Tafel zur Berechnung der Störungfunction für die äussersten kleinen Planeten.

Von H. Ludendorff.

Bei der Entwicklung der Störungfunction nach Herrn Gylden's Methode treten gewisse Coefficienten $\beta_n^{(s)}$ auf, welche durch die Gleichung

$$\beta_n^{(s)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \frac{\sin^{2n} \varphi}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi)^{1/2s}} d\varphi$$

definiert werden.

Hierbei ist $\alpha = \frac{a}{a'}$ das Verhältniss zweier Constanten, von denen die eine (a) der mittleren Entfernung des gestörten, und die andere (a') der mittleren Entfernung des störenden Körpers, also des Jupiter, entspricht. Es sind die von Herrn Gylden »Protometer« genannten Grössen.

Um die directe, ziemlich mühsame Berechnung dieser Coefficienten zu ersparen, haben Herr Wellmann*) und, in noch ausführlicherer Weise, Herr Masal†) Tafeln der $\beta_n^{(s)}$ berechnet. Beide Tafeln geben jedoch nicht die Möglichkeit, die $\beta_n^{(s)}$ auch für die äussersten kleinen Planeten, deren mittlere Bewegung kleiner als etwa 500" ist, insbesondere also für diejenigen vom Hilda-Typus, zu berechnen. Das Interesse, welches gerade diese Planeten in Folge der bei einigen von ihnen fast strengen Commensurabilität der mittleren Bewegung mit derjenigen Jupiters verdienen, liess es wünschenswerth erscheinen, die erwähnte Lücke auszu-

füllen, und ich habe daher auf Anregung von Herrn Brendel die nachstehende Tafel berechnet. Wegen der sehr grossen Störungen, welche diese Planeten erleiden, kann man nur schwer einen guten Näherungswerth der Constanten α erlangen, und man kann sich daher gezwungen sehen, nachträglich auf einen, von dem ursprünglich angenommenen abweichenden Werth von α überzugehen. Dieser Uebergang ist mit Hülfe der Tafel leicht zu bewerkstelligen.

Die Berechnung der Tafel geschah nach einem Verfahren, auf welches ich von Herrn Brendel aufmerksam gemacht wurde. Setzt man nämlich

$$A_n^{(s)} = (1 - \alpha^2)^{1/2s} \beta_n^{(s)},$$

so ist

$$A_n^{(s)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \frac{\sin^{2n} \varphi}{(1 + 2\varepsilon \cos^2 \varphi)^{1/2s}} d\varphi,$$

wo

$$2\varepsilon = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}.$$

Durch die Absonderung des Factors $(1 - \alpha^2)^{1/2s}$ wird, wie zuerst Herr Wellmann in seinem oben erwähnten Aufsatz erkannt hat, die Convergenz der Reihenentwicklung erheblich verstärkt.

Es ist ferner:

$$\frac{d^m A_n^{(s)}}{d\varepsilon^m} = (-1)^m s \cdot (s+2)(s+4) \cdots (s+2m-2) \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{1 + 2\varepsilon \cos^2 \varphi} \right)^m \frac{\sin^{2n} \varphi d\varphi}{(1 + 2\varepsilon \cos^2 \varphi)^{1/2s}}.$$

Berechnet man nun für einen speciellen Werth α_0 von α , dem der Werth ε_0 von ε entsprechen möge, die Grössen $A_n^{(1)}$ nebst ihren Ableitungen, und bezeichnet diese Werthe mit

$$(A_n^{(s)})_0, \dots, \left(\frac{d^m A_n^{(s)}}{d\varepsilon^m} \right)_0, \dots$$

so kann man die $A_n^{(s)}$ für einen beliebigen Werth von α resp. ε nach der Taylor'schen Reihe

$$A_n^{(s)} = (A_n^{(s)})_0 + \frac{1}{1!} \left(\frac{dA_n^{(s)}}{d\varepsilon} \right)_0 \Delta + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 A_n^{(s)}}{d\varepsilon^2} \right)_0 \Delta^2 + \dots,$$

wo $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_0$ ist, bestimmen.

Zur Berechnung der Tafel wurde $\log \alpha_0 = 9.8810000$ gewählt, ein Werth, welcher sehr nahe dem Planeten (153) Hilda entspricht; der zugehörige Werth von ε ist $\varepsilon_0 = 0.6851038$. Für diesen Werth wurden die in den Coefficienten der Reihe auftretenden bestimmten Integrale nach dem von Herrn Harzer in seinen »Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper« angegebenen, sehr zweckmässigen Verfahren berechnet. In der

Tafel finden sich nur die Reihen für $A_n^{(1)}$ ($n = 0$ bis 12), $A_{12}^{(3)}$, $A_{12}^{(5)}$, $A_{12}^{(7)}$. Hat man diese Grössen aus der Tafel entnommen, so ergeben sich die entsprechenden $\beta_n^{(s)}$ aus:

$$\beta_n^{(s)} = \frac{1}{(1 - \alpha^2)^{1/2s}} A_n^{(s)}.$$

Die $\beta_n^{(3)}$, $\beta_n^{(5)}$, $\beta_n^{(7)}$ für $n < 12$ erhält man alsdann mit Hülfe der von Herrn Gylden gegebenen Recursionsformel:

*) Wellmann, Tafeln zur Berechnung der Störungfunction der kleinen Planeten, A. N. Bd. 127, Nr. 3040.

†) Masal, Table de l'Intégrale $\int_0^{1/2\pi} \frac{\sin^{2n} \varphi}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi)^{1/2s}} d\varphi$. (Astr. iakttagelser och undersökningar anställda på Stockholm's Obs., IV, 5).

$$\beta_n^{(s+2)} = \beta_n^{(s)} + \alpha^2 \beta_{n+1}^{(s+2)}$$

Da man im weiteren Verlauf der Rechnung nicht die $\beta_n^{(s)}$ selber, sondern nur die mit denselben durch die Relation:

$$\gamma_{n,0} = \frac{\alpha^{n+1}}{(1-\alpha^2)^{1/2}} A_n^{(1)}$$

$$\gamma_{10,2} = \frac{3}{8} \frac{\alpha^{15}}{(1-\alpha^2)^{5/2}} A_{12}^{(5)}$$

und dann die andern $\gamma_{n,\sigma}$ nach der folgenden, leicht herzuleitenden Recursionsformel bestimmt:

$$\gamma_{n,\sigma} = \frac{2\sigma-1}{2\sigma} \alpha \gamma_{n+1,\sigma-1} + \alpha \gamma_{n+1,\sigma}$$

Trotz dieser bequemen Recursionsformeln kann es gerade bei den Planeten vom Hilda-Typus nützlich sein,

$$\gamma_{n,\sigma} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\sigma-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2\sigma} \alpha^{n+2\sigma+1} \beta_{n+\sigma}^{(2\sigma+1)}$$

verbundenen Grössen braucht, so verfährt man vielleicht zweckmässiger, wenn man aus den tabulirten $A_n^{(s)}$ die zugehörigen $\gamma_{n,\sigma}$ berechnet, nämlich:

$$\gamma_{11,1} = \frac{1}{2} \frac{\alpha^{14}}{(1-\alpha^2)^{3/2}} A_{12}^{(3)}$$

$$\gamma_{9,3} = \frac{5}{16} \frac{\alpha^{16}}{(1-\alpha^2)^{7/2}} A_{12}^{(7)}$$

auch die $A_n^{(s)}$ für $s = 3, 5, 7$ und $n < 12$ zu tabuliren, um eine unter Umständen nothwendige Veränderung des Werthes von α möglichst leicht vornehmen zu können. Um eine solche Erweiterung der Tafel zu erleichtern, habe ich die folgenden Formeln hergeleitet, welche leicht verificirt werden können:

$$A_n^{(s+2)} = \frac{1}{1+2\varepsilon} A_n^{(s)} + \frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon} A_{n+1}^{(s+2)}$$

$$\frac{dA_n^{(s+2)}}{d\varepsilon} = \frac{s+2}{s} \frac{1}{1+2\varepsilon} \frac{dA_n^{(s)}}{d\varepsilon} + \frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon} \frac{dA_{n+1}^{(s+2)}}{d\varepsilon}$$

$$\frac{d^2 A_n^{(s+2)}}{d\varepsilon^2} = \frac{s+4}{s} \frac{1}{1+2\varepsilon} \frac{d^2 A_n^{(s)}}{d\varepsilon^2} + \frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon} \frac{d^2 A_{n+1}^{(s+2)}}{d\varepsilon^2}$$

$$\dots$$

$$\frac{d^m A_n^{(s+2)}}{d\varepsilon^m} = \frac{s+2m}{s} \frac{1}{1+2\varepsilon} \frac{d^m A_n^{(s)}}{d\varepsilon^m} + \frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon} \frac{d^m A_{n+1}^{(s+2)}}{d\varepsilon^m}$$

Mit Hülfe dieser Formeln und der in der Tafel enthaltenen Coefficienten kann man offenbar die $A_n^{(s)}$ für $s = 3, 5, 7$ und $n < 12$ leicht tabuliren. Der in dem ersten Gliede der rechten Seite der obigen Gleichungen auftretende Vergrößerungsfactor $\frac{s+2m}{s}$ ist zwar nachtheilig, indessen wird dieser Nachtheil wieder dadurch aufgehoben, dass man die $A_n^{(s)}$ für höhere Werthe von s nur mit geringerer Genauigkeit braucht als für niedere.

Beachtenswerth ist auch die einfache Gleichung:

$$A_n^{(s+2)} = A_{n+1}^{(s+2)} - \frac{1}{s} \frac{dA_n^{(s)}}{d\varepsilon}$$

Die Tafel giebt die $A_n^{(1)}$ und $A_{12}^{(3)}$ auf 7 Decimalen, $A_{12}^{(5)}$ auf 6, $A_{12}^{(7)}$ auf 5 Decimalen, so lange $\varepsilon - \varepsilon_0$ kleiner als 0.22 ist. Die letzte Decimale ist vielleicht in einigen Fällen nicht mehr ganz sicher, indessen ist die Genauigkeit der Tafel jedenfalls völlig hinreichend. Da die Planeten vom Hilda-Typus alle nur wenig von einander verschiedene mittlere Bewegungen haben, so werden für dieselben in den meisten Fällen nur die allerersten Glieder der Reihen zu beachten sein. Ich habe jedoch der Tafel die vorliegende Ausdehnung gegeben, damit zwischen derselben und der Masal'schen Tafel keine Lücke bestehen

bliebe, und damit sie auch für die bis jetzt entdeckten, dem Jupiter am nächsten kommenden Planeten anwendbar sei. Indessen ist zu bemerken, dass für (279) Thule die $A_n^{(s)}$ aus der Tafel vielleicht nicht immer mit genügender Schärfe gefunden werden können. Doch ist für diesen Planeten die Grösse $A = \varepsilon - \varepsilon_0$ positiv, die Reihen für die $A_n^{(s)}$ wechseln also regelmässig das Zeichen, und man wird ohne Weiteres übersehen können, bis zu welcher Decimale die so gefundenen Werthe der $A_n^{(s)}$ zuverlässig sind. Eine Erweiterung der Tafel in dieser Hinsicht wird übrigens nur wenig Mühe kosten.

Um die Richtigkeit der Coefficienten der Reihen zu prüfen, habe ich jede mechanische Quadratur doppelt ausgeführt, indem ich einmal die Werthe des Integranden für $\varphi = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ \dots 90^\circ$ und ein anderes Mal für φ gleich $5^\circ, 15^\circ \dots 85^\circ$ berechnete. Ferner habe ich den Umstand benutzt, dass die Tafel bis an die Masal'sche heranreicht und habe die für $\log \alpha = 9.840$ mit Hülfe der Tafel berechneten $A_n^{(s)}$ mit den aus der Masal'schen Tafel entnommenen Werthen verglichen.

Es folgt nunmehr die Tafel. Alle Zahlen, ausgenommen das constante Glied einer jeden Reihe, sind Logarithmen, denen sämmtlich -10 hinzuzusetzen ist.

$$2\varepsilon = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \quad \Delta = \varepsilon - \varepsilon_0 \quad \varepsilon_0 = 0.6851038$$

$$\begin{aligned} A_0^{(1)} &= 0.7966620 - 9.2695435\Delta + 8.961820\Delta^2 - 8.738185\Delta^3 + 8.5538\Delta^4 - 8.392\Delta^5 + 8.246\Delta^6 - 8.11\Delta^7 \\ A_1^{(1)} &= 0.4408896 - 8.7932314\Delta + 8.357835\Delta^2 - 8.04107\Delta^3 + 7.7825\Delta^4 - 7.558\Delta^5 + 7.359\Delta^6 \\ A_2^{(1)} &= 0.3430054 - 8.5565288\Delta + 8.035713\Delta^2 - 7.65260\Delta^3 + 7.3390\Delta^4 - 7.066\Delta^5 + 6.81\Delta^6 \\ A_3^{(1)} &= 0.2914787 - 8.392711\Delta + 7.80554\Delta^2 - 7.3693\Delta^3 + 7.012\Delta^4 - 6.70\Delta^5 \\ A_4^{(1)} &= 0.2582027 - 8.265818\Delta + 7.62358\Delta^2 - 7.1423\Delta^3 + 6.746\Delta^4 - 6.40\Delta^5 \\ A_5^{(1)} &= 0.2343704 - 8.161633\Delta + 7.47198\Delta^2 - 6.9514\Delta^3 + 6.519\Delta^4 - 6.15\Delta^5 \\ A_6^{(1)} &= 0.2161903 - 8.072965\Delta + 7.34144\Delta^2 - 6.7856\Delta^3 + 6.320\Delta^4 \\ A_7^{(1)} &= 0.2017171 - 7.995635\Delta + 7.22656\Delta^2 - 6.6389\Delta^3 + 6.149\Delta^4 \\ A_8^{(1)} &= 0.1898336 - 7.926981\Delta + 7.1237\Delta^2 - 6.507\Delta^3 + 5.99\Delta^4 \\ A_9^{(1)} &= 0.1798453 - 7.865197\Delta + 7.0305\Delta^2 - 6.386\Delta^3 + 5.83\Delta^4 \\ A_{10}^{(1)} &= 0.1712944 - 7.808997\Delta + 6.9453\Delta^2 - 6.277\Delta^3 + 5.73\Delta^4 \\ A_{11}^{(1)} &= 0.1638646 - 7.757431\Delta + 6.8668\Delta^2 - 6.174\Delta^3 + 5.58\Delta^4 \\ A_{12}^{(1)} &= 0.1573296 - 7.709774\Delta + 6.7939\Delta^2 - 6.079\Delta^3 + 5.47\Delta^4 \\ A_{12}^{(3)} &= 0.1503059 - 8.135872\Delta + 7.41775\Delta^2 - 6.8322\Delta^3 + 6.294\Delta^4 \\ A_{12}^{(5)} &= 0.144061 - 8.309586\Delta + 7.71441\Delta^2 - 7.2162\Delta^3 + 6.779\Delta^4 \\ A_{12}^{(7)} &= 0.13847 - 8.41024\Delta + 7.9016\Delta^2 - 7.4720\Delta^3 + 7.018\Delta^4 \end{aligned}$$

Berlin 1896 März.

H. Ludendorff.

Planet (316) Goberta.

Von A. Berberich.

Aus den Beobachtungen 1891 Sept. 8, Oct. 5, Dec. 1 und 28 ergeben sich durch Variation der Distanzen des 1. und 4. Ortes die folgenden Elemente:

Epoche 1891 Dec. 28.5 M. Z. Berlin.

$$\begin{aligned} M &= 307^\circ 42' 51''.5 \\ \omega &= 307 \quad 5 \quad 52.0 \\ \Omega &= 124 \quad 34 \quad 27.0 \\ i &= 2 \quad 18 \quad 37.8 \\ \varphi &= 8 \quad 5 \quad 20.3 \\ \mu &= 625''.609 \\ \log a &= 0.502469 \end{aligned} \quad 1900.0$$

Mittlere Oerter.

$$\begin{aligned} 1891 \text{ Oct. } 5 \quad d\lambda &= -0''.1 \quad d\beta = -0''.2 \\ \text{Dec. } 1 \quad &= +0.1 \quad = +3.8 \end{aligned}$$

Für die recht günstige II. Opposition im December 1892 verschiebt sich der Planetenort nach den neuen Elementen um ca. $+3^m 8 + 4'$ gegen die damals an die Herren Charlois und Wolf mitgetheilte Ephemeride. Herr Wolf, der auch jetzt auf seinen damals gemachten Aufnahmen den Planeten nicht finden kann, ist der Ansicht, dass die Helligkeit geringer war als sie berechnet ist (12.7 Gr.).

In Folge der Jupiterstörungen haben sich übrigens

die Elemente nach 1891 nicht unbeträchtlich verändert. In Conjunction mit dem Jupiter stand Planet (316) am 1. Sept. 1891 bei einer gegenseitigen Entfernung $\Delta = 1.87$.

Die Störungen, berechnet in 20 tägigen Intervallen vom 8. Sept. 1891 bis 31. Dec. 1892 betragen:

$$\begin{aligned} \Delta M &= -16' \quad 3''.63 \\ \Delta \omega &= +22 \quad 18.62 \\ \Delta \Omega &= -2 \quad 13.01 \\ \Delta i &= -0 \quad 1.63 \\ \Delta \varphi &= -7 \quad 21.73 \\ \Delta \mu &= +2''.12923 \end{aligned}$$

Als Elemente, mit denen man in Zukunft die Oerter des Planeten Goberta zu rechnen hätte, kann man hiernach einstweilen folgende nehmen:

Epoche 1893 Jan. 0.0 M. Z. Berlin.

$$\begin{aligned} M &= 11^\circ 29' \quad 4''.9 \\ \omega &= 307 \quad 28 \quad 10.6 \\ \Omega &= 124 \quad 32 \quad 14.0 \\ i &= 2 \quad 18 \quad 36.5 \\ \varphi &= 7 \quad 57 \quad 58.6 \\ \mu &= 627''.7382 \\ \log a &= 0.501585 \end{aligned} \quad 1900.0$$

Berlin, Kgl. Recheninstitut, Neujahr 1896.

A. Berberich.