ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 63.

1. *Grundlinien einer Theorie der Farbenmetrik im Tagesschen;* *von Erwin Schrödinger.*

(I. Mitteilung.)

Inhalt.

Vorbemerkung. — Einleitung: Eigenart des Gebietes. Abscheidung des Teilgebietes der niederen Metrik. — Der Farbenmetrik I. Teil: Niedere Farbenmetrik oder Affinität der Farbe. § 1. Begriff der Farbe und des Lichtes. — § 2. Addition von Lichtern und Farben. — § 3. Multiplikation mit einer Zahl. — § 4. Die Dimensionstatsache. — § 5. Die Abbildung auf ein Vektorbüschel. — § 6. Der Spektralkegel. Begrenzung des reellen Farbenraumes und Orientierung in ihm. — § 7. Theoretische Koordinatenbestimmung. — § 8. Wechsel der Eichfarben oder des Koordinatensystems. — § 9. Irreelle Eichfarben. Die Young-Helmholtzsche Theorie. — § 10. Beziehung zwischen Dichromaten und Trichromaten. — Der Farbenmetrik II. Teil: Höhere Farbenmetrik (Eigentliche Metrik der Farbe). § 1. Notwendigkeit, über die niedere Metrik hinauszugehen. — § 2. Maß der Verschiedenheit. Das Linienelement des Farbenraumes. — § 3. Begriff der Helligkeit. — § 4. Spezieller Ansatz für das Linienelement. — § 5. Farbunterschiedsempfindlichkeit im Spektrum. — § 6. Die Farbscheibenversuche von Helmholtz, welche der Helligkeitsadditivität zu widersprechen scheinen. — § 7. Die Geodätischen. Das Maß endlicher Verschiedenheit. Heterochrome Photometrie. — § 8. Diskussion des Verlaufs der geodätischen Linien im x -Raum. — § 9. Spezielle Fälle. Die Farbtonänderung beim Zumischen von Weiß. — § 10. Das Bezold-Brückesche Phänomen. Ausblicke auf eine künftige Verbesserung des Linienelements.

Vorbemerkung.

Den Anlaß zur Zusammenstellung des hier mitgeteilten Entwurfes einer Farbenmetrik bildeten für den Verfasser die Gedanken über den Begriff der *Helligkeit*, die in den §§ 3—7 des II. Teils enthalten sind. Die Fragen, um die es sich da handelt, sind diese: läßt sich einer konkret, d. h. durch ein bestimmtes Lichtgemisch, gegebenen Farbe eine Zahl als ihre *Helligkeit* zuordnen derart, daß sich auch von Lichtern ver-

schiedener Reizart¹⁾ angeben läßt, ob sie *gleichhell* sind oder nicht? Wie ist die Definition für gleiche Helligkeit experimentell zu stellen? Was ergibt sich nach richtig gestellter Definition *empirisch* für die Helligkeit als Funktion der drei Eichwerte oder der drei Grundempfindungswerten oder irgendwelcher anderer drei Größen, durch welche eine Farbe eindeutig festgelegt wird?

Von diesen drei Fragen glaube ich das rationale Kriterium für die Beantwortung der *ersten* („gibt es eine heterochrome Helligkeit?“) hier zum ersten Male klar formuliert und damit auch den inneren Grund aufgefunden zu haben für die große Uneinigkeit der Forscher in diesem Punkt. Ob die Definition der Helligkeitsgleichheit grundsätzlich möglich ist oder nicht, hängt nämlich davon ab, ob ein gewisser Pfaffscher Differenzialausdruck in drei Differenzialen mit experimentell zu ermittelnden Koeffizienten einen integrierenden Faktor besitzt oder nicht. Nur wenn das der Fall ist, lassen sich die „gleichhellen Flächenelemente“ der Farbenmannigfaltigkeit zu Integralfächen gleicher Helligkeit zusammensetzen.

Unter der Annahme, daß die experimentell ermittelten Funktionen eine Integration zulassen werden, ergibt sich dann sogleich eine Helligkeitsdefinition, an der, wie immer künftige Experimente ausfallen mögen, nichts mehr zu ändern sein wird.

Anders steht es mit der dritten Frage: nach der speziellen Funktion der Farbkoordinaten, die als Helligkeit anzusprechen ist. Hier habe ich den Gedanken durchgeführt und dem übrigen System unserer Farberfahrung einzugliedern versucht, daß die Helligkeit eine *lineare* Funktion der Grundvalenzen ist und sich bei Mischungen von Lichtern streng additiv verhält. Ein ausgedehntes Beobachtungsmaterial spricht dafür, daß dies wenigstens mit großer Annäherung zutrifft; darum hielt ich es für wertvoll, zu zeigen, daß diese Auffassung sich durchführen läßt, ohne auf Grund unserer *allgemeinen* Helligkeitsdefinition mit anderen Erfahrungen in groben Konflikt zu geraten was bisher nicht feststand. Daß die Additivität in Strenge zutrifft, glaube ich aber kaum, weil vereinzelte, aber sehr bestimmte Wahrnehmungen auf Abweichungen deuten.

1) Als Lichter *gleicher Reizart* bezeichne ich mit von Kries solche, welche durch bloße Änderung der objektiven Intensität des einen Lichtes ununterscheidbar gemacht werden können.

Der spezielle Ansatz für das Limienelement des Farbenraumes und die daraus folgende spezielle Helligkeitsfunktion ist also sicher nur als *Näherung* anzusehen, die der weiteren Verbesserung durch künftige Experimente harrt.

Um nun den Wert dieser formalen Lösung des Helligkeitsproblems hervortreten zu lassen, erwies es sich als nötig, ihren Platz in dem umfassenderen Gebäude der Farbenmetrik aufzuzeigen, wie es sich dem Verfasser im Laufe der Beschäftigung mit diesen und ähnlichen Fragen allmählich dargestellt hat. Es stellte sich heraus, daß alle messenden Versuche mit Farben in zwei grundsätzlich getrennte Gruppen zerfallen, je nachdem dabei als Kriterium für die Einstellung am Apparat ausschließlich die *völlige Gleichheit* (Ununterscheidbarkeit) zweier aneinander grenzender Farbenfelder benützt wird oder noch andere Kriterien (Ebenunterscheidbarkeit, größte Ähnlichkeit, eventuell stärkster Kontrast). Die Messungsergebnisse *erster* Art bilden ein in sich geschlossenes einheitliches System, dessen überaus einfache Gesetzmäßigkeiten seit Grassmann formal, seit König auch material bekannt sind. Ich glaube das System dieser Gesetzmäßigkeiten — gewöhnlich Gesetze der Lichtmischung genannt — passend als *niedere Farbenmetrik* zu unterscheiden von den sehr viel verwickelteren und sehr viel weniger gut bekannten Gesetzen der *höheren Farbenmetrik*, welche sich mit den Messungsergebnissen der *zweiten* Art befassen.

Ich halte die strenge Scheidung zwischen diesen beiden Gebieten — abgesehen von ihrer sogleich zu berührenden theoretischen Bedeutung — deshalb für außerordentlich wichtig, weil sonst die vielen begrifflichen Unklarheiten und experimentellen Unsicherheiten, denen wir in der höheren Farbenmetrik auf Schritt und Tritt begegnen, beständig auch in das Gebiet der niederen einzudringen und hier Verwirrung anzurichten drohen, während letztere in Wahrheit fest und sicher in sich selbst ruht und von jenen Schwierigkeiten in keiner Weise tangiert wird.

Der tiefere Grund für diese Abgeschlossenheit und Unberührbarkeit ist ein sehr einfacher. Er ist dem völlig analog, warum z. B. ein Geometer, der ausschließlich die *projektiven Eigenschaften* ebener oder räumlicher Figuren zu studieren unternimmt, sich über das Parallelenaxiom des Euklides nicht den Kopf zu zerbrechen und nicht zu wissen braucht, was

ein rechter Winkel und was die Länge einer Strecke ist. Es stellt sich nämlich heraus, daß die niedere Farbenmetrik sich *vollkommen* deckt mit der *affinen Geometrie* des die Mannigfaltigkeit der Farben in bekannter Weise darstellenden *Vektorbüschels*, oder auch, in der geläufigeren Ebenendarstellung, sich *im wesentlichen* deckt mit der *projektiven Geometrie der Farbebene*. Die höhere Farbenmetrik dagegen stellt sich — einem Grundgedanken von Helmholtz¹⁾ folgend — dar, als die *eigentliche metrische Geometrie* jenes als *Farbenraum* aufgefaßten Vektorbüschels, und zwar als eine Metrik in jenem allgemeinsten, von Riemann begründeten Sinne, deren Linienelement nicht das euklidische ist, sondern variable erst experimentell zu bestimmende Koeffizienten hat. (In der ebenen Darstellung läßt sich die Bedeutung der höheren Farbenmetrik nicht so einfach beschreiben, weil hier die dritte Koordinate durch die unanschauliche Massenzahl ersetzt ist.)

Das *Helligkeitsproblem* hat, wie man sogleich erkennt und im folgenden eingehend dargelegt finden wird, seinen Platz in der *höheren* Farbenmetrik. Im Gebiete der reinen *Farbengleichungen* ist das Verhältnis des „Gleichhellseins“ zweier Felder von verschiedenem Farbton so unbekannt und überflüssig, wie in der projektiven Geometrie das Verhältnis des „Gleichlangseins“ zweier Strecken oder des Aufeinander senkrechtstehens zweier Geraden. Ich halte es darum auch für grundsätzlich verfehlt, wenn man, wie Abney²⁾ es tut, *Farbengleichungen* und *Helligkeitsgleichungen* von Haus aus theoretisch und experimentell verquickt durch die Bestimmung, daß die Grundfarben in Einheiten gleicher Helligkeit gemessen werden sollen. Die Entscheidung, ob das überhaupt möglich ist, fällt erst auf einer weit vorgerückten Stufe der höheren Metrik, und, ob es zweckmäßig ist, hängt davon ab, ob eine

1) H. v. Helmholtz, Versuch einer erweiterten Anwendung des Fechnerschen Gesetzes im Farbensystem, Zeitschr. f. Psych. u. Phys. d. Sinnesorg. 2. S. 1. 1891; Versuch, das psychophysische Gesetz auf die Farbenunterschiede trichromatischer Augen anzuwenden; ibid. 3. S. 1 u. 517. 1891; Kürzeste Linien im Farbensystem, Sitzungsberichte d. Berliner Akad. 17. Dez. 1891, S. 1071. Siehe auch die betreffenden Abschnitte des Handbuches der physiolog. Optik (2. Aufl.).

2) W. Abney, Phil. Trans. A. 205. S. 333. 1906; Proc. Roy. Soc. A. 83. S. 462. 1910; 84. S. 449. 1910; 86. S. 42. 1911; 87. S. 326. 1912.

ganz bestimmte spezielle Helligkeitsfunktion sich experimentell bewährt — nämlich eine Linearfunktion der Grundvalenzen. Jeder experimentelle Widerspruch oder theoretische Einwand gegen diese ganz spezielle Annahme läßt dann — scheinbar — das ganze Gebäude in seinen Grundvesten erzittern.

Die Brücke zwischen den beiden Gebieten wird geschlagen durch die Theorie der Grundempfindungen. Diese sollen schon in der niederen Metrik ihre Bedeutung haben als die Fehlerfarben der Dichromaten und sind bekanntlich von König¹⁾ — durchwegs aus *Farbengleichungen!* — bestimmt worden. Andererseits wird man erwarten dürfen, daß das Linienelement der höheren Metrik eine besonders einfache Gestalt erhält, wenn man die Grundempfindungen als Variable wählt. In dieser Erwartung sah sich Helmholtz getäuscht. Er mußte andere Grundempfindungspunkte in der Farbebene ad hoc annehmen, um mit seinem, dem Weber-Fechnerschen Gesetz nachgebildeten Linienelement Anschluß an die Erfahrung (Farbunterschiedsschwellen von König und Brodhun) zu finden und mußte demgemäß sehr viel kompliziertere Annahmen machen über die Natur der dichromatischen Farbenblindheit.²⁾

Dies und ein Rechenfehler bei Helmholtz, dessen Aufdeckung den Anschluß an die Erfahrung noch verschlechtert, ist wohl der Grund, warum sein geistvoller Gedanke einer Riemanngeometrie der Farbe keinen Anklang und, soviel mir bekannt, keine Fortführung gefunden hat. Sogar aus der neuesten Auflage des Helmholtzschen Handbuches der physiologischen Optik (bei Leopold Voß, Hamburg und Leipzig 1909) sind die betreffenden Abschnitte gestrichen worden.

Bei der ersten Beschäftigung mit jenen Helmholtzschen Arbeiten schien mir die Unstimmigkeit noch krasser, da ich erkannte — was Helmholtz entgangen zu sein scheint —, daß sein Linienelement eine Helligkeitsfunktion liefert, welche der Erfahrung ins Gesicht schlägt (Kubikwurzel aus dem Produkt der Grundempfindungswerten); bis ich bemerkte, daß eine andere Form des Linienelementes möglich ist, die wenn auch sicher noch verbesserungsfähig — doch schon

1) A. König u. C. Dieterici, *Zeitschr. f. Psych. u. Phys. d. Sinnesorgane*, 4. S. 241ff. 1892.

2) Vgl. die zweite der oben zitierten Arbeiten, S. 15.

in der einfachen, hier angenommenen Gestalt im wesentlichen Ordnung schafft und die störenden Widersprüche beseitigt.

Daß wir im ersten, der niederen Farbenmetrik gewidmeten Teil inhaltlich gegenüber Helmholtz und König nichts Neues bringen, ist selbstverständlich. Dennoch ließ sich m. E. eine vollständige und einheitliche Behandlung des ganzen Gebietes nicht wohl entbehren, denn mir ist keine Darstellung bekannt, auf die ich mich zur Fundierung der höheren Metrik hätte berufen können, keine Darstellung, die den rein projektiven bzw. affinen Charakter dieser Gesetze so straff betont, wie es für unseren Zweck notwendig ist.¹⁾

Einleitung: Eigenart des Gebietes. Abscheidung des Teilgebietes der niederen Metrik.

Die Farbenmeßkunst kann als Teilgebiet ebensowohl der Sinnesphysiologie wie der Experimentalphysik angesehen werden. Vorzüglich unter diesem letzteren Gesichtspunkt werden wir sie in dieser Abhandlung betrachten.

Unter den Versuchsanordnungen der Experimentalphysik nehmen die, um die es sich hier handelt, eine ganz eigenartige, ich möchte sagen vom erkenntnistheoretischen Standpunkt ausgezeichnete Stellung ein. Bei allen übrigen physikalischen Messungen, mögen sie nun mit der Wage oder mit dem Galvanometer, mit dem Thermometer oder mit dem Fernrohr ausgeführt werden, besteht die eigentliche Messung letzten Endes immer in der Feststellung von *räumlich-zeitlichen Koinzidenzen*: eines Zeigers, Lichtflecks, einer Quecksilberkuppe mit einem Skalenteil, eines Fadenkreuzbildes mit einem Skalenteilbild oder dem Bild eines Sternes — oder häufig in der zeitlichen Koinzidenz zweier solcher räumlicher Koinzidenzen usw. Bei jeder Farbmessung hingegen treten die Sinnesorgane des Beobachters außer zu Feststellungen *dieser* Art auch noch mindestens zu *einer* Feststellung von ganz anderer Art in Tätigkeit. Im einfachsten Falle besteht sie darin, daß zwei aneinandergrenzende farbige Felder in bezug auf ihre Farbe für ununterscheidbar erklärt werden — und das für ganz be-

1) Zur ersten Orientierung auf unserem Gebiet möchte ich am meisten die lichtvollen Ausführungen des Hrn. von Kries in W. Nagels Handbuch der Physiologie des Menschen III. 1 (Braunschweig, F. Vieweg 1904) empfehlen.

stimmt Werte der übrigen an der Apparatur veränderlichen Parameter (Nikolstellungen, Blendenöffnungen, Kollimatorstellungen usw.); also Feststellung, daß die farbliche Koinzidenz mit gewissen Koinzidenzen der ersten Art koinzidiert.

Das ausgezeichnete Verhältnis der beiden Farbfelder braucht aber nicht notwendig das der Ununterscheidbarkeit zu sein. Bei einer gewissen Gruppe von Messungen (Unterschiedsschwellen) wird, umgekehrt, von einer Stellung völliger Gleichheit ausgegangen und ein physikalischer Parameter der Apparatur so lange variiert, bis die Felder *eben unterscheidbar* sind. Ferner kann es sein, daß beim Verändern eines Parameters zwar nicht eine Stellung völliger Gleichheit der beiden Felder aufgefunden werden kann, wohl aber eine Stellung, die *dadurch* ausgezeichnet ist, daß in ihr (d. h. für diesen Parameterwert) die beiden Felder *weniger stark verschieden* sind, als für alle voraufgehenden und nachfolgenden Parameterwerte. Ich nenne das mit Helmholtz eine Einstellung auf größte Ähnlichkeit und glaube, daß unter anderem alle direkten, heterochromen Helligkeitsvergleiche in diese Gruppe fallen. Endlich wäre auch noch das Umgekehrte denkbar, die Einstellung auf stärksten Kontrast, doch ist mir kein Fall bekannt, wo dieses Prinzip benutzt worden wäre.

Ich bin der Meinung, daß mit den vier hier zunächst taxativ aufgeführten Fällen der Einstellung auf

- a) Gleichheit,
- b) Ungleichheit,
- c) größte Ähnlichkeit,
- d) größten Kontrast

alle *möglichen* Fälle erschöpft sind. Ich glaube z. B., daß man nach dem *dritten* Prinzip einstellt, wenn man etwa zu einer bestimmten Farbe eines lichtstärkeren Spektrums aus einem lichtschwächeren Spektrum die Farbe gleichen Farbtons aus sucht; und nach demselben Prinzip, wenn man zwei etwas verschiedene Farbtöne gegeneinander photometriert, d. h. zu einer vorgegebenen Helligkeit des ersten aus einer Reihe abgestufter Helligkeiten des zweiten die gleichhelle Farbe aus sucht. Ich glaube nicht, daß „spezifische“ Einstellungen möglich sind, wie die Ausdrucksweisen „gleicher Farbton“, „gleiche Helligkeit“ andeuten. Dem widerspricht nicht, daß man z. B. im erstangeführten Fall aus dem lichtschwächeren Spektrum

einmal die *gleichhelle*, das andere Mal die Farbe *gleichen Farbtones* aussuchen kann und dabei im allgemeinen auf verschiedene Stellen des zweiten Spektrums stoßen wird. Denn es kann natürlich in einer linearen Farbreihe *zwei* (und mehr) Farben geben, die einer vorgegebenen ähnlicher sind, als ihre Nachbarn, so gut als eine Kurve auf einem endlichen Stück zwei (und mehr) Minima aufweisen kann.

Logisch erweisen läßt sich diese Auffassung natürlich nicht. Solange man mit ihr auskommt, hat sie jeder anderen gegenüber den Vorzug der Einfachheit — was nach dem herrschenden Sprachgebrauch beinahe hinreichen sollte, um sie als die *richtige* zu bezeichnen.

Obige vier Prinzipie für die Einstellung ausgezeichneter Parameterkombinationen an einer Apparatur auf Grund eines Farburteils lassen sich aus folgenden zwei fundamentalen, als schlechthin gegeben anzusehenden Fähigkeiten unserer sinnlichen Urteilskraft ableiten:

1. Wir sind imstande zu beurteilen, ob zwei angrenzende Farbfelder *gleich* oder *ungleich* sind.

2. Nennen wir ein Paar angrenzender ungleicher Felder, die uns vorliegen, eine „*Stufe*“, so unterscheiden wir Stufen qualitativ nach ihrer Größe, derart, daß wir über zwei gleichzeitig oder knapp nacheinander dargebotene (nicht zu große) Stufen urteilen, welche „*größer*“, welche „*kleiner*“ ist. *Zusatz*: Diese Größer-Kleiner-Beziehung genügt dem Axiom: Aus $A \leq B$, $B \leq C$ folgt $A \leq C$.

Diese beiden Grundfähigkeiten unseres Farburteils halte ich für die einzigen, die für quantitative Messungen in Betracht kommen. Daß sie uns dazu befähigen, die Einstellung nach einem der vier genannten Prinzipie vorzunehmen, ist ohne weiteres klar, falls die vorgelegten Farbenfelder nur von *einem einzigen variablen Parameter* unserer Apparatur abhängen. Aus einer eindimensionalen Reihe von Stufen können wir natürlich die *gleiche*, die (bei einsinniger Durchlaufung) *erste ungleiche*, die (im Vergleich zu den Nachbarstufen) *kleinste* und die (in derselben Hinsicht) *größte* leicht herausfinden, wenn dergleichen in der vorgelegten Reihe vorkommt. Sind zwei oder mehr Parameter zu variieren, so ist die Aufgabe schwieriger, die Lösung viel weniger sicher. Schon bei zweien muß ein suk-

zessives Approximationsverfahren eingeschlagen werden, indem z. B. zunächst der erste festgehalten, der zweite auf größte Ähnlichkeit eingestellt, dann der zweite in dieser Stellung belassen und der erste wieder auf größte Ähnlichkeit eingestellt wird usf., bis entweder Gleichheit oder die größte überhaupt erreichbare Ähnlichkeit hergestellt ist.

In allen den Fällen, wo auf *Gleichheit* eingestellt wird, tritt diese nicht wirklich für *einen* ausgezeichneten Parameterwert (oder Parameterkombination) auf, sondern für einen kleinen Parameterbereich. Dem verdankt das Prinzip b) seine Bedeutung, es kommt ins Spiel bei der Untersuchung der Größe dieses Bereiches. Auf gleichzeitige Variation mehrerer Parameter wird man sich dabei nicht einlassen können, vielmehr nur die Ausdehnung des Bereiches in Richtung jedes Parameters für sich untersuchen. Übrigens gewinnt man ein zwar etwas anderes, aber wohl gleichwertiges Maß für seine Ausdehnung, indem man den *mittleren Fehler* bei der Einstellung auf Gleichheit bestimmt.

Wir müssen nun noch begründen, daß und in welcher Hinsicht wir einen so fundamentalen Unterschied setzen zwischen allen übrigen physikalischen Messungen, bei denen nur auf räumlich-zeitliche Koinzidenz, und den hier betrachteten, bei denen auf eine ausgezeichnete Farbbeziehung eingestellt wird. Dieser Unterschied springt in seiner vollen Bedeutung durchaus nicht in die Augen. Er liegt durchaus nicht in dem äußerlichen Hinzutreten des Farburteils — so wenig, daß wir sogar eine große Zahl von Untersuchungen, für die dies Merkmal zutrifft, aus der eigentlichen Farbenmetrik, als nur scheinbar dazugehörig, auszuschließen haben.

Es sind das alle diejenigen, bei denen die als gleich beurteilten Felder *auch physikalisch von vollkommen der gleichen Beschaffenheit* sind. Das Auge des Beobachters mit seinem Farburteil tritt dabei offenbar nur als bequemes und empfindliches physikalisches Instrument, und zwar als Nullinstrument, auf und könnte durch viele andere Instrumente, z. B. ein Bolometer, eine Thermosäule ersetzt werden. Dadurch wäre auch dieser Teil der Messung auf die Feststellung räumlich-zeitlicher Koinzidenzen zurückgeführt, sie gehört somit ganz zu den Messungen der gewöhnlichen Art, es besteht kein fundamentaler Unterschied, sondern nur ein äußerlicher.

Hierher gehören z. B. alle polaristrobometrischen Messungen, dann monochrome Photometrierungen, bei denen wirklich beide Lichter ganz dieselbe spektrale Zusammensetzung haben; daher insbesondere alle Arbeiten mit dem Spektrophotometer, z. B. die Bestimmung der Remissionsfunktion eines Pigmentes, der spektralen Zusammensetzung einer Lichtquelle im Vergleich mit einer Normallichtquelle usf. Alle diese Messungen könnten auch von einem farbenblinden, ja bei geeigneter Anordnung von einem *blinden* Physiker durchgeführt werden, die Resultate würden ganz dieselben sein und für ihn eine wohldefinierte und zwar ganz dieselbe Bedeutung haben, wie für jedermann.

Fig. 1.

Fig. 2.

Ganz anders, wenn ich z. B. aus zwei komplementären Spektrallichtern Weiß mische und dabei Sonnenlicht zum Vergleich benütze; oder wenn ich weißverdünntes Na-Gelb aus Tl-Grün und Li-Rot mische (sogenannte Rayleighgleichung). Die spektrale Zusammensetzung der beiden Felder ist in diesen Fällen eine ganz verschiedene, wie vorstehende Fig. 1 u. 2 zeigen. Dennoch erscheinen sie, bei geeigneter Wahl der Intensitäten, dem Auge völlig ununterscheidbar. Das Auge läßt sich dabei durch kein Instrument ersetzen, so wenig, daß sogar das Auge eines anderen Beobachters die Dosierung der Lichter

etwas — in abnormalen Fällen sogar *um vieles* — anders vornimmt und jeder Streit, wessen Einstellung besser oder richtiger sei, völlig müßig ist. Die beiden gleicherscheinenden Lichter sind, an und für sich genommen, etwas durchaus verschiedenes, sie haben nichts miteinander zu schaffen, als nur, daß sie *diesem* Auge gleich erscheinen, das in seinem Farburteil inappellabel und durch kein anderes Meßinstrument kontrollierbar oder ersetzbar ist.

Diese ausschließliche Beziehung auf das Auge des Beobachters findet *für die drei weiteren*, oben aufgestellten kolorimetrischen *Prinzipie* (Ungleichheit, größte Ähnlichkeit bzw. Kontrast) *immer* statt. Der Betrag, um welchen ich die Intensitäten zweier übrigens ganz gleichbeschaffener Lichter verschieden wählen muß, damit das Auge den Unterschied eben noch erkennen kann, läßt sich natürlich durchaus nicht mit einem anderen Meßinstrument bestimmen, als eben nur mit dem Auge. Und ebensowenig läßt sich aus einer Farbreihe die mit einer vorgegebenen Farbe ähnlichste objektiv auf rein physikalischem Wege ohne Farburteil herausfinden.

Nach alledem könnte man nunmehr die *besondere Eigenart* des Gebietes der Experimentalphysik, auf das wir unsere Aufmerksamkeit richten, dahin kennzeichnen, daß es eigentlich gar nicht der Physik angehört. Es werden dabei nicht die objektiven Eigenschaften der Körperwelt, sondern die subjektiven eines Sinnesorgans untersucht. Diese Ausdrucksweise ist klar und verständlich, sie ist die allgemein übliche und in gewissem Sinne auch richtig. Trotzdem habe ich gegen sie einiges einzuwenden.

Wenn man sagt, es handle sich bei den Farbuntersuchungen nicht um die Erforschung von Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten in der uns umgebenden Körperwelt, sondern um die Erforschung der Wirkungsweise eines Sinnesorgans, so hat das leicht die Vorstellung im Gefolge, als komme dem unmittelbaren Objekt der Untersuchung, den Farben, weniger objektive Realität zu, als anderen Objekten der Physik, wie Körpern, Atomen, Lichtern, elektromagnetischen Feldern usw. Zum mindesten erscheint als das reale Korrelat in der Außenwelt einzig und allein das Sinnesorgan in seiner anatomisch-physiologischen Beschaffenheit und Wirkungsweise. Aber mit ganz demselben Recht kann man sagen, daß auch die ganze übrige

Physik gerichtet ist auf die Funktionen unserer Sinnesorgane und die daran geknüpften zentripetalen und zentralen nervösen Vorgänge; ja alle Wissenschaften und Erkenntnisse erscheinen dann letzten Endes untergeordnet der Anthropologie, die sie alle umfaßt.

Solch schroffem Berkeleyismus mag man anhängen oder nicht, jedenfalls halte ich es für unrichtig, ihn bloß auf einem Teilgebiet unserer Erfahrung zur Geltung zu bringen und dadurch Realitätsunterschiede aufzustellen, die nicht vorhanden sind. Sicher ist, daß die gesamte Physik aufgefaßt werden kann als eine Einordnung unserer sinnlichen Erfahrung in ein System von Gedankenbildern, das ihren Ablauf richtig vorherzusehen gestattet. Dabei mag man es vorteilhaft finden, für viele Zwecke von gewissen Merkmalen der Erfahrung abzu- sehen, aber man darf nachher nicht glauben, daß diese Merkmale durch unsere Abstraktion an Realität eingebüßt haben, daß die Körper, die uns umgeben, gewisse, uns bekannte Merkmale an und für sich besäßen. Klang und Farbe aber nur *für uns*.

Die dreidimensionale Mannigfaltigkeit der Farben, der Farbenraum, von dem hier viel die Rede sein wird, besitzt meines Erachtens ganz dieselbe Realität wie unser dreidimensionaler Punktraum; er darf nicht als ein mathematischer Bildraum aufgefaßt werden, wie etwa der Geschwindigkeitsraum, in dem wir uns die Geschwindigkeitsverteilung unter den Gasmolekülen in der statistischen Mechanik versinnbildlichen. Freilich, die Art, wie wir in ihm Koordinaten legen, ihn einteilen und vermessen, ist eine künstliche, mathematische Konstruktion, an die wir im allgemeinen nicht denken, wenn uns Objekte dieses Raumes vor Augen treten; aber das trifft für den gewöhnlichen Punktraum in ganz der gleichen Weise zu.

Unter den vier oben aufgestellten kolorimetrischen Einstellprinzipien ist das erste, das der Gleichheit, weitaus das einfachste. Es ist vorteilhaft, vorerst dieses Prinzip allein zur Geltung zu bringen, d. h. die unter seiner ausschließlichen Verwendung zugängliche Erfahrung zu sammeln und zu sichten. Man erreicht so schon eine sehr weitgehende Orientierung in der Farbenmannigfaltigkeit, zu deren Festlegung wir nunmehr schreiten.

Der Farbenmetrik I. Teil: Niedere Farbenmetrik oder Affinität der Farbe.

§ 1. Begriff des Lichtes und der Farbe.

Eine Farbe tritt unter anderem dann auf, wenn das Auge von Licht getroffen wird. Da dies die normale Entstehungsart der Farben ist und die einzige, welche sich sehr genau quantitativ verfolgen läßt, machen wir hier von ihr ausschließlichen Gebrauch.

Unter einem bestimmten *Licht* verstehen wir ein Strahlungsfeld, das in der Umgebung eines bestimmten Raumpunktes für die (Winkel-)Umgebung einer bestimmten durch diesen Punkt gehenden Richtung bestimmte Eigenschaften hat. Es soll nämlich durch ein senkrecht zu dieser Richtung gelegtes Flächenelement in den Richtungen eines die vorgegebene Richtung enthaltenden Raumwinkелеlementes pro Flächen-, Zeit- und Raumwinkелеinheit die Energiemenge

$$f(\lambda) d\lambda$$

in der Form von Wellen mit Längen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ hindurchtreten. $f(\lambda)$ ist eine Funktion von λ im sichtbaren Spektralgebiet. Nach dieser Definition ist also

$$f(\lambda) d\lambda d\omega d\sigma dt$$

eine Energiemenge ($d\omega$ Winkелеlement, $d\sigma$ Flächenelement, dt Zeitelement). Und ein bestimmtes Licht ist durch Angabe einer Wellenlängenfunktion $f(\lambda)$ zwischen etwa $\lambda = 400$ und $\lambda = 800 \mu\mu$ gegeben.

Wenn wir sagen, wir bieten dieses Licht dem Auge dar, so meinen wir damit, daß wir das Auge so an die Stelle unseres Flächenelementes bringen, daß die herausgegriffene Richtung in einer nahen Umgebung der Stelle deutlichsten Sehens (auf dem gelben Fleck) abgebildet wird. Dabei setzen wir voraus, daß $f(\lambda)$ im Bereich der Pupille nicht merklich variiert, d. h. daß die Pupille von einem Strahlenbündel gleichförmiger Beschaffenheit voll ausgefüllt wird. Im Gegensatz dazu wird, sobald wir verschiedene Lichter auf angrenzenden Feldern vergleichen, $f(\lambda)$ in seiner Abhängigkeit von der *Richtung* sprunghaft variieren für ein ebenes Büschel von Richtungen — entsprechend einer scharfen, geraden Trennungslinie zwischen den beiden Feldern.

Die Mannigfaltigkeit der Lichter ist von höherer *Mächtigkeit* als das Kontinuum, nämlich von der des Funktionenraumes; also von nicht angebbarer Dimensionenzahl. Es wäre von vornherein möglich, daß dies auch für die Mannigfaltigkeit der Farbqualitäten zutrifft oder daß letztere mindestens von einer sehr hohen Dimensionenzahl wäre; wie es bei der Mannigfaltigkeit der zusammengesetzten Klänge der Fall i. t., da das Ohr bis zu einem gewissen Grade als harmonischer Analysator wirkt. Hier ist das nicht der Fall. Vielmehr ordnen sich die Lichter nach dem Prinzip des Gleichaussehens auf angrenzenden Feldern in große Gruppen — jede selbst von der Mächtigkeit des Funktionenraumes — und die Mannigfaltigkeit dieser Gruppen gleichaussehender Lichter ist für farbentüchtige Personen von der Dimensionenzahl drei — der höchsten je beobachteten. Diese Dimensionstatsache ist die Grundtatsache der niederen Farbenmetrik, ihre Ableitung aus der Erfahrung wird uns noch näher beschäftigen.

Das bisher dem Sprachgebrauch entnommene, ohne nähere Definition benützte Wort *Farbe* erläutern wir nun dahin, daß wir für quantitative Zwecke eine solche *Gruppe gleicher Aussehender Lichter als eine Farbe* bezeichnen wollen. Wir entfernen uns damit ein wenig von dem gewöhnlichen Sprachgebrauch und zwar insofern, als Lichter gleicher Farbe (nach unserer Terminologie) unter verschiedenen Umständen sehr verschiedene Eindrücke auf das Auge hervorbringen können, so daß sie zuweilen sogar mit verschiedenen *Farbnamen* belegt werden. So kann von zwei Lichtern, die auf angrenzenden Feldern ununterscheidbar wären, das eine, das für sich allein, etwa im Rahmen eines schwarzen Grundes, gesehen wird, *goldgelb*, das andere, das als Körperfarbe neben anderen, relativ lichtstärkeren Körperfarben auftritt, *braun* erscheinen. Ebenso sieht bei dem bekannten Versuch der „farbigen Schatten“ das von einer weißen Fläche zurückgeworfene Tageslicht im „Schatten der Kerze“ das eine Mal (wenn die Kerze *brennt*) *blau*, das andere Mal (wenn die Kerze *gelöscht* ist) grau aus.¹⁾

Aber in keinem Falle hängt das verschiedene Aussehen irgend von der etwa verschiedenen physikalischen Zusammen-

1) Vgl. z. B. H. v. Helmholtz, Handb. d. physiol. Optik. 3. Aufl. 2. S. 230f. 1911.

setzung ab, es findet sich, wie im letzterwähnten Fall, auch bei völlig identischen Lichtern; unter welchen Begleitumständen auch immer ein Licht dem Auge dargeboten werden mag, stets bewährt sich die oben gegebene Definition in dem Punkte, daß der Austausch gegen ein anderes zusammengesetztes, gleichfärbiges unbemerkt bleibt.

§ 2. Addition von Lichtern und Farben.

Unter *Mischung oder Addition von Lichtern* verstehen wir die Superposition der betreffenden Strahlenbündel. Sind $f(\lambda)$ und $g(\lambda)$ die Wellenfunktionen zweier Lichter, so lautet die ihrer Mischung oder Summe

$$f(\lambda) + g(\lambda).$$

Als weitere grundlegende *Erfahrungstatsache* verzeichnen wir nun die, daß man *unzweideutig*, wie von einer Mischung oder Addition von *Lichtern*, so auch von einer *Mischung oder Addition von Farben* sprechen kann. Von vornherein, ohne Hinzutreten einer bestimmten Erfahrung, ist diese Operation unendlich vieldeutig, weil man von jeder der zu mischenden Farben irgendeinen ihrer unendlich vielen Repräsentanten auswählen und zur Mischung verwenden kann. Es wäre von vornherein möglich, daß die resultierenden Lichter durchaus nicht alle gleich, sondern mindestens teilweise verschieden aussehen. Die bloße Angabe der gemischten *Farben* würde dann nicht hinreichen, um die Mischfarbe eindeutig zu bestimmen. Die Erfahrung lehrt aber, wie gesagt, daß das *nicht* der Fall ist. Die resultierenden Lichter sehen alle gleich aus, zur Bestimmung der *Farbe* des *Mischlichts* genügt die Bestimmung der Kontrahenten hinsichtlich ihrer *Farbe* oder wie Grassmann¹⁾ es ausdrückt:

Gleichaussehende Lichter gemischt ergeben gleichaussehende Lichter (3. Satz von Grassmann). Man kann auch sagen: Die oben festgestellte unbedingte und völlige Äquivalenz der Lichter, die wir als *gleichfärbig* definiert haben, bleibt auch in Mischungen erhalten.

Diese Tatsache — und nur sie — erlaubt uns, bei sehr vielen Überlegungen von der genauen Beschaffenheit des Lichtes, durch das wir eine Farbe erzeugen, ganz abzusehen

1) H. Grassmann, Pogg. Ann. 89. S. 69. 1853 (Ges. Abh., Leipzig, Teubner, 1902, Bd. II, 2, S. 161ff.); Anhang zu W. Preyers Elementen der reinen Empfindungslehre, Jena, Hermann Dufft. 1877 (Ges. Abh., Bd. II, 2. S. 213ff.).

und statt mit Lichtern, d. h. mit Wellenlängenfunktionen, direkt mit Farben zu operieren. Als Symbol für eine Farbe führen wir immer einen großen lateinischen Buchstaben A , B , L , M . . . ein, und als Symbol für die Mischung das Zeichen $+$:

$$A + B, \quad A + B + L + M, \quad \dots$$

Um anzuzeigen, daß zwei Farben gleichaussehen, benützen wir das Zeichen $=$. Wenn etwa die Farbe L , zu der wir auf irgendeinem anderen Wege gelangt sind, sich als die Mischfarbe von A und B herausstellt, so schreiben wir das symbolisch

$$L = A + B.$$

Daß das Gleichheitszeichen im Verlauf derselben Rechnung in doppelter Bedeutung auftreten wird, einmal im gewöhnlichen algebraischen Sinn, einmal in Farbgleichungen, wird — wenn wir lateinische Majuskeln konsequent nur als Farbsymbole benützen — ebensowenig zu Verwechslungen führen, wie der nämliche Sachverhalt in der Vektor- und Tensorrechnung; die Analogie wird sich übrigens als eine vollkommene herausstellen, da jede Farbgleichung eines Farbentüchtigen drei algebraischen Gleichungen entspricht.

Daß die bekannten kommutativen und assoziativen Gesetze für unsere Farbenaddition gelten, ist selbstverständlich und bildet keine neue Erfahrungstatsache, weil sie ja auf dem Weg über die gewöhnliche algebraische Addition der Wellenlängenfunktionen definiert wurde.

Wenn man für eine Kategorie von Gegenständen die Addition definiert hat, liegt es nahe, nach der Möglichkeit der Subtraktion zu fragen. Läßt sich immer eine Farbe X finden, die, zu A addiert, B ergibt?

$$A + X = B.$$

Diese Farbe würde zu bezeichnen sein als

$$X = B - A.$$

Ein solches X ist nicht immer auffindbar, *die Subtraktion ist nicht in allen Fällen möglich*, wie wir an folgendem, etwas vorausgreifenden Beispiel erläutern.

Als *Spektrallicht* bezeichnen wir ein Licht, dessen $f(\lambda)$ nur in einem sehr kleinen λ -Bereich von Null verschieden ist, und die betreffende Farbe als *Spektralfarbe*. Die meisten Spektralfarben (von etwa $\lambda = 475$ bis $\lambda = 630$) sind nun dadurch ausgezeichnet, daß sie sich überhaupt nur auf diese *eine* Art her-

stellen lassen — die Lichtergruppe umfaßt nur das *eine* Licht —, wenn man davon absieht, daß bei genügend klein gewähltem λ -Bereich die Verteilung der Energie *innerhalb* dieses Bereiches willkürlich ist, weil hinreichend benachbarte Wellenlängen sich in ihrer Wirkung auf das Auge nicht unterscheiden. Es gibt wohl Mischlichter vom gleichen *Farbton*, sie erscheinen aber gegen das Spektrallicht immer etwas weißlich (weniger gesättigt).

Nehmen wir nun zwei solche Spektralfarben her, etwa $S_{\lambda'}$ und $S_{\lambda''}$, und verlangen

$$S_{\lambda'} + X = S_{\lambda''},$$

so ist diese Forderung natürlich unerfüllbar, weil die *linke* unter allen Umständen enthaltene Wellenlänge λ' nicht vorkommen darf in einem Licht, das die *rechte* Spektralfarbe darstellen soll.

In anderen Fällen ist die Subtraktion möglich, z. B. immer als Umkehrung einer wirklich ausgeführten Addition. Auf diese Fälle beschränken wir vorläufig das Zeichen — (Minus). Wir dürfen dann in jeder als richtig bekannten Farbgleichung ein auf der einen Seite wirklich vorhandenes Glied unter Zeichenumkehr auf die andere Seite werfen. Nur müssen wir uns jetzt noch fragen, ob die Umkehrung der Addition, die in diesem Falle sicherlich *möglich*, auch immer *eindeutig* ist. Schreiben wir z. B. für

$$A + C = B$$

auch

$$A = B - C$$

und lesen das: A ist diejenige Farbe, die ich mit C mischen muß, um B zu erhalten, so hat das nur einen Sinn, wenn A auf diese Weise bei gegebenem B und C auch *eindeutig* festgelegt ist. Es handelt sich also darum, ob von dem obigen Grassmannschen Erfahrungssatz auch die Umkehrung gilt:

Nur gleichaussehende Lichter ergeben gemischt mit gleichaussehenden Lichtern, wieder gleichaussehende Lichter. Oder: aus der respektiven Gleichheit von $n - 1$ -Summanden und der Summe kann man auf die Gleichheit des n^{ten} Summanden schließen.

Darüber ist zu sagen, daß dies — erfahrungsgemäß — in der Tat der Fall ist, soweit nicht die Endlichkeit der Unter-

schiedsschwellen, die den Gegenstand des zweiten Teiles dieser Abhandlung bilden wird, merklich ins Spiel kommt. Ist A eine gegen B sehr lichtschwache Farbe, so werden B und C sich nur wenig unterscheiden. Dann kann eine kleine Abänderung von A , die aber an dieser Farbe selbst doch schon sehr deutlich bemerkt wird, in der Summe $A + C$ unbemerkt bleiben. Diese Unsicherheit in der Definition von A als Differenz ist völlig analog der experimentellen Unsicherheit, die auftritt, wenn man beispielsweise einen kleineren *Winkel*, sagen wir die Dispersion einer Glassorte, als Differenz zweier großer Winkel, diesfalls der Ablenkungswinkel, bestimmt. Niemand wird aus diesem Grunde der Subtraktion von Winkeln die Eindeutigkeit absprechen wollen. Und so dürfen wir wohl auch hier behaupten, daß die Differenzbildung von Farben, wenn überhaupt möglich, im Resultat *eindeutig* ist.

Achten muß man darauf, daß mindestens auf der einen Seite der Gleichung eine unmittelbar zu verwirklichende, nur durch Summationen zustandekommende Farbe steht, wofür auch die Null (0), als dem Fehlen alles Lichtes entsprechend, zugelassen werden darf. Sonst läßt sich die Realität des Gebildes nicht mehr garantieren. Übrigens sind auch solche Gleichungen als Zwischenprodukte bei Umformungen aus rein algebraisch-formalen Gründen völlig unschädlich — lassen sich aber, wenn man darauf Wert legt, stets vermeiden.

Noch einen Punkt müssen wir zur Sprache bringen. Weiß man, daß eine Farbdifferenz $A - B$ ausführbar ist,

$$A - B = C,$$

so folgt daraus *keineswegs*, daß *irgend zwei* Wellenlängenfunktionen $\varphi_A(\lambda)$, $\varphi_B(\lambda)$, welche die Farbe A bzw. B darstellen, für alle λ eine nichtnegative Differenz ergeben

$$\varphi_A(\lambda) \geq \varphi_B(\lambda).$$

Wohl aber läßt sich schließen, daß es Repräsentanten von A und B *gibt*, für welche das stattfindet. Denn C existiert, es gibt also mindestens *ein* Licht $\varphi_C(\lambda)$, das die Farbe C darstellt. Dann sind

$$\varphi_B(\lambda) + \varphi_C(\lambda) \quad \text{und} \quad \varphi_B(\lambda)$$

zwei Lichter von der gewünschten Eigenschaft.

§ 3. Multiplikation mit einer Zahl.

Der Begriff des *ganzzahligen Vielfachen einer Farbe* ergibt sich unmittelbar durch wiederholte Ausführung der Addition

$$m A = A + A + A + \dots + A.$$

Als Umkehrung dieser Operation ergibt sich der Begriff des *ganzzahligen Bruchteils einer Farbe*. Daß die Division immer *ausführbar* ist, ist klar. Um

$$\frac{1}{n} A$$

zu finden, d. h. eine Farbe, die n -mal genommen, A ergibt, braucht man nur eines der Lichter herzunehmen, die A darstellen, sagen wir $\varphi_A(\lambda)$, und durch n zu dividieren

$$\frac{1}{n} \varphi_A(\lambda).$$

Nicht von vornherein klar ist die *Eindeutigkeit* der Operation, d. h. daß es gleichgültig ist, welches Licht von der Farbe A man hernimmt, daß man stets zu derselben Bruchfarbe gelangt.

Nehmen wir diese Eindeutigkeit für den Augenblick als erwiesen an, so folgt durch Kombination der Multiplikation und Division durch ganze Zahlen der Begriff des Produktes einer Farbe mit einer rationalen Zahl:

$$\frac{m}{n} A.$$

Und es folgt also, daß eine Farbengleichung richtig bleibt, wenn man sie mit einer *rationalen* Zahl multipliziert, ohne neuerlichen Regreß an die Erfahrung — falls nicht etwa der hinausgeschobene Beweis für die Eindeutigkeit der ganzzahligen Division einen solchen Regreß notwendig machen sollte.

Die Ausdehnung auf beliebige nichtnegative Zahlen ist eine Selbstverständlichkeit, da wir von physikalischer Wirklichkeit handeln, nicht ein Spiel mit mathematischen Symbolen treiben. Wenn man aber will, kann man sich dabei auf den zweiten der von Grassmann aufgestellten Grundsätze stützen, dem ich die Form gebe:

Wenn ein Licht sich stetig ändert, ändert sich seine Farbe stetig (zweiter Satz von Grassmann).

Diese Form hat in unserer Nomenklatur den Vorzug, nicht auf die Farbempfindung zu gehen, sondern auf quantitativ faßbare Dinge. Deutlicher ausgeführt heißt unser Stetigkeitsatz:

Wenn $\varphi(\lambda)$ und $\varphi(\lambda) + \delta\varphi(\lambda)$ zwei *wenig* verschiedene Lichter sind, und $\psi(\lambda)$ ein beliebiges mit $\varphi(\lambda)$ gleichaussehendes Licht, so gibt es unter den mit $\varphi + \delta\varphi$ gleichaussehenden Lichtern mindestens eines, $\psi + \delta\psi$, das von ψ nur wenig verschieden ist. —

Wir haben somit den Begriff des Produktes

$$\mu A,$$

wo μ eine beliebige nichtnegative Zahl ist, gewonnen und den Satz:

Eine Farbengleichung bleibt richtig, wenn man sie mit einer nichtnegativen Zahl multipliziert.

Die Gültigkeit der assoziativen und distributiven Multiplikationsätze — ein kommutativer kommt nicht in Betracht — folgt wieder aus der Beziehung, in der unser Rechnen mit *Farben* zu dem Rechnen mit *Wellenlängenfunktionen* steht. Was ersteres von letzterem unterscheidet — zugleich der wahre Kern aller Mischungssätze — ist immer nur die Feststellung der *Eindeutigkeit* des Resultates, welches Licht immer man zur Erzeugung der Farben, mit denen operiert wird, benutzen mag.

Nehmen wir nun die vorläufig zurückgestellte Frage nach der *Eindeutigkeit der ganzzahligen Division* wieder auf. Es fragt sich, ob aus der Gleichheit der Multipla

$$m A = m B$$

auf die Gleichheit

$$A = B$$

geschlossen werden kann. Oder ist es etwa möglich, daß eine *Farbenungleichung*

$$A \neq B$$

sich durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl m in eine *Gleichung* verwandeln?

Geht man auf Lichter zurück, so lautet die Frage: können zwei Lichter $\varphi(\lambda)$ und $\psi(\lambda)$, die *nicht* gleich aussehen, dadurch gleich aussehend gemacht werden, daß man einfach die objektive Intensität beider auf das m -fache erhöht?

Was zunächst die *Tatsachen* anlangt, so liegen sie so: in der Netzhautmitte, soweit das zentrale Skotom des Dämmerungssehens reicht, kommt dergleichen nicht vor; da sind alle Farbgleichungen von der absoluten Intensität unabhängig.¹⁾ Auf parazentralen und peripheren Teilen der Netzhaut, die uns aber hier nicht beschäftigen, verwandeln sich Farbgleichungen bei Herabsetzung der Intensität in Ungleichungen. Hier ist aber auch der Grassmannsche Satz vom Gleichaussehen der Mischungen gleichaussehender Konstituenten nicht gültig. Was uns hier aus prinzipiellen Gründen interessiert, ist, ob beide Erscheinungen *logisch* aneinander geknüpft sind oder ob die zentrale Beständigkeit der Gleichungen eine neue Erfahrungstatsache *neben* dem Grassmannschen Satz bildet, die in den Grundlagen vermerkt werden muß.

Dieser letzteren Ansicht war E. Hering²⁾, der deshalb den Grassmannschen Sätzen noch diesen hinzugefügt wissen wollte, daß

„gleichaussehende Lichter einander gleichbleiben, wenn man die Intensität eines jeden in demselben Verhältnis vermehrt oder vermindert“.

Auch ich habe mich vergebens bemüht, ganz ohne neuerlichen Regreß an die Erfahrung auszukommen und halte es für unmöglich. Doch wäre es sicherlich auch nicht richtig, den ganzen Multiplikationssatz in Bausch und Bogen als neue unabhängige Erfahrungstatsache hinzustellen; da doch jedenfalls die *ganzzahlige* Multiplikation logisch aus der Addition folgt.

Folgende Schlüsse lassen sich ziehen. Gibt es für einen Wert von n *verschiedene* Bruchfarben $\frac{1}{n} A$, sagen wir

$$n A_n = n A_n' = A,$$

$$A_n \neq A_n'.$$

1) Vgl. W. Nagel, *Handbuch der Physiologie des Menschen*. Braunschweig, Vieweg, 1904, Bd. III, 1. S. 181; *Zeitschrift f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorgane* 23. S. 162.

2) E. Hering, *Lotos* N. F. VII. S. 242f.

so kann weder

$$(n-1) A_n = (n-1) A_n'$$

noch

$$(n+1) A_n = (n+1) A_n',$$

weil aus jeder dieser Gleichungen mit dem ersten Teil der Annahme (wegen der Eindeutigkeit der Subtraktion, die hier sicher ausführbar ist) folgen würde

$$A_n = A_n',$$

was dem zweiten Teil der Annahme widerspricht. Ebenso läßt sich schließen

$$2n A_n = 2n A_n'.$$

aber

$$(2n-1) A_n \neq (2n-1) A_n'$$

$$(2n+1) A_n \neq (2n+1) A_n'$$

usf. für beliebige Multipla von n .

Um diese Folgerung mit der Erfahrung im Widerspruch, die Annahme somit als widerlegt und die Eindeutigkeit gesichert zu finden, genügt es, als Erfahrungssatz zu postulieren:

Es gibt nicht zwei Lichter, die bei gleichmäßiger Erhöhung der Intensität *in periodischem Wechsel* gleich und wieder ungleich werden.

§ 4. Die Dimensionstatsache.

Zum Aufbau der affinen Geometrie der Farbenmannigfaltigkeit fehlt uns jetzt nur noch *ein* Stück, die Dimensionstatsache, die wir oben nur beiläufig erwähnt haben, ohne bisher ihre Wurzel in der Erfahrung aufzuzeigen und ohne von der Tatsache selbst bisher Gebrauch zu machen. Wir setzen sie mit Absicht an die letzte Stelle, weil alle bisher benützten Erfahrungstatsachen, daher auch alle bisher abgeleiteten Folgerungen nicht bloß für einen normalen, farben-tüchtigen Beobachter, sondern ganz ebenso für einen partiell und für einen total Farbenblinden Gültigkeit haben. Der Unterschied liegt nur in der Dimension der Farbenmannigfaltigkeit.

Wenn eine Anzahl Farben (n) gegeben sind

$$A, B, C, \dots$$

so kann es sein, daß zwischen diesen eine lineare Beziehung besteht

$$(1) \quad \alpha A + \beta B + \gamma C + \dots = 0,$$

(wobei selbstverständlich immer vorausgesetzt wird, daß nicht alle die Größen $\alpha, \beta, \gamma \dots = 0$ sind). Das Bestehen einer solchen Beziehung bedeutet, daß sich aus gewissen Multiplis des einen Teils der n -Farben (derjenigen, die in der Gleichung positive Koeffizienten haben) eine Farbe ermiscen läßt, die auch aus gewissen Multiplis der übrigen (derjenigen mit negativen Koeffizienten) ermiscbar ist.

Es kann aber auch sein, daß keine solche Beziehung besteht. Im ersten Fall nennen wir die n -Farben linear abhängig, im zweiten linear unabhängig.

Die Dimensionstatsache lautet nun

A. Für Farhentüchtige (Trichromaten):

Es gibt linear unabhängige Farbentripel. Vier Farben sind stets linear abhängig.

B. Für partiell Farbenblinde (Dichromaten):

Es gibt linear unabhängige Farbenpaare. Drei Farben sind stets linear abhängig.

C. Für total Farbenblinde (Monochromaten):

Je zwei Farben sind linear abhängig.

Diese Aussagen bedeuten nichts anderes, als daß die Farbenmannigfaltigkeit für diese Personen drei bzw. zwei bzw. eine Dimension hat. In der Tat, betrachten wir den kompliziertesten Fall des Trichromaten. Fassen wir ein solches linear unabhängiges Farbentripel ins Auge

$$A, B, C,$$

von denen also nach Annahme keine aus den beiden anderen mischbar sein soll; sei F eine beliebige Farbe, so gibt es eine Farbengleichung

$$(2) \quad \alpha A + \beta B + \gamma C + \zeta F = 0,$$

worin sicher $\zeta \neq 0$, weil A, B, C sonst nicht unabhängig wären. Man kann also noch F auflösen:

$$(3) \quad F = x_1 A + x_2 B + x_3 C.$$

$$x_1 = -\frac{\alpha}{\zeta}, \quad x_2 = -\frac{\beta}{\zeta}, \quad x_3 = -\frac{\gamma}{\zeta}.$$

Zu jedem F gehört *ein* und *nur* ein Wertetripel (x_1, x_2, x_3) , *nur* eines, weil sonst durch Subtraktion eine Relation zwischen A, B, C allein entstünde. Das Umgekehrte gilt zwar nicht allgemein, aber jedenfalls gehört zu allen *positiven* Tripeln (x_1, x_2, x_3) eine und nur eine Farbe F . Die Farben F bilden also eine Mannigfaltigkeit von nicht mehr und nicht weniger als drei Dimensionen.

Die Form, in der wir die Dimensionstatsache eingeführt haben, ist zwar theoretisch die einfachste, aber es geht nicht an, sie in dieser Form als ein unmittelbares Produkt der Erfahrung hinzustellen. Denn man kann nie sicher sein, ob man wirklich alle Farbenquadrupel durchprobiert hat, und ob sich unter ihnen nicht doch vielleicht noch ein linear unabhängiges vorfindet.

Grassmann verwendet an Stelle unseres Dimensionssatzes (für Trichromaten) den Satz:

Zu jedem Licht läßt sich ein gleichaussehendes herstellen durch Mischung von Weiß mit einer reinen Spektralfarbe oder mit einem bestimmten Purpurgemisch (d. i. einer Mischung der Endfarben des Spektrums). [1. Satz von Grassmann.]

Da die Reihe der Spektralfarben und der Purpurgemische, einschließlich der Intensitätsvariation eine *zweidimensionale*, die verschiedenen Intensitäten des Weiß eine *eindimensionale* Mannigfaltigkeit bilden, so ergibt sich durch Kombination in der Tat eine *dreidimensionale* Mannigfaltigkeit.

Aber auch diese Grassmannsche Form beansprucht meines Erachtens noch eine zu breite induktive Basis, breiter als nötig, um die Dimensionstatsache zu sichern. Denn es sieht so aus, als müßte man wirklich alle Lichter durchprobiert haben, um sicher zu sein, daß es nicht doch Gemische gibt, die auf die genannte Art nicht darstellbar sind.

Dagegen läßt sich der Beweis für die Dreidimensionalität auf folgende Weise systematisch erbringen. Man mustert zunächst die *Reihe der Spektralfarben* und erkennt, daß im allgemeinen (nämlich abgesehen von den monochromatischen „Endstrecken“, wovon später) je zwei von ihnen sich durch mehr als bloß durch die Intensität unterscheiden. Der Versuch, zwei von ihnen durch Änderung der objektiven Intensität gleichzumachen, mißlingt. *Paare von Spektralfarben sind i. a. linear unabhängig.*

Nun betrachtet man die *binären Mischungen von Spektralfarben* und findet, daß man da im allgemeinen (wenn die gemischten Wellenlängen nicht auf einer der dichromatischen „Zwischenstrecken“ liegen, wovon später) *Neues* erhält, und zwar die weißlichen Abwandlungen der reinen Farben und die Purpurtöne in allen ihren weißlichen Abwandlungen. Sie können nicht einer einzelnen Spektralfarbe durch bloße objektive Intensitätsänderung gleichgemacht werden. *Tripel von Spektralfarben sind i. a. linear unabhängig.*

Die Mannigfaltigkeit ist also sicher *mindestens* von der Dimensionszahl *drei*.

Daß sie *höchstens* von der Dimensionszahl *vier* ist, erkennt man, wenn man jetzt die *ternären Mischungen von Spektralfarben* untersucht und findet, daß sie *nichts Neues* mehr liefern, sondern jede von ihnen ein binäres Äquivalent besitzt. Für Mischungen von vier und mehr Spektralfarben braucht man nicht mehr experimentell zu prüfen, man kann immer drei von ihnen durch zwei ersetzen, bis schließlich ein binäres Äquivalent übrig bleibt. Da nun aber jedes Licht mit genügender Annäherung als Mischung von n reinen Spektrallichtern angesehen werden kann, so folgt:

Die reinen Spektralfarben und die binären Gemische erschöpfen die Mannigfaltigkeit der Farben vollständig.

Nun ist aber die Mannigfaltigkeit der binären Gemische von der Dimensionszahl 4, und dasselbe würde von der Mannigfaltigkeit der Farben gelten, wenn nicht jede von ihnen auf ∞^1 Arten als Mischung aus zwei Spektralfarben entstände, wie z. B. das Weiß als Mischung von ∞^1 -Komplementärfarbenpaaren. Um zwischen den Zahlen 3 und 4 zu dirimieren, kann man *jetzt*, nachdem die zu untersuchende Menge nicht mehr „alle Lichter“, sondern die binären Gemische sind, auf den Grassmannschen Gedanken zurückgreifen und zeigen, daß sie den weißverdünnten Spektralfarben und Furgemischen gleich sind, womit die Dimensionszahl 3 dann endgültig sichergestellt ist.

Ähnlich, nur weit einfacher, ist das Verfahren für Dichromaten und Monochromaten. Für erstere führen schon die binären Mischungen auf nichts Neues. Die Spektralfarben, von denen i. a. je zwei noch linear unabhängig (farbverschieden) sind, erschöpfen die Mannigfaltigkeit aller Farben, die Dimensionszahl ist also zwei. Beim Monochromaten lassen sich schon je

zwei Spektralfarbe, daher auch beliebige Mischungen, durch bloße Intensitätsänderung gleichmachen. Es gibt nicht einmal linear unabhängige Farbenpaare, die Dimensionszahl ist 1.

§ 5. Die Abbildung auf ein Vektorbüschel.

Damit sind die *allgemeinen* Gesetze der Lichtmischung oder, wie wir es genannt haben, der niederen Farbenmetrik, erledigt, soweit nur jede der drei Arten von Farbsystemen, die wir unterschieden haben, für sich allein in Betracht gezogen wird. Eine wichtige Ergänzung von ebenfalls sehr allgemeiner Art, wird allerdings die Beziehung zwischen den dichromatischen und den trichromatischen Farbsystemen bilden, von der weiter unten die Rede sein wird.

Alles bisher Gesagte läßt sich kurz dahin zusammenfassen: daß es sich bei den Farben um eine Mannigfaltigkeit von Dingen handelt, für welche die Gleichheit, die Addition, dann unter Einschränkungen die Subtraktion, ferner die Multiplikation mit einer nichtnegativen Zahl in eindeutiger Weise definiert sind: daß für diese Operationen die assoziativen, kommutativen usw. Gesetze in der gewöhnlichen Weise gelten; daß die Mannigfaltigkeit (im normalen Fall, den wir zunächst immer im Auge haben) von der Dimensionszahl drei ist; welches alles einzig durch das unmittelbar abgegebene Gleichheitsurteil über angrenzende Farbfelder mit der Erfahrung zusammenhängt und darin verankert ist.

Vergleicht man nun diese von den *Farben erfahrungsgemäß* geltenden Gesetze mit den *Axiomen*, die man aufstellen muß für die von einem Punkt aus gezogenen *Vektoren*, um die *affine Geometrie* eines solchen *Vektorbüschels* zu begründen¹⁾: so findet man völlige Übereinstimmung. Die Mannigfaltigkeit der Farben oder der *Farbenraum*, wie wir sagen wollen, ist also ein dreidimensionales Gebilde mit — vom Standpunkte der Gleichheitsbeziehung — lediglich *affiner Struktur*. Alle speziellen Beziehungen in dem minder anschaulichen Farbengebiet kann man sich *dadurch* in ausgezeichneter Weise anschaulich machen, daß man es auf ein räumliches Vektorbüschel in ein-eindeutiger Weise abgebildet denkt, derart, daß jeder

1) Vgl. etwa H. Weyl, *Raum-Zeit-Materie*. Berlin. Springer, 1918. S. 15.

Farbe ein Vektor und jedem Vektor sicherlich nicht mehr als eine Farbe entspricht. Nur darf man dabei nicht vergessen — was schon Grassmann hervorhebt —, daß die abgebildeten Gebiete sich nur durch ihre unmittelbare Anschaulichkeit, nicht durch primitive Realität unterscheiden; daß dem Farbenraum sein Dasein wie seine affine Struktur auf Grund des Gleichheitsurteils sozusagen an und für sich zukommt, ganz ohne Beziehung auf den Vektoren- bzw. Punktraum, der zu seiner Veranschaulichung dient. Es birgt sogar diese Veranschaulichung, so bequem, ja unentbehrlich sie ist, auf der anderen Seite auch eine gewisse Gefahr; wir müssen uns sehr in acht nehmen, daß wir von dem Punktraum, den wir als einen nicht bloß affinen, sondern als einen metrischen, und zwar euklidischen zu denken so sehr gewohnt sind, ausschließlich die affinen Beziehungen auf den Farbenraum übertragen, nicht auch die metrischen, welche letztere hier völlig bedeutungslos sind, da der Farbenraum seine eigene, im zweiten Teil dieser Arbeit zu entwickelnde Metrik besitzt.

Es ist vielleicht nicht überflüssig zu erinnern: unter den affinen Eigenschaften räumlicher Gebilde versteht man alle jene, die ungeändert bleiben bei einer affinen Transformation. Gebilde, die durch eine solche Transformation ineinander übergeführt werden können, spielen in der affinen Geometrie dieselbe Rolle, wie kongruente Gebilde in der euklidischen Geometrie. Die allgemeine affine Gruppe tritt an die Stelle der Gruppe der Bewegungen. In gewöhnlichen rechtwinkligen, übrigens auch in beliebigen schiefwinkligen Koordinaten, drückt sich die allgemeinste affine Transformation aus als ganze lineare (nichthomogene) Koordinatentransformation; dadurch werden also jedem Punkt neue Koordinaten in dem ursprünglichen, festgehaltenen Koordinatensystem zugewiesen, wodurch er verschoben wird. Statt dessen kann man auch so vorgehen, daß man die Koordinaten jedes Punktes zahlenmäßig festhält, aber als Koordinaten in einem neuen, und zwar in einem beliebigen, beliebig gelegenen, schiefwinkligen System auffaßt; wodurch ebenfalls die allgemeinste affine Transformation zustande kommt. Von Vektoren, statt von Punkten, gesprochen kann man sagen: man faßt die alten Vektorkomponenten als Komponenten bezogen auf ein beliebig abgeändertes System von Grundvektoren auf.

In dieser allgemeinsten Form enthält die affine Transformation außer ihrem eigentlichen Kern — einer Deformation — noch eine gewöhnliche Bewegung (Translation + Drehung), von welcher jedenfalls die Translation (Verlegung des Koordinatenursprunges) für unsere Zwecke völlig bedeutungslos ist, da wir es nur mit dem Büschel der Vektoren zu tun haben, die von einem Punkt entspringen, und dieser Punkt von vornherein im Raum unbestimmt ist. Die Koordinatentransformation kann demnach in allen Fällen homogen genommen werden. Was übrig bleibt ist dann, außer einer Drehung, eine sogenannte lineare Deformation, d. i. drei gleichförmige Verzerrungen (Maßstabänderungen) in drei zueinander senkrechten Richtungen (natürlich, auch bei Benützung rechtwinkliger Koordinaten, im allgemeinen *nicht* den Koordinatenrichtungen). *Nur solche Eigenschaften der Figuren, die bei einer derartigen Verzerrung unberührt bleiben, sind affin und haben Bedeutung für den Farbenraum.* Am wichtigsten für uns ist, daß dabei Gerade in Gerade, Ebenen in Ebenen übergeführt werden — wie denn überhaupt, wegen der Linearität, die Ordnungszahl einer Fläche oder Kurve ungeändert bleibt. Kollinearität und Komplanarität von Punkten, ferner Komplanarität von Geraden bleibt also unberührt. Daher kann auch eine Kurve durch die Transformation keinen Wendepunkt bekommen und — was uns besonders interessieren wird — ein Kegel keine Wendegeneratrix. — Zum späteren Gebrauch (für die Theorie der Dichromasie im § 10) merken wir noch an, daß auch der *Parallelismus* von Geraden und Ebenen eine affin-invariante Eigenschaft ist. — Übrigens ist der ganze Sachverhalt dem Physiker aus den Elementen der Elastizitätstheorie und Hydrodynamik wohlbekannt und vertraut, wenn es sich auch dort um unendlich kleine, hier dagegen um ganz beliebige endliche Deformationen handelt.

In *einem* Punkt, den wir bisher unbeachtet gelassen haben, weichen nun allerdings die Gesetze der Farbmischung ab von den Axiomen der affinen Geometrie: es ist dies die beschränkte Ausführbarkeit der Subtraktion und die damit zusammenhängende Bedeutungslosigkeit der negativen Farbe ($-A$), sowie überhaupt der Multiplikation mit negativen Zahlen. Die Abbildung des Farbenraumes auf das Vektorbüschel läßt sich dem ungeachtet vollständig durchführen. Nur läßt sich

schließen, daß von der ganzen Vektorgesamtheit dabei höchstens die Hälfte der Vektoren Verwendung findet, d. h. wirklich einer Farbe entspricht (in Wahrheit noch weniger als die Hälfte, wie wir sehen werden). Denn von jedem Vektor, der einer Farbe entspricht, bleibt der entgegengesetzte jedenfalls unbenützt, weil es keine zwei Lichter, daher auch keine zwei Farben gibt, die superponiert Dunkelheit ergeben. Also nicht das ganze Büschel vom Öffnungswinkel 4π entspricht den Farben, sondern ein irgendwie begrenzter Kegel von einer Gesamtöffnung kleiner als 2π (der genaue Wert des Öffnungswinkels hat übrigens keine affingometrische Bedeutung). Eben daraus erklärt sich nun aber auch die nicht allgemeine Ausführbarkeit der Subtraktion. Sobald nämlich die Vektordifferenz der darstellenden Vektoren, die sich geometrisch natürlich immer bilden läßt, auf einen Vektor führt, der nicht dem reellen Farbenkegel angehört, existiert keine Farbe, die der Forderung genügt.

Mit der Feststellung dieses allgemeinen Sachverhaltes — der Farbenraum hat vom Standpunkte des Gleichheitsurteils die Struktur eines lediglich affin betrachteten Vektorenkegels vom Öffnungswinkel kleiner als 2π — mit der Feststellung dieses Sachverhaltes ist der grundlegende und meines Erachtens wichtigste Teil der niederen Farbenmetrik vollendet. Wie man sieht, brauchte in diesem Teil von so schwierigen Begriffen wie Definition des Weiß, Sättigung, Weißgehalt, färbende Kraft, Komplementärfarben u. ä. gar nicht die Rede zu sein. Was noch hinzuzufügen ist, besteht eigentlich nur in der Aufsuchung der Farbvektoren, die gewissen durch ihre einfache Zusammensetzung ausgezeichneten Lichtern entsprechen (d. i. insbesondere den Spektrallichtern), und in der Feststellung ihrer affingometrischen Beziehungen zueinander. Dabei ergibt sich mit einem Schlag die Art der Begrenzung des Spektralkegels, wie sie affingometrisch beschaffen ist und von welchen Farben sie gebildet wird. Hierzu werden wir uns einer Koordinatendarstellung der Farben bedienen, die völlig der Koordinatendarstellung von Vektoren entspricht; so einfach und durchsichtig sich wegen dieser völligen Analogie alle Rechnungen gestalten, so wird die Auseinandersetzung der farben-theoretischen Bedeutung aller Operationen, insbesondere der Koordinatentransformation, doch einigen Raum bean-

sprechen. Sodann wird uns die durch einen einzigen inhaltsreichen Erfahrungssatz — Anerkennung aller trichromatischen Farbengleichungen, durch den Dichromaten — gesetzte Beziehung zwischen dichromatischen und trichromatischen Systemen beschäftigen, die zur Auszeichnung gewisser (irreeller) Farbvektoren als den Grundempfindungen entsprechend führt. Endlich werden wir noch, wegen ihrer weiten Verbreitung, die praktisch einfachere, theoretisch aber etwas kompliziertere Darstellung der Farben in der *Farbenebene* aus unserer räumlichen Darstellung ableiten, um dann im zweiten Teil zur höheren Farbenmetrik überzugehen.

(Eingegangen im März 1920.)