).

Da queste proposizioni si traggono subito alcune conseguenze. Se A, B sono due punti di una varietà *algebrica* non posti in uno stesso profilo, o prototela, ecc., anche i due punti d' incontro delle due protovarietà passanti per A colle due protovarietà passanti per B staranno sulla varietà algebrica. I punti d' incontro di una retta con una curva piana, o superficie, . . . , algebrica d' ordine m , od anche i punti uniti di una corrispondenza algebrica (α, β) su una retta, ove $\alpha + \beta = m$, sono le m^2 intersezioni di m profili di una schiera della retta col gruppo dei loro gemelli*). Ecc. ecc. —

Rileviamo espressamente che, come già avvertimmo al n. 26, noi non consideriamo le varietà *bicomplesse*; sicchè gli enti algebrici di cui parliamo son sempre quelli ordinari, *complessi*. Senza di ciò le ultime cose dette esigerebbero delle modificazioni (ovvie del resto), di cui alcune son degne di nota. Così *due rette bicomplesse* del piano π aventi per imagini in S_4 due piani (imaginari, incidenti ad r, r') i quali si taglino secondo una retta appoggiata ad r (o ad r'), *avrebbero comuni gl' infiniti punti di un profilo senza coincidere; e due punti cesserebbero d' individuare una retta (bicomplessa) quando stanno in uno stesso profilo.* E fatti analoghi si avrebbero per le intersezioni di curve algebriche bicomplesse di ordini qualunque, per le corrispondenze algebriche bicomplesse, ecc.: fatti che si vedono subito sulle rappresentazioni con cui si definiscono (n. 26) gli enti bicompleksi *algebrici*.

Confronto coi numeri bicompleksi.

28. L' introduzione dei *punti* imaginari in Geometria corrisponde all' introduzione dei *numeri* imaginari (coordinate) in Analisi. Quale sarà l' ulteriore generalizzazione del concetto di *numero*, che corri-

*) Le $\frac{m m_1 (m m_1 - 1)}{2}$ coppie di punti bicompleksi gemelli distinti comuni a

due curve complesse algebriche di ordini m, m_1 di un piano (v. la fine del n. 25) stanno risp. sulle rette che congiungono a due a due gli $m m_1$ punti complessi comuni alle due curve.

sponderà all' estensione che abbiain fatta del campo geometrico introducendo i *punti bicomplessi*?

La risposta si ha subito, ricorrendo alle rappresentazioni con cui siam giunti a questi punti. Basterà che ci limitiamo a considerare i punti di una retta. I punti complessi di questa son rappresentati dai punti reali del piano σ , e precisamente il punto che sulla retta ha per coordinata il numero complesso $x + iy$, ove x, y son reali, ed $i^2 = -1$, ha per imagine nel piano σ il punto di coordinate x, y . Ora per ottenere sulla retta anche i punti bicomplessi, dovremo nel piano σ considerare anche i punti (x, y) complessi, e ne potremo indicare le coordinate con

$$x = x_1 + hx_2, \quad y = y_1 + hy_2,$$

ove x_1, x_2, y_1, y_2 son reali, e $h^2 = -1$; e per conservare la stessa legge di corrispondenza fra i punti della retta e quelli del piano, si dovrà assumere pel punto bicompleso corrispondente della retta ancora la coordinata $x + iy$, ossia

$$x_1 + hx_2 + i(y_1 + hy_2) = x_1 + hx_2 + iy_1 + hiy_2.$$

Per tal modo siam condotti ad assumere sulla retta per coordinate dei punti bicomplessi, dei numeri, che diremo pure *bicomplessi*, del tipo $x_1 + hx_2 + iy_1 + hiy_2^*$), ove x_1, x_2, y_1, y_2 son reali, ed h, i son due unità *essenzialmente distinte* tali che $h^2 = i^2 = -1$ (mentre $h \neq \pm i$). Inoltre, sempre per ragione d' uniformità col caso in cui x, y erano reali, mantenendo le definizioni di addizione, moltiplicazione, ecc. che si sogliono usare pei numeri complessi a più unità, convien fissare che il prodotto delle nostre unità sia commutativo ed associativo, sicchè $hi = ih, (hi)i = h(ii) = -h$, ecc. Si otterrà così nell' insieme di questi numeri bicomplessi uno particolare di quei campi o corpi di numeri complessi a più unità, pei quali l' addizione, la sottrazione e la moltiplicazione soddisfano alle stesse leggi dell' aritmetica ordinaria.

Tali corpi furono studiati *in generale* dal sig. Weierstrass; i cui risultati vennero pubblicati (almeno in parte) solo recentemente nelle *Nachrichten* di Gottinga in una lettera al sig. Schwarz**). Questa pubblicazione fa tosto seguita nella medesima raccolta da altre sullo stesso soggetto dei sigⁱ Schwarz (ib. 1884), Dedekind (ib. 1885),

*) Se si vuole, son numeri del tipo $x_1 + hx_2 + iy_1 + kx_2$, ove le *tre* unità h, i, k soddisfano alle relazioni

$$h^2 = i^2 = -1, \quad k^2 = 1;$$

$$hi = k, \quad ik = -h, \quad kh = -i.$$

***) *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen* (Gött. Nachr. 1884, pag. 395—419).

Hölder (ib. 1886), ecc.*) Però, riguardo al nostro caso *particolare*, cioè ai nostri numeri bicompleksi, possiamo rilevare che essi si trovano già in sostanza nelle ricerche di Hamilton sui *quaternioni*, sebbene essi differiscano essenzialmente da questi numeri (pei quali, com'è noto, la moltiplicazione *non* è commutativa). Hamilton in fatti osserva (ad es^o negli *Elements of Quaternions*, London 1866, n. 228) che i quaternioni di un piano si posson tutti mettere sotto la forma $x + iy$, ove x ed y son numeri (*scalari*) reali ed i è un *versore* retto (di quel piano) tale che $i^2 = -1$; ma dai bisogni della risoluzione delle equazioni algebriche in cui le incognite sono quaternioni, essendo poi condotto a considerare accanto ai quaternioni, ordinari o *reali*, i cui 4 coefficienti (*scalari*) son reali, i quaternioni *imaginari* o *biquaternioni****) in cui quei coefficienti sono imaginari, ottiene per i *biquaternioni di un dato piano* la rappresentazione (*Elements*, n. 257) $x + iy = x_1 + hx_2 + i(y_1 + hy_2)$, ove h è un *numero* imaginario tale che $h^2 = -1$. A parte la distinzione fra i significati di *versore* e di *numero* che Hamilton attribuisce risp. ai due simboli i ed h , i suoi biquaternioni di un dato piano son la stessa cosa che i nostri numeri bicompleksi.

A questi numeri poi l'Hankel dedica un cenno nel § 30 delle sue *Vorlesungen über die complexen Zahlen* u. s. w. (Leipzig 1867); mentre più diffusamente se ne occupa (appunto col nome di *bicompleksi*) facendone anche il raffronto coi concetti generali del Weierstrass il sig. Lipschitz nella 3^a delle sue *Untersuchungen über die Summen von Quadraten* (Bonn 1886).

29. Il punto fondamentale in cui i numeri complessi generali a più unità ai quali già accennammo si staccano dagli ordinari numeri complessi ad una sola unità imaginaria, è quello che, come ben si sa, pare sia stato notato dal Gauss, e che poi fu rilevato esplicitamente da Hankel (*Vorlesungen* § 29) e da Weierstrass (loc. cit.): cioè che,

*) I metodi seguiti dai sigⁱ Weierstrass e Dedekind nello studio dei numeri complessi ad n unità furono ampiamente esposti (con aggiunte) dal sig. Berloty nella sua Tesi «*Théorie des quantités complexes à n unités principales*» (Gauthier-Villars 1886). Inoltre ad essi è dedicato il 1^o Cap^o della 2^a Parte delle *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* del sig. Stolz (Teubner 1886). — Dopo gli scritti citati si ha una serie molto recente e già ampia di lavori tedeschi (Schur, Study, Scheffers, ecc.) che studiano i sistemi di numeri complessi collegandoli con le teorie del Lie dei gruppi di trasformazioni. [V. del resto più complete e precise citazioni! alla fine del nuovo lavoro del sig. Scheffers, *Math. Ann.* 39, p. 388].

***) V. *Lectures on Quaternions* (Dublin 1853), nⁱ 637, 644; oppure *Elements*, n. 214. — Più recentemente la denominazione di «*biquaternione*» è stata usata, ad es^o dal Clifford, in un altro senso.

mentre pei numeri complessi ordinari un prodotto s'annulla solo quando s'annulla uno dei suoi fattori, nei campi più generali esistono sempre dei numeri particolari non nulli, i quali moltiplicati per convenienti numeri parimenti non nulli danno zero per prodotto (proprietà a cui si collega l'indeterminazione in certi casi del *quoziente*, ecc.). I numeri (lo zero incluso) che godono di tal proprietà furon chiamati dal Weierstrass «*divisori dello zero*»: noi invece per brevità maggiore adatteremo la denominazione che Hamilton (*Lectures*, n. 674) proponeva pei biquaternioni che moltiplicati per altri opportuni non nulli danno zero, cioè «*nullifici*» (*nullific*, o *nullifiers*).

Nel caso particolare dei nostri numeri bicomplexi i nullifici sono strettamente legati ai profili di una retta, dei quali ci siamo occupati nel Cap^o preced.: perciò è opportuno che ci tratteniamo ora su essi. — Siano $x + iy$, $x' + iy'$ due numeri bicomplexi, ove x, y, x', y' indichino numeri *complessi ordinari* (relativi all'unità immaginaria h) $x = x_1 + hx_2, \dots$ (x_1, x_2, \dots reali). Sarà il loro prodotto

$$(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx');$$

sicchè esso s'annullerà solo se

$$(1) \quad xx' - yy' = 0, \quad xy' + yx' = 0.$$

Queste due equazioni si posson soddisfare con valori non nulli di x', y' , cioè senza che s'annulli il 2^o fattore $x' + iy'$ solo quando

$$x^2 + y^2 = 0;$$

la qual condizione, poichè x, y son complessi ordinari, equivale a

$$(2) \quad x \mp hy = 0.$$

Allora poi, se neppure il 1^o fattore $x + iy$ non è nullo, dalle (1) si trae risp.:

$$(2') \quad x \pm hy' = 0.$$

Le (2) e (2') si possono anche scrivere così:

$$(3) \quad x + iy = (\pm h + i)y,$$

$$(3') \quad x' + iy' = (\mp h + i)y'.$$

Concludiamo: *Nel campo dei numeri bicomplexi vi sono due schiere infinite di nullifici.* Quelli della 1^a schiera sono quei numeri bicomplexi che si annullerebbero ove in luogo del simbolo i vi si ponesse $-h$: essi sono i prodotti di numeri bicomplexi qualunque (che si posson supporre complessi ordinari) pel numero $h + i$ [o, ciò che è lo stesso, per $-h(h + i)$ ossia $1 - hi$]. Quelli della 2^a schiera sono quei numeri bicomplexi che s'annullerebbero per $i = h$; ossia i prodotti di numeri bicomplexi qualunque (che si posson supporre complessi ordinari) pel

numero $-h + i$ (o, ciò che è lo stesso, per $1 + hi$). Le due schiere di nullifici non hanno altro numero a comune che lo zero. Il prodotto di due nullifici risp. delle due schiere è nullo; e viceversa un prodotto qualunque di numeri bicompleksi non è nullo se non quando tra i fattori vi è un nullifico di ogni schiera. Rispetto alle operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, e quindi anche elevazione a potenze intere positive, i nullifici della 1^a schiera formano corpo; e così pure i nullifici della 2^a schiera.

Ciò posto, è facile vedere il legame dei nullifici coi profili. Per un numero bicomplekso qualunque $x + iy$ formiamo le espressioni $x + hy$, $x - hy$ dei valori (complessi ordinari) che esso assumerebbe per $i = h$, oppure $i = -h$. Dato uno di questi valori, ad esempio il 1^o, non sarà determinato il numero bicomplekso $x + iy$ che *a meno di un nullifico della 2^a schiera*, poichè la differenza di due valori di $x + iy$ vien solo assoggettata alla condizione di annullarsi per $i = h$. D' altra parte il dare $x + hy$ costringe il punto (x, y) del piano rappresentativo σ a stare su una determinata retta ciclica della 1^a schiera (retta di equazione $x + hy = \text{cost.}$); e quindi il punto della retta oggettiva, che ha quello per imagine, a stare su un determinato profilo della 1^a schiera della retta stessa. Dunque: *i punti della retta oggettiva che stanno su uno stesso profilo della 1^a schiera sono quelli che hanno per coordinate numeri bicompleksi differenti per nullifici della 2^a schiera*. Similmente i punti che stanno su un dato profilo della 2^a schiera sono quelli le cui coordinate differiscono per nullifici della 1^a schiera.

30. Ma possiamo dir di più. Supponiamo dati pel numero bicomplekso $x + iy$ tanto il valore di $x + hy$ quanto quello di $x - hy$, cioè:

$$(1) \quad x + hy = Z, \quad x - hy = Z'.$$

Ne deduciamo subito per valore del numero bicomplekso

$$(2) \quad x + iy = Zg + Z'g';$$

ove si è posto

$$(3) \quad g = \frac{1 - hi}{2}, \quad g' = \frac{1 + hi}{2},$$

sicchè g e g' son nullifici risp. della 1^a e della 2^a schiera. Dunque: *ogni numero bicomplekso $x + iy$ si può scomporre in un modo ben determinato nella somma di due nullifici, l'uno (Zg) della 1^a schiera, l'altro ($Z'g'$) della 2^a**. Il componente che è nullifico della 1^a schiera è deter-

*) Non vi possono essere due scomposizioni così fatte; altrimenti se ne trarrebbe subito l'uguaglianza di due nullifici (non nulli) di schiere diverse.

minato dal valore (complesso ordinario) Z di $x + hy$, e però riman costante per tutti i punti di un protofilo della 1^a schiera della retta oggettiva; similmente l'altro componente, nullifico della 2^a schiera, è determinato dal valore Z' di $x - hy$ e quindi è uno stesso per tutti i punti di un protofilo della 2^a schiera.

La scomposizione del numero bicompleso si può completare scindendo ulteriormente i nullifici di ogni schiera. Posto cioè

$$(4) \quad Z = X + hY, \quad Z' = X' - hY'$$

(ove X, Y, X', Y' son reali), avremo

$$(5) \quad \begin{aligned} Zg &= Xg + Yk, \\ Z'g' &= X'g' + Y'k', \end{aligned}$$

essendo

$$(3') \quad k = hg = \frac{h+i}{2}, \quad k' = -hg' = \frac{-h+i}{2}.$$

I nullifici della 1^a schiera sono dunque ridotti a numeri complessi (a coefficienti reali X, Y) con le due unità g, k ; e similmente i nullifici della 2^a schiera con le due unità g', k' . Le unità g, k , come subito appare dai loro valori (3), (3'), soddisfano alle relazioni

$$(6) \quad g^2 = g, \quad k^2 = -g, \quad kg = gk = k;$$

e analogamente le g', k' , sostituendole qui alle g, k . Segue che nella moltiplicazione di due nullifici di una stessa schiera si deve operare sui coefficienti reali X, Y , ecc. nell' identico modo che nel caso dei numeri complessi ordinari con le componenti reali, cioè coi coefficienti reali di 1 e i : le relazioni (6) fra le unità g e k (o g' e k') son quelle stesse che sussistono fra 1 e i .

I coefficienti reali X, Y e X', Y' hanno un semplice significato geometrico. Fra i numeri bicomplessi $x + iy$ tali che $x + hy = Z$, cioè aventi Zg per componente della 1^a schiera, vi sarà precisamente il numero $X + iY$: dunque $X + iY$ è sulla retta il punto complesso del protofilo della 1^a schiera che corrisponde a quella componente. Similmente $X' + iY'$ è il punto complesso del protofilo della 2^a schiera corrispondente alla componente $Z'g'$. Quando dunque noi poniamo la (2), cioè

$$x_1 + hx_2 + iy_1 + hiy_2 = Xg + Yk + X'g' + Y'k',$$

ove, come mostrano le (1), (4),

$$\begin{aligned} X &= x_1 - y_2, & Y &= x_2 + y_1, \\ X' &= x_1 + y_2, & Y' &= -x_2 + y_1; \end{aligned}$$

i nuovi coefficienti reali X, Y, X', Y' , che così veniamo a sostituire a quelli primitivi del numero bicompleso, non sono altro che i coefficienti dei punti complessi $X + iY, X' + iY'$ giacenti risp. sui due profili che contengono il corrispondente punto bicompleso: per questo cioè passano due catene nulle ridotte ai punti complessi $X + iY, X' + iY'$. Nel piano rappresentativo σ sarebbero (X, Y) e (X', Y') le coordinate dei due punti reali *limiti* (o cerchi nulli) del fascio di cerchi reali passanti pel punto immaginario (x, y) : il che si può anche verificare direttamente.*) —

La possibilità della scomposizione dei numeri bicomplessi da noi operata rientra come caso particolare in un' analoga scomposizione che il Weierstrass ed il Dedekind fanno per numeri a quante si vogliano unità (nei campi parziali, *Theilgebiete*, G_μ di Weierstrass**). La natura di quella scomposizione mostra subito (come il Weierstrass stesso rileva; loc. cit. pag. 407) che: *volendo eseguire un determinato calcolo di addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni, con cui da certi numeri bicomplessi a, b, c, \dots si debba ottenerne un altro, la componente di ciascuna schiera di questo si otterrà eseguendo lo stesso calcolo sulle componenti della stessa schiera di a, b, c, \dots*

Applichiamo questa proposizione generale al caso di una *trasformazione lineare bicomplessa*. Come i punti bicomplessi di una retta, così quelli di un piano o spazio qualunque si posson rappresentare analiticamente assumendo per loro coordinate dei numeri bicomplessi. In ogni caso una trasformazione lineare a coefficienti qualunque bicomplessi delle coordinate di un punto bicompleso si spezzerà subito in due trasformazioni lineari parziali — simili alle complesse ordinarie, cioè *interne* risp. alle due schiere — delle componenti di una stessa schiera di quelle coordinate. Ciò mostra in particolare che è carattere invariante (proiettivo) per due o più punti l'aver comuni le componenti della 1^a (o 2^a) schiera delle coordinate: ed effettivamente tutti i punti per cui quelle componenti hanno gli stessi valori costituiscono un profilo, o prototela, o protovarietà della 1^a (o 2^a) schiera. Ed in generale poi quello *spezzamento* della trasformazione lineare bicomplessa conferma analiticamente quanto già geometricamente era apparso evidente (alla fine del n. 26), cioè che *la geometria proiettiva bi com-*

*) Questa rappresentazione del punto immaginario (x, y) di un piano σ mediante i due punti reali $(X, Y), (X', Y')$ di σ stesso è già usata in sostanza nel Trattato di Mac-Laurin delle curve geometriche (cfr. la parte che ne è riportata nei *Mélanges de géométrie pure del De Jonquières*, a pag. 199, 203, 222), — ove però, trattandosi delle coppie di punti immaginari *di una data retta*, si adopera uno solo di quei due punti reali —; e si ritrova poi, com'è noto, in vari geometri moderni.

**) Cfr. anche, per quanto riguarda il caso attuale, Lipschitz, loc. cit.

plessa di una forma fondamentale (retta, piano, ecc.) coincide colla geometria proiettiva complessa di due distinte forme della stessa specie (ad es^o delle due schiere di profoli, prototele, ecc.)).*

31. Anche le osservazioni del n. 27 sulla dipendenza mutua degli elementi bicompleksi di un ente *algebrico* trovano ora un' evidente rappresentazione analitica. Poniamo (col Weierstrass) di avere un' *equazione algebrica qualunque di grado m ad un' incognita bicomplessa*. Separando nei coefficienti e nell' incognita le componenti delle due schiere, e distinguendo con un accento le componenti della 2^a schiera da quelle della 1^a; l' equazione sia

$$(1) \quad \sum_0^m (a_i + a'_i) (z + z')^i = 0.$$

Il fatto che il prodotto di due nullifici di schiere diverse è nullo riduce quell' equazione a

$$\sum a_i z^i + \sum a'_i z'^i = 0,$$

che si spezza nelle due

$$(2) \quad \begin{aligned} \sum a_i z^i &= 0, \\ \sum a'_i z'^i &= 0. \end{aligned}$$

E poichè ciascuna di queste equazioni, pei coefficienti e per l' incognita, entra in una schiera di nullifici, cioè in un campo simile a quello dei numeri complessi ordinari, essa, ove non si riduca ad un' identità, avrà tante radici quanto è il grado. — Segue anzitutto che un' equazione algebrica di grado m la cui incognita sia un numero bicompleso *ha infinite radici* solo quando tutti i suoi coefficienti siano *nullifici di una stessa schiera* (cioè sian nulle tutte le a_i , o tutte le a'_i): se ciò accade senza che i detti coefficienti sian tutti *nulli* (nel qual caso ogni numero sarebbe radice), le infinite radici son rappresentate dai *punti di m profoli della schiera omologa*.

Se poi nessuna delle due equazioni (2) è un' identità e se i loro gradi sono risp. m, m' , noi avremo che i punti $z + z'$ radici della equazione primitiva (1) sono le mm' intersezioni di m profoli della 1^a

*) Così da un ordinario invariante di enti algebrici si hanno nel campo bicompleso, considerandone i due nullifici componenti, *due* invarianti relativi risp. alle due schiere (invarianti ordinari *entro* queste schiere).

schiera con m' profili della 2^a schiera. Le due equazioni bicomplesse che risp. (secondo il caso precedente) rappresentano quei due gruppi di profili sono

$$\sum a_i(z+z')^i = 0.$$

$$\sum a'_i(z+z')^i = 0,$$

e si potrebbero anche avere moltiplicando la data (1) risp. per un nullifico della 1^a e della 2^a schiera (ad es^o per g e g'). Quando l'equazione data è di grado m , ed il coefficiente del termine di grado m non è un nullifico, allora l'equazione ha m^2 radici. Questo caso in particolare si presenta se i coefficienti dell'equazione data sono numeri complessi ordinari: nel qual caso i due gruppi di m profili saranno gemelli.

Per tal modo si ritrovano analiticamente i risultati precedenti che una retta taglia una curva piana o superficie algebrica d'ordine m complessa in m^2 punti bicomplexi, che due curve piane algebriche complesse di ordini m, m_1 si tagliano in $m^2 m_1^2$ punti bicomplexi, ecc. Ma si vede anche come queste proposizioni possano esigere delle modificazioni essenziali se le curve, superficie, ecc. algebriche si suppongono *bicomplesse*. Possono cioè allora quelle intersezioni dipendere da un'equazione ad un'incognita, che senz'essere identica ammetta infinite soluzioni (come ad es^o quando due rette bicomplesse si tagliano secondo un profilo; v. la fine del n. 27). Non solo; ma una curva, superficie ecc. algebrica *bicomplexa* può avere *due ordini* diversi: gli ordini delle due equazioni (interne risp. alle due schiere di nullifici ecc.) in cui si spezza la sua equazione bicomplexa, a quel modo che la (1) si spezzava nelle due (2). Ecc. ecc.

cenno di ulteriori indefinite estensioni.

32. Se ci rifacciamo a dare uno sguardo al processo con cui siamo giunti ai concetti degli enti *iper-algebrici* da un lato, degli elementi *bicomplexi* dall'altro, noi saremo condotti naturalmente ad una serie indefinita di successive generalizzazioni.

Partendo anzitutto da una forma reale F coi soli elementi *reali*, e studiando le varietà *algebriche* formate con questi, i geometri furono condotti ad introdurre in F una nuova specie di elementi: gli elementi *complessi* (od i numeri complessi). Se ∞^n erano gli elementi reali di F , ∞^{2n} sono i suoi elementi complessi. — Questa varietà di elementi complessi noi l'abbiamo rappresentata su una varietà Φ di ∞^{2n} elementi reali.

Ma allora è apparso naturale di valersi di tutta la geometria *reale* che già potevamo supporre di possedere per lo studio della varietà Φ ; e quindi in particolare di considerare su Φ le varietà algebriche reali, e di trasportarne le proprietà nella forma F . Così su questa abbiamo ottenuto le varietà *iper-algebriche* di elementi complessi. — Però, a togliere eccezioni o distinzioni di casi ecc. nello studio degli enti algebrici reali di Φ , conveniva fare in questa forma ciò che già per lo stesso scopo s'era fatto su F : introdurrevi elementi complessi. Corrispondentemente a tali elementi di Φ si ebbero su F dei nuovi elementi: gli elementi *bicomplexi* (in numero ∞^{4n}).

Ora il proseguimento è facile. Nella forma rappresentativa Φ in cui ora consideriamo anche elementi complessi possiamo introdurre non più solo le varietà algebriche, ma più in generale le varietà *iper-algebriche*: ad esse corrisponderanno sulla forma oggettiva F una specie di varietà di elementi bicomplexi che abbraccia quelle *iper-algebriche*, e che, per un momento almeno, potremo chiamare *biiper-algebriche*. Esse si otterrebbero ponendo legami algebrici fra i coefficienti reali delle coordinate bicomplesse degli elementi di F . — D'altra parte in Φ è complemento utile all'introduzione di varietà *iper-algebriche* di elementi complessi l'introduzione di elementi bicomplexi. Similmente in F converrà introdurre una nuova specie di elementi, più ampia degli elementi bicomplexi, e cioè gli elementi *tricomplexi* (∞^{8n}), i quali hanno per immagini gli elementi bicomplexi di Φ . Le definizioni di questi ultimi mediante elementi complessi si muteranno in definizioni degli elementi *tricomplexi* di F mediante elementi bicomplexi. Analiticamente poi le coordinate che li rappresentano saran numeri bicomplexi in cui i 4 coefficienti, anzi che reali, sono a lor volta numeri complessi ordinari con una nuova unità l (o viceversa numeri complessi $x + iy$ in cui i due coefficienti x, y son numeri bicomplexi relativi alle unità h, l); cioè saran numeri *tricomplexi* (con 8 coefficienti reali) composti coll'unità reale e con le tre unità indipendenti i, h, l (aventi per quadrato -1) ed i loro prodotti il, hl, hi, hil .

In generale, ottenuto il concetto di elementi $(s-1)$ -complessi e di varietà $(s-1)$ -iper-algebriche*), a tali elementi ed a tali varietà della forma rappresentativa Φ corrisponderanno su F nuove specie di elementi e di varietà: elementi *s-complessi*, e varietà *s-iper-algebriche*. La forma F di specie n contiene $\infty^{n \cdot 2^s}$ elementi *s-complessi*, e questi formano corpo rispetto alle operazioni $(s-1)$ -iper-algebriche; sicchè ad esempio per lo studio delle intersezioni mutue di varietà $(s-1)$ -iper-algebriche non occorrono altri elementi che quelli *s-complessi*. Fra

*) Per $s-1=0$ s'intenda elementi *reali*, varietà *algebriche*. Elementi *monocomplexi* sarebbero poi gli ordinari elementi *complessi*, ecc.

gli elementi s -complessi stanno quelli reali, complessi, bicompleksi, ... $(s - 1)$ -complessi. E così fra le varietà s -iperalgebriche che si posson fare con elementi s -complessi vi sono *in particolare* quelle algebriche, iperalgebriche, ... $(s - 1)$ -iperalgebriche. — Quanto alla rappresentazione analitica dei punti s -complessi, essa si fa mediante i numeri s -complessi composti con s unità (oltre a quella reale) i_1, i_2, \dots, i_s aventi per quadrato -1 , ed i loro prodotti $i_1 i_2, \dots, i_1 i_2 i_3, \dots, \dots, i_1 i_2 \dots i_s$: tali numeri hanno dunque 2^s termini. —

Queste successive estensioni degli *elementi* (geometrici od analitici) e delle *varietà* formate con essi appajono per tal modo *naturali, spontanee*, ed in pari tempo *utili*, anzi *necessarie*. Per gli antichi studi degli enti algebrici bastavano gli elementi reali: ma per studi più profondi fu necessaria l'introduzione degli elementi complessi (ordinari). Nel concetto di questi nuovi elementi vi era certo dell'arbitrio, e gli elementi reali si sarebbero potuti generalizzare anche in altri modi. La scelta fatta fu però la più opportuna pel campo algebrico (in quanto per essa un'equazione algebrica veniva ad avere sempre tante radici quanto è il grado, ecc.). Una volta che tal scelta si è fatta l'introduzione delle varietà iperalgebriche, degli elementi bicompleksi, e così via, non è più un artificio: è, come abbiam detto, una *necessità**).

33. Si può obiettare che con tali generalizzazioni la matematica acquista una *complicazione* eccessiva. Ma a ciò si potrebbe subito replicare che contro la *necessità* non v'è rimedio; e che del resto l'introduzione degli elementi bicompleksi non si deve fare (come già

*) A ciò, e in particolare alla teoria dei numeri *bicompleksi* (tricompleksi ecc.) si possono applicare quasi completamente le considerazioni che Hamilton faceva sui biquaternioni (dei quali abbiam già rilevato il legame con quei numeri) «The Theory of such *biquaternions* is as necessary and important a complement to the theory of *single* or *real quaternions*, as in algebra the theory of *couples*, or of expression of the form $x' + \sqrt{-1}x''$, where x' and x'' denote some *two* positive or negative or null numbers, is to the theory of *single* or *real numbers* or quantities. It is admitted that the doctrine of *algebraic equations* would be entirely incomplete, if their *imaginary roots*, or solutions of the above written and well known *couple form* $(x + \sqrt{-1}y)$, were to be neglected, or kept out of view. And in like manner we may already clearly see, from the foregoing remarks and examples, that no theory of *equations in quaternions* can be considered as complete, wick refuses or neglects to take into account the *biquaternion solutions* that may exist, of the form above assigned, in any particular or general inquiry. The subject indeed is one of vast extent, and of no little difficulty: but it appears to me to be one wick will amply repay the labour of future research.» (*Lectures* n. 644; cfr. anche *Elements* n. 257 (4), ove ritorna ad insistere sulla «utilità, o meglio necessità» di considerare i biquaternioni in Geometria).

quella degli ordinari elementi complessi) se non quando appunto essa si è resa veramente necessaria per *evitare* complicazioni maggiori; e così poi quella degli elementi tricompleksi, ecc.

Ma possiamo dir di più: possiamo considerar la cosa da un punto di vista che toglie via ogni complicazione. Abbiamo già notato in fatti che un punto bicompleso della retta, o del piano . . . F si può rappresentare mediante una coppia di punti complessi di due rette, piani, . . . f, f' , ad esempio mediante i punti complessi situati risp. sui due profili, prototele, . . . delle due schiere di F , che passano pel punto bicompleso: quelle due schiere van considerate come due forme (di 1^a, 2^a, . . . specie) di cui i profili, le prototele, . . . sono gli *elementi complessi* (quantunque, se considerati come luoghi, risultino luoghi di punti bicompleksi); e dal congiungere insieme un elemento complesso dell' una schiera con uno dell' altra nasce il punto bicompleso. Ora il passaggio ai punti tricompleksi che sopra abbiam fatto equivale a considerare in ogni schiera di F gli *elementi bicompleksi*: il punto tricompleso di F risulta allora da due elementi bicompleksi delle due schiere (come intersezione), e quindi si può intender rappresentato da una *coppia di punti bicompleksi* di f, f' . Ma ognuno di questi punti bicompleksi, o di quegli elementi bicompleksi delle due schiere, è a sua volta definito entro la relativa forma mediante due elementi complessi di questa. Dunque il punto tricompleso di una retta, piano, . . . risulta dato da due coppie di ordinari profili, prototele, . . . risp. delle due schiere, ossia da *due coppie di punti complessi* di rette, piani, . . . E così in generale si può dire che la nozione di punto s -compleso si riduce a quella di due elementi ($s - 1$)-compleksi in due forme distinte (o riguardabili come tali), ad es^o nelle due schiere di protovarietà; sicchè per successive riduzioni viene ad equivalere alla nozione di 2^{s-1} punti complessi di altrettante rette, piani, . . . distinti, oppure di 2^{s-1} punti complessi di una sola forma, ma in un ordine determinato.

Anche analiticamente la cosa appare evidente. I numeri bicompleksi li abbiama già scissi in somme $z + z'$ di numeri simili ai complessi ordinari, ma tolti rispettivamente da due corpi distinti. Se ora a loro volta assumiamo pei due coefficienti di ognuno di questi numeri z, z' dei numeri complessi, z e z' verranno ad essere bicompleksi (di corpi distinti) ed ognuno di essi si spezzerà quindi nella somma di due numeri analoghi ai complessi ordinari $z = \xi + \xi_1, z' = \xi' + \xi'_1$, sicchè il numero *tricompleso* apparirà come somma $\xi + \xi_1 + \xi' + \xi'_1$ di 4 numeri simili ai complessi ordinari ma tolti da altrettanti corpi distinti. E così in generale i nostri numeri s -compleksi si posson rappresentare come somme di 2^{s-1} *componenti* appartenenti risp. ad altrettanti campi parziali determinati e distinti analoghi al campo dei numeri

complessi ordinari. Le relazioni fra questi campi parziali sono di tal natura che per eseguire delle operazioni aritmetiche elementari sui numeri s -complessi basta eseguirle successivamente sulle componenti di ogni campo parziale. Perciò si può (come rilevano i sigⁱ Weierstrass e Dedekind più in generale nei lavori citati) riguardare l'aritmetica di quei numeri s -complessi come ridotta in fondo all'aritmetica degli ordinari numeri complessi, cioè di *aggregati* di numeri complessi.
