

**2. Der Widerstand gegen die Bewegung einer
starrten Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die
zwischen zwei parallelen ebenen Wänden
eingeschlossen ist;
von Hilding Faxén.**

Bericht.

Nach einigen geschichtlichen Vorbemerkungen werden einige Ergebnisse, welche Widerstandsberechnungen in hohem Grade erleichtern, aus den von Oberbeck und anderen gefundenen Entwicklungen nach Kugelfunktionen abgeleitet. Dann kommt eine Methode, die Bedingung, daß die Flüssigkeit an den ebenen Wänden nicht gleiten darf, mittels Doppelintegralen zu befriedigen. Die Widerstandsformel wird numerisch ausgerechnet und mit Messungen von Westgren verglichen.

Kapitel I. Bemerkungen über Widerstandsberechnungen.

§ 1. Zweck der Abhandlung.

Auf den folgenden Seiten soll der Widerstand berechnet werden, den eine kleine starre Kugel erfährt, wenn sie sich in einer reibenden Flüssigkeit zwischen zwei parallelen Wänden bewegt. Nur die langsame, konstante, geradlinige Bewegung parallel den Wänden soll untersucht werden. Der sich ergebende Einfluß der Gefäßwände auf den Widerstand wird dann auch für nicht völlig geradlinige und nicht streng konstante Bewegungen annähernd derselbe sein, vorausgesetzt, daß man nur die den Wänden parallelen Komponenten berücksichtigt. Wenn eine Kugel sich senkrecht zu den Wänden bewegt, so ist der Einfluß der Wände auf den Widerstand ein anderer und erfordert eine besondere Untersuchung, welche ich nicht ausgeführt habe. Von vornherein ist jedoch klar, daß die im folgenden angewandten Methoden dem Verfahren von Lorentz-Ladenburg¹⁾ vorzuziehen sind.

1) R. Ladenburg, Ann. d. Phys. **23**, S. 453. 1907.

Meine Berechnung einer in der Kolloid-Physik erforderlichen Widerstandsformel der Öffentlichkeit vorzulegen, ist der Zweck dieser Abhandlung. Bei einer experimentellen Untersuchung der Brownschen Bewegung z. B. beobachtete man die Bewegung kleiner Körner zwischen zwei vertikalen Wänden und wollte nun die Korngröße aus der Fallgeschwindigkeit der Körner berechnen.¹⁾ Die bisher unbekannte Einwirkung der Wände machte jedoch die genaue numerische Berechnung der Resultate unmöglich. Die rechnerische Vollendung dieser und ähnlicher Arbeiten zu ermöglichen, ist mein Ziel mit dem Folgenden. Ferner hege ich die Hoffnung, daß die Widerstandsformeln dieser Abhandlung bei Auswertung der Ergebnisse von Versuchen über Kataphorese sich nützlich zeigen werden.

Herrn O. Emersleben, der parallel mit mir die numerischen Rechnungen ausgeführt hat, möchte ich an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen.

§ 2. Frühere Untersuchungen.

Soviel ich sehe, ist eine theoretische Berechnung der Einwirkung, die zwei parallele Wände auf den Widerstand gegen eine Bewegung parallel zu ihnen ausüben, bis jetzt nicht ausgeführt worden. Ein von Lorentz angegebenes und von Ladenburg angewandtes Verfahren (vgl. § 1) führt nicht zu hinreichend genauen Ergebnissen.²⁾

Über die Größe des gesuchten Effekts hat v. Weißenhoff eine sehr genau zutreffende Vermutung ausgesprochen.³⁾ Die einzige frühere Abhandlung, in der die betreffende Frage wirklich behandelt wird, ist eine experimentelle Untersuchung von Westgren, der auch eine empirische Formel aufgestellt hat.⁴⁾ Westgren hat dabei die mit den Versuchen am besten übereinstimmende Formel, die nur eine Konstante enthält, herausgegriffen. Die im folgenden berechnete theoretische Formel enthält drei neue Konstanten und stimmt der Form nach nicht mit der Westgrenschen Formel überein. Mit seinen Versuchen jedoch stimmt die theoretische Formel

1) I. Nordlund, Zeitschr. f. phys. Chem. 87, S. 56. 1914.

2) Vgl. J. v. Weißenhoff, Ann. d. Phys. 62, S. 23. 1920.

3) J. v. Weißenhoff, a. a. O., S. 27.

4) A. Westgren, Ann. d. Phys. 52, S. 308. 1917.

sehr gut. Westgren hat die richtige (theoretische) Formel nicht finden können, weil er dann nicht nur die drei erwähnten Konstanten, sondern auch noch zwei, die Null sind, hätte ermitteln müssen. Seine Versuche sind aber bei weitem nicht so genau, daß dies möglich ist.

Unter der Voraussetzung, daß der Halbmesser und die Geschwindigkeit der Kugel klein sind, habe ich die allgemeinen Ansätze zur Lösung des fraglichen Problems in meiner Dissertation mitgeteilt.¹⁾ Um eine Vereinfachung dieser Ansätze zu ermöglichen, habe ich diesmal noch die Annahme hinzugefügt, daß der Abstand zwischen den Wänden nicht allzu groß ist. So konnte ich in dem allgemeinen Ansätze den Grenzübergang $\sigma \rightarrow 0$ (σ ist ein später zu erklärender Parameter) vollziehen. So entstanden die Gleichungen (29)–(32), für die eine einfachere Begründung in §§ 9, 10 mitgeteilt werden wird. Diese Abhandlung ist nämlich so geschrieben, daß man zum Verständnis der folgenden Rechnungen meine Dissertation nicht zu lesen braucht, wenn man nur Formel (23) kennt.

Auf dem Gebiete der zweidimensionalen Flüssigkeitsbewegungen findet sich ein Problem, welches das Gegenstück des vorliegenden ist. Das ist die Bewegung eines Kreiszyinders zwischen zwei parallelen ebenen Wänden. Für die Behandlung dieser Frage schlugen Cowley und Levy²⁾ ein graphisches Verfahren vor. Sie skizzierten ferner ein sukzessives Annäherungsverfahren für die Berücksichtigung der quadratischen Glieder der Differentialgleichungen. Dabei nahmen sie an, daß die auftretenden Funktionen in Potenzreihen nach σ (siehe § 3) entwickelt werden können. Das ist aber nicht der Fall. Außer σ tritt nämlich auch der absolute Betrag $|\sigma|$ auf.

Bairstow, Cave und Lang³⁾ behandelten dasselbe Problem ausführlicher als Cowley und Levy. Für die Gültigkeit ihrer Rechnungen ist, meiner Vermutung nach, erforderlich, daß die Produkte σ ·Halbmesser des Zylinders und σ ·Abstand zwischen den Ebenen klein sind. Um der Bedingung der Ruhe an den Gefäßwänden zu genügen, wenden sie eine Doppel-

1) H. Faxén, Diss., Upps., S. 61–65. 1921. Im Ausdrucke für $g_6 = g_6$ (S. 65) ist ein λ zwischen g_1 und $e^{\lambda(\lambda + \kappa)}$ ausgelassen.

2) W. L. Cowley u. H. Levy, Phil. Mag. (6), 41, S. 584. 1921.

3) L. Bairstow, B. M. Cave u. E. D. Lang, Proc. of the Royal Soc. A. 100, S. 394. 1922.

belegung an diesen an. Die Stärke der Doppelbelegung wurde für jede Stelle durch numerische Methoden ermittelt und endlich wurden die Stromlinien festgestellt. Dieses Problem wurde nur vorgeführt, um ihre Rechenmethode zu erhellen. Das Beispiel scheint mir jedoch insofern unglücklich gewählt zu sein, als ihre Methode, die Bedingung der Ruhe an den Wänden zu befriedigen, nicht die beste ist. Mit den im folgenden angewandten Methoden¹⁾ habe ich das Problem so weit geführt, daß nicht viel mehr als die numerischen Rechnungen übrig sind und diese scheinen recht einfach zu werden.

§ 3. Die Leistungsfähigkeit der Stokesschen Differentialgleichungen.

Stokes berechnete bekanntlich den Widerstand, den eine kleine Kugel bei langsamer Bewegung in einer zähen, unbegrenzten Flüssigkeit erfährt. Dabei hatte er durch passende Vereinfachungen die hydrodynamischen Grundgleichungen auf die folgende Form gebracht:

$$(1) \quad \mu \Delta u = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \mu \Delta v = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \mu \Delta w = \frac{\partial p}{\partial z},$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Hier sind

x, y, z die Koordinaten,

u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten in bezug auf die Richtungen der Koordinatenachsen,

p der Druck,

μ die Zähigkeit,

Δ die Symbole $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Aus den Differentialgleichungen berechnete Stokes die Strömung der Flüssigkeit um die Kugel, und aus der gefundenen Strömung leitete er sein bekanntes Widerstandsgesetz ab, welches in der ersten Annäherung richtig ist, wie viele Proben gezeigt haben. Es stellte sich aber als unmöglich heraus, die Annäherung weiter zu treiben²⁾ oder die Methode auf die Be-

1) Vgl. auch meine Dissertation, S. 8. Siehe ferner C. W. Oseen, Arkiv f. mat., astr. o. fys. 17, Nr. 4. 1922.

2) Whitehead, Quart. Journ. of Math. 1888.

rechnung der Strömung um einen Zylinder anzuwenden.¹⁾ Oseen²⁾ und Lamb zeigten, daß dies seinen Grund darin hat, daß die Gleichungen (1) nicht richtig sind. Der von Stokes gefundene Wert für die Strömung ist demgemäß nur für die nächste Umgebung der Kugel richtig. Ersetzt man (1) durch die richtigeren Oseenschen Gleichungen, so fallen die erwähnten Schwierigkeiten weg. Diese Gleichungen führen leider zu schwierigeren Rechnungen als (1). Ich habe daher versucht, mir klar zu machen, unter welchen Umständen die Gleichungen (1) doch zu richtigen Ergebnissen führen.

Oseen fand, daß seine Einwände gegen (1) dann nicht stichhaltig waren, wenn erstens die Flüssigkeit sich nicht nach allen drei Dimensionen bis ins Unendliche erstreckt und wenn man sich zweitens mit der ersten Annäherung begnügt.³⁾ Die erste Bedingung ist in unserem Problem erfüllt, da die Flüssigkeit ja zwischen zwei parallelen ebenen Wänden eingeschlossen ist. Die Flüssigkeit ist nur in bezug auf zwei Dimensionen unendlich.

Die zweite Bedingung fordert, daß gewisse sog. Reynoldssche Zahlen klein sein sollen. Die wichtigste Bedingung ist, daß $\sigma a \cdot \sigma l$ gegen 1 vernachlässigt werden kann. Dabei ist

a der Halbmesser der Kugel,

l der Abstand vom Kugelmittelpunkt zur Wand,

σ gleich $\rho u_0 / 2\mu$,

ρ die Dichte der Flüssigkeit,

μ die Zähigkeit der Flüssigkeit,

u_0 die Geschwindigkeit der Kugel.

Daß der wichtigste Teil der Bedingung so formuliert werden kann, ist eine Vermutung, die durch angenäherte Ausrechnung meiner allgemeinen Ansätze⁴⁾ geprüft werden kann. Ich glaube diese Vermutung aussprechen zu können, weil ich in dem Falle, daß die Flüssigkeit von nur einer ebenen Wand⁵⁾ begrenzt ist, und in dem Falle, daß die Kugel sich längs der

1) G. G. Stokes, *Cambr. Phil. Soc. Trans.* 9. S. [54]. 1851.

2) C. W. Oseen, *Arkiv f. mat., astr. o. fys.* 6. No. 29. 1910.

3) H. Faxén, *a. a. O.* S. 140. Note 1. Wie S. 8 hervorgehoben wurde, hat Oseen den Inhalt dieser Note mündlich angedeutet.

4) H. Faxén, *a. a. O.*, S. 61–65.

5) H. Faxén, *a. a. O.*, S. 115. Vgl. auch *Ann. d. Phys.* 63. S. 581–584. 1920.

Achse einer Röhre¹⁾ bewegt, gerade diese Bedingung, daß $\sigma a \cdot \sigma l$ gegen 1 vernachlässigt werden kann, gefunden habe. Ferner könnte man gewisse Symmetriegründe heranziehen (vgl. unten).

Im Stokesschen Falle, wenn die Flüssigkeit nach allen Seiten sich ins Unendliche erstreckt, ist der Fehler in der Widerstandsformel von der Größe $\frac{3}{4} \sigma a$ gegen 1. Die Widerstandsformel wird nämlich richtiger, wenn man den Faktor $(1 + \frac{3}{4} \sigma a)$, worin $\frac{3}{4} \sigma a$ das Oseensche Korrektionsglied genannt wird, hinzufügt.²⁾ Wenn σl kleiner als 1 ist, liefern die Gleichungen (1) und (2) nach dem oben gesagten in unserem Falle eine genauere Widerstandsformel als im Stokesschen Falle. Die Wände heben das Oseensche Korrektionsglied $\frac{3}{4} \sigma a$ auf.

Dies erklärt sich folgendermaßen. Wenn die Flüssigkeit unbegrenzt ist, wird sie in gewissem Grade hinter der Kugel mitgerissen. Dadurch wird der Widerstand vergrößert, und dies ist der Grund des Oseenschen Korrektionsgliedes. Wenn die Flüssigkeit aber von Wänden begrenzt ist und der Abstand zwischen Kugel und Wand nicht allzu groß ist, üben die Wände einen beruhigenden Einfluß auf die Strömung aus. Hinter der Kugel kann die Flüssigkeit nicht mehr mitgerissen werden, durch jeden Querschnitt strömt in beiden Richtungen gleich viel Flüssigkeit, die Strömung vor und hinter der Kugel nimmt einen annähernd spiegelsymmetrischen Charakter an. Dann verschwindet auch der Grund des Oseenschen Korrektionsgliedes.

§ 4. Entwicklung nach Kugelfunktionen.

Oberbeck³⁾ und andere entwickelten die Geschwindigkeitskomponenten einer stationären Strömung, die (1) und (2) genügt, nach Kugelfunktionen und verwandten dabei den in der Elastizitätstheorie vorkommenden ähnliche Entwicklungen. Hier soll Lamb's⁴⁾ Darstellung dieser Entwicklungen benutzt werden. Die Bezeichnungen von Lamb werden

1) H. Faxén, noch ungedrucktes Manuskript. Vgl. Diss. S. 48.

2) C. W. Oseen, Arkiv f. mat., astr. o. fys. 9. Nr. 16. 1913.

3) Oberbeck, Journ. f. reine u. angew. Math. (Crelle) 81. S. 62. 1876.

4) H. Lamb, Hydrodynamics, 4. Aufl. S. 583—586. Cambridge 1916.

beibehalten und die mit einem L versehenen Hinweise beziehen sich auf das in der Fußnote angegebene Lehrbuch. L 585 (8) bezeichnet also die Formel (8), S. 585, in dem eben-erwähnten Buche.

Φ_n , χ_n und p_n bezeichnen räumliche harmonische Kugelfunktionen, welche im folgenden der Kürze wegen einfach Kugelfunktionen genannt werden.

Wenn man (1) differenziert, so erhält man mit Hilfe von (2)

$$\Delta p = 0.$$

p kann also nach Kugelfunktionen entwickelt werden [vgl. L 584 (4)]:

$$(3) \quad p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n,$$

wobei n die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft. Durch diese Gleichung könnten die Funktionen p_n definiert werden; die endgültige Definition geschieht jedoch durch (4).

Die Strömung, d. h. u , v , w , p , soll nun in den im Ursprunge regulären Teil u_r , v_r , u_s , p_r und den im Ursprunge singulären Teil u_s , v_s , w_s , p_s geteilt werden.

Da die Gleichungen (1) und (2) linear sind, so enthalten u , v , w , p , u_r , usw. als Faktor eine Integrationskonstante, die wir c nennen wollen. Da p_0 und p_{-1} für das Folgende keine Bedeutung haben, erhält man aus (3), wenn man c als Faktor vor die Summenzeichen schreibt:

$$(4) \quad p = p_r + p_s, \quad p_r = c \sum_{n=1}^{\infty} p_n, \quad p_s = c \sum_{n=1}^{\infty} p_{-n-1}.$$

Die Geschwindigkeitskomponenten können auf die folgende Form gebracht werden [(vgl. L . 585 (8))]

$$u = u_r + u_s = u_0, \quad v = v_r + v_s, \quad w = w_r + w_s.$$

Das Glied $-u_0$ wurde wegen seiner besonderen Bedeutung ausgeschrieben. Da die Kugel sich mit der Geschwindigkeit u_0 bewegt und der Koordinatenursprung, wie gewöhnlich, in den Kugelmittelpunkt gelegt ist, haben die Gefäßwände und die unendlich entfernten Teile der Flüssigkeit diese Geschwindigkeit.

$$(5) \left\{ \begin{aligned} u_r &= \frac{c}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial p_n}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n r^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_n}{r^{2n+1}} \right\} + u_r', \\ v_r &= \frac{c}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial p_n}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n r^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial y} \frac{p_n}{r^{2n+1}} \right\} + v_r', \\ w_r &= \frac{c}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial p_n}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n r^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_n}{r^{2n+1}} \right\} + w_r'. \end{aligned} \right.$$

$$(6) \left\{ \begin{aligned} u_s &= \frac{c}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(n+1) r^{1-2n}}{n(2n+1)(2n-1)} \frac{\partial}{\partial x} (r^{2n+1} p_{-n-1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial p_{-n-1}}{\partial x} \right\} + u_s', \\ v_s &= \frac{c}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(n+1) r^{1-2n}}{n(2n+1)(2n-1)} \frac{\partial}{\partial y} (r^{2n+1} p_{-n-1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial p_{-n-1}}{\partial y} \right\} + v_s', \\ w_s &= \frac{c}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(n+1) r^{1-2n}}{n(2n+1)(2n-1)} \frac{\partial}{\partial x} (r^{2n+1} p_{-n-1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial p_{-n-1}}{\partial x} \right\} + w_s'. \end{aligned} \right.$$

Da die Funktionen Φ_0 , χ_0 , Φ_{-1} und χ_{-1} im folgenden keine Rolle spielen, werden sie von Anfang an vernachlässigt, und wir können die folgenden Formeln aufstellen [vgl. L 584 (9)]:

$$(7) \left\{ \begin{aligned} u_r' &= c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial x} + z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right), \\ v_r' &= c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial y} + x \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right), \\ w_r' &= c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial z} + y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} \right). \end{aligned} \right.$$

$$(8) \quad \begin{cases} u'_s = c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_{-n-1}}{\partial x} + z \frac{\partial \chi_{-n-1}}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_{-n-1}}{\partial x} \right), \\ v'_s = c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_{-n-1}}{\partial y} + x \frac{\partial \chi_{-n-1}}{\partial x} - z \frac{\partial \chi_{-n-1}}{\partial y} \right), \\ w'_s = c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_{-n-1}}{\partial x} + y \frac{\partial \chi_{-n-1}}{\partial x} - x \frac{\partial \chi_{-n-1}}{\partial y} \right). \end{cases}$$

Für die Bestimmung der Funktionen p_n , Φ_n , χ_n sind die Gleichungen [vgl. L 585 (9) u. (11)]

$$(9) \quad xu + yv + zw = \frac{c}{\mu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n r^2}{2(2n+3)} p_n + c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \Phi_n,$$

$$(10) \quad x\xi + y\eta + z\zeta = c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n(n+1)\chi_n,$$

nützlich, wobei ξ , η , ζ die Wirbelkomponenten sind.

Es ist also:

$$(11) \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die obigen Ausdrücke für u , v , w , p den Differentialgleichungen (1) und (2) genügen.

§ 5. Die Strömung um eine Kugel.

Die Reihen (5), (6), (7) und (8) sollen nun eine Strömung ohne Gleiten um eine Kugel vorstellen, deren Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprunge zusammenfällt und deren Halbmesser a ist. Für $r = a$ soll also $u = v = w = 0$ sein, und Aufgabe dieses Paragraphen ist, die daraus folgenden Gleichungen, die p_n , Φ_n , χ_n , p_{-n-1} , Φ_{-n-1} , χ_{-n-1} verbinden, zu finden. Zu diesem Zwecke mögen die neuen Kugelfunktionen p_n^* usw. durch die Gleichungen $a^{2n+1} p_n^* = r^{2n+1} p_{-n-1}$, $a^{2n+1} \Phi_n^* = r^{2n+1} \Phi_{-n-1}$, $a^{2n+1} \chi_n^* = r^{2n+1} \chi_{-n-1}$ erklärt werden.

Wir versuchen, ob etwa die Summe der n ten Glieder in den Ausdrücken für u , v , w , welche man aus (5)–(8) bekommt, gleich Null gesetzt werden kann, wenn $n > 1$. Wenn $\chi_n^* = -\chi_n$ ist, so findet man zunächst:

$$\begin{aligned} - \left(z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right) &= \left(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{r^{2n+1}}{a^{2n+1}} \chi_{-n-1} \right) \\ &= \frac{r^{2n+1}}{a^{2n+1}} \left(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \chi_{-n-1}. \end{aligned}$$

Wenn

$$(12) \quad \chi_{-n-1} = -\frac{a^{2n+1}}{r^{2n+1}} \chi_n$$

ist, so heben sich also die entsprechenden Teile von u_r und u_s an der Kugeloberfläche $r = a$ auf. Aus Symmetriegründen heben sich auch die entsprechenden Teile von v_r , v_s , w_r , w_s an der Kugeloberfläche auf.

Der übrigbleibende Teil von u ist:

$$u = \frac{c}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{r^3}{2(2n+1)} \frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{n r^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_r}{r^{2n+1}} \right. \\ \left. + \mu \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} + \frac{(n+1) r^{1-2n} a^{2n+1}}{n(2n+1)(2n-1)} \frac{\partial p_n^*}{\partial x} - \frac{r^3 a^{2n+1}}{2(2n+1)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_n^*}{r^{2n+1}} \right. \\ \left. + \mu a^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Phi_n^*}{r^{2n+1}} \right\} - u_0 + \dots$$

Aus der versuchsweise eingeführten Annahme, daß die Summe der n -ten Glieder der Ausdrücke (5)–(8) für u gleich Null ist, folgt mittels (12), daß der obige Klammerausdruck gleich Null ist, wenn $n > 1$. Nun ist die partielle Ableitung nach x , y oder z einer (räumlichen harmonischen) Kugelfunktion n -ter Ordnung selbst gleich einer solchen $n-1$ -ter Ordnung. Wenn zwei Kugelfunktionen positiver Ordnung sind, können sie sich nur dann aufheben, wenn sie derselben Ordnung sind.

Es ergibt sich also, wenn wir einmal nur die Kugelfunktionen $n-1$ -ter Ordnung herausgreifen und $r = a$ setzen:

$$\frac{a^3}{2(2n+1)} \frac{\partial p_n}{\partial x} + \mu \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} + \frac{(n+1)a^3}{n(2n+1)(2n-1)} \frac{\partial p_n^*}{\partial x} = 0.$$

Hier treten nur Ableitungen nach x auf. Wenn man von den Ausdrücken für v oder w ausgegangen wäre, würde man entsprechende Gleichungen bekommen haben, in denen statt der Ableitungen nach x nur Ableitungen nach y bzw. z ständen. Dann gilt:

$$\frac{a^3}{2(2n+1)} p_n + \mu \Phi_n + \frac{(n+1)a^3}{n(2n+1)(2n-1)} p_n^* = C,$$

wobei C die Integrationskonstante ist. Diese würde nun gleich einer Kugelfunktion n -ter Ordnung sein, was, da $n > 0$, unmöglich ist, wenn nicht $C = 0$. Wenn wir den Ausdruck für p_n^* einsetzen, bekommen wir:

$$(13) \quad p_{-n-1} = -\frac{n(2n-1)}{2(n+1)} \frac{a^{2n+1}}{r^{2n+1}} p_n - \mu \frac{n(2n+1)(2n-1)}{n+1} \frac{a^{2n-1}}{r^{2n+1}} \Phi_n.$$

Eine Ausnahme bildet der Fall $n = 1$, wobei das Glied $-u_0$ auch berücksichtigt werden muß:

$$(14) \quad p_{-2} = -\frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} p_1 - \frac{3}{2} \mu \frac{a}{r^3} \Phi_1 + \frac{3}{2} \mu \frac{u_0}{c} \frac{ax}{r^3}.$$

In derselben Weise erhält man aus der Bedingung, daß der erwähnte Klammerausdruck gleich Null sein soll, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} & \frac{n a^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_n}{r^{2n+1}} - \frac{a^{2n+3}}{2(2n+1)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_n^*}{r^{2n+1}} \\ & \quad + \mu a^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Phi_n^*}{r^{2n+1}} = 0, \\ & \frac{n a^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{p_n}{r^{2n+1}} - \frac{a^3}{2(2n+1)} p_{-n-1} + \mu \Phi_{-n-1} = 0, \\ (15) \quad & \left\{ \begin{aligned} \Phi_{-n-1} = & -\frac{n(2n+1)}{4\mu(n+1)(2n+3)} \frac{a^{2n+3}}{r^{2n+1}} p_n \\ & - \frac{n(2n-1)}{2(n+1)} \frac{a^{2n+1}}{r^{2n+1}} \Phi_n. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Auch hier bildet $n = 1$ einen Ausnahmefall:

$$(16) \quad \Phi_{-2} = -\frac{3}{40\mu} \frac{a^5}{r^5} p_1 - \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} \Phi_1 + \frac{a^3 u_0}{4c} \frac{x}{r^3}.$$

Wenn p_n, Φ_n, χ_n (n positiv) gegeben sind, erhält man aus (12)–(15) die zugehörigen Werte von $p_{-n-1}, \Phi_{-n-1}, \chi_{-n-1}$, welche bewirken, daß $u = v = w = 0$ an der Kugeloberfläche $r = a$ wird.

§ 6. Die Widerstandsformel.

Auf ein Flächenelement ds der Kugel wirkt an der äußeren Seite eine Spannung, deren x -Komponente ist [vgl. L 586 (15), wo ein fehlerhaftes Vorzeichen vorkommt]:

$$\begin{aligned} p_{r,x} = & c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{n-1}{2n+1} r \frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{2n^2+4n+3}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} r^{2n+2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_n}{r^{2n+1}} \right\} \\ & + \frac{2\mu c}{r} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n-1) \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} - \frac{\mu c}{r} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n-1) \left(y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Die resultierende Kraft erhält man durch Integration über die ganze Kugeloberfläche S . Da

$$\begin{array}{llll}
 p_n & \text{eine Kugelfunktion } n\text{-ter Ordnung,} & & \\
 \frac{\partial p_n}{\partial x} & \text{,, ,, } & n-1\text{ter} & \text{,,} \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_n}{r^{2n+1}} \right) & \text{,, ,, } & n-2\text{ter} & \text{,,} \\
 \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} & \text{,, ,, } & n-1\text{ter} & \text{,,} \\
 y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} & \text{,, ,, } & n\text{ter} & \text{,,}
 \end{array}$$

ist, und da das Integral über eine Kugelfunktion Null ist, wenn sie nicht 0 ter oder -1 ter Ordnung ist, so kann nur das folgende Glied von Null verschieden sein:

$$c \frac{2(-2)^2 + 4(-2) + 3}{(-2+1)(-4+1)(-4+3)} \int \int_{(S)} r^{-4+2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_{-2}}{r^{-4+1}} ds.$$

Für p_{-2} wird vorläufig geschrieben:

$$p_{-2} = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{r^3}.$$

Wenn man diesen Wert in das obige Integral einsetzt und den Koeffizienten des Integrals vereinfacht, findet man:

$$-c \int \int_{(S)} \frac{\alpha}{r^2} ds = -4\pi c \alpha.$$

Der Wert von c ist beliebig. Wenn wir jedoch jetzt für α den Wert 2μ wählen, so ist damit auch der Wert von c festgelegt, denn der Teil $c\alpha x/r^3$ von $c p_{-2}$ läßt sich aus den Grenzbedingungen bestimmen. Wir wollen nun den Wert von c berechnen.

Aus (14) erhält man:

$$r^3 p_{-2} = \alpha x + \beta y + \gamma z = -\frac{a^3}{4} p_1 - \frac{3}{2} \mu a \Phi_1 + \frac{3}{2} \frac{\mu u_0}{c} \alpha x.$$

Man erhält durch Differentiation in bezug auf x :

$$\alpha = -\frac{a^3}{4} \frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{3}{2} \mu a \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{3}{2} \frac{\mu u_0}{c} \alpha.$$

Da $\alpha = 2\mu$ ist, so ergibt sich:

$$c = \frac{3}{4} \cdot \frac{u_0 a}{1 + \frac{3}{4} a \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{a^3}{8\mu} \frac{\partial p_1}{\partial x}}$$

Wenn $(f)_0$ den Wert irgend einer Funktion f im Koordinatenursprunge bezeichnet, so erhält man wegen (4), (5) und (7):

$$(17) \quad c = \frac{3}{4} \cdot \frac{u_0 a}{1 + \frac{3}{4} \frac{a}{c} (u_r)_0 + \frac{a^3}{8\mu c} \left(\frac{\partial p_r}{\partial x} \right)_0}$$

Der Widerstand ist gleich der Kraftkomponente, welche in der Richtung der negativen x -Achse wirkt. Für diese Komponente fanden wir eben den Wert $4\pi c a$. Wenn man die Werte von c und a einsetzt, bekommt man das

Widerstandsgesetz

$$(18) \quad W = \frac{6\pi\mu a u_0}{1 + \frac{3}{4} \frac{a}{c} (u_r)_0 + \frac{a^3}{8\mu c} \left(\frac{\partial p_r}{\partial x} \right)_0}$$

c kommt in dieser Formel nur scheinbar vor. Da u_r und p_r c als Faktor enthalten, so hebt c sich heraus.

Die obige Verfügung über a war willkürlich. Hätten wir einen anderen Wert gewählt, so hätten wir auch eine andere Widerstandsformel bekommen. Der Unterschied ist jedoch nur scheinbar. In Wirklichkeit bekommt man natürlich immer dieselbe Widerstandsformel.

§ 7. Nebenbemerkung.

Die Widerstandsformel (18) hatte ich ursprünglich mittels der Sätze II¹⁾ und IV meiner Diss., S. 53, 54 und mittels des folgenden Satzes bewiesen:

Es wird vorausgesetzt, daß eine Strömung um eine Kugel (Halbmesser = a) in zwei Teile, die alle beide den Differentialgleichungen (1), (2) Genüge leisten, zerlegt werden kann und daß kein Gleiten an der Kugeloberfläche stattfindet. Der erste Teil (u_s, v_s, w_s, p_s) soll außerhalb der Kugel regulär sein und in unendlicher Entfernung verschwinden, während der zweite Teil (u_r, v_r, w_r, p_r) eine innerhalb der Kugel reguläre Fortsetzung besitzen soll. Die Komponenten der auf die Kugel ausgeübten Gesamtkraft sind gleich

$$6\pi\mu a (u_r)_0 + \pi a^3 \left(\frac{\partial p_r}{\partial x} \right)_0, \quad 6\pi\mu a (v_r)_0 + \pi a^3 \left(\frac{\partial p_r}{\partial y} \right)_0, \\ 6\pi\mu a (w_r)_0 + \pi a^3 \left(\frac{\partial p_r}{\partial z} \right)_0.$$

1) Den Satz II findet man übrigens in Kirchhoffs Vorlesungen über math. Physik. Leipzig (in der dritten Aufl. [1883], S. 377).

Das von derselben Strömung auf die Kugel ausgeübte Moment hat die Komponenten

$$4\pi\mu a^3 \left(\frac{\partial w_r}{\partial y} - \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)_0, \quad 4\pi\mu a^3 \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial w_r}{\partial x} \right)_0,$$

$$4\pi\mu a^3 \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial u_r}{\partial y} \right)_0.$$

Wieder bezeichnet eine mit dem Index 0 versehene Parenthese, daß von der eingeklammerten Funktion der Wert im Kugelmittelpunkte gemeint ist.

Wenn man diesen Satz mittels der Formeln in den Paragraphen 4–6 beweisen will, muß man berücksichtigen, daß u_0 hier in u , mit einbezogen ist.

Wenn man die Stromstärke mittels ihrer Einwirkung auf kleine Kugeln hat schätzen wollen, hat man bis jetzt einfach das Stokes'sche Widerstandsgesetz benutzt. Hier fanden wir als Korrektionsglied eine Druckgradienten.

Für die Anwendung muß man natürlich bemerken, daß in der unmittelbaren Umgebung der Kugel keine Volumkräfte wirken dürfen, denn sonst befriedigt die Strömung die Gleichungen (1) nicht, auf die der ganze Beweis aufgebaut ist. Das ist der Grund, weshalb unser Satz, z. B. für den archimedischen Auftrieb nicht den richtigen Wert gibt.

§ 8. Die Berechnung von $(u_r)_0$ und $\left(\frac{\partial p_r}{\partial x}\right)_0$.

In der Widerstandsformel (18) sind die in der Überschrift erwähnten Ausdrücke noch unbekannt. u_r , v_r , w_r , p_r wurde als der im Kugelmittelpunkte reguläre Teil der Strömung definiert und die mit dem Index 0 versehene Parenthese bedeutet, daß für die eingeklammerte Funktion der Wert im Kugelmittelpunkte gemeint ist.

Für die Berechnung der fraglichen Ausdrücke ist ein sukzessives Annäherungsverfahren zweckmäßig. Zunächst setzen wir die Ausdrücke für diejenige Strömung an, welche Stokes bei seiner Berechnung des Widerstandes gegen die Bewegung einer kleinen Kugel fand.

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} u = -u_0 + u_s = -v_0 + c \left[\frac{1}{r} + \frac{x^2}{r^3} + a^2 \left(\frac{1}{3r^3} - \frac{x^2}{r^5} \right) \right], \\ v_s = c \left[\frac{xy}{r^3} - a^2 \frac{xy}{r^5} \right], \\ w_s = c \left[\frac{xz}{r^3} - a^2 \frac{xz}{r^5} \right], \\ p_s = 2\mu c \frac{x}{r^3}. \end{array} \right.$$

Wenn die Flüssigkeit nach allen Seiten unendlich ausgedehnt ist, findet man nach Stokes $c = \frac{3}{4} a u_0$. Hier soll jedoch der durch (17) angegebene Wert von c angewendet werden. Dieser Wert geht übrigens in den Stokesschen über, wenn keine Wände da sind, d. h. wenn

$$(u_r)_0 = \left(\frac{\partial p_r}{\partial r} \right)_0 = 0$$

ist. Mittels (6) und (8) kann man auch den Ansatz (19) in der folgenden Weise

$$20) \quad p_{-2} = 2 \mu \frac{x}{r^3}, \quad \Phi_{-2} = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{x}{r^3}, \quad \chi_{-2} = 0$$

schreiben. Die Bestimmung von p_{-2} ist ersichtlich in Übereinstimmung mit § 6.

Der nächste Schritt der sukzessiven Annäherung ist, eine innerhalb des Gefäßes reguläre Teilströmung, u_r, v_r, w_r, p_r , so zu bestimmen, daß nach Addition der Teilströmung (19) die resultierende Strömung der Bedingung der Ruhe an den Gefäßwänden genügt. Die so bestimmte Teilströmung u_r, \dots, p_r soll die (von den Gefäßwänden) *zurückgeworfene Strömung* genannt werden.

Die zurückgeworfene Strömung muß in unendlich entfernten Teilen der Flüssigkeit sich dem Wert Null nähern. Die in den folgenden Kapiteln vorkommenden Strömungen und Teile von solchen erfüllen von selbst diese Bedingung, die uns also keine Schwierigkeiten bereitet.

Die Hauptschwierigkeit ähnlicher Abhandlungen wie der vorliegenden ist, für die zurückgeworfene Strömung einen Ausdruck zu finden, der bei numerischen Rechnungen anwendbar ist. Wie diese Schwierigkeit in unserem Falle bewältigt wird, zeigt Kap. II.

Von dem Ansätze (19), (20) ausgehend, findet man zunächst die dazu gehörige zurückgeworfene Strömung. Diese ist, wie oben gesagt, regulär im Kugelmittelpunkte und läßt sich nach Kugelfunktionen mit positiven Indizes entwickeln. Diese Kugelfunktionen mögen mit

$$p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots, \Phi_1^{(1)}, \chi_1^{(1)}, \dots$$

bezeichnet werden. Da man aus $p_1^{(1)}$ und $\Phi_1^{(1)}$ die Werte von $(u_r)_0$ und $\left(\frac{\partial p_r}{\partial r} \right)_0$ in unserem Falle berechnen kann und umgekehrt, so wurden diese Kugelfunktionen schon bei der Be-

rechnung der Widerstandsformel (18) in § 6 berücksichtigt. Die übrigen Kugelfunktionen sollten nun bei der weiter getriebenen Annäherung durch Kugelfunktionen mit negativen Indizes aufgehoben werden (§ 5).

Der Ansatz (20) sollte nun unter Berücksichtigung der eben erwähnten Kugelfunktionen geändert werden. Dies bringt eine Verbesserung der zurückgeworfenen Strömung mit sich. Auch für die in der Widerstandsformel (18) vorkommenden Größen $(u_r)_0$ und $\left(\frac{\partial p_r}{\partial x}\right)_0$ würde man eine Korrektion erhalten. Die Einflüsse dieser Glieder sind aber so klein, daß sie unberücksichtigt bleiben können. Wir brauchen also nur den von (19), (20) hervorgerufenen Teil der zurückgeworfenen Strömung zu berechnen, der

$$u^* + u^{**}, v^* + v^{**}, w^* + w^{**}, p^* + p^{**}$$

genannt werden soll (§ 10 usw.).

Kapitel II. Der Bedingung der Ruhe an den ebenen Wänden formal zu genügen.

§ 9. Zwei Fouriersche Integrale.

Es sollen die folgenden Bezeichnungen angewandt werden. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem ist r der Abstand zwischen dem Punkte (x, y, z) und dem Ursprunge. Es besteht also der Zusammenhang

$$(21) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

α und β sind zwei Integrationsveränderliche. Ferner soll

$$(22) \quad k^2 = \alpha^2 + \beta^2, \lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\sigma i \alpha$$

sein, wobei k und der reelle Teil von λ positiv sein sollen.

i ist die imaginäre Einheit, also $i^2 = -1$.

σ ist ein Parameter, dessen genaue Bedeutung für das folgende belanglos ist. σ wurde übrigens S. 93 definiert.

|| bezeichnet den absoluten Betrag einer reellen oder komplexen Größe.

Es besteht die Gleichung¹⁾

$$(23) \quad \frac{1}{r} e^{-|\sigma|r - \sigma x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - \lambda|z|} \frac{d\alpha d\beta}{\lambda}.$$

1) Vgl. H. Faxén, a. a. O., S. 30.

Aus dieser Gleichung erhält man, wenn man σ gleich Null setzt¹⁾

$$(24) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \frac{d\alpha d\beta}{k}.$$

Diese Funktion selbst und ihre partiellen Ableitungen kommen bekanntlich in der Stokesschen Lösung des Problems der Bewegung einer kleinen Kugel vor (S. 102). Wenn man den Einfluß ebener Wände berechnen will, bringt man am besten die Funktion $1/r$ auf die obige Form. Um auch die übrigen in der Stokesschen Lösung vorkommenden Funktionen auf ähnliche Formen bringen zu können, berechnet man den Grenzwert:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma r} [e^{-|\sigma|r - \sigma x} - 1].$$

Wenn σ durch reelle positive Werte sich dem Wert Null nähert, so ist der obige Ausdruck gleich

$$-1 - \frac{x}{r}.$$

Aus (23) und (24) findet man ferner, daß der obige Ausdruck gleich

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \left(\frac{k}{\lambda} e^{(k-\lambda)|z|} - 1 \right) \frac{d\alpha d\beta}{\sigma k}$$

ist. Der Klammerausdruck soll in eine Taylorsche Reihe nach σ entwickelt werden. Wenn f eine komplexe Funktion ist, so gilt bekanntlich

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} f(\sigma) &= f + \frac{\sigma}{1!} f' + \dots + \frac{\sigma^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)} \\ &+ \frac{\sigma^n}{n!} [f_r^{(n)}(\theta \sigma) + i f_i^{(n)}(\theta_1 \sigma)]. \end{aligned} \right.$$

Hier sind

σ eine reelle oder komplexe Zahl,

θ und θ_1 positive Zahlen, die kleiner als 1 sind,

$f_r^{(n)}$ und $f_i^{(n)}$ der reelle bzw. imaginäre Teil der n ten Ableitung $f^{(n)}$ von f .

1) Vgl. H. Faxén, a. a. O., S. 28.

Man findet also:

$$(26) \quad \frac{k}{\lambda} e^{(k-\lambda)|z|} - 1 = \frac{\sigma}{1!} \left[\frac{i\alpha}{k^2} + \frac{i\alpha}{k} |z| \right] + \frac{\sigma^2}{2!} [\mathbf{R}\varphi(\theta) + \mathbf{J}\varphi(\theta_1)].$$

Hier bedeutet \mathbf{R} den reellen und \mathbf{J} den imaginären Teil des nachstehenden Ausdruckes, $\varphi(\theta)$ den Ausdruck

$$-k\alpha^2 \left(\frac{3}{\lambda_1^5} + \frac{3|x|}{\lambda_1^4} + \frac{|x|^2}{\lambda_1^3} \right) e^{(k-\lambda_1)|z|},$$

worin $\lambda_1^2 = k^2 - 2\theta\sigma ia$ ist.

Setzt man nun den Ausdruck (26) in das obige Doppelintegral ein, so kann man nachher die Integration nicht für jedes Glied einzeln ausführen, denn die Integrale divergieren. Die Ableitungen der zweiten Ordnung der Integrale sind aber konvergent. Es gilt daher z. B.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \frac{x}{r} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \left(\frac{i\alpha}{k^2} + \frac{i\alpha}{k^2} |z| \right) d\alpha d\beta \\ &+ \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\sigma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \frac{\mathbf{R}\varphi(\theta) + \mathbf{J}\varphi(\theta_1)}{k} d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Man beweist ohne Schwierigkeit, daß das letzte Integral für alle Werte von σ endlich, konvergent und numerisch kleiner als eine von σ unabhängige Funktion von $|z|$ ist. Dann ist der letzte Grenzwert gleich Null.

Für alle Ableitungen der zweiten Ordnung findet man ähnliche Verhältnisse. Daraus schließt man, daß für die Ableitungen der ersten Ordnung Gleichungen gelten, die vom folgenden Typus sind:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \left(\frac{i\alpha}{k^2} + \frac{i\alpha}{k^2} |z| \right) d\alpha d\beta + C,$$

wobei C eine sogleich zu bestimmende Konstante ist. Die Richtigkeit dieser Gleichung und aller ihr ähnlichen folgt daraus, daß die Ableitungen beider Seiten gleich sind.

Läßt man $|z|$ immer größere Werte annehmen, so findet man aus der letzten Gleichung, daß C gleich Null ist. Es ergeben sich also die folgenden drei Gleichungen

$$(27) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \frac{\alpha^2}{k^3} (1 + k|z|) d\alpha d\beta, \\ -\frac{xy}{r^3} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \frac{\alpha\beta}{k^3} (1 + k|z|) d\alpha d\beta, \\ -\frac{xz}{r^3} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \frac{i\alpha}{k} z d\alpha d\beta. \end{aligned} \right.$$

Für die Stokessche Strömung — System (19) — findet man mit Hilfe von (24) und (27) den folgenden Ausdruck:

$$(28) \left\{ \begin{aligned} u &= -u_0 + \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \\ &\quad \cdot \left[\frac{2}{k} - \frac{\alpha^2}{k^3} (1 + k|z|) + \frac{\alpha^2 \alpha^2}{3k} \right] d\alpha d\beta, \\ v &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \\ &\quad \cdot \left[-\frac{\alpha\beta}{k^3} (1 + k|z|) + \frac{\alpha^2 \cdot \alpha\beta}{3k} \right] d\alpha d\beta, \\ w &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \\ &\quad \cdot \left[-\frac{i\alpha}{k} z + i\alpha \cdot \alpha^2 \cdot \frac{z}{3|x|} \right] d\alpha d\beta, \\ p &= \frac{c\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \left[-\frac{i\alpha}{k} \right] d\alpha d\beta. \end{aligned} \right.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die obigen Doppelintegrale den Differentialgleichungen (1) und (2) genügen.

§ 10. Ansätze.

Das System (28) stellt ein spezielles Beispiel von Lösungen des Systems (1), (2) dar. Diese Lösungen entsprechen dem Fall, daß die Flüssigkeit unendlich ausgedehnt ist. Nun soll aber die Flüssigkeit von zwei ebenen Wänden begrenzt sein, es muß eine neue Lösung des Systems (1), (2), die zurück-

geworfene Strömung (vgl. § 8), hinzuaddiert werden, damit die Geschwindigkeitskomponenten $u + u_0$, v , w an den Wänden Null werden. Es ist zweckmäßig, schon von vornherein eine umfassende formale Lösung des Problems der Zurückwerfung aufzusuchen, und zwar soll zunächst das System (28) verallgemeinert werden. Man sieht leicht, daß die folgenden Ansätze Lösungen von (1), (2) sind:

$$(29) \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{i\alpha}{k} g_2 + \frac{2g_1}{k} - \frac{g_1 \alpha^2}{k^3} (k|z| + 1) + \frac{\alpha^2 x}{k} g_3 \right\} d\alpha d\beta, \\ v &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} i\beta \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{g_2}{k} + \frac{i\alpha}{k^3} g_1 (k|z| + 1) - \frac{i\alpha x}{k} g_3 \right\} d\alpha d\beta, \\ w &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \\ &\quad \cdot \left\{ -\frac{x}{|x|} g_2 - \frac{x i\alpha}{k} g_1 + \frac{i\alpha}{k} g_3 (|z|k + 1) \right\} d\alpha d\beta, \\ p &= \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \frac{i\alpha}{k} \\ &\quad \cdot \left\{ -g_1 + \frac{x}{|x|} k g_3 \right\} d\alpha d\beta. \end{aligned} \right.$$

Diese Ansätze habe ich anfangs aus dem System (6), S. 62 meiner Dissertation gefunden, und zwar habe ich damals zunächst

$g_2 - \frac{g_1}{\sigma} + \frac{x}{|x|} k \frac{g_3}{\sigma}$ statt g_2 , $\frac{g_1}{\sigma}$ statt g_1 und $\frac{g_3}{\sigma}$ statt g_3 geschrieben und habe dann den Grenzübergang $\sigma \rightarrow 0$ gemacht. Man braucht aber diesen Weg nicht zu gehen, man braucht sich nur davon zu überzeugen, daß die obigen Ansätze den Differentialgleichungen genügen.

Die Bewegung einer Kugel in einer unbegrenzten Flüssigkeit — d. h. der Stokesche Fall — wird durch

$$(30) \quad g_1 = c, \quad g_2 = -\frac{1}{3} c i \alpha \cdot a^2, \quad g_3 = 0$$

dargestellt.

Um den Grenzbedingungen $u = v = w = 0$ an den Wänden genügen zu können, brauchen wir noch folgende zwei Systeme von Lösungen von (1), (2):

$$(31) \left\{ \begin{aligned} u^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - kz} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{i\alpha}{k} g_5 + \frac{2}{k} g_4 - \frac{\alpha^2}{k^3} g_4 (zk + 1) + \frac{\alpha^2}{k} g_6 \right\} d\alpha d\beta, \\ v^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - kz} i\beta \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{g_5}{k} + \frac{i\alpha}{k^3} g_4 (zk + 1) - \frac{\alpha i\alpha}{k} g_6 \right\} d\alpha d\beta, \\ w^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - kz} \\ &\quad \cdot \left\{ -g_5 - \frac{i\alpha\alpha}{k} g_4 + \frac{i\alpha}{k} g_6 (zk + 1) \right\} d\alpha d\beta, \\ p^* &= \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - kz} \frac{i\alpha}{k} \{-g_4 + k g_6\} d\alpha d\beta; \end{aligned} \right.$$

$$(32) \left\{ \begin{aligned} u^{**} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) + kz} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{i\alpha}{k} g_8 + \frac{2}{k} g_7 + \frac{\alpha^2}{k^3} g_7 (zk - 1) + \frac{\alpha^2\alpha}{k^3} g_9 \right\} d\alpha d\beta, \\ v^{**} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) + kz} i\beta \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{k} g_8 + \frac{i\alpha}{k^3} g_7 (1 - zk) - \frac{\alpha i\alpha}{k} g_9 \right\} d\alpha d\beta, \\ w^{**} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) + kz} \\ &\quad \cdot \left\{ g_8 - \frac{\alpha i\alpha}{k} g_7 - \frac{i\alpha}{k} g_9 (zk - 1) \right\} d\alpha d\beta, \\ p^{**} &= \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) + kz} \frac{i\alpha}{k} \{-g_7 - k g_9\} d\alpha d\beta. \end{aligned} \right.$$

Für die rechte Wand hat man $z = b$ und für die linke $z = -l$. Es soll für diese Werte von z

$u + u^* + u^{**} = v + v^* + v^{**} = w + w^* + w^{**} = 0$ sein. So erhält man z. B.

$$0 = [u + u^* + u^{**}]_{z=-l} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha z + \beta y)} \cdot \left\{ \frac{i\alpha}{k} (g_2 e^{-kl} + g_6 e^{kl} + g_8 e^{-kl}) + \left(\frac{2}{k} - \frac{\alpha^2}{k^3} \right) (g_1 e^{-kl} + g_4 e^{kl} + g_7 e^{-kl}) - \frac{\alpha^2 l}{k^3} (g_1 e^{-kl} - g_4 e^{kl} + g_7 e^{-kl}) - \frac{\alpha^2 l}{k} (g_3 e^{-lk} + g_6 e^{lk} + g_9 e^{-lk}) \right\} d\alpha d\beta.$$

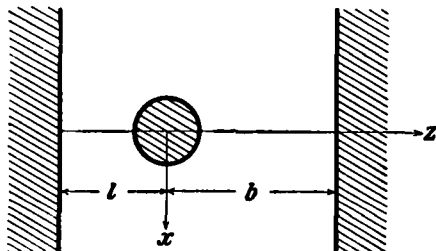


Fig. 1.

Da diese Gleichung für alle Werte der Variablen x, y gilt, so muß der Ausdruck in den geschweiften Klammern verschwinden. Auf diese Weise erhält man die erste der folgenden Gleichungen. Die beiden übrigen folgen aus den Bedingungen, daß an der linken Wand $v + v^* + v^{**} = 0$ und $w + w^* + w^{**} = 0$ sein sollen. Statt e^{2kl} wird s geschrieben.

$$(33) \left\{ \begin{aligned} & \frac{i\alpha}{k} (g_2 + g_6 s + g_8) + \left(\frac{2}{k} - \frac{\alpha^2}{k^3} \right) (g_1 + g_4 s + g_7) \\ & \quad - \frac{\alpha^2 l}{k^3} (g_1 - g_4 s + g_7) - \frac{\alpha^2 l}{k} (g_3 + g_6 s + g_9) = 0, \\ & i\beta \left\{ \frac{1}{k} (g_2 + g_6 s + g_8) + \frac{i\alpha}{k^3} (g_1 + g_4 s + g_7) \right. \\ & \quad \left. + \frac{i\alpha l}{k^3} (g_1 - g_4 s + g_7) + \frac{i\alpha l}{k} (g_3 + g_6 s + g_9) \right\} = 0, \\ & g_2 + g_8 - g_6 s + \frac{i\alpha}{k} l (g_1 + g_4 s + g_7) \\ & \quad + \frac{i\alpha}{k} (g_3 + g_6 s + g_9) + l i \alpha (g_3 - g_6 s + g_9) = 0. \end{aligned} \right.$$

Auf dieselbe Weise erhält man aus der Bedingung, daß die Flüssigkeit an der rechten Wand ($z = b$) haftet, die folgenden drei Gleichungen, worin t statt e^{2kb} geschrieben ist.

$$(34) \left\{ \begin{array}{l} \frac{i\alpha}{k} (g_2 + g_6 + g_8 t) + \left(\frac{2}{k} - \frac{\alpha^2}{k^2} \right) (g_1 + g_4 + g_7 t) \\ \quad - \frac{\alpha^2}{k^2} b (g_1 + g_4 - g_7 t) + \frac{\alpha^2 b}{k} (g_3 + g_6 + g_9 t) = 0, \\ i\beta \left\{ \frac{1}{k} (g_2 + g_6 + g_8 t) + \frac{i\alpha}{k^2} (g_1 + g_4 + g_7 t) \right. \\ \quad \left. + b \frac{i\alpha}{k^2} (g_1 + g_4 - g_7 t) - b \frac{i\alpha}{k} (g_3 + g_6 + g_9 t) \right\} = 0, \\ -g_2 - g_6 + g_8 t - \frac{i\alpha}{k} b (g_1 + g_4 + g_7 t) \\ \quad + b i\alpha (g_3 + g_6 - g_9 t) + \frac{i\alpha}{k} (g_3 + g_6 + g_9 t) = 0. \end{array} \right.$$

Nach Vereinfachung ergibt sich:

$$(35) \quad g_7 = -\frac{s-1}{st-1} g_1, \quad g_4 = -\frac{t-1}{st-1} g_1.$$

$$(36) \left\{ \begin{array}{l} g_2 + g_8 + g_6 s - 2l \frac{i\alpha}{k} g_4 s + l i\alpha (g_3 + g_9 + g_6 s) = 0, \\ g_2 + g_8 - g_6 s \quad \quad \quad + l i\alpha (g_3 + g_9 - g_6 s) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \frac{i\alpha}{k} (g_3 + g_9 + g_6 s) = 0, \\ g_2 + g_6 + g_8 t - 2b \frac{i\alpha}{k} g_7 t - b i\alpha (g_3 + g_6 + g_9 t) = 0, \\ -g_2 - g_6 + g_8 t \quad \quad \quad + b i\alpha (g_3 + g_6 - g_9 t) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \frac{i\alpha}{k} (g_3 + g_6 + g_9 t) = 0. \end{array} \right.$$

§ 11. Auflösung des Gleichungssystems (36).

Das System(36) läßt sich nicht weiter vereinfachen. Wenn man

$$(37) \quad N = (st - 1)^2 - 4k^2 st(l + b)^2$$

setzt, so erhält man nach einigen Rechnungen:

$$(38) \left\{ \begin{array}{l} g_6 = \frac{1}{N} g_2 [s t^2 (2lk - 1) + st(2lk - 1)(2bk - 1) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + t(2bk + 1) + 4l^2 k^2 st - 1] \\ - \frac{2st i\alpha l}{k N} g_4 [st(lk - 1) + 2b^2 k^2 + (lk + 1)(2bk + 1)] \\ - \frac{2tb i\alpha}{k N} g_7 [2l^2 st k^2 - bk - 1 + st(bk - 1)(2lk - 1)] \\ + \frac{i\alpha k t}{N} g_3 [2l^2 st - 2b^2 s(2lk - 1) - 2l^2 s(2bk + 1) - 2b^2], \end{array} \right.$$

$$(39) \left\{ \begin{aligned} g_8 &= \frac{1}{N} g_2 [s^2 t (2bk - 1) + 4b^2 k^2 st + st(2lk - 1) \\ &\quad (2bk - 1) + s(2lk + 1) - 1] \\ &\quad - \frac{2ls i \alpha}{kN} g_4 [2st b^2 k^2 + st(lk - 1)(2bk - 1) - lk - 1] \\ &\quad - \frac{2bst i \alpha}{kN} g_7 [st(bk - 1) + 2l^2 k^2 + (bk + 1)(2lk + 1)] \\ &\quad - \frac{s i \alpha k}{N} g_3 [2st b^2 - 2tb^2(2lk + 1) - 2tl^2(2bk - 1) - 2l^2], \end{aligned} \right.$$

$$(40) \left\{ \begin{aligned} g_6 &= -\frac{2tk}{i \alpha N} g_2 [st + 2sk(l + b) - 1] \\ &\quad + \frac{2lst}{N} g_4 [st - 2k(l + b) - 1] \\ &\quad + \frac{2bt}{N} g_7 [2st k(l + b) - st + 1] - \frac{1}{N} g_3 [s^2 s(2lk + 1) \\ &\quad - 4st b^2 k^2 - st(2lk + 1)(2bk + 1) + t(2bk - 1) + 1], \end{aligned} \right.$$

$$(41) \left\{ \begin{aligned} g_9 &= \frac{2sk}{i \alpha N} g_2 [st - 1 + 2tk(l + b)] \\ &\quad - \frac{2ls}{N} g_4 [2kst(b + l) - st + 1] \\ &\quad - \frac{2bst}{N} g_7 [st - 2k(b + l) - 1] - \frac{1}{N} g_3 [s^2 t(2bk + 1) \\ &\quad - 4stk^2 l^2 - st(2lk + 1)(2bk + 1) + s(2lk - 1) + 1]. \end{aligned} \right.$$

Nach (31), (32) ist endlich:

$$(42) \left\{ \begin{aligned} \left[u^* + u^{**} + \frac{\alpha^2}{6\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p^* + p^{**}) \right]_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{i\alpha}{k} (g_6 + g_8) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2}{k} - \frac{\alpha^2}{k^3} \right) (g_4 + g_7) + \frac{\alpha^2}{3} \cdot \frac{\alpha^2}{k} (g_4 + g_7 - kg_6 + kg_9) \right\} d\alpha d\beta. \end{aligned} \right.$$

Kapitel III.

Bewegung in der Mittelebene zwischen zwei parallelen Wänden.

§ 12. Berechnung der Widerstandsformel.

Es soll die in der Widerstandsformel (18) vorkommende unbekannte Konstante

$$\frac{3}{4} \frac{\alpha}{c} (u_{r,b}) + \frac{\alpha^3}{8\mu c} \left(\frac{\partial p_r}{\partial x} \right)_0 = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{c} \left[u^* + u^{**} + \frac{\alpha^2}{6\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p^* + p^{**}) \right]_0$$

berechnet werden. Die Funktionen u^* , p^* usw. werden durch (31) und (32) erklärt. In diesen Systemen treten g_5 , g_9 usw.

auf, für welche die Ausdrücke in diesem Spezialfalle besonders einfach werden. In diesem Kapitel ist nämlich aus Symmetriegründen

$$b = l, \quad s = t, \quad g_5 = g_8, \quad g_6 = -g_9,$$

und man kann in der ersten Annäherung $g_3 = 0$ setzen [vgl. § 8 und Gl. (30)]. Es ergibt sich aus (35) und (36):

$$(43) \quad \begin{cases} g_4 = -\frac{g_1}{s+1}, & g_6 = -\frac{2skg_1}{i\alpha(s^2-4lks-1)} - \frac{2ls(s-1)g_1}{(s^2-4lks-1)(s+1)}, \\ g_8 = \frac{2lks-s+1}{s^2-4lks-1} g_2 - \frac{2li\alpha}{k} \cdot \frac{s \frac{s-1}{s+1} - lks}{s^2-4lks-1} g_1. \end{cases}$$

Wir bemerken zunächst, daß die Integralausdrücke (31) und (32) und alle ihre Ableitungen endlich und begrenzt sind, wenn der Punkt (x, y, z) sich zwischen den Wänden befindet, oder genauer, wenn $|z| < 2l$ ist. $u^* + u^{**}$, $v^* + v^{**}$ usw. sind regulär innerhalb der Flüssigkeit und erfüllen also auch diese an die erste zurückgeworfene Strömung gestellte Forderung (vgl. § 8).

Die Ausdrücke (43) sollen nun in (42) eingesetzt werden. Für g_1 und g_2 sind die Werte (30) geeignet. Es ergibt sich

$$\left[u^* + u^{**} + \frac{a^2}{6\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p^* + p^{**}) \right]_0 = -\frac{4c}{3l} A + \frac{4ca^2}{3l^3} B - \frac{4ca^4}{9l^5} C,$$

worin

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{3l}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \\ &\left\{ \left(\frac{2}{k} - \frac{\alpha^2}{k^3} \right) \frac{1}{s+1} - \frac{2l\alpha^2}{k^3} \cdot \frac{s \frac{s-1}{s+1} - lks}{s^2-4lks-1} \right\} d\alpha d\beta, \end{aligned} \right.$$

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} B &= \frac{l^3}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\alpha^2}{k} \cdot \frac{2lks-s+1}{s^2-4lks-1} \right. \\ &\left. - \frac{\alpha^2}{k} \left[\frac{1}{s+1} - \frac{2lks(s-1)}{(s^2-4lks-1)(s+1)} \right] \right\} d\alpha d\beta, \end{aligned} \right.$$

$$(46) \quad C = \frac{l^5}{6\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^2 sk}{s^2-4lks-1} d\alpha d\beta.$$

Nach (18) und dem oben Gesagten erhalten wir dann die Widerstandsformel

$$(47) \quad W = \frac{6\pi\mu a u_0}{1 - \frac{a}{l}A + \frac{a^3}{l^3}B - \frac{a^5}{l^5}C}.$$

§ 13. Berechnung der Konstanten A , B , C .

Nach (22) und § 10 ist

$$k^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad s = e^{2ki}.$$

Ferner setzen wir:

$$(48) \quad k = \frac{x}{l}, \quad \alpha = \frac{x}{l} \cos \vartheta, \quad \beta = \frac{x}{l} \sin \vartheta,$$

wobei x eine neue Integrationsvariable ist, welche nicht mit der früher benutzten Koordinate x verwechselt werden darf. Wenn man die Koordinaten x und ϑ in (44) einsetzt und nach ϑ integriert, so ergibt sich:

$$A = \frac{3}{4} \int_0^\infty \left\{ \frac{3}{s+1} - 2xs \frac{\frac{s-1}{s+1} - x}{s^2 - 4xs - 1} \right\} dx.$$

Das Integral wird in zwei Teile zerlegt, von denen der erste sogleich ohne Schwierigkeit integriert wird.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \int_0^\infty \frac{3}{s+1} dx &= \frac{9}{8} \int_1^\infty \frac{ds}{s(s+1)} = \frac{9}{8} \left[\log \frac{s}{s+1} \right]_1^\infty \\ &= \frac{9}{8} \log 2 = 0,77979\dots \end{aligned}$$

Der zweite Teil des Ausdruckes für A wird geschrieben:

$$\frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{x - \frac{s-1}{s+1}}{s^2 - 4xs - 1} xs dx.$$

Der Integrand wurde für $x = 0; 0,2; 0,4 \dots; 3,0$ numerisch ausgerechnet und das Integral von 0 bis 3,0 mittels Simpsons und Cote's Regeln¹⁾ ermittelt. Für den Rest des obigen Integrals wurde die Abschätzung

1) J. Bertrand: Calcul intégral. Paris 1870. S. 331ff. — E. Heine: Kugelfunktionen II. Berlin (in der 2. Aufl. [1881], S. 6).

$$\begin{aligned} \int_x^\infty (x - 1 + 2s^{-1})(1 + 4xs^{-1} + 16x^2s^{-2})s^{-1}x dx \\ = \frac{1}{2}x^2s^{-1} + s^{-2}\left(x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{3}{32}\right) \\ + s^{-3}\left(\frac{8}{3}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + \frac{8}{9}x^2 + \dots\right) \end{aligned}$$

angewandt. Ich habe für das ganze Integral den Wert 0,14957 erhalten und 0. Emersleben 0,14955 [vgl. die Tabelle unten, wo der betreffende Integrand mit $\varphi_1(x)$ bezeichnet ist]. Es ergibt sich also:

$$A = 0,77979 \dots + \frac{3}{8} \cdot 0,14956 = 1,0041.$$

B berechnet man auf dieselbe Weise. Wenn man den Variablenaustausch (48) in (45) ausführt und nach ϑ integriert findet man

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{(4x-1)s^2+1}{(s^2-4xs-1)(s+1)} x^2 dx - \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{s+1} \\ &= \int_0^\infty \frac{s(s-1)x^2 dx}{(s^2-4xs-1)(s+1)} - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{s+1}. \end{aligned}$$

Das letzte Integral läßt sich auf die folgende Weise berechnen:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{s+1} &= \int_0^\infty x^2 (e^{-2x} - e^{-4x} + e^{-6x} - \dots) dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{6^3} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots \right) = \frac{s_2}{4} - \frac{2}{4 \cdot 8} s_2 = \frac{3}{16} s_2, \end{aligned}$$

wobei

$$s_2 = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots = 1,20205 \dots$$

ist.¹⁾ Man findet also:

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{s+1} = 0,11269 \dots$$

Für das erste Integral im letzten Ausdrucke für B habe ich den Wert 0,5305 und Emersleben 0,5305 gefunden [vgl. die folgende Tabelle, wo der betreffende Integrand mit $\varphi_2(x)$

1) E. E. Kummer, Journ. f. Math. 16, S. 211. 1837.

Tabelle 1.

x	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$
0,0	0	0	0
0,2	0,02441	0,0736	0,0746
0,4	0,04552	0,138	0,1452
0,6	0,06103	0,187	0,209
0,8	0,07012	0,219	0,264
1,0	0,07327	0,234	0,307
1,2	0,07169	0,235	0,338
1,4	0,06681	0,225	0,356
1,6	0,05999	0,208	0,363
1,8	0,05229	0,188	0,358
2,0	0,04448	0,165	0,343
2,2	0,03708	0,143	0,322
2,4	0,03038	0,121	0,296
2,6	0,02451	0,102	0,267
2,8	0,01952	0,084	0,237
3,0	0,01537	0,069	0,207

bezeichnet wird]. Es wurde für die Berechnung des Integrals von 3 bis ∞ die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_x^\infty x^3 s^{-1} (1 - s^{-1}) (1 + 4x s^{-1} + 16x^2 s^{-2}) (1 - s^{-1}) dx \\ = s^{-1} \left(\frac{1}{2} x^3 + \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} x + \frac{3}{8} \right) \\ + s^{-2} \left(x^4 + \frac{1}{2} x^3 + \frac{3}{8} x^2 + \frac{3}{16} x + \frac{3}{64} \right) \\ + s^{-3} \left(\frac{8}{3} x^5 + \frac{8}{9} x^4 + \dots \right) \end{aligned}$$

angewandt.

Es ergibt sich also $B = 0,4179$.

Wenn man den Ausdruck für C vereinfacht, findet man

$$C = \frac{1}{6} \int_0^\infty \frac{x^4 s}{s^3 - 4x s - 1} dx.$$

Für die Berechnung dieses Integrals zwischen den Grenzen 3 und ∞ wendet man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_x^\infty x^4 s^{-1} (1 + 4x s^{-1} + 16x^2 s^{-2}) dx \\ = s^{-1} \left(\frac{1}{2} x^4 + x^3 + \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{3}{4} \right) \\ + s^{-2} \left(x^5 + \frac{5}{4} x^4 + \frac{5}{4} x^3 + \frac{15}{16} x^2 + \frac{15}{32} x + \frac{15}{128} \right) \\ + s^{-3} \left(\frac{8}{3} x^6 + \frac{8}{3} x^5 + \dots \right) \end{aligned}$$

an. Für das Integral habe ich den Wert 1,01₅ gefunden und Emersleben 1,01₁₆. Es ergibt sich also $C = 0,168s$.

Wenn man die gefundenen Werte von A , B , C in (47) einsetzt, so entsteht die Widerstandsformel

$$(49) \quad W = \frac{6 \pi \mu a u_0}{1 - 1,004 \cdot \frac{a}{l} + 0,418 \cdot \frac{a^3}{l^3} - 0,169 \cdot \frac{a^5}{l^5}}.$$

Für die Berechnung dreier Integrale wurden, wie oben erwähnt, numerische Methoden angewandt. Die entsprechenden Integranden sind

$$\varphi_1(x) = \frac{x - \frac{s-1}{s+1}}{s^2 - 4xs - 1} x s,$$

$$\varphi_2(x) = \frac{x^3 s (s-1)}{(s^2 - 4xs - 1)(s+1)}, \quad \varphi_3(x) = \frac{x^4 s}{s^2 - 4xs - 1}.$$

In der vorstehenden Tabelle sind die von Emersleben berechneten Werte von φ_1 und die von mir berechneten von φ_2 , φ_3 abgedruckt.

§ 14. Vergleich mit Westgrens Messungen.

Westgren¹⁾ beobachtete das Fallen kleiner Kugeln von Mastix oder Gummigutt in Wasser, welches zwischen zwei ebenen Wänden eingeschlossen war. Die Wände waren während der Beobachtungen annähernd vertikal und der gegenseitige Abstand, welcher mit $2l$ bezeichnet wurde, oben größer als unten. Es wurde die Zeit z gemessen, welche eine Kugel brauchte, um eine gewisse Strecke b zu fallen. b war stets gleich lang und die entsprechende Fallzeit wurde in verschiedenen Teilen des Gefäßes gemessen. Die zu einer und derselben Kugel gehörigen Fallzeiten, welche in der Mitte zwischen den Ebenen gemessen waren, wurden nebst den entsprechenden Wandabständen in einer Tabelle zusammengestellt. Aus Beobachtungen auf neun Kugeln erhielt er also neun Tabellen. Nun wollen wir diese Tabellen mit der Widerstandsformel (49) vergleichen.

Die Schwere der Kugel, in Wasser gewogen, mag S sein. Da die Fallgeschwindigkeit u_0 gleich b/z ist, und da der Widerstand gleich S sein muß, so ergibt sich aus (49):

$$z \left(1 - 1,004 \frac{a}{l} + 0,418 \frac{a^3}{l^3} - 0,169 \frac{a^5}{l^5} \right) = \frac{6 \pi \mu a b}{S}.$$

1) A. Westgren, a. a. O.

Tabelle 2.

Zu Westgrens Tabelle Nr.								
8			9			10		
a/l	z	z_0	a/l	z	z_0	a/l	z	z_0
0,063	18,8	17,6	0,068	14,0	13,0			
0,067	18,8	17,5	0,074	14,0	12,9			
0,042	19,0	17,4	0,086	14,4	13,1	0,103	9,2	8,3
0,046	19,0	17,3	0,097	14,4	13,0	0,109	9,4	8,4
0,105	19,2	17,2	0,113	14,8	13,1	0,12	9,6	8,4
0,114	19,6	17,4	0,13	15,0	13,1	0,14	9,8	8,4
0,17	20,6	17,1	0,17	15,8	13,1	0,16	10,2	8,6
0,17	20,4	16,9	0,18	16,0	13,2	0,18	10,2	8,4
0,21	22,0	17,4	0,23	16,8	13,0	0,25	11,0	8,3
0,25	22,0	16,6	0,27	17,4	12,8	0,26	11,0	8,2
0,29	24,6	17,7	0,31	19,2	13,4	0,35	12,4	8,2
0,36	25,8	16,9	0,38	21,0	13,4	0,38	13,0	8,4
0,43	29,8	17,9	0,51	27,0	14,4	0,44	13,8	8,2
0,52	33,2	17,7	0,71	36,2	14,8	0,58	19,0	9,3
0,65	40,0	17,6	0,71	36,4	14,9	0,60	18,8	8,9
0,69	43,4	18,2						

Das rechte Glied stellt die Fallzeit z_0 dar, wenn keine Wände da sind und soll daher für eine und dieselbe Kugel konstant bleiben. Jede Westgrensche Tabelle entspricht, wie oben gesagt, einer einzigen Kugel und für jede Beobachtung kann z_0 leicht berechnet werden. Wenn alles richtig ist, soll z_0 für jede Westgrensche Tabelle konstant ausfallen.

In Tabelle 2 sind drei Werte von z , welche aus drei von Westgrens Tabellen genommen sind, mit den aus denselben Tabellen berechneten a/l und n_0 zusammengestellt.

Man sieht, daß, wenn $a/l < 0,3$, alles sehr gut stimmt. Für größere Werte von a/l bekommt man meistens ein wenig zu hohe Werte für z_0 . Dasselbe Ergebnis erhält man auch aus den sechs übrigen Tabellen von Westgren.

Für die Abweichung am Ende jeder Tabelle kann man sich verschiedene Ursachen denken. Für die Ermittlung des wirklichen Sachverhalts wären weitere Versuche erwünscht.

Ergebnis.

Eine kleine starre Kugel erfährt, wenn sie sich in der Mitte zwischen zwei parallelen ebenen Wänden parallel zu diesen bewegt, den Widerstand

$$W = \frac{6 \pi \mu a u_0}{1 - 1,004 \frac{a}{l} + 0,418 \frac{a^3}{l^3} - 0,169 \frac{a^5}{l^5}} .$$

Hierbei ist

- a der Halbmesser der Kugel,
- u_0 die Geschwindigkeit der Kugel,
- μ die Zähigkeit,
- $2l$ der Abstand zwischen den Wänden.

Wenn die in § 8 erklärte Bedeutung von σ beibehalten wird, können die Voraussetzungen für die Gültigkeit des obigen Widerstandsgesetzes vermutlich¹⁾ auf die folgende Weise formuliert werden:

1. $\sigma a \cdot \sigma l$ und $(a/l)^6$ können gegen 1 vernachlässigt werden.
2. Die Teilchen (Moleküle oder Molekülkomplexe) der Flüssigkeit sind im Verhältnis zur Kugel sehr klein.
3. Die ebenen Wände und die Kugeloberfläche sind die einzigen Begrenzungen der Flüssigkeit.
4. Zwischen Kugel und Flüssigkeit oder Wand und Flüssigkeit findet kein Gleiten statt.

Uppsala, 6. Februar 1922.

1) Vgl. die analogen Verhältnisse, wenn die Flüssigkeit von nur einer Wand begrenzt ist! Diese wurden in meiner Dissertation genau berechnet (S. 112—116). Das Wort „vermutlich“ bezieht sich auf die Bedingung 1.

(Eingegangen 22. Februar 1922.)