4. *Feld und Materie;*
von H. Weyl.

I.

Wenn ich in dieser Arbeit sowie in einer mit ihr nahe zusammenhängenden, in der „Physikalischen Zeitschrift" erscheinenden Note über die „erweiterte" Relativitätstheorie einige Punkte zur Sprache bringe, die für die physikalische Auffassung der Relativitätstheorie von grundsätzlicher Bedeutung sind, so referiere ich damit zugleich über die wichtigsten Änderungen in physikalischer Hinsicht, welche mein Buch „Raum, Zeit, Materie"[1]) in der vierten Auflage (Springer 1921) erfahren hat.

Das Galileische Trägheitsgesetz zeigt, daß in der Welt eine Art zwangsweiser Führung vorhanden ist, welche einem Körper, der in bestimmter Weltrichtung losgelassen ist, eine ganz bestimmte natürliche Bewegung aufnötigt, aus der er nur durch äußere Kräfte herausgeworfen werden kann; und zwar geschieht das vermöge einer von Stelle zu Stelle infinitesimal wirksamen Beharrungstendenz, welche die Weltrichtung $\mathfrak{r}$ des Körpers im beliebigen Punkte P „parallel mit sich" nach demjenigen zu P unendlich benachbarten Punkte P' transportiert, welcher in der Richtung $\mathfrak{r}$ von P aus liegt. Das ist jene Einheit von Trägheit und Gravitation, welche Einstein an die Stelle beider setzte. Über die im Trägheitsgesetz ausgesprochene Tatsache hinausgehend, nehmen wir an, daß das „*Führungsfeld*" nicht bloß die infinitesimale Parallelverschiebung von Richtungen in sich selber, sondern auch der *Vektoren* im Punkte P nach *allen* zu P unendlich benachbarten Punkten bestimmt. Dann ist das Führungsfeld das Gleiche, was ich sonst mit einem mathematischen Terminus als affinen Zusammenhang

1) Es wird im folgenden als „RZM" zitiert.

der Welt bezeichnet habe. Das Wesen der Parallelverschiebung, der „ungeänderten" Verpflanzung, kommt darin zum Ausdruck, daß in einem gewissen zu P gehörigen, dem „geodätischen" Koordinatensystem die Komponenten eines beliebigen Vektors in P bei Parallelverschiebung nach einem beliebigen zu P unendlich benachbarten Punkte keine Änderung erfahren (Einsteins Forderung, daß sich das Gravitationsfeld lokal „wegtransformieren" läßt). In einem willkürlichen, aber ein für allemal fest gewählten Koordinatensystem lautet demgemäß[1]) die Formel für die Parallelverschiebung vom Punkte $P = (x_i^0)$ nach dem Punkte $P' = (x_i^0 + d x_i)$, durch welche ein willkürlicher Vektor $\mathfrak{x}$ in P mit den Komponenten ξ^i in den Vektor $(\xi^i + d\xi^i)$ in P' übergeht, folgendermaßen:

$$d\xi^i = -\Gamma^i_{\alpha\beta}\xi^\alpha dx_\beta\,,$$

wobei die nur von der Stelle P abhängigen Größen $\Gamma^i_{\alpha\beta}$, die Komponenten des Führungsfeldes, der Symmetriebedingung

$$\Gamma^i_{\alpha\beta} = \Gamma^i_{\beta\alpha}$$

genügen. Im geodätischen Koordinatensystem verschwinden sie sämtlich. Die Weltlinie eines sich selbst überlassenen Massenpunktes genügt, bei geeigneter Wahl des die verschiedenen Stadien der Bewegung voneinander unterscheidenden Parameters s („Eigenzeit"), der Gleichung

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 0\,.$$

Mir scheint es für die richtige Erfassung und anschauliche Darlegung der Grundgedanken der Einsteinschen Gravitationstheorie zweckmäßig, zunächst keine Rücksicht darauf zu nehmen, daß das Führungsfeld in einer tieferen Beschaffenheit der Welt, ihrer Metrik, fundiert ist. Wie angemessen und berechtigt es auch in rein theoretischer Hinsicht ist, den affinen Standpunkt neben dem metrischen selbständig zur Geltung zu bringen, geht, denke ich, aus dem Aufbau der Infinitesimalgeometrie im II. Kapitel von RZM hervor. Die alte Galileische und die neue Einsteinsche Auffassung unterscheiden sich dadurch, daß nach Galilei das Führungs-

1) RZM, S. 101.

feld eine der Welt an sich zukommende geometrische Struktur ist, unabhängig von der erfüllenden Materie und ihrer Konstellation, während es nach Einstein ein Zustandsfeld von physikalischer Realität ist (analog dem elektromagnetischen Feld), das mit der Materie in Wechselwirkung steht. Nach Galilei bestimmt ein Vektor in einem Punkte P einen ihm „gleichen" in einem beliebigen andern Punkte P' *an sich* (d. h. unabhängig von der Materie) und *unmittelbar in die Ferne*; mit besonderer Klarheit spricht das Maxwell in *Matter and Motion* aus[1]): „Bei allen bisher über die Bewegung von Körpern Gesagten haben wir stillschweigend angenommen, daß es beim Vergleiche zweier Konfigurationen des Systems miteinander möglich ist, in der Endkonfiguration eine Linie *parallel* mit einer in der Anfangskonfiguration liegenden Linie zu ziehen." Nach Einstein geschieht diese Übertragung längs einer P mit P' verbindenden Weltlinie vermöge einer nur im Unendlichkleinen wirksamen Beharrungstendenz, die außerdem sich verändert mit der Konstellation der Materie. Der physikalische Erfolg der Einsteinschen Auffassung lag darin, daß in seiner Theorie das Führungsfeld die Erscheinungen der *Gravitation* mit umfaßt: die Planeten folgen der ihnen durch das Führungsfeld vorgeschriebenen natürlichen Bahn; es ist keine besondere „Gravitationskraft" nötig wie bei Newton, die sie aus dieser Bewegung ablenkte. Eine Trennung des Führungsfeldes in zwei Bestandteile, „Trägheit" und „Gravitation", kann nur mit einer gewissen Willkür vorgenommen werden, sie ist ohne objektive Bedeutung.[2])

---

1) Ich zitiere nach der deutschen Übersetzung von Fleischl, (Braunschweig 1881) S. 95.

2) Wenn Lenard in seinem Kampf gegen die allgemeine Relativitätstheorie beständig von „fingierten" Gravitationsfeldern spricht, so scheint mir das zu zeigen, daß er diese Einheit von Trägheit und Gravitation noch nicht erfaßt hat. Genau so könnte ein Anhänger der Alten, der mit ihnen an eine absolut ausgezeichnete Richtung oben-unten im Raum glaubt, gegen die moderne Ansicht von der Gleichberechtigung aller Richtungen im Raum argumentieren; indem er die wirkliche Fallrichtung eines Körpers nicht als Einheit akzeptiert, sondern sie sich aus jener absoluten Normalrichtung und einer Abweichung davon zusammengesetzt denkt. Natürlich sucht ein solcher (mit Demokrit) nur nach einer materiellen Ursache für die „Abweichung", während wir mit

Wir haben also nicht zu fragen, wie die „(wirklichen oder fingierten) Gravitationsfelder", sondern nach welchem Gesetz das *Führungsfeld* durch die Materie erzeugt wird oder mit ihr in Wechselwirkung steht. Darüber sind zwei verschiedene Ansichten möglich.

1. Wenn ich nicht irre, wird heute durchweg von den theoretischen Physikern das *Feld* als eine selbständige Realität neben der Materie anerkannt oder sogar als die einzige ursprüngliche physikalische Wesenheit betrachtet, auf welche die Materie zurückgeführt werden muß. Diese Auffassung ist bekanntlich am konsequentesten von G. Mie zur Geltung gebracht worden.[1] Nur in ihrem Rahmen ist die Behauptung berechtigt, daß die Masse eines Körpers aus konzentrierter Feldenergie bestehe. Von diesem Standpunkt aus hat man auf die Frage nach der Ursache des verschiedenen Verhaltens eines „ruhenden" und eines „rotierenden oder beschleunigten" Körpers K zu antworten, daß das vollständige physikalische System, bestehend aus dem Körper *und dem Führungsfeld*, in dem einen Falle ein anderes ist wie im andern. Das Führungsfeld ist die reale Ursache der Trägheitskräfte; es ist ein unberechtigtes Überbleibsel des alten Alleinrechts der *Körper* auf physikalische Wirklichkeit, wenn man (mit Mach und Einstein) den Unterschied der beiden Fälle durchaus in einem verschiedenen kinematischen Verhältnis von K zu andern *Körpern* suchen will. Woher z. B. das an der Erdoberfläche herrschende Führungsfeld stammt, das an der Zerstörung eines plötzlich gebremsten Eisenbahnzuges mitschuldig ist, ist nicht eine Frage der Naturgesetze, sondern des zufälligen augenblicklichen Weltzustandes (nicht anders wie etwa die Zahl und Masse der Planeten). In der Tat zeigen denn auch die Feldgesetze an, daß Zustand der Materie (Energie – Impuls – Tensor) und des Feldes in einem Augenblick willkürlich vorgegeben werden können; sie bestimmen lediglich, wie sich

Newton in der Anziehung der Erde die materielle Ursache für die Fallrichtung als Einheit erblicken. So muß denn auch Einstein nicht bloß die Gravitation genannte leichte Fluktuation des Führungsfeldes in der Materie verankern, sondern das Führungsfeld als Ganzes.

1) Grundlagen einer Theorie der Materie, Ann. d. Phys. **37.** S. 511 bis 534. 1912; **39.** S. 1—40. 1912; **40.** S. 1—65. 1913.

daraus die Folgezustände (und die vergangenen) des ganzen Systems gesetzmäßig entwickeln. Nicht anders steht es mit den Gesetzen des elektromagnetischen Feldes.[1])

2. Es ist aber nicht zu leugnen, daß die Erfahrung mit großer Deutlichkeit für einen andern Sachverhalt spricht; dafür nämlich, daß die Materie das Feld eindeutig bestimmt. Die reine Feldphysik ist außerstande, davon Rechenschaft zu geben; es ist das aber eine Schwierigkeit, welche keineswegs der Relativitätstheorie anhaftet, sondern jeder Feldtheorie überhaupt. Andrerseits ist diese Tatsache als ein notwendiges Postulat mit der entgegengesetzten Ansicht verbunden, nach welcher die Materie das einzige eigentlich Wirkliche ist, demgegenüber das Feld nur eine Rolle spielt wie der leere Raum mit seinen Euklidischen Gesetzen in der Vor-Einsteinschen Physik. Wir kommen damit auch in Einklang mit der Alltagserfahrung, daß unser willentliches Handeln primär stets an der Materie angreifen muß, daß wir nur durch die Materie hindurch das Feld zu verändern imstande sind. Das Feld ist ein in sich kraftloses extensives Medium, das die Wirkungen von Körper zu Körper überträgt. Die Feldgesetze, gewisse Bindungen des inneren differentiellen Zusammenhangs der möglichen Feldzustände, vermöge deren das Feld allein zur Wirkungsübertragung fähig ist, haben für die Wirklichkeit kaum eine weiter tragende Bedeutung wie die Gesetze der Geometrie nach früherer Ansicht. Daneben treten die tiefer liegenden physikalischen Gesetze, nach welchen die Materie die Feldzustände *verursacht.* Auf sie geht die moderne Physik der Materie los; die Quantentheorie enthält die ersten provisorischen Ansätze dafür; aber da tappen wir noch arg im Dunkel.

Die neue Grundeinsicht der allgemeinen Relativitätstheorie: das Führungsfeld ist nicht eine a priori starr gegebene formale Struktur der Welt, sondern steht mit der Materie in Wechselwirkung, schwebt über der in 1. und 2. angeschnittenen Streitfrage. In den Ausführungen Einsteins und auch in dem neuen Buche Borns über die Relativitätstheorie[2]) kommt

1) Vgl. G. Mie, a. a. O., 1. Abhandlung S. 514 ff.

2) M. Born, Die Relativitätstheorie Einsteins. Springer, Berlin 1920.

soviel ich verstehe, eine inkonsequente Mischung dieser beiden entgegengesetzten Auffassungsmöglichkeiten zum Ausdruck. In der ersten bis dritten Auflage von RZM stellte ich mich — die Schönheit und Einheit der reinen Feldtheorie hatte es mir angetan — ganz auf den ersten Standpunkt; in der vierten bin ich jedoch, aus triftigen Gründen an der Feldtheorie der Materie irre geworden, zu dem zweiten übergegangen.

II.

Der Stein des Anstoßes war für mich die Feldformel des ruhenden Elektrons, welche sich aus der Maxwellschen Theorie der Elektrizität und der Einsteinschen Gravitationstheorie (ohne das kosmologische Glied) ergibt. *Bezeichnungen*: metrische Fundamentalform

$$d s^2 = g_{ik}\, d x_i\, d x_k \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

im statischen Fall

$$x_0 = t, \quad d s^2 = f^2 d t^2 - d \sigma^2;$$

die Lichtgeschwindigkeit f und

$$d \sigma^2 = \gamma_{ik}\, d x_i\, d x_k \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

hängen nur von den Raumkoordinaten $x_1 x_2 x_3$ ab. Wenn Kugelsymmetrie herrscht, kann die radiale Maßskala so gewählt werden, daß

$$d \sigma^2 = (d x_1{}^2 + d x_2{}^2 + d x_3{}^2) + l (x_1\, d x_1 + x_2\, d x_2 + x_3\, d x_3)^2$$

wird; f und l hängen nur von der Entfernung r ab, $r^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2$. $1 + l r^2 = h^2$. $-g =$ Determinante der g_{ik}. Komponenten des elektromagnetischen Potentials φ_i, des Feldes

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}.$$

Im statischen Fall $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$, $\varphi_0 = \varphi$. $\delta_i^k = 1$ oder 0, je nachdem $i = k$ oder $i \neq k$ ist. R_{ik} der Krümmungstensor 2. Stufe, $R_i^i = R$. Verwandlung eines lateinischen in den entsprechenden deutschen Buchstaben bedeutet Multiplikation mit $\sqrt{g}$. $\mathfrak{T}_i^k$ die tensorielle Energiedichte des elektromagnetischen Feldes, $\varkappa$ die Gravitationskonstante im Einsteinschen Gesetz

$$\mathfrak{R}_i^k - \tfrac{1}{2} \delta_i^k\, \mathfrak{R} = 8 \pi \varkappa\, \mathfrak{T}_i^k. \tag{1}$$

Ferner

$$\mathfrak{G} = \tfrac{1}{2}\sqrt{g}\cdot g^{ik}\left(\begin{Bmatrix} i\,r \\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k\,s \\ r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r\,s \\ s \end{Bmatrix}\right),$$

$$\delta\mathfrak{G} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{G}^{ik}\delta g_{ik} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{G}^{ik,r}\delta g_{ik,r} \qquad \left(g_{ik,r} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right).$$

Für das Elektron haben wir

$$\varphi = \frac{e}{r}, \quad f^2 = \frac{1}{h^2} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\varkappa e^2}{r^2}. \tag{2}$$

Darin sind e und m zwei Konstante. Aus dem Verhalten des Feldes im Unendlichen folgt, daß e die das elektrische Feld erzeugende *Ladung*, m die das Gravitationsfeld erzeugende *Masse* ist (sie hat die Dimension einer Länge, ihr Energiewert beträgt $m/\varkappa$). Man hat dem Elektron einen endlichen Radius zugeschrieben, um nicht auf eine unendliche Gesamtenergie des von ihm erzeugten elektrostatischen Feldes und damit auf eine unendlich große träge Masse zu kommen. Das Erstaunliche an unserer Feldformel ist nun dies, daß in ihr eine endliche Masse m auftritt, ganz unabhängig davon, bis zu einem wie kleinen Wert von r herab wir diese Formel als gültig ansehen, die also offenbar nichts zu tun hat mit der Energie des mitgeführten Feldes; wie reimt sich das zusammen? Nach Faraday ist die von einer Fläche Ω umschlossene Ladung nichts anderes als der Fluß des elektrischen Feldes durch Ω. Analog werden wir erkennen, daß nach ihrer wahren Bedeutung *die Masse sich als Feldfluß durch eine das Teilchen umschließende Hülle ausdrückt.*

Für die totale Energie

$$\mathfrak{S}_i^k = \mathfrak{T}_i^k + \mathfrak{t}_i^k,$$

die sich aus elektromagnetischer und Gravitations-Energie zusammensetzt, gilt der differentielle Erhaltungssatz

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x_k} = 0.$$

Er ist eine mathematische Identität, wenn wir nach den Gravitationsgleichungen

$$8\pi\varkappa\mathfrak{T}_i^k \quad \text{durch} \quad \mathfrak{R}_i^k - \tfrac{1}{2}\delta_i^k\mathfrak{R}$$

ersetzen; dann ist, unter Fortlassung des Faktors $8\pi\varkappa$,

$$\mathfrak{S}_i^k = \left(\mathfrak{R}_i^k - \tfrac{1}{2}\mathfrak{G}^{\alpha\beta,k}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\right) + \left(\mathfrak{G} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{R}\right)\delta_i^k.$$

Ein abgeschlossenes isoliertes System durchfegt im Laufe seiner Geschichte einen „Weltkanal", außerhalb dessen das metrische Feld in das Euklidische der speziellen Relativitätstheorie übergeht und die Energiekomponenten verschwinden. Energie und Impuls des Systems J_i (welche den Faktor $\varkappa$ in sich aufgenommen haben) bestimmen sich aus

$$8\pi J_i = \int \mathfrak{S}_i^0 \, d x_1 \, d x_2 \, d x_3 .$$

Dabei müssen die Koordinaten so gewählt sein, daß für sie außerhalb des Kanals $ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$ wird und jede „Ebene" $x_0 =$ const. den Kanal in einem endlichen Bereich durchschneidet; die Integration erstreckt sich über den Schnittbereich. J_i sind die Komponenten eines vom Orte unabhängigen invarianten Vierervektors in der Euklidischen Umwelt des Systems; er ist unabhängig von dem benutzten Koordinatensystem, sofern dasselbe nur den angegebenen Forderungen entspricht, und genügt dem Erhaltungssatz

$$\frac{d J_i}{d t} = 0 \qquad (x_0 = t).$$

Das sind die Grundgleichungen der Mechanik für den besonderen Fall, daß auf das System gar keine äußeren Kräfte wirken.

Im statischen Fall ist natürlich (bei Benutzung der statischen Koordinaten) $J_1 = J_2 = J_3 = 0$ und $8\pi J_0$ gleich dem Raumintegral von

$$\mathfrak{S}_0^0 = \mathfrak{R}_0^0 - (\tfrac{1}{2}\mathfrak{R} - \mathfrak{G});$$

J_0 die träge Masse des Systems, welche nach der Grundeinsicht der allgemeinen Relativitätstheorie mit der schweren Masse wesensgleich ist. *Eine kurze Rechnung zeigt aber*[1]), *daß dieses Raumintegral sich in ein Oberflächenintegral verwandeln läßt*; und zwar ergibt sich, daß die von Ω umschlossene *Masse* gleich dem Fluß der (uneigentlichen) räumlichen Vektordichte

$$(3) \qquad \mathfrak{m}^i = \frac{\sqrt{g}}{16\pi}\left(\gamma^{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ i\end{Bmatrix} - \gamma^{i\alpha}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \beta\end{Bmatrix}\right) \qquad (i\,\alpha\,\beta = 1, 2, 3)$$

1) Für die explizite Durchführung dieser ganzen Betrachtung verweise ich auf RZM, § 33.

durch Ω ist. Im Falle der Kugelsymmetrie ist das ein radialer Fluß von der Stärke

$$\frac{fh}{8\pi r}\left(1 - \frac{1}{h^2}\right).$$

Im Felde des Elektrons ist $fh = 1$, die Flußstärke wird daher

$$= \frac{1-f^2}{8\pi r} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{m}{r^2} - \frac{1}{2}\frac{\varkappa e^2}{r^3}\right)$$

und der Fluß durch eine Kugel vom Radius r:

$$(4) \qquad = m - \frac{\varkappa}{2}\frac{e^2}{r}, \quad \text{im Unendlichen} = m.$$

Damit ist es uns gelungen, die Masse als einen Feldfluß darzustellen; und wir haben zugleich das wichtige Resultat erhalten, daß *die träge und schwere Masse* (die Masse als Angriffspunkt des Führungsfeldes) *gleich der gravitationsfelderzeugenden Masse* ist. Da für ein endliches isoliertes ruhendes System das metrische Feld im Unendlichen stets kugelsymmetrisch sein und daher zufolge der Gravitationsgleichungen die ermittelte Gestalt besitzen wird, gilt dieses Resultat allgemein. Weil aber die Vektordichte (3) eine uneigentliche ist, nicht invariant gegenüber einem Wechsel des Koordinatensystems, so hat der Begriff der Masse einen Sinn nur für einen Körper, der von andern Körpern hinreichend isoliert ist, nicht aber für ein beliebiges Körperstück; er muß nämlich von einem keine andern Körper einschließenden metrischen Felde umgeben sein, das mit hinreichender Annäherung als ein Euklidisches betrachtet werden kann.

Unser obiges Dilemma klärt sich nun vermöge der Formel (4) vollständig auf. Wenden wir die Feldgleichungen (2) bis zu beliebig kleinen Werten von r herab an — mögen auch solche Verhältnisse in der Natur vielleicht nicht realisiert sein —, so erscheint der Nullpunkt als eine *Singularität im Felde*. Der Energiewert der von der Kugel r umschlossenen Masse beträgt $\frac{m}{\varkappa} - \frac{1}{2}\frac{e^2}{r}$. Die Massendichte stimmt danach mit der Energiedichte überein, aber wegen der Singularität im Zentrum ist trotz unendlicher Energie die Masse endlich. Das „Anfangsniveau" im Zentrum, von dem aus die Masse gerechnet werden muß, ist nicht $= 0$, sondern $= -\infty$; die Masse des Elektrons kann deshalb überhaupt nicht von hier aus bestimmt werden, sondern bezeichnet das Auslaufniveau in unendlich großer Entfernung.

Mag es physikalisch zulässig sein oder nicht, die letzten Elementarbestandteile der Materie als wirkliche Singularitäten im Felde aufzufassen, jedenfalls *lassen sich Ladung e und Energieimpuls J_i eines Teilchens ebenso wie die auf das Teilchen einwirkende Feldkraft K_i bestimmen aus dem Verlauf des das Teilchen umgebenden Feldes;* Volumintegrale über das *Innere* des Teilchens sind dazu nicht erforderlich. Infolgedessen kann aus ihren Werten auch nicht das geringste geschlossen werden über die innere Beschaffenheit des Korpuskels; insbesondere schließt der Umstand, daß sie einen bestimmten endlichen Wert besitzen, die „Singularitätsauffassung" keineswegs aus. *Ebenso können die „mechanischen Gleichungen", welchen diese Größen genügen,*

$$\frac{d e}{d t} = 0, \quad \frac{d J_i}{d t} = K_i \tag{5}$$

bewiesen werden allein durch Betrachtung des umgebenden Feldes, ohne auf die Zustände im Innern des Teilchens Rücksicht zu nehmen. Wie das zu verstehen ist, will ich hier an dem einfachsten dieser Gesetze, der Erhaltungsgleichung für die Ladung, klar machen. Dabei haben wir es nur mit der Elektrizität zu tun und können uns der Einfachheit halber auf den Boden der speziellen Relativitätstheorie stellen.

Die im Äther gültigen Maxwellschen Gleichungen lauten

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{6}$$

Eine Lösung derselben ist $f_{ik} = \text{const.}$; die einzige statische kugelsymmetrische aber (welche im Zentrum eine Singularität bekommt), die aus dem Potential $\varphi = \frac{e}{r}$ entspringende ($e = \text{const}$). Wir wissen durchaus nichts davon, daß im Gebiet der Materie die Gleichung (6) durch eine inhomogene zu ersetzen ist, auf deren rechter Seite eine neue Feldgröße, die „Dichte des Viererstroms" — in der Lorentzschen Elektronentheorie als reiner Konvektionsstrom ϱu^i —, auftritt. Von einem Elektron können wir lediglich behaupten, daß außerhalb einer gewissen dasselbe umgebenden Fläche Ω die homogenen Gleichungen (6) gelten und bei Benutzung eines Koordinatensystems, in welchem das Elektron momentan ruht, f_{ik} im wesentlichen mit dem statischen, aus dem Potential $\varphi = \frac{e}{r}$ entspringenden Felde f_{ik}^0 identisch ist; im wesentlichen, d. h. bis auf ein additiv hinzutretendes Feld f_{ik}, das im Gebiet der Fläche Ω ohne merklichen Fehler als konstant betrachtet werden kann. Bei Benutzung dieses Koordinatensystems schickt dann das elektrische Feld den Fluß $4\pi e$ durch die Hülle Ω hindurch und nicht den Fluß 0, wie es der Fall wäre, wenn das Feld auch im Innern des Teilchens regulär wäre und den Gleichungen (6) genügte. Das Glied des Konvektionsstroms ϱu^i in der Lorentzschen Theorie bringt den Einfluß dieser Ladungssingularitäten in Bausch und Bogen zum Ausdruck für ein Gebiet, das viele Elektronen enthält; es ist aber ganz unberechtigt, die Lorentzschen Gleichungen etwa so zu interpretieren, daß sie auf die „Volumelemente des Elektrons“ Anwendung finden könnten. Unser Ansatz ist übrigens zutreffend nur im Falle quasistationärer Beschleunigung, wenn die Weltlinie des Teilchens hinreichend wenig von einer Geraden abweicht.[1])

---

1) Gewöhnlich nimmt man, darüber hinausgehend, an, daß bei beliebiger Bewegung des Elektrons das Feld in seiner Umgebung durch die bekannten Liénard-Wiechertschen Formeln geliefert wird. Sie ergeben für ein beschleunigtes Elektron *Ausstrahlung* und enthalten eine Auszeichnung der Richtung des Zeitablaufs. Schon darin zeigt sich, daß sie keineswegs eine notwendige Konsequenz der (umkehrbaren) Maxwellschen Gleichungen sein können. In der Tat erhält man z. B. zu einem um ein Zentrum O gleichförmig kreisenden Elektron durch Superposition der nach Liénard-Wiechert berechneten „auslaufenden“ und der „einlaufenden“ Welle ein Feld ohne einseitigen Energiestrom, das in dem um O mitrotierenden Koordinatensystem stationär ist. Mir scheint das ein an sich ebenso berechtigter und möglicher stationärer Zustand der Welt zu sein wie der des statischen Feldes, das von einem ruhenden Elektron erzeugt wird. Zumal in der räumlich geschlossenen Welt, auf die sich Einstein auch zur Begründung des statischen Potentials e/r beruft, ist nur dieser Zustand und nicht der der auslaufenden Welle dauernd möglich. Man vgl. dazu G. Mie, Physik. Zeitschr. **21.** S. 657. 1920; S. R. Milner, Phil. Mag. **41.** S. 405—419. 1921; der Beweis von Oseen für die Notwendigkeit der Ausstrahlung (Physik. Zeitschr. **16.** S. 395. 1915) beruht weniger auf den Maxwellschen Gleichungen als auf den postulierten Anfangs- und Randbedingungen; vgl. ferner, was die Beziehung zur Kosmologie betrifft, meine zu Anfang erwähnte Note

Nach dieser Beschreibung gehört zu dem Teilchen in jedem Moment seiner Bewegung ein Ladungswert e. Ich behaupte, daß sich aus den Maxwellschen Gleichungen (6), welche außerhalb des von Ω beschriebenen Weltkanals gelten, die Erhaltungsgleichung $\frac{de}{dt} = 0$ ergibt. Zum Beweise benutzen wir den folgenden Kunstgriff: Wir führen innerhalb des Kanals ein singularitätenfreies *fingiertes Feld* $f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$ ein, das sich stetig an das im Äußern wirklich herrschende Feld anschließt. Dann wird innerhalb des Kanals im allgemeinen die „fingierte Stromdichte"

$$\mathfrak{s}^i = \frac{\partial \mathfrak{f}^{ik}}{\partial x_k} \tag{7}$$

nicht verschwinden; für sie gilt zufolge der Definition als eine mathematische Identität der Erhaltungssatz

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^i}{\partial x_i} = 0. \tag{8}$$

Das Koordinatensystem liege so, daß jede „Ebene" $x_0 = \text{const.}$ den Kanal in einem endlichen (von Ω begrenzten) Bereich durchschneidet. Das über diesen Bereich erstreckte Integral

$$\int \mathfrak{s}^0 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = e^*$$

ist eine Funktion von $x = t$; aus (8) ergibt sich aber sogleich durch Integration $\frac{de^*}{dt} = 0$. Ferner schließen wir aus (8) mit Hilfe des Gaussschen Satzes, daß e^* gleich dem Fluß der Vektordichte $\mathfrak{s}^i$ durch eine beliebige dreidimensionale Fläche ist, welche den Kanal durchsetzt. Infolgedessen ist e^* vom gewählten Koordinatensystem unabhängig. Es ist aber auch unabhängig von der Wahl des fingierten Feldes; denn es läßt sich nach (7) als Fluß der „räumlichen" Vektordichte mit den Komponenten $\mathfrak{f}^{01}, \mathfrak{f}^{02}, \mathfrak{f}^{03}$ durch Ω darstellen, und auf Ω stimmt das fingierte Feld mit dem wirklichen überein. Endlich geht daraus hervor, wenn wir diesen Fluß an einer bestimmten

---

in der Physik. Zeitschr. Eine andere Frage ist es natürlich, woher die Quantenauswahl der stationären Zustände rührt und wie sich der Übergang zwischen den verschiedenen stationären Zuständen vollzieht.

Zeitstelle in dem Ruh-Koordinatensystem berechnen, daß dort $e^* = e$ ist. Damit ist der Beweis beendet. Er läßt erkennen, daß die Ladung des Elektrons in zwei Augenblicken dieselbe ist auch dann, wenn zwischen diesen beiden Momenten das Elektron durch rasch wechselnde stationäre Zustände hindurchgeglitten ist, obschon wir während dieser Zeit nichts über das Verhalten des Feldes in der Umgebung des Elektrons wissen.[1])

Auf ähnlichem, wenn auch komplizierterem Wege gelingt der Beweis der andern mechanischen Gleichungen, wie ich ihn in meinem Buche durchgeführt habe (S. 273—279). *Das Gesetz für die Erzeugung des metrischen Feldes durch ein matrielles Teilchen* lautet folgendermaßen: In einem gewissen, zu dem Teilchen in seiner augenblicklichen Lage gehörigen Koordinatensystem[2]) $\mathfrak{K}$, in welchem das Teilchen selber momentan ruht, ist das metrische Feld in der Umgebung des Teilchens auf und außerhalb Ω ein statisches kugelsymmetrisches: und zwar haben f und h die Werte

$$f^2 = \frac{1}{h^2} = 1 - \frac{2m}{r}, \tag{9}$$

welche durch die Feldgleichungen $\mathfrak{R}_i^k = 0$ gefordert sind. Die Konstante m wird als die *Masse* des Teilchens bezeichnet. Da die Ableitungen der g_{ik} dieses Feldes im Unendlichen gegen 0 konvergieren (und zwar in zweiter Ordnung), so ist $\mathfrak{K}$ ein *geodätisches* Koordinatensystem an der betreffenden Stelle für das äußere Feld des Teilchens. Die Annahme ist berechtigt im Falle quasistationärer Beschleunigung, d. h. wenn die Weltlinie des Teilchens sich hinreichend schwach aus der durch das Führungsfeld bestimmten geodätischen Weltlinie herauskrümmt. Sie führt zu den Gleichungen (5) mit den klassischen Werten:

$$\text{Energie-Impuls } J_i = m\,u_i, \qquad \text{Feldkraft } K_i = \varkappa\, e\, f_{0i}.$$

$u^i = \dfrac{d x_i}{d s}$ sind die Komponenten der Weltrichtung des Teilchens, die zu verwendenden Werte von g_{ik} sind die zum äußeren Felde

1) Ich halte es für unwahrscheinlich, daß sich für diesen Feldzustand überhaupt eine universelle, eine einzige Konstante e enthaltende Beschreibung geben läßt.

2) Natürlich ist es unmöglich, daß ein solches Gesetz, wie Lenard in seiner Argumentation anzunehmen scheint, in *jedem* Koordinatensystem gültig ist.

gehörigen, so daß $ds^2 = dx_0{}^2 - (dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2)$ ist. Insbesondere folgt daraus

$$\frac{dm}{dt} = 0. \tag{10}$$

Kehren wir zu einem beliebigen Koordinatensystem zurück, so erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} u^\alpha u^\beta = \frac{\varkappa e}{m} \cdot f_{ki} u^k \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{11}$$

Die Bestimmung der Feldkraft setzt außer den schon erwähnten Annahmen noch folgendes voraus:

1. Im Koordinatensystem $\mathfrak{K}$ hat das elektromagnetische Feld in der Umgebung des Teilchens die früher angegebene Gestalt $f^0_{ik} + \bar{f}_{ik}$; dabei ist $\bar{f}_{ik}$ das äußere Feld, das in (11) einfach mit f_{ik} bezeichnet wurde.

2. Ω ist so groß, daß auf Ω das äußere Feld $\bar{f}$ vielmal stärker ist als das vom Elektron herrührende f^0; d. h. die mechanischen Gleichungen gelten nur mit solcher Genauigkeit, daß eine Änderung des äußeren Feldes um den Betrag des Elektronenfeldes auf Ω nicht ins Gewicht fällt. Andererseits ist Ω so klein, daß die *Wertunterschiede* von $\bar{f}$ auf Ω vielmal kleiner sind als die von f^0.

3. Das äußere Feld $\bar{f}_{ik}$ ist so schwach, daß das Quadrat seines Betrages auf Ω klein ist gegenüber $m/\varkappa r^3$ (sonst dürfte nämlich der Einfluß des elektromagnetischen Feldes auf das metrische in der Gegend von Ω nicht vernachlässigt werden).

Damit ist gezeigt, daß für die Festlegung der Begriffe Ladung und Masse und für den Beweis der mechanischen Gleichungen das Feld im Innern des Kanals keine Rolle spielt; es war lediglich ein mathematischer Kunstgriff, wenn wir uns den Kanal mit einem fingierten Felde ausgefüllt dachten. Wird dadurch die Identität zwischen träger Masse und Feldenergie, welche die spezielle Relativitätstheorie aufgedeckt zu haben schien, wieder zerrissen, so ist doch zu betonen, daß das physikalisch Bedeutungsvolle an der Erkenntnis von der *Trägheit der Energie* bestehen bleibt. Die Gleichung (10) ist gebunden an unsere Annahme über die Feldbeschaffenheit in der Umgebung des Teilchens. Ist das Teilchen statt mit einem statischen Feld z. B. mit einer elektromagnetischen Dipolwelle umgeben, wie das für ein Atom im Zustande der Ausstrahlung der Fall sein wird, so liefert dieselbe Betrachtung auf besonders einfache und strenge Weise statt (10) das Resultat: der Verlust an Masse m, welchen das Teilchen zwischen zwei Augenblicken 1 und 2 erlitten hat, ist gleich der mit $\varkappa$ zu multiplizierenden elektromagnetischen Energie, welche während dieser Zeit durch die das Teilchen umgebende Hülle Ω hindurchgestrahlt wird. Man versteht, wie dieses Resultat zustande kommt: die Masse ist ein Integral, das über die Fläche Ω in

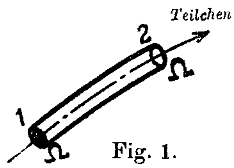


Fig. 1.

(Ω bezeichnet bei 1 und 2 die beiden Kurven, welche den schlauchförmigen Mantel begrenzen.)

den Augenblicken 1 und 2 erstreckt wird, die hindurchgestrahlte Energie aber stellt sich dar als ein Integral über den „Schlauch", den die Fläche Ω während der Zeit von 1 bis 2 in der Welt beschreibt.

Die erreichte Klärung des Massenbegriffs erscheint mir als eine der physikalisch bedeutungsvollsten Leistungen der allgemeinen Relativitätstheorie.

III.

Die Masse ist ihrem Wesen nach eine *Länge.* Da nach der Relativitätstheorie Zeit- und Längeneinheit nicht unabhängig voneinander sind, kennt sie nur *zwei* ursprüngliche Maßeinheiten; als solche werden zweckmäßig die Länge (l) und die Elektrizitätsmenge (e) gewählt. Die Koordinaten x_i, welche nicht gemessen, sondern willkürlich in die Welt hineingelegt werden, sind als dimensionslose Zahlen zu betrachten, die metrische Fundamentalform ds^2 und ihre Koeffizienten g_{ik} haben die Dimension l^2. Wenn wir aber, wie es bei unserer Definition der Masse geschah, uns auf solche Koordinaten beschränken, für welche im Unendlichen

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

wird, so müssen wir, wenn sich bei einem Wechsel in der Wahl der Längeneinheit ds^2 mit der Konstanten l^2 multipliziert, gleichzeitig auch die Koordinaten x_i mit der Konstanten l multiplizieren. Dann bekommen die Koordinaten die

Dimension l, und die g_{ik} werden dimensionslos. Die Flußstärke $\mathfrak{m}^i$ erhält also die Dimension l^{-1}, die Masse selbst l, die Energie e^2/l. Die im Einsteinschen Gesetz vorkommende Gravitationskonstante $\varkappa$ ist eine Äquivalenzzahl für die Umwandlung von Masse in Energie; ihre Bedeutung tritt physikalisch am klarsten hervor in der Tatsache, daß der Massenverlust eines strahlenden Körpers gleich $\varkappa$ mal der ausgestrahlten Energie ist. Sie hat offenbar die Dimension l^2/e^2. (Wäre sie wirklich eine absolute, in der universellen Gesetzmäßigkeit der Natur allein begründete — und nicht, wie es wahrscheinlich ist, eine von der zufälligen Gesamtmasse der Welt abhängige — Konstante, so würde sie gestatten, die Dimension e mit l zu identifizieren.) Endlich sei noch bemerkt: Nach unserer jetzigen Auffassung gehört das Glied $8\pi\varkappa\mathfrak{T}_i^k$ des Einsteinschen Gravitationsgesetzes (1) mit auf die linke Seite; das Gesetz besteht aus *homogenen* Gleichungen, die zusammen mit den homogenen Maxwellschen Gleichungen die Eigengesetzlichkeit des „Äthers" (des kombinierten elektromagnetischen und metrischen Feldes) zum Ausdruck bringen, nicht aber aus inhomogenen Gleichungen, nach welchen die „Materie $\mathfrak{T}_i^k$" das Feld erzeugt.

Um die Tatsache des Vorhandenseins materieller Teilchen mit einer von 0 verschiedenen Ladung und Masse in der Welt trotz der Gültigkeit jener homogenen Gleichungen im Äther zu erklären, stehen zwei Wege zur Verfügung: entweder die Gleichungen so zu modifizieren, wie es von Mie in seinen „Grundlagen einer Theorie der Materie" versucht wurde, oder die Materie als eine wirkliche Singularität im Felde gelten zu lassen. Der erste Weg mußte notwendig im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie beschritten werden, die hier gewonnene Definition der Masse und Herleitung der mechanischen Gleichungen öffnet den zweiten. Gewiß ist es physikalisch unmöglich, daß der Verlauf der Zustandsgrößen irgendwo im Innern des extensiven vierdimensionalen Mediums der Welt wirkliche Singularitäten aufweist; in der speziellen Relativitätstheorie, wo dieses Medium ein Euklidisches ist und daher auch die Zusammenhangsverhältnisse der Welt die einer vierdimensionalen Euklidischen Mannigfaltigkeit sein müssen, war auch aus diesem Grunde der zweite Weg durchaus verschlossen. In der allgemeinen Relativitätstheorie aber kann die Welt beliebige andere

Zusammenhangsverhältnisse besitzen: nichts steht im Wege, anzunehmen, daß sie von solcher Analysis-situs-Beschaffenheit ist, wie ein vierdimensionales Euklidisches Kontinuum, aus welchem einzelne Schläuche von eindimensional unendlicher Erstreckung herausgeschnitten sind. Im Innern dieser Schläuche ist kein „Raum“ mehr, ihre Grenzen sind genau so wie das Unendlichferne nie erreichbare „Säume“ des extensiven Feldes. Das einfach zusammenhängende Kontinuum, aus welchem wir das Feldgebiet durch Herausschneiden von Schläuchen konstruieren, ist überhaupt eine bloße mathematische Fiktion, wennschon die im Felde herrschenden metrischen Verhältnisse es sehr nahe legen, den wirklichen Raum durch Hinzufügung solcher erdichteter uneigentlicher Gebiete, welche den verschiedenen Materieteilchen entsprechen, zu einem einfach zusammenhängenden zu ergänzen. Man muß sich hier durchaus auf den freien Standpunkt der Analysis situs stellen. Sie betrachtet z. B. ein Gebilde G wie das nebenstehend gezeichnete und schraffierte, das nur aus inneren Punkten besteht (die Randkurven gehören nicht mehr dazu), indem sie lediglich den stetigen Zusammenhang seiner Punkte im großen ins Auge faßt, als ein Wesen sui generis, das nichts mit der Vollebene zu tun hat. Denken wir es uns aus der Vollebene E durch Herausschneiden entstanden, so heißt das, wir betrachten G nicht für sich, sondern in demjenigen Verhältnis zu einer Ebene E, das durch eine bestimmte eindeutige Abbildung von G auf E vermittelt ist (jedem Punkt von G korrespondiert ein mit ihm stetig sich ändernder Punkt von E). Aber auch ohne eine solche Beziehung zu E zu stiften, hat es einen Sinn, G drei verschiedene „Säume“ oder „Löcher“ zuzuschreiben. Das muß man etwa so verstehen. Eine beliebige zweidimensionale Mannigfaltigkeit wird in der Analysis situs immer wie die Oberfläche eines Polyeders aufgebaut aus einzelnen einfach zusammenhängenden Elementarflächenstücken.[1] Eine *geschlossene* Mannig-

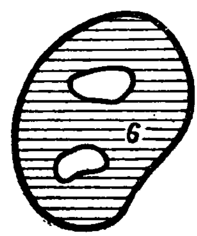
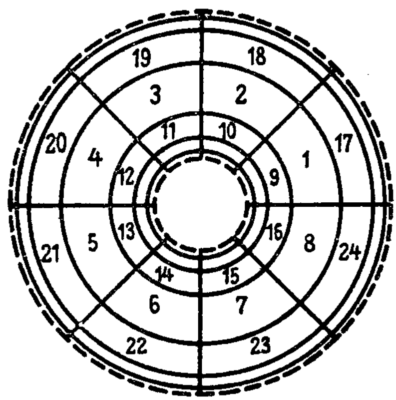


Fig. 2.

1) L. E. J. Brouwer, Math. Annalen **71.** S. 97. 1912; H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche. §§ 4, 5; ders., Math. Zeitschrift **10.** S. 78. 1921.

faltigkeit besteht aus endlich vielen, eine *offene* aus einer abzählbar unendlichen Reihe solcher Zellen, die wir uns in einer bestimmten Reihenfolge mit Z_1, Z_2, Z_3, ... bezeichnet denken. (Vgl. die Zelleinteilung eines Kreisrings in der nachstehenden Figur.) Eine Vereinigung von Zellen möge ein *Kontinuum* heißen, wenn man jede Zelle A derselben mit jeder B durch eine endliche Kette von der Vereinigung angehörigen



(Die inneren Kreise häufen sich gegen die beiden gestrichelten Grenzkreise.)

Fig. 3.

Zellen $A = Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(m-1)}, Z^{(m)} = B$ so „verbinden" kann, daß immer $Z^{(i+1)}$ längs einer Kante an $Z^{(i)}$ grenzt. Ein Kontinuum heiße „endlich" oder „unendlich", je nachdem es aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Zellen besteht. Vollzieht man nun den Abbau unseres aus unendlich vielen Zellen bestehenden Gebietes G dadurch, daß man der Reihe nach Z_1, Z_2, Z_3, ... fortnimmt, so besteht der Rest, wenn dieser Prozeß eine gewisse Grenze überschritten hat, beständig aus *drei* (immer kleiner werdenden) *unendlichen Kontinua* mit einer im allgemeinen wechselnden Anzahl endlicher Kontinua; diese drei unendlichen Kontinua bilden die immer enger werdenden *Umgebungen der drei Säume von G.*

Nach der zweiten Auffassung *ist die Materie selber also überhaupt nichts Räumliches (Extensives), aber sie steckt in einer bestimmten räumlichen Umgebung drin.* Wir können sie quantitativ charakterisieren nur durch ihre Feldwirkungen; die Ladung e z. B. ist der Fluß des elektrischen Feldes, welchen das Teilchen durch eine im Felde gelegene, das Teilchen umschließende Hülle Ω hindurchschickt. Von der unmittelbaren räumlichen Umgebung des Teilchens nehmen seine Feldwirkungen ihren Ausgang.

Diese ganze Anschauung gewinnt außerordentlich an Einheitlichkeit, wenn der Äther nicht aus zwei miteinander in keinem inneren Zusammenhang stehenden, im extensiven Medium der Außenwelt herrschenden Feldern besteht, sondern lediglich das mit einer von der Materie abhängigen metrischen Struktur begabte extensive Medium selber ist; so lehrt es die von mir aufgestellte erweiterte Relativitätstheorie. Wennschon die Physik es in gewissem Sinne nur mit dem Äther zu tun hat, das Agens der Materie eigentlich jenseits der physischen Sphäre liegt, ist es doch ihre Aufgabe, neben der Eigengesetzlichkeit des Feldes auch die Gesetze zu studieren, nach denen die Materie die Feldwirkungen auslöst; diese formulieren sich als eine Art Randbedingungen für die metrischen Zustandsgrößen des Feldes. Der Äther, sagten wir schon oben, spielt für die Wirklichkeit kaum eine andere Rolle wie einst der Raum mit seiner starren Euklidischen Metrik: nur hat sich der unbewegte in einen allen Eindrücken zart nachgebenden geschmeidigen Diener gewandelt.

Der *Substanz*- und der *Feld*-Vorstellung reiht sich als dritte diese Auffassung der Materie als eines die Feldzustände verursachenden *Agens* an. Sobald einmal die Bahn für sie frei gelegt ist, glaube ich, wird man die Feldtheorie, die vom neuen Standpunkt aus etwas Phantastisch-Unwirkliches bekommt, verlassen und zu ihr übergehen müssen. Sie läßt neben der streng *funktionalen* Feldphysik Raum für die moderne Physik der Materie, die mit *statistischen* Begriffen operiert. Nicht nur die Materie wird in ihre alten Wirklichkeitsrechte wieder eingesetzt, sondern auch der echte Gedanke der Kausalität, der *Verursachung*, wie wir sie am unmittelbarsten in unserem Willen erfahren, erwacht zu neuem Leben. Von Mach als Fetischismus gebrandmarkt, war diese Idee doch immer für jeden Physiker in seinem lebendigen Verhältnis zur Natur unentbehrlich geblieben, mochte auch seine Erkenntnistheorie nur „funktionale Beziehungen“ gelten lassen. Aber die funktionalen Beziehungen zwischen den Feldgrößen sind der Ausdruck für die Struktur des Äthers, nicht für die Kausalität, d. i. die Erzeugung der Ätherzustände durch die Materie. Hier wird die ausgezeichnete Ablaufsrichtung der Zeit: Vergangenheit $\rightarrow$ Zukunft, die in den Feldgesetzen keine Stelle finden kann, wieder aufzunehmen sein; sie ist ja mit der Idee der Verursachung in der Tat aufs engste verbunden. Auch bringt die Materie in gewissem Sinne eine Auszeichnung der Zeit gegenüber den Raumkoordinaten mit sich: die in *einer* Dimension unendliche Erstreckung der inneren Feldsäume. — Die folgenden beiden Gründe scheinen es mir vor allem, welche für die Agens-, gegen die Feldtheorie der Materie sprechen: 1. sie steht allein in Einklang mit der grundlegenden Erfahrung des täglichen Lebens und der Physik, daß die Materie das Feld erzeugt und alles Handeln in der Welt primär an der Materie angreifen muß; 2. die erweiterte Relativitätstheorie läßt keinen Platz für derartige Verallgemeinerungen und Ergänzungen der klassischen Feldgesetze, wie sie Mie im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie ins Auge gefaßt hatte.

Dabei muß freilich zugestanden werden, daß es nach wie vor einigermaßen dunkel bleibt, wie man in der allgemeinen Relativitätstheorie überhaupt die Aussage streng formulieren soll, daß die Materie, als deren Charakteristika *Ladung*, *Masse* und *Bewegung* anzusehen sind, das Feld erzeugt. Deutet man (um der anschaulichen Ausdrucksweise willen) ein Koordinatensystem als Abbildung der wirklichen Welt auf einen vierdimensionalen Cartesischen Raum, so kann man bei gegebener Bewegung der Teilchen ihren Weltkanälen im Bilde durch geeignete Wahl der Koordinaten jede beliebige Gestalt erteilen. Prinzipiell gesprochen, ist also *in der allgemeinen Relativitätstheorie nicht nur der Begriff der absoluten, sondern auch der der relativen Bewegung verschiedener Körper gegeneinander sinnlos.* Es ist danach klar, daß die Kenntnis von Ladung und Masse jedes Teilchens und des Verlaufs ihrer Weltkanäle im Koordinatenbilde zur eindeutigen Bestimmung des Feldes nicht genügen kann. Vielleicht muß man den Sinn der Aussage, daß die Bewegung eines Teilchens bekannt ist, dahin interpretieren, daß in dem zur Darstellung der Welt gewählten Koordinatensystem $\mathfrak{U}$ nicht nur der Verlauf des Teilchenkanals gegeben ist (denn das besagt gar nichts), sondern außerdem an jeder Stelle des Kanals das oben mit $\mathfrak{K}$ bezeichnete Koordinatensystem, in welchem das umgebende Feld die Normalform (9) besitzt, oder genauer: die Transformationsformeln, vermöge deren das lokale $\mathfrak{K}$ mit dem universellen $\mathfrak{U}$ zusammenhängt. Wir müßten dann sagen: der Begriff der Bewegung eines Teilchens hat keinen *kinematischen*, sondern einen *dynamischen* Inhalt; die bisher meist gegebene Formulierung „von Bewegung eines Körpers (im kinematischen Sinne) kann nicht *absolut*, sondern nur *relativ* zu andern Körpern die Rede sein“ träfe nicht den richtigen Gegensatz.[1])

Da zufolge unserer Erklärung die Masse m keine durch das materielle Teilchen völlig exakt festgelegte Zahl ist und darum auch die Erhaltungsgleichung $\frac{dm}{dt} = 0$ kein mathematisch strenges Gesetz ist, können wir aus ihm heraus nicht verstehen, weshalb ein Elektron selbst nach beliebig langer Zeit immer noch die gleiche Masse besitzt und weshalb allen Elektronen dasselbe m zukommt. Dieser Umstand zeigt, daß es offenbar nur *einen* Gleichgewichtszustand der negativen Elektrizität gibt, auf den sich das Korpuskel in jedem Augenblick von neuem einstellt: die Erhaltung der Ladung und Masse kommt nicht durch eine differentiell wirksame *Beharrungstendenz*, sondern durch *Einstellung* zustande. Daraus dürfen

1) Ich gebe diese Andeutung einer Lösung mit allem Vorbehalt. Wo die Kritiker der Relativitätstheorie diese Schwierigkeit berühren (vgl. namentlich Reichenbächer, Physik. Zeitschr. 22. S. 234–243. 1921), treffen sie in der Tat eine dunkle Stelle (freilich kann ich darin keinen zureichenden Grund für die Preisgabe der Theorie erblicken; die eben erwähnte Lösung scheint mir die Reichenbächersche Idee: die Materie bewirkt eine „Verzerrung“ des metrischen Feldes, mit der These Einsteins: Trägheit und Gravitation sind eines, zu versöhnen). Einsteins Kosmologie der geschlossenen Welt hat lediglich zur Folge, daß man neben den Grenzbedingungen für die Materieschläuche nicht auch noch eine Grenzbedingung für den unendlichfernen Saum des Feldes nötig hat; zur prinzipiellen Klärung der vorliegenden Frage leistet sie darüber hinaus meines Erachtens keinen Beitrag. Mit dem Machschen Gedanken, daß die träge Masse eines Körpers auf einer Wechselwirkung mit den Massen des Universums beruht, kann ich mich nach der hier vertretenen Auffassung des Massenbegriffs erst recht nicht befreunden.

wir weiter schließen, daß *Ladung und Masse*, wenn wir sie auch nur als Fluß in dem extensiven, das Teilchen umgebenden Felde definieren können, doch als *Eigenschaften des Teilchens selber* anzusprechen sind. Den Gegensatz von Beharrung und Einstellung kann man sich gut klar machen an dem Beispiel eines rotierenden Kreisels — die Richtung seiner Achse, in einem Augenblick willkürlich, überträgt sich von Moment zu Moment durch Beharrung — und einer Magnetnadel, deren Richtung sich in jedem Augenblick unabhängig von der Vergangenheit auf das Magnetfeld einstellt. Von einer rein der Beharrungstendenz folgenden Verpflanzung haben wir a priori keinen Grund anzunehmen, daß sie integrabel sei, d. h. unabhängig vom Wege, auf welchem sich die Verpflanzung vollzieht. Aber sei das auch der Fall, wie z. B. für die Achse des rotierenden Kreisels im Euklidischen Raum; es werden dennoch zwei Kreisel, die von demselben Punkte mit gleicher Achsenstellung ausgingen und sich nach Ablauf einer sehr langen Zeit wieder treffen, beliebige Abweichungen der Achsenstellung aufweisen, da sie ja niemals vollständig gegen jede Einwirkung isoliert werden können.

Auf der Erhaltung der Masse und Ladung beruht es nach der mit Quantenansätzen operierenden Bohrschen Atomtheorie, daß bei der Bewegung eines Atoms *die Radien der Kreisbahnen seiner Elektronen und die Frequenzen des ausgesendeten Lichtes* erhalten bleiben. Ebenso wird man schließen können, daß in einem kristallinischen Medium die Gitterabstände erhalten bleiben. Die Frequenzen der Spektrallinien und die Länge eines materiellen Maßstabes sind daher gleichfalls Größen, die sich durch eine in jedem Augenblick neu erfolgende Einstellung auf das Gleichgewicht erhalten. Das geht auch schon daraus hervor, daß ich *diesem* Maßstab an *dieser* Feldstelle nicht willkürlich anstatt der Länge, die er jetzt einnimmt, irgendeine andere, die doppelte oder dreifache, hätte geben können, wie ich ihm die Richtung beliebig vorschreiben kann; und daß die Spektrallinien der Atome sich von der Vorgeschichte als unabhängig erweisen. Wenn Einstein die Maßbestimmung im Äther mit Hilfe von Maßstäben und Uhren *definiert*, so kann man das nur als eine vorläufige Anknüpfung an die Erfahrung gelten lassen, wie etwa auch die Definition der elektrischen

Feldstärke als ponderomotorische Kraft auf die Einheitsladung. Hernach muß sich hier das Verhalten der Ladung unter dem Einfluß des elektrischen Feldes, dort das Verhalten der Gitterabstände in einem kristallinischen Medium unter dem Einfluß des metrischen Feldes als eine Folgerung der entwickelten Theorie ergeben. Und auf dem eben angedeuteten theoretischen Zusammenhang scheint mir die Erhaltung der (mit Hilfe der lokalen Metrik des Feldes zu bestimmenden) Maßstablängen und Uhrperioden zu beruhen.

Mit den letzten Erwägungen rühren wir an die physikalischen Grundlagen der „erweiterten Relativitätstheorie"; darauf gehe ich näher in der zu Anfang erwähnten Note ein.

(Eingegangen 28. Mai 1921.)