**4. Experimentelle Untersuchung
über das Mitschwingen einer Kugel in einer
schwingenden Flüssigkeits- oder Gasmasse;
von Martin Wagenschein.**

(Gießener Dissertation.)

I. Einleitung.

Die Frage nach dem Mitschwingen einer Kugel in einer schwingenden Flüssigkeitsmasse wurde, im Zusammenhang mit Untersuchungen über die Kundtschen Staubfiguren, zuerst von W. König¹⁾ theoretisch behandelt. Neuerdings versuchten Lewis und Farris²⁾ die Amplitude von Schallwellen aus derjenigen im Schwingungsbauch mitschwingender Teilchen (Lycopodiumsporen) zu ermitteln. Sie benutzten, da ihnen die Theorie von W. König wohl nicht bekannt war, eine andere Formel, die sie selbst herleiteten, und in welche die konstante Endgeschwindigkeit der Teilchen eingeht, die sie beim freien Fall in der Flüssigkeit schließlich annehmen. W. König³⁾ stellte daraufhin fest, daß diese Formel unvollständig ist, und daß Lewis und Farris unrichtige Fallgeschwindigkeiten benutzt haben müssen, daß schließlich Lycopodiumsporen, die nach Versuchen von Zeleny und Keehan⁴⁾ dem Stokesschen Gesetze nicht folgen, für derartige Versuche nicht ohne weiteres brauchbar sein können. Eine vor kurzem erschienene Mitteilung von Kurt Gehlhoff⁵⁾ zeigt die praktische Bedeutung der Beobachtung mitschwingender Teilchen zur Messung auch der Schwingungsform von Schallwellen. — Die nachstehende Arbeit be-

1) W. König, Ann. d. Phys. u. Chem., N. F. **42**. S. 353—370. 1891.

2) E. P. Lewis u. L. P. Farris, Phys. Rev. Ser. II. Vol. VI. S. 491 bis 493. 1915.

3) W. König, Ann. d. Phys. **49**. S. 648—652. 1916.

4) J. Zeleny u. L. W. Mc. Keehan, Physik. Zeitschr. **11**. S. 78 bis 93. 1910.

5) K. Gehlhoff, Zeitschr. f. Phys. **3**. (5) S. 330—336. 1920.

schäftigt sich mit der experimentellen Prüfung der König'schen Formel für das Verhältnis der Amplituden der Flüssigkeit und der Kugel. Als Versuchskörper wurden anfangs Lycopodiumsporen, später sehr viel größere Kugeln verschiedener Materialien verwendet.

Das Ergebnis der erwähnten theoretischen Untersuchung ist dieses: Ist die Bewegung der Flüssigkeit gegeben durch die Gleichung

$$v = v_0 \cos(2\pi n t),$$

so nimmt die Kugel, wenn auf sie keine anderen, als die von der Flüssigkeit hervorgerufenen Kräfte wirken, eine Bewegung

$$w = w_0 \cos(2\pi n t - \varphi)$$

an, die bestimmt wird durch die Gleichungen

$$\alpha = \frac{v_0}{w_0} = \sqrt{\frac{a^2 + 3ab + \frac{3}{2}b^2 + \frac{3}{2}b^3 + \frac{3}{2}b^4}{1 + 3b + \frac{3}{2}b^2 + \frac{3}{2}b^3 + \frac{3}{2}b^4}}$$

für das Verhältnis der Amplituden und

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{3}{2}(a-1)b(1+b)}{a + \frac{3}{2}(a+1)b + \frac{3}{2}b^2 + \frac{3}{2}b^3 + \frac{3}{2}b^4}$$

für die Phasendifferenz φ . Hier ist

$$a = \frac{2\sigma + 1}{3}, \quad (\sigma = \mu/\mu'), \quad b = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\eta}{n \cdot \pi \cdot \mu'}}$$

und es bezeichnet μ die Dichte, R den Radius der Kugel, μ' die Dichte, η den Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit.

Die Voraussetzungen, unter denen diese Formel abgeleitet ist und Gültigkeit beansprucht¹⁾: Unendlich ausgedehnte, inkompressible Flüssigkeit und unendlich kleine Geschwindigkeiten, können bei der experimentellen Prüfung nur mehr oder weniger gut erfüllt sein. Der Einfluß der Kastenwände, zwischen denen die Kugel schwingt, ist bei den winzigen Lycopodiumteilchen zu vernachlässigen; bei den späteren Versuchen, die relativ große Kugeln benutzen, wird er als merklich zu erwarten sein. Die Formel wird auch für Gase gelten, wenn die Dimensionen des Kastens und der Kugel klein gegen die Länge der Schallwelle sind, die der benutzten Schwingungszahl entspricht. Die Voraussetzung unendlich kleiner Geschwindigkeiten ist freilich auch nicht annähernd erfüllt. Bei Versuchen, in denen die Reibung eine wesentliche Rolle spielt, ist nach W. König¹⁾ eine Differenz zwischen Theorie und Erfahrung

1) W. König, Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. 42. S. 366 f., 1891.

in dem Sinne zu erwarten, daß die beobachteten Werte einem größeren als dem wirklichen Reibungskoeffizienten entsprechen.

Die Diskussion der Formel für α ist einfach und zeigt, daß ein völliges Mitschwingen eintritt für $a = 1$, wenn also Kugel und Flüssigkeit dieselbe Dichte haben. Aber auch für irgend ein Dichteverhältnis σ kann man einen beliebigen Grad des Mitschwingens erreichen, wenn man b hinreichend groß macht, sei es durch Verkleinerung des Radius oder durch sehr langsame Schwingungen oder durch Benutzung von Flüssigkeiten mit sehr großer innerer Reibung. Eine Besprechung der Phasenformel, die hier keine Beachtung finden soll, kann in der erwähnten Arbeit von W. König nachgelesen werden.

Die Formel von Lewis und Farris in der Form, die sie annimmt, wenn man in sie die Größen a und b einführt¹⁾, sei zum Vergleich hier nur kurz angegeben:

$$\alpha = \sqrt{\frac{a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{9} + \frac{1}{4}b^4}{\frac{1}{4}b^4}}.$$

Ihre Ergebnisse werden mit denen der vollständigen Formel um so weniger übereinstimmen, je kleiner b ist.

II. Beschreibung der Versuche und ihrer Ergebnisse.

A. Die Grundversuchsanordnung.

Die nach den Versuchen von Lewis und Farris naheliegende Möglichkeit, Lycopodiumsporen im Schwingungsbauch einer in einem Kasten erzeugten, stehenden Welle zu untersuchen, wurde nicht weiter verfolgt, weil man sich dabei auf die unsicheren Sporen hätte beschränken oder unter vermutlich erheblichen Schwierigkeiten derartig kleine, geeignete Kügelchen hätte künstlich herstellen müssen. Es wurde vielmehr, um zunächst die schwingende Luftmasse zu verwirklichen, eine Anordnung verwendet, die nach dem Vorbilde von Zernow²⁾ bei einer ähnlichen Untersuchung von Thomas³⁾ benutzt worden ist: Ein geschlossener Kasten ist auf einer Zinke einer schwingenden Stimmgabel befestigt. Wegen der Einzelheiten kann auf die Beschreibung in der Arbeit von Thomas und seine Fig. 1 (S. 1081) verwiesen werden. Die Amplitude der in den

1) W. König, Ann. d. Phys. 49. S. 651. 1916.

2) W. Zernow, Ann. d. Phys. 26. S. 79—94. 1908.

3) G. Thomas, Ann. d. Phys. 42. S. 1079—1098. 1913.

Kasten gefüllten Versuchsflüssigkeit ist dann gleich der des Kastens und einfach zu messen. Dieser Hauptteil der Versuchsanordnung wurde bei allen benutzten Methoden im wesentlichen unverändert beibehalten, die sich nur in der Anbringung der Kugeln unterscheiden, und in der Reihenfolge, in der sie ausgeführt wurden, beschrieben werden sollen.

B. Versuche mit *Lycopodium*.

Zuerst wurde in Anlehnung an Lewis und Farris versucht, die Sporen durch ein langes Rohr in den mit Luft gefüllten, schwingenden Aluminiumkasten (Kreiszyylinder, Achse horizontal, in der Schwingungsrichtung, Länge = 10, Radius = 3 cm) fallen zu lassen und dort bei seitlicher Beleuchtung ihre sinusförmigen Bahnen von vorn mit einem horizontalen Mikroskop zu beobachten oder zu photographieren. Diese Methode führte aber wegen der beträchtlichen Fallgeschwindigkeit und störender seitlicher Strömungen photographisch zu keinem, subjektiv zu einem zu rohen Ergebnis und wurde deshalb nicht weiter verfolgt.

Dagegen war es möglich, bei Beobachtung und Photographie von oben, d. h. in Fallrichtung, bessere Ergebnisse zu erzielen.

Die Anordnung war, zunächst für subjektive Beobachtung, diese: Der schwingende Kasten hat kubische Form (3 cm Seitenlänge) — er wurde kleiner gewählt als bei den Vorversuchen in der Annahme, daß die störenden Strömungen dadurch vielleicht weniger zur Entwicklung kämen —, möglichst große Glimmerfenster an den vier Seitenwänden und oben im Deckel ein rundes Loch von etwa 1 cm Durchmesser. Über diesem hängt die Fallvorrichtung für die *Lycopodium*sporen, die so beschaffen sein muß, daß sie dem von oben blickenden Beobachter nicht das Gesichtsfeld verdeckt. Sie besteht im wesentlichen aus einem kleinen, oben und unten offenen Zylinder aus Seidenstoff, um den herum die Sporen gebettet sind, und durch den sie bei leiser Erschütterung hindurch in den Kasten fallen, wo sie von der Bewegung ergriffen werden. In der Mitte des Kastens angelangt, werden sie von einer Leitzschen Liliputbogenlampe intensiv beleuchtet und erscheinen dem Beobachter, der durch das über der Fallvorrichtung stehende, senkrecht nach unten gerichtete Beobachtungsmikroskop blickt, als auf-

blitzende Stäbchen. Infolge unvermeidlicher Strömungen, die vor allem von der starken Bestrahlung herrühren, haben sie eine geringe seitliche Bewegung. Um auch die Kastenamplitude zugleich und in gleicher Weise sichtbar zu machen, ist von einer Kastenwand zur anderen ein dünner Draht senkrecht zur Schwingungsrichtung gespannt. Er selbst wird nicht sichtbar, aber die auf ihm sich festsetzenden beleuchteten Sporen erzeugen im Gesichtsfelde scheinbare Stäbchen von der Länge der Amplitude der Luft, so daß der Beobachter im ganzen einen Eindruck hat, den Fig. 1

schematisch wiedergibt. Um die Stäbchen an möglichst gleichartigen Maßstäben zu messen, besser: zu schätzen, werden sie mit Strecken verschiedener Länge verglichen, die in der auf Fig. 2 ange-

Fig. 1.

Fig. 2.

gegebenen Anordnung auf eine dünne Glasplatte eingeritzt sind. (Längenunterschied zweier aufeinanderfolgender Stäbchen 0,0765, Abstand 0,447 mm.) Sie liegt, mit der Hand verschiebbar, auf der Mikrometerplatte des Okulars und wird durch ein von der Bogenlampe abgezweigtes Lichtbündel streifend beleuchtet. Die Ritzen erscheinen dann ebenfalls als leuchtende Stäbchen. Diese Platte wird mit der Hand schnell so verschoben, daß zu dem zu messenden, fliegenden Teilchen ein gleich langer Ritz ausgesucht werden kann, der nachträglich am Okularmikrometer ausgemessen wird. Die Schätzungsfehler erreichten ± 10 Proz. Um sie auszugleichen, wurden viele Messungen mit sprunghafter Änderung der Amplitude gemacht. Eine Abhängigkeit der Größe α von der Amplitude selbst wurde nicht beobachtet. Die folgende Tab. 1 gibt die Ergebnisse, A ist die Amplitude der Luft, α das Verhältnis der Amplituden.

Tabelle 1.

Lycopodiumsporen in Luft, $n = 85$.

A	0,58	0,65	0,81	0,87	0,99	0,99	1,25	1,25 (mm)
α	1,49	1,63	1,56	1,60	1,36	1,36	1,33	1,55
A	1,25	1,25	1,67	1,67	1,77	2,14	2,29	2,40 (mm)
α	1,50	1,52	1,45	1,60	1,50	1,41	1,57	1,59

Mittel: $\alpha = 1,501$ (Grenzen: 1,33; 1,63)

Bei der objektiven Methode tritt eine Kamera (Format 9×12 cm, Objektiv ein Leitzsummar von 42 mm Brennweite; Vergrößerung etwa vierfach) an Stelle des Mikroskops. Die Liliputlampe reichte nicht aus und wurde durch eine größere Bogenlampe ersetzt. Die Fallvorrichtung nahm zuviel Licht weg. Es genügte aber auch, einen mit Lycopodium bestäubten Haarpinsel über der Kastenöffnung zu erschüttern. Der Anblick auf der Mattscheibe entspricht der Fig. 1. Um den Zeitpunkt der Belichtung günstig wählen zu können, d. h. so, daß möglichst viele und langsam bewegte Teilchen sich im Gesichtsfelde befanden, wurde dieses durch eine zwischen Kasten und Kamera angebrachte, unter 45° geneigte Glasplatte seitlich in ein Beobachtungsmikroskop hineingespiegelt. Die Belichtungsdauer wurde je nach Gutdünken zwischen $\frac{1}{25}$ und 1,5 Sek. gewählt. Es wurden Hauff-Ultrarapid-Platten und ein Rapid-Hydrochinon-Entwickler verwendet. Die Spuren der Teilchen traten entweder als Stäbchen auf, oder, wenn sie sich infolge einer Strömung ein wenig bewegt hatten, als Sinuskurvenstücke. Auf zwei Platten mit mehreren Bahnen kam es vor, daß nicht alle Teilchen gleiches Verhältnis α aufwiesen. In der Annahme, daß den größeren α -Werten Komplexe von Sporen entsprächen, wurden bei diesen Platten nur die kleinsten α -Werte berücksichtigt. Die Zahlen, die aus Platten gewonnen sind, die nur eine Bahn zeigen, bekommen dadurch eine gewisse Unsicherheit, die aber wohl durch Mittelbildung aus vielen Beobachtungen herabgedrückt werden und die Ursache der starken Schwankung der Werte α sein mag. Die folgende Tab. 2 gibt die Resultate. Eine Abhängigkeit von der Amplitude liegt auch hier nicht vor.

Tabelle 2.

Lycopodiumsporen in Luft; $n = 85$.							
A	0,128	0,145	0,174	0,605	0,684	1,105	1,185 (mm)
α	1,29	1,22	1,30	1,31	1,44	1,56	1,73
A	1,265	1,265	1,344	1,344	1,895	2,450	(mm)
α	1,57	1,37	1,38	1,42	1,41	1,33	

Mittel: $\alpha = 1,41$ (Grenzen: 1,22; 1,73)

Zum Vergleich mit den beiden experimentell gewonnenen α -Werten wurde der von der Theorie geforderte berechnet unter Zugrundelegung der Zahlen $\mu = 1,102$, $\mu' = 0,001225$,

$R = 0,001585$ cm, $\eta = 0,000178$, $n = 85$. μ' und η sind Tabellen entnommen (15° C.). n wurde durch subjektive Vergleichung der Tonhöhe der Stimmgabel mit einer Reihe von um je vier Schwingungen fortschreitenden Pfeifentönen ermittelt. R und μ sind einer sogleich näher zu zitierenden Arbeit von Ilgner entnommen, der an demselben Material und im gleichen Institute arbeitete. Er bestimmte R mikroskopisch und die Dichte nach mehreren Methoden (Volumenometer, Einschmelzen). — Aus diesen Werten berechnet sich $\alpha = 600,17$, $b = 14,72$ und $\alpha = 2,049$. (Die höheren Potenzen von b in der Formel werden wesentlich. Bei Weglassung des Gliedes $\frac{2}{4} b^4$ ergäbe sich etwa $\alpha = 5$. Die Formel von Lewis und Farris würde $\alpha = 2,1$ liefern.)

Verhältnis der Amplituden		
experimentell		theoretisch
subjektive Methode	objektive Methode	
1,501	1,41	2,049

Der Unterschied ist beträchtlich. Es läßt sich aber zeigen, daß sich darin kein Mangel der Theorie, sondern dieselbe Anomalie der Lycopodiumsporen äußert, die der bekannten Abweichung vom Stokesschen Gesetze zugrunde liegt, und die sich auf zweierlei Weise ausschalten läßt:

Bezeichnet V die Endgeschwindigkeit der Versuchskugel beim freien Fall in der Flüssigkeit, so folgt leicht aus dem Stokesschen Gesetz

$$\frac{\eta}{R^2 \mu'} = \frac{2}{9} (\sigma - 1) \frac{g}{V} \quad (g = 981 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}).$$

Führt man für den in der Größe b auftretenden, in der letzten Gleichung links stehenden Bruch den ihm gleichen von der rechten Seite ein, so nimmt b die Form an

$$b = \sqrt{\frac{2}{9} \frac{g(\sigma - 1)}{V \pi n}}$$

und liefert für den vorliegenden Fall den Wert $b = 19,015$, wenn man für V nicht mit dem theoretischen, sondern dem empirischen Wert $V = 2,03 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$ (Ilgner) rechnet. Das Ergebnis der Theorie ist dann in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Werten:

$$\alpha = 1,486.$$

Eine zweite und gründlichere Methode, dem *Lycopodium* seine Besonderheiten zu nehmen, hat vor kurzem A. Ilgner¹⁾ behandelt. Er fand, daß das abweichende Verhalten der Sporen dem Einfluß der Unebenheiten ihrer mit einem Leisten-netz überzogenen Oberfläche zuzuschreiben ist, indem diese Erhöhungen einen zu großen Radius vortäuschen. Aus mikroskopischen, durch Packungsversuche bestätigten Messungen findet er für den äußeren Radius $R_a = 0,001585$ cm und für den inneren $R_i = 0,001376$ cm und berichtet, daß er nach der Stokesschen Formel eine sehr gute Annäherung an die beobachtete Fallgeschwindigkeit ($2,03 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$) erhält durch *Einführung von R_a in das Reibungsglied, von R_i in das Trägheitsglied* des Ansatzes. Das Prinzip dieses Verfahrens läßt sich auch im vorliegenden Falle anwenden und prüfen. Wenn man in der von W. König gegebenen Ableitung der Formel für R den inneren Radius in die Trägheitsglieder einführt, den äußeren in die Reibungsglieder und in die Kugelmasse dann, wenn sie gegenüber der Flüssigkeit bewegt gedacht ist, so erhält man eine korrigierte Formel:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\bar{a}^3 + 3\bar{a}b + \frac{9}{2}b^2 + \frac{9}{2}b^3 + \frac{9}{4}b^4}{c^3 + 3cb + \frac{9}{2}b^2 + \frac{9}{2}b^3 + \frac{9}{4}b^4}},$$

wenn

$$\bar{a} = \frac{2\sigma + \kappa}{3\pi}, \quad c = \frac{2 + \kappa}{3\pi}$$

bezeichnen. b hat die alte Bedeutung und enthält wie zuvor den äußeren Radius. In σ ist mit der dem inneren Radius entsprechenden wahren Dichte (1,102 nach Ilgner) zu rechnen, und es soll

$$\kappa = \left(\frac{R_a}{R_i}\right)^3 = 1,528$$

bedeuten. Nach dieser Formel ergibt sich

$$\alpha = 1,555,$$

ein Wert, der den durch den Versuch gewonnenen ebenfalls befriedigend nahekommt.

C. Versuche mit größeren Kugeln.

Die Unsicherheiten des Materials und der Methode, die vor allem eine Änderung der das Verhältnis α bestimmenden

1) A. Ilgner, Giessener Dissertation; erscheint in der Phys. Zeitschr.

Größen kaum gestattet, veranlaßte, zur Fortführung und Variation der Versuche folgende Änderung vorzunehmen: An Stelle der frei fallenden kleinen Kugeln tritt eine an einem langen Faden aufgehängte Kugel greifbarer Größe. Diese kann dann bequem gemessen und gewogen werden.

Neben diesem Vorzug sind gewisse Fehlerquellen und Korrekturen zu erwägen, die zunächst besprochen werden sollen.

Der Einfluß der Aufhängung äußert sich erstens darin, daß die Masse der Kugel um $\frac{1}{3}$ der Fadenmasse vergrößert erscheint. (Wie eine einfache Überlegung zeigt, hat für eine am Endpunkte des Fadens angreifende Kraft der starr und um den Aufhängungspunkt drehbar gedachte Faden dieselbe Trägheitswirkung wie ein freier Massenpunkt mit einer Masse, die gleich einem Drittel von der des Fadens ist.) Da bei den beschriebenen Versuchen Metall- und Tonkugeln an Kokonfäden hängend zur Verwendung kamen, ist dieser Zuwachs unerheblich. — Zweitens hat die Kugel jetzt eine eigene Schwingungsdauer, ist also nicht mehr frei beweglich. Nach den Gesetzen der erzwungenen Schwingung wird die Amplitude dadurch um so mehr beeinflußt, je näher sich die beiden Schwingungsdauern des Pendels und der Flüssigkeit kommen und je weniger zähe die Flüssigkeit ist. Der Faden wurde demgemäß immer hinreichend lang gemacht, so daß eine Änderung der Amplitude weder zu erwarten war, noch auch wirklich eintrat bei einer beträchtlichen Verkürzung des Fadens (etwa von 80 auf 8 cm). — Schließlich wird das in die Flüssigkeit eintauchende Fadenstück ebenfalls mitschwingen, aber in anderem Maße als die Kugel, und dadurch deren Bewegung abändern. Man kann versuchen, die von Stokes¹⁾ gegebene Berechnung der Flüssigkeitsdrucke auf einen schwingenden Kreiszylinder zur Herstellung einer Korrektionsformel zu verwenden. Aber einerseits ist nach Stokes²⁾ selbst seine Theorie für dünne Fäden nicht als gültig zu erwarten, andererseits zeigt ein unten (S. 476) beschriebener Versuch, daß der Effekt

1) G. G. Stokes, *Mathematical and Physikal Papers*, Vol. III, S. 38—54. Cambridge 1901.

2) G. G. Stokes, *a. a. O.* S. 54.

unter den schließlich gewählten Verhältnissen verschwindend sein muß.

Der Einfluß der Wände des (stets zylindrischen) Kastens, soweit er rein hydrodynamischer Natur ist, wird, wenn die Kugel in der Mitte schwingt, aus Symmetriegründen im ganzen gleich Null. (Die Kugel wird von beiden ebenen Wänden angezogen.)¹⁾ Bei einer zähen Flüssigkeit ist außerdem noch eine scheinbare Vergrößerung des Reibungskoeffizienten zu erwarten. Für stationäre Bewegung liegt hierzu eine Theorie von Ladenburg²⁾ vor. Wie dieser Faktor hier abzuschätzen ist, soll aus praktischen Gründen erst nach Beschreibung der Versuche behandelt werden.

Bei der praktischen Durchführung der neuen Methode zeigte sich bald, daß bei Verwendung von Luft als Versuchsfüssigkeit ein merkliches Mitschwingen nur bei sehr leichten Hohlkugeln zustande kommen konnte. Versuche, solche aus Glas, Kollodium, Kolophonium herzustellen, mißlangen mehr oder weniger. Auch wären die Fehlerquellen der Aufhängung und Befestigung bei so leichten Kugeln vielleicht merklich geworden. Der Kasten wurde deshalb mit einer tropfbaren Flüssigkeit gefüllt (Wasser, Glyzerin, Rizinusöl). Der zylindrische Kasten (Länge = 8, Radius = 4 cm, Achse in der Schwingungsrichtung) hat über der oberen Öffnung, durch die die Kugel in ihn hineinhängt, einen etwa 2 cm hohen kaminartigen Aufsatz, der verhindert, daß Flüssigkeit herausspritzt. Die Kugel hängt an einem Kokonfaden und ist daran mit ein wenig Wachskitt befestigt. Der Kasten hat Glasfenster an drei Seiten. Auf eines ist das horizontale Beobachtungsmikroskop gerichtet und mißt mit dem Okularmikrometer je nach seiner Einstellung die Amplitude des Kastens oder der Kugel. Bei den zunächst beschriebenen Versuchen wurde durch eines der anderen Fenster die Kugel mit einer gewöhnlichen Glühlampe seitlich oder rückwärts beleuchtet und das Mikroskop auf den Kugelrand gerichtet. Ein leises Pendeln der Kugel ließ sich nicht vermeiden.

Die Anordnung der Versuche ist die folgende: Es wurde

1) Vgl. V. Bjerknes, Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte S. 77. Leipzig 1902.

2) R. Ladenburg, Ann. de Phys. 23. S. 447—458. 1907.

zunächst die Abhängigkeit der Größe α von dem Dichtenverhältnis σ untersucht. Da σ nur in a auftritt, ist es vorteilhaft, wenn bei diesen Versuchen b verschwindend klein ist. Sodann mußten noch Versuche mit größerem b vorgenommen werden, um auch den Einfluß der höheren Potenzen von b , die in der Formel für α auftraten, nachzuprüfen. R , η/μ' und n können dabei einzeln variiert werden.

1. *Die Abhängigkeit der Größe α vom Dichtenverhältnis σ .*
Die konstant gehaltenen Daten waren hier die folgenden: Destilliertes Wasser von Zimmertemperatur ($\eta = 0,01029$, $\mu' = 0,998$), $R = 0,465$ cm, $n = 32,5$ (gefunden durch Ausschreiben auf eine berußte Trommel). Die benutzten Kugeln unterscheiden sich in ihrer Dichte. Um diese bequem ändern zu können, wurden einige aus einem Gemisch von Kolophoniumwachs und Bleifeilspänen geknetet. Das Dichtenverhältnis σ wurde nach dem archimedischen Prinzip durch Wägung in Luft und der Versuchsflüssigkeit bestimmt. Für jede Dichte wurden 10—12 Versuche bei wechselnder Amplitude gemacht, um die Ungenauigkeiten der Messung durch Mittelbildung ausgleichen zu können. Abhängigkeit des Verhältnisses α von der Amplitude lag auch hier nicht vor. Als Beispiel diene Tab. 3 (A_1 und A_2 die Amplituden von Flüssigkeit

Tabelle 3.
Kugel aus Bleiwachsmischung in Wasser
($\sigma = 3,396$), $n = 32,5$.

A_1	A_2	α
7,00	2,60	2,69
9,50	4,00	2,38
11,00	4,00	2,75
14,50	6,00	2,42
17,00	7,00	2,43
18,00	6,70	2,69
19,50	7,40	2,64
22,75	9,50	2,40
25,00	11,00	2,27
28,00	12,00	2,33

Mittel: $\alpha = 2,51$
Grenzen: 2,27 und 2,75

und Kugel in Mikrometerteilen; 1 Mikrometerteil = 0,218 mm des Objektes). Für jeden σ -Wert wurde ein α -Wert aus einer

derartigen Tabelle gewonnen und mit dem theoretischen Wert verglichen. Die folgende Tab. 4 gibt die Ergebnisse der Messungen für die Kugeln verschiedener Dichten. b berechnet sich zu 0,02161. α_i bezeichnet den berechneten, α_b den beobachteten Wert.

Tabelle 4.

Kugeln verschiedener Dichte in Wasser.

 $R = 0,465$, $n = 32,5$ ($b = 0,02161$).

Material der Kugel	Ton	Blei-Wachs-Mischung			Stahl	Blei
σ	1,787	3,396	4,573	5,880	7,980	10,750
α	1,525	2,597	3,382	4,253	5,653	7,500
α_i	1,51	2,55	3,31	4,15	5,51	7,29
α_b	1,42	2,51	3,38	4,40	5,43	8,32

Abgesehen von dem Versuch mit Blei, dessen Abweichung sich wohl aus einem Schätzungsfehler der sehr kleinen Kugelamplitude erklärt, ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung befriedigend. Eine systematische Abweichung liegt nicht vor.

Die Theorie fordert, daß für σ -Werte < 1 auch α kleiner als 1 wird und für $\sigma = 0$ einen gewissen Grenzwert zwischen 0 und 1 erreicht, der für verschwindende Reibung ($b = 0$) — dieser Fall liegt bei Wasser etwa vor — gleich $\frac{1}{3}$ ist. Das bedeutet, daß eine Vakuumkugel eine dreimal *größere* Amplitude annehmen würde, als sie die Flüssigkeit hat. Um auch dieses, bei oberflächlicher Betrachtung etwas befremdende Ergebnis der Theorie nachzuprüfen, war es von Interesse, die Untersuchung auch auf aufsteigende Luftblasen auszudehnen. Da die Blasen in wenig zähen Flüssigkeiten, wie Wasser, nicht geradlinig und ruhig aufsteigen, andrerseits in sehr viskosen keine von der der Flüssigkeit merklich verschiedene Amplitude haben können, ist für diesen Versuch eine Flüssigkeit von mittlerer Zähigkeit am besten geeignet. Eine Mischung von Wasser und Glyzerin ($\mu' = 1,185$, $\eta = 0,215$) war brauchbar (wegen der Bestimmung von η vgl. unten S. 474). Die Luft wurde aus einem kleinen Gasometer durch einen langen leichten Schlauch und ein Glasrohr in den schwingenden Kasten eingeleitet. Eine Glühlampe wurde geeignet aufgestellt, so daß sie sich in den Blasen spiegelte. Je nachdem man mit einem

verstellbaren Quetschhahn den Schlauch mehr oder weniger einschnürt, erhält man eine Folge einzelner Blasen, deren Lichtpunkte auf Sinusbahnen durch das Gesichtsfeld huschen, oder einen fast kontinuierlichen Strom, der für einige Sekunden eine feststehende sinusförmige Gestalt annehmen kann. Die Amplituden konnten nur ziemlich roh geschätzt werden (die unten S. 474 besprochene Spiegelkorrektur ist deshalb hier nicht angebracht); die Radien wurden bei geradlinigem Aufsteigen bestimmt. Die Tab. 5 bestätigt, daß die Blasen die

Tabelle 5.

Luftblasen in wasserhaltigem Glycerin ($\mu' = 1,185$, $\eta = 0,215$;
 $n = 34$, $a = 0,334$).

	R (cm)	b	α_r	α_b	Amplitude d. Flüssigk. (cm)
1. Fast kontinuierlich. Luftstrom	0,225	0,183	0,525	0,35—0,39	0,07
2. Einzelne Blasen in großen Abständen .	0,155	0,266	0,598	0,37—0,40	0,07

umgebende Flüssigkeit an Schwingungsweite übertreffen. Im einzelnen besteht eine Abweichung zwischen berechneten und beobachteten Werten, die wohl auf Strömungen der Luft in der ja nicht sehr kleinen Kugel zurückzuführen ist, da sie einer Verkleinerung des Reibungskoeffizienten entspricht.¹⁾

Daß die Formel von Lewis und Farris für die vorliegenden Verhältnisse (kleines b) ganz versagt, zeigt schon ihr Anblick, da im Nenner das fast verschwindende $\frac{2}{3} b^4$ steht. Sie würde z. B. für den ersten Versuch der Tab. 4 einen Wert α über 1000 liefern. Doch ist die Formel wohl auch in erster Linie für Schallwellen in Luft abgeleitet worden.

2. Die Abhängigkeit der Größe α von R , η/μ' und n . Um die Größe b so groß zu machen, daß sie sich bemerkbar machen konnte, wurde die Stimmgabel durch einen längeren Stahlstab (Länge 41,5 cm, Dicke 0,55 cm) ersetzt und der Kasten mit Rizinusöl gefüllt, dessen Zähigkeit die des Wassers um das tausend- bis zweitausendfache übertrifft. Die niedrige Schwingungszahl konnte mit der Stoppuhr durch direktes Ab-

1) Vgl. J. Weyssenhoff, Ann. d. Phys. 62. S. 1—45, § 12. 1920.

zählen der Unterbrechungslaute gemessen werden. Das schlecht durchsichtige Öl gestattete nicht mehr, die Amplitude durch Einstellung auf den Rand der Kugel zu messen. Es wurde deshalb dicht neben dem Mikroskop eine kleine 4-Voltlampe aufgestellt, die in der polierten Stahlkugel — nur solche wurden benutzt — ein scharfes Bildchen erzeugte, dessen Amplitude gut zu messen war. Sie ist, da das Bildchen seinen Platz in der Kugel bei deren Bewegung ändert, und da die Kugel nicht in Luft, sondern in Öl hängt, nicht ohne weiteres gleich der der Kugel. Der Faktor s , mit dem sie zu multiplizieren ist, und der in Tab. 7 beigefügt wird, wurde empirisch ermittelt durch doppelte Messung einer bestimmten konstanten Verrückung mit zwei Mikroskopen: einmal am Spiegelbild und gleichzeitig am Faden an einer Stelle über der Kastenöffnung, die noch nicht in das Öl eintaucht. Die Reibungskonstante des Rizinusöles wurde nach der Ausflußmethode für mehrere Temperaturen bestimmt und daraus die für die einzelnen Versuche, die leider nicht alle bei gleicher Temperatur stattfinden konnten, nötigen Werte durch Interpolation ermittelt. Sie sind etwas kleiner als die von Kahlbaum und Raeber¹⁾ gefundenen, was wohl an Unreinigkeit des Öles liegt, da auch die mit der Mohrschen Wage bestimmten Dichten ein wenig zu klein sind.

Die Abhängigkeit von R wurde zuerst untersucht. Alle anderen Werte konstant zu erhalten, war nicht genau möglich, da die Versuche nicht alle bei derselben Temperatur erledigt werden konnten. Infolgedessen schwanken die η -Werte, wie die Tab. 7 zeigt, zwischen 13,3 und 17,3. Die konstant gebliebenen Daten waren die folgenden: Stahlkugeln in Rizinusöl $\sigma = 8,135$, $a = 5,757$; $n = 6,925$; $\mu' = 0,966$ (für die mittlere Temperatur der Versuche). — Der α -Wert für jede einzelne Kugel wurde aus mehreren Beobachtungen als Mittelwert gewonnen. Die folgende Tab. 6 diene als Beispiel auch für den Genauigkeitsgrad und zeige zugleich, daß eine Abhängigkeit des Verhältnisses der Amplituden von der Amplitude selbst auch hier nicht zu beobachten war. (Bezeichnungen wie

1) G. W. A. Kahlbaum und S. Raeber, *Nova Acta*; *Abh. d. Kaiserl. Leop.-Carol. Deutsch. Akad. d. Naturf.* 84. Nr. 3. 1905.

in Tab. 3; A_1 und A_2 in Mikrometerteilen, 1 Mikrometerteil = 0,05 mm).

Tabelle 6.

Stahlkugel in Rizinusöl ($R = 0,434$ cm).

A_1	A_2	α	α -Mittelwert
95,0	77,0	1,233	1,229
94,5	76,5	1,235	
90,0	73,8	1,219	
53,0	43,0	1,233	1,235
52,5	42,8	1,227	
53,5	43,0	1,244	
34,2	28,0	1,221	1,230
35,0	28,7	1,220	
36,0	28,8	1,250	

Die folgende Tab. 7 gibt die berechneten und beobachteten α -Werte für fünf Stahlkugeln. α_b ist bereits mit der Spiegelkorrektur s korrigiert. t ist die Temperatur. Unter α' ist schließlich noch der Wert beigelegt, den die Formel von Lewis und Farris ergeben würde.

Tabelle 7.

Stahlkugeln in Rizinusöl ($a = 5,757$, $n = 6,925$, $\mu' = 0,966$).

Nr.	R	s	α_b	t	v	b	α_t	α'
1	0,276	0,999	1,05	15,08	17,3	3,2~8	1,08	1,05
2	0,434	0,9942	1,22	16,90	14,25	1,897	1,31	1,42
3	0,5545	0,991	1,37	17,0	14,2	1,483	1,52	1,93
4	0,750	0,985	1,69	16,9	14,25	1,098	1,88	3,16
5	0,950	0,979	2,08	17,9	13,3	0,838	2,29	5,25

(Zur Beurteilung des Einflusses der höheren Potenzen von b sei hinzugefügt, daß bei Weglassung des Gliedes $\frac{3}{4} b^4$ für den 1. Versuch die Formel $\alpha_t = 1,167$, für den letzten 2,395 liefern würde.) Die Tabelle zeigt zunächst, daß die Formel von Lewis und Farris mit abnehmendem b allmählich ganz unbrauchbar wird. Ferner sind die beobachteten α -Werte alle etwas kleiner, als sie der Theorie nach sein sollten.

Es sind nun in der Tat drei bereits erwähnte Faktoren vorhanden, die eine derartige Abweichung hervorzurufen geeignet sind. Neben dem Einfluß des eintauchenden Faden-

stückes und der Kastenwände könnte sich bemerkbar machen daß die ideale Voraussetzung unendlich kleiner Geschwindigkeiten nicht erfüllt ist.

Um die Wirkung des Fadens abschätzen zu können, wurde der kaminartige Aufsatz auf dem Kasten so weit verlängert, daß der Faden nun 7,5 statt wie vorher 4 cm eintauchte. Da keine Beeinflussung der Amplitude durch diese Umänderung festzustellen war, darf angenommen werden, daß nur ein sehr kleiner Teil der Abweichung auf Rechnung des Fadens zu setzen ist.

Ein entsprechender Versuch wurde zur Abschätzung der störenden Wirkung der Kastenwände angestellt: Drei Kugeln verschiedener Größe ($R = 0,276, 0,434, 0,5545$ cm) wurden einmal in einem großen Kasten (Länge = 8, Radius = 4 cm) und einmal in einem kleinen (5 bzw. 2,5 cm) unter sonst gleichen Umständen untersucht. (Der kleine Kasten wurde durch Ballastgewichte so weit beschwert, daß die Schwingungszahl in beiden Fällen dieselbe war.) Es ergab sich keine scheinbare Vergrößerung des Reibungskoeffizienten. — Dieses Ergebnis ist etwas befremdend, kann aber durch eine theoretische Überlegung gestützt werden. Die Ladenburgsche Korrektur anzuwenden, hat von vornherein wenig Aussicht auf Erfolg, da sie und die ihr zugrunde liegenden Lorentzschen Methoden stationäre Bewegung voraussetzen. Wendet man sie an, so erweist sie sich als zu stark: Die nach ihr korrigierten α_i -Werte rücken weit unter die α_2 . Man kann aber von der Wirkung der Wände bei oszillierender Bewegung der Kugel eine ungefähre Vorstellung bekommen, wenn man den Abfall der Amplituden der Flüssigkeitsteilchen bei Entfernung von der Kugel untersucht. Je nachdem dieser Abfall steil ist oder nicht, wird sich eine Wand erst in unmittelbarer Nähe oder schon in größerer Entfernung störend bemerkbar machen. Die Kugel vom Radius R bewege sich längs der z -Achse mit der Geschwindigkeit $W \cdot \cos(2\pi n t)$ um den Koordinatenanfangspunkt. Der Einfachheit halber mag es genügen, die Bewegung der Flüssigkeit für die Punkte einer Geraden zu betrachten, die durch den Nullpunkt geht und auf der z -Achse senkrecht steht. Sie erfolgt parallel zur z -Achse. Ihre Geschwindigkeit sei w . Durch Fortführung der Betrachtungen Kirchhoffs

in der 26. Vorlesung seiner Mechanik¹⁾ läßt sich W berechnen. Das fertige Ergebnis findet sich auch bei Brillouin.²⁾ Ist r der Abstand des betrachteten Punktes vom Kugelmittelpunkt, so erhält man, wenn man sich teilweise Brillouins Bezeichnung anschließt, in symbolischer Schreibweise

$$w = -e^{2\pi} V^{-1} n t \left[\frac{A}{r^3} + B e^{\beta r} \left(\frac{\beta^2}{r} - \frac{\beta}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \right].$$

Hier ist

$$A = \frac{W}{2} \cdot \frac{R}{\beta^2} (3 - 3\beta R + \beta^2 R^2), \quad B = -\frac{3W}{2} \frac{R \cdot e^{-\beta R}}{\beta^2},$$

$$\beta = -\sqrt{\frac{n\pi\mu'}{\eta}} (1 + \sqrt{-1}) = -\beta_0 (1 + \sqrt{-1}).$$

Setzt man diese Ausdrücke in den für w ein und ermittelt den reellen Teil, so erhält man eine Schwingung, deren Amplitude durch

$$\frac{WR\eta}{4\pi n\mu' r^3} \left\{ C^2 + D^2 + 2e^{-\beta_0(r-R)} [(Cp + Dq) \cos(\beta_0(R-r)) + (Dp - Cq) \cdot \sin(\beta_0(R-r))] + e^{-2\beta_0(r-R)} (p^2 + q^2) \right\}^{1/2}$$

gegeben ist, wenn noch

$$C = -3 - 3\beta_0 R, \quad D = -3\beta_0 R - 2\beta_0^2 R^2,$$

$$p = 3 + 3\beta_0 r, \quad q = 3\beta_0 r + 6r^2 \beta_0^2$$

bezeichnet. Die Amplitude ist also durch die Summe zweier e -Funktionen dargestellt, deren eine noch eine periodische Überlagerung hat. Übersichtlichen Einblick in den Verlauf der Funktion gibt die graphische Darstellung, in der der bestimmte Fall $R=0,434$, $\eta=8,8$, $n=6,925$, $\mu'=0,9615$, der bei einem der Versuche mit den beiden Kästen wirklich vorlag, durchgerechnet ist. W ist gleich 1 angenommen. Der

Fig. 3.

außerordentlich steile Abfall in unmittelbarer Nähe der Kugel, in dem sich auch noch das erste Minimum und darauf folgende

1) G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Bd. I, Mechanik. S. 386 ff. Leipzig 1876.

2) M. Brillouin, Leçons sur la Viscosité. S. 82. Paris 1907.

Maximum der sonst verwischten periodischen Überlagerung äußert, ist deutlich erkennbar. Es ist hiernach verständlich, daß eine Wand in 4 cm Abstand kaum stören, und daß ein Heranrücken auf 2,5 cm daran noch nicht viel ändern wird.

Da also eine Veränderung der Einflüsse von Kastenwandung und Faden sich kaum bemerkbar macht, wird man annehmen dürfen, daß auch absolut genommen ihr Betrag gering ist, daß also die Abweichung zwischen berechneten und beobachteten α -Werten bis zu einem gewissen Grade auf Rechnung größerer Geschwindigkeiten, als die Theorie vorsieht, zu setzen ist. (Für den dritten Versuch der Tab. 7 berechnet sich unter Berücksichtigung der Phasenformel die maximale Geschwindigkeit V der Kugel relativ zur Flüssigkeit zu etwa 5,3 cm/sec. Wenn man den vorliegenden Fall einmal wie eine stationäre Bewegung behandeln will, so kann man die Rayleighsche Bedingung für die Langsamkeit der Bewegung beim Stokeschen Problem¹⁾ anwenden, die verlangt, daß der Ausdruck $R\mu'V/\eta$ gegen 1 zu vernachlässigen sei. Er hat hier mit diesem V berechnet den Wert 0,2.)

Der Vollständigkeit halber wurden schließlich noch zwei kleinere Versuchsreihen, eine mit veränderlichem η/μ' und eine mit veränderlichem n durchgeführt.

Um bei der ersten dieser Versuchsreihen die Dichte wenigstens annähernd konstant halten zu können, wurden Wasser, wasserhaltiges Glyzerin ($\mu' = 1,213$ bei 22,4° C.) und Rizinusöl benutzt. Es ergab sich (für den kleineren Kasten, der sich, wie erwähnt, in seiner störenden Wirkung von dem großen nicht merklich unterscheidet) die folgende Tabelle.

Tabelle 8.

Stahlkugel ($R = 0,5545$ cm) in Flüssigkeiten verschiedener Viskosität;
 $n = 7,15$.

	η	η/μ'	a	b	α_b	α_t
Rizinusöl	7,75	8,07	5,79	1,081	1,75	1,91
Glyzerin	0,717	0,591	4,65	0,293	3,30	3,31
Wasser	0,0097	0,0097	5,58	0,038	5,55	5,33

1) Vgl. J. Weyssenhoff, a. a. O. S. 11.

Die Veränderung von n ließ sich nur innerhalb enger Grenzen durchführen. Bei Benutzung des großen Kastens und vieler Zusatzgewichte konnte n auf 3,46 herabgesetzt werden. Der kleine Kasten allein ergab $n = 9,1$. Bei dem dritten Versuch der folgenden Tabelle wurde wieder die in den ersten Versuchen verwendete Stimmgabel benutzt.

Tabelle 9.

Stahlkugel in Rizinusöl
($R = 0,5545$ cm, $\eta = 9,6$, $a = 5,78$.)

n	b	α_b	α_t
3,46	1,728	1,21	1,38
9,1	1,066	1,91	1,92
36,1	0,535	2,76	3,07

Auch in diesen beiden Tabellen sind, wie zu erwarten, bei großem η die α -Werte etwas zu klein. Im übrigen folgen die beobachteten Zahlen den theoretischen gut.

Die vorstehende Arbeit entstand im Physikalischen Institut der Universität Gießen auf Anregung und unter Leitung von Hrn. Geheimrat König, dem ich auch an dieser Stelle für sein stets freundliches, förderndes Interesse meinen herzlichen Dank ausdrücken möchte.

Zusammenfassung.

Es werden Versuche beschrieben zur experimentellen Prüfung der von W. König hergeleiteten Formel für das Verhältnis der Amplitude einer schwingenden Flüssigkeit zu der Amplitude einer in ihr kräftefrei befindlichen Kugel in seiner Abhängigkeit von Größe und Dichte der Kugel, innerer Reibung der Flüssigkeit und Schwingungszahl. In einem schwingenden Kasten, dessen Inhalt als Ganzes an der Schwingung teilnimmt (Zernow), wurden diese Faktoren möglichst einzeln verändert. Die Versuche wurden ausgeführt an Lycopodiumsporen in Luft, großen Kugeln aus verschiedenen Stoffen in Wasser, Luftblasen in Glycerin, Stahlkugeln in

Rizinusöl. Die Übereinstimmung mit der Theorie ist befriedigend. Bei Verwendung sehr zäher Flüssigkeiten tritt eine Abweichung auf, die wahrscheinlich dem störenden Einfluß der Wände, der Aufhängung und zu großer Geschwindigkeiten zuzuschreiben ist. Die Formel von Lewis und Farris ist für Lycopodiumsporen in Luft brauchbar, versagt in den anderen Fällen.

(Eingegangen 21. April 1921.)