1917. № 16
ANNALEN DER PHYSIK.
VIERTE FOLGE. BAND 53.

1. *Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate, A. Einsteins neue und seine ursprüngliche Relativitätstheorie;*

von Erich Kretschmann.

Einleitung.

Die Formen, in denen verschiedene Autoren das Postulat der Lorentz-Einsteinschen Relativitätstheorie[1]) und insbesondere neuerdings Einstein sein allgemeines Relativitätspostulat[2]) ausgedrückt haben, lassen die Auffassung zu oder fordern sie — bei Einstein — geradezu, daß ein System physikalischer Gesetze einem Relativitätspostulate dann genügt, wenn die Gleichungen, durch die es dargestellt ist, der dem Postulate zugeordneten Transformationsgruppe der Raum- und Zeitkoordinaten gegenüber kovariant sind.[3]) Erkennt man

1) Vgl. z. B. H. Minkowski: „Raum und Zeit". B. G. Teubner 1909. p. 4. — M. v. Lauer: „Das Relativitätsprinzip". Vieweg 1911. p. 33, § 6. — M. Abraham: „Theorie der Elektrizität". B. G. Teubner 1908. p. 379 u. 380.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. 49. p. 776. 1916.

3) Im Sinne dieser Auffassung habe ich die Worte „Relativitätspostulat" und „Relativitätstheorie" noch in meiner Arbeit: „Über die prinzipielle Bestimmbarkeit usw.", Ann. d. Phys. 48. p. 907—982, gebraucht; vgl. l. c. p. 910, Anm. 5. Sachlich hat das indessen für den dort behandelten Gegenstand offensichtlich nichts zu bedeuten.

diese Auffassung an und vergegenwärtigt sich, daß alle physikalischen Beobachtungen letzten Endes in der Feststellung rein topologischer Beziehungen [„Koinzidenzen“ [1])] zwischen räumlich-zeitlichen Wahrnehmungsgegenständen besteht und daher durch sie unmittelbar kein Koordinatensystem vor irgend einem anderen bevorrechtigt ist [2]), so wird man zu dem Schlusse gezwungen, daß jede physikalische Theorie ohne Änderung ihres — beliebigen — durch Beobachtungen prüfbaren Inhaltes mittels einer rein mathematischen und mit höchstens mathematischen Schwierigkeiten verbundenen Umformung der sie darstellenden Gleichungen mit jedem beliebigen — auch dem allgemeinsten — Relativitätspostulate in Einklang gebracht werden kann. [3])

Indessen muß es doch möglich sein, den Relativitätspostulaten noch einen anderen, nicht nur mathematisch formalen Sinn beizulegen. Denn nur aus dem Vorhandensein eines solchen läßt sich z. B. die einleuchtende und allgemein anerkannte Unmöglichkeit erklären, den Begriff des starren Körpers, der an sich so leicht wie kaum ein zweiter durch rein topologische Merkmale festgelegt werden kann [4]), der ursprünglichen Einsteinschen Relativitätstheorie einzufügen.

Diesen physikalischen Sinn der Relativitätspostulate an einem Beispiele durch vierdimensional-geometrische Betrachtungen zu entwickeln und in einer allgemein gültigen Fassung eines beliebigen Relativitätspostulates zur Geltung zu bringen, ist im ersten Teil der vorliegenden Arbeit versucht. Die Anwendung des gewonnenen — vom Einsteinschen wesentlich verschiedenen — Relativitätsbegriffes auf die neue Einsteinsche Theorie der Schwerkraft in den folgenden Abschnitten führt dann zu dem Ergebnisse (§ 25), daß diese Theorie ihrem physikalischen Inhalte nach als eine vollkommene Absoluttheorie zu betrachten ist, die sachlich überhaupt keinem Relativitätspostulate genügt. Dagegen erweist sich die ursprüngliche Einsteinsche Relativitätstheorie als die weiteste, die unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen überhaupt denkbar ist (§ 26).

---

1) A. Einstein, l. c.

2) Näheres hierüber: E. Kretschmann, l. c. p. 914—924.

3) Vgl. G. Ricci et T. Levi-Cività: „Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications“. Math. Ann. **54**. p. 125. 1901.

4) Vgl. E. Kretschmann, l. c. p. 967 u. 968 § 55.

Zum Schlusse wird gezeigt, daß das allgemeine Relativitätspostulat physikalisch im Sinne der angenommenen Auffassung nur von Naturgesetzen erfüllt werden könnte, deren allgemeine Beschaffenheit — unbedingt bejahend — von der — bedingten, d. h. verneinenden — der bisher aufgestellten Gesetze gründlichst verschieden wäre.

Wie schon aus dem Gesagten hervorgeht, beruht der Gegensatz, in dem die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zu den von Einstein in seinen gravitationstheoretischen Untersuchungen ausgesprochenen Ansichten stehen, allein auf der meines Erachtens allerdings bedeutungsvollen Verschiedenheit in der Auffassung und begrifflichen Bestimmung der Relativitätspostulate. Dieser Gegensatz betrifft nur die Einordnung Einsteins „allgemeiner" und seiner ursprünglichen Relativitätstheorie in die Reihe der überhaupt denkbaren Relativitätstheorien. Dagegen bleibt die Frage nach der sachlichen Gültigkeit der von Einstein aufgestellten neuen Naturgesetze vollständig unberührt.

I. Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate.

§ 1. Seine Forderung der Kovarianz der physikalischen Gleichungen bei beliebigen stetigen Koordinatentransformationen stützt Einstein[1]) wesentlich auf die Tatsache, daß alle physikalische Erfahrung letzten Endes in der Beobachtung rein topologischer Beziehungen oder „Koinzidenzen" zwischen den räumlich zeitlichen Beobachtungsgegenständen besteht. Es ist also in der Erfahrung kein Grund gegeben, irgendwelche Bezugssysteme für Raum und Zeit vor allen übrigen als die allein berechtigten hervorzuheben. Demnach haben z. B. die Bezugssysteme $\Sigma\ (x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = i\,c\,t)$, in denen, sofern sie überhaupt gilt, die bekannte Lichtausbreitungsgleichung

$$(1) \qquad (x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_4 - x_4^0)^2 = 0$$

der ursprünglichen Einsteinschen Relativitätstheorie erfüllt ist, sachlich keinen Vorzug vor irgendwelchen anderen Bezugssystemen.

---

1) A. Einstein: „Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie", Ann. d. Phys. 49. p. 769—822. 1916; vgl. p. 776 u. 777.

Verliert nun damit die ursprüngliche Relativitätstheorie als solche jeden physikalischen Inhalt? Das ist, wie mir scheint, keineswegs der Fall.

§ 2. Zu jedem beliebigen Bezugssysteme gibt es nach der ursprünglichen Relativitätstheorie eine ganz bestimmte Schar gleichberechtigter, in denen die physikalischen Gesetze die gleiche mathematische Form annehmen. Die geradlinigen rechtwinkligen Bezugssysteme, in denen die Lichtausbreitungsgleichung die Form (1) hat, entstehen auseinander durch die Transformationen der Gruppe, die man erhält, wenn man die Lorentzgruppe mit der Translationsgruppe, $x_1' = x_1 + a_1$, $\ldots x_4' = x_4 + a_4$, und der Gruppe der gleichförmigen Dilatation $x_1' = \lambda . x_1, \ldots x_4' = \lambda . x_4$ komponiert. Geht man zu anderen Bezugssystemen, z. B. Polarkoordinaten, über, so ändert sich auch die Form der Gleichung (1) und zugleich die Form der „berechtigten" Transformationen, welche sie invariant lassen.

Aber die Gruppe, welche die jeweils berechtigten Transformationen umfaßt, bleibt stets der ursprünglichen „ähnlich". Sie hat mit ihr alle von der Wahl des Bezugssystems unabhängigen Eigenschaften (z. B. die Zahl der Parameter usw.) gemein, die gruppentheoretisch die allein wesentlichen sind, so daß man nach Lie beliebige ähnliche Gruppen unter dem Begriffe einer (invarianten) Gruppe zusammenzufassen pflegt. Mit Benutzung dieses invarianten Gruppenbegriffes erhält man für ein beliebiges (spezielles) Relativitätspostulat vorläufig etwa folgenden allgemeinen Ausdruck: Die physikalischen Gesetze sind — gleichgültig, in welchen Koordinaten sie geschrieben sind — kovariant bezüglich der (invarianten) Transformationsgruppe G.

Hier ist unter G eine dem betrachteten Relativitätspostulate eindeutig zugeordnete Gruppe zu verstehen. Damit ist auch für Relativitätspostulate, die nicht die allgemeine Kovarianz fordern, ein von der Wahl des Bezugssystems vollständig unabhängiger Ausdruck gefunden.

§ 3. Trotzdem tritt der physikalische Inhalt des zu einer invarianten Gruppe G gehörenden Relativitätspostulates in der gegebenen Form noch nicht rein zutage. Man erkennt dies leicht am Beispiel der Lichtgleichung (1). Es ist nämlich ein leichtes, diese Gleichung, ohne an ihrem physikalischen

Inhalte das geringste zu ändern, auf eine bezüglich ganz beliebiger Koordinatentransformationen invariante Form zu bringen. Man braucht nur die Ausdrucksweise der allgemeinen Relativitätstheorie einzuführen und statt der Gleichung (1) zu schreiben[1]):

$$(2) \qquad \begin{cases} \delta \int d s = 0 \,, \\ \quad d s^2 \equiv \sum\limits_{\mu \nu} g_{\mu \nu} \cdot d x_\mu \cdot d x_\nu = 0 \,, \\ (\lambda \nu \,,\ \mu \tau) \equiv 0 \qquad\qquad (\lambda, \nu, \mu, \tau = 1 \ldots 4). \end{cases}$$

Hier bezeichnet ds das invariante Linienelement und $(\lambda \nu, \mu \tau)$ die Komponenten des Riemannschen · Krümmungstensors der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit[2]), mit dessen identischem Verschwinden bekanntlich die Gesetze der neuen Einsteinschen Relativitätstheorie in die der ursprünglichen übergehen.

Der oben gegebenen allgemeinen Fassung eines Relativitätspostulates zufolge müßten also dieselben Lichtausbreitungsgesetze je nach der Form ihrer Darstellung einmal — durch (2) dargestellt — dem allgemeinsten Relativitätspostulate und in der anderen Gestalt, (1), nur einem speziellen Relativitätspostulate genügen. Gleiches würde für alle physikalischen Gesetze gelten. Denn nach den Untersuchungen von Ricci und Levi-Cività[3]) dürfte es kaum zweifelhaft sein, daß man jedes physikalische Gleichungssystem ohne Änderung seines durch Beobachtungen prüfbaren Inhaltes auf eine allgemein kovariante Form bringen kann. Das leuchtet von vornherein ein, wenn man sich wieder vergegenwärtigt, daß in Strenge nur rein topologische Tatsachen des Naturgeschehens oder nach Einstein Koinzidenzen beobachtbar sind.

Soll daher der Aussage, daß ein Gleichungssystem einem speziellen und keinem weiteren Relativitätspostulate genügt, eine sachlich physikalische und nicht nur mathematisch formale Bedeutung zukommen, so muß der allgemeine Begriff eines Relativitätspostulates so festgelegt werden, daß danach für

---

1) Vgl. z. B. A. Einstein u. M. Großmann: „Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie...“. B. G. Teubner 1913. p. 6 § 2 u. p. 8 § 3.

2) S. Christoffel, Crelles Journal 70. p. 54.

3) G. Ricci et T. Levi-Cività: „Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications“. Math. Ann. 54. p. 125. 1901.

jedes gegebene physikalische Gesetzsystem ein und nur ein Relativitätspostulat — bzw. die zugehörige invariante Gruppe — als das weiteste, das die Gesetze erfüllen, allein aus ihrem topologischen Inhalte unabhängig von der gewählten Darstellungsform bestimmt werden kann.

§ 4. Daß und wie dies möglich ist, erkennt man wieder am einfachsten an dem Lichtausbreitungsgesetze der ursprünglichen Relativitätstheorie. Es werde dabei von diesem, wie im folgenden stets von dem jeweils betrachteten Gesetzsystem, angenommen, daß es seinem beobachtbaren Inhalte nach in der Wirklichkeit erfüllt sei. Geht man wieder von der Form (1) des Gesetzes aus, so sieht man zunächst, daß unter den Bezugssystemen der Wirklichkeit, die durch Maßstäbe und Uhren mit vollkommen scharfen Längen- und Zeitangaben gegeben zu denken sind, die, in denen die Gleichung (1) überall und stets erfüllt ist, von allen, in denen das nicht der Fall ist, durch die prinzipiell, d. h. abgesehen von allen technischen Schwierigkeiten, in ihnen zu erwartenden Beobachtungsergebnisse unterschieden sind. Denn in jedem der letztgenannten muß mindestens einer unter allen theoretisch möglichen, irgendwann und irgendwo den Äther durcheilenden Lichtimpulsen eine Weltlinie zeigen, auf der mindestens ein Punktpaar Koordinatendifferenzen hat, die nicht in der durch (1) geforderten Beziehung stehen. Und vorausgesetzt, daß die Maßstäbe und Uhren, die das fragliche Bezugssystem verwirklichen, indem sie die Koordinaten der ihnen anliegenden Weltpunkte abzulesen gestatten, im richtigen Augenblicke zur Stelle sind, was prinzipiell jedenfalls möglich ist, so kann jede solche Abweichung durch bloße Skalenablesungen, also rein topologische Beobachtungen, festgestellt und das Bezugssystem, in dem sie statthat, als nach (1) unzulässig ausgeschieden werden. Entsprechendes wie für die Gleichung (1) gilt offensichtlich für alle Gleichungen oder Differentialgleichungen zwischen Koordinaten sinnlich wahrnehmbarer Dinge. Differentialquotienten der Koordinaten können zwar auch mit vollkommen scharfen Meßwerkzeugen nur annähernd gemessen werden; aber da die Meßgenauigkeit prinzipiell nicht begrenzt ist, so ist auch hier jeder Fehler des Bezugssystems der Entdeckung ausgesetzt.[1])

1) Der entgegengesetzte Nachweis, daß ein Bezugssystem, d. h. die Angaben der zugehörigen Meßwerkzeuge, mit einem gegebenen Gleichungs-

§ 5. Die Gleichung (1) und die durch Koordinatentransformationen aus ihr entstehenden Gleichungen zeichnen also, jede für sich, die Schar von Bezugssystemen, in denen sie erfüllt ist, und alle zusammen demnach die invariante Gruppe aus, deren Transformationen die Bezugssysteme einer Schar miteinander verbinden. Schreibt man aber das gleiche Gesetz der Lichtausbreitung in einer von allen diesen verschiedenen Form, so wird die durch sie und ihre Transformierten ausgezeichnete Gruppe eine andere. Z. B., wenn man statt (1) schreibt:

$$(3)\quad \begin{cases} (x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_3 - x_3^0)^2 + c^2 (x_4 - x_4^0)^2 = 0\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c = \text{Const.} \end{cases}$$

so läßt diese Darstellung, außer den Transformationen der Gruppe von (1) wegen der Unbestimmtheit von c noch die Transformationsgruppe

$$x_4' = \mu \,.\, x_4, \quad x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3$$

zu. Die zu (2) gehörige Gruppe umfaßt alle stetigen Transformationen überhaupt, und wenn man zu (2) etwa noch die Nebenbedingungen $g_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$ hinzufügt, so hat man ein den vorigen physikalisch gleichwertiges Gleichungssystem, das invariant ist bezüglich aller Transformationen

$$x_1' = f_1 (x_1 \ldots x_4) \ldots x_4' = f_4 (x_1 \ldots x_4)\,,$$

die den Bedingungen:

$$g_{\mu\nu} = 0 = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\nu} g_{\alpha\beta}' = \sum_{\alpha} \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\nu} g_{\alpha\alpha}'$$

$$(\mu, \nu, \alpha, \beta = 1 \ldots 4)\,; \ \mu \neq \nu$$

genügen und wieder eine ander Gruppe bilden. Diese Beispiele lassen sich beliebig vermehren.

Gesucht ist aber eine Transformationsgruppe, die allein durch den physikalischen Inhalt der Gesetze unabhängig von der gewählten Ausdrucksform bestimmt ist.

§ 6. Zu einer solchen wird man geradenwegs geführt, wenn man sich für jedes Gleichungssystem alle mit ihm verträglichen Weltlinien von Lichtimpulsen in der Koordinaten-

---

system verträglich sind, kann außer in besonderen Fällen nur durch unendliche Reihen von Messungen geführt werden. (Vgl. E. Kretschmann, Ann. d. Phys. 48. p. 943—959.

mannigfaltigkeit gezogen denkt und die so entstandenen vierdimensional-geometrischen Bilder miteinander vergleicht.

Alle nach (1) möglichen Lichtweltlinien erhält man, wenn man von jedem Weltpunkte $x_1^0 \ldots x_4^0$ aus alle Seiten des Nachkegels mit der Gleichung (1) zeichnet.[1] Jede aus (1) transformierte Gleichung stellt ebenfalls eine unendliche Schar von Lichtweltlinien dar, die von der ersten in ihren Maßverhältnissen im allgemeinen verschieden, aber in allen davon unabhängigen topologischen Eigenschaften ihr völlig gleich ist. Nach Gleichung (3) dagegen gehen von jedem Weltpunkte statt eines Nachkegels deren unendlich viele aus, nämlich je einer für jeden Wert der unbestimmt gelassenen Konstanten c. In (2) und der daraus durch den Zusatz $g_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$ entstandenen Darstellungsform treten sogar unbestimmte Funktionen — die zehn $g_{\mu\mu}$ bzw. die vier $g_{\mu\mu}$ — statt der unbestimmten Konstanten c auf, und die Mannigfaltigkeit der Nachkegel mit gleicher Spitze wird eine dementsprechend größere. Dabei ist es natürlich keiner dieser Gleichungen Sinn, daß in der Wirklichkeit auch nur zwei räumlich sich trennende und geschlossene Flächen bildende Lichtwellen von demselben Punkte im Äther zu gleicher Zeit ausgehen könnten. Vielmehr soll in jedem Falle schon jede einzelne der Weltlinienscharen, die man durch vollständige (zahlenmäßige) Festlegung der zwar unbestimmten, doch eindeutigen Koordinatenfunktionen $g_{\mu\nu}$ bzw. der Konstanten c erhält, ein vollständiges Bild der in der Wirklichkeit neben- und nacheinander möglichen Lichtbewegungen sein. Jedes dieser Einzelbilder stimmt natürlich topologisch mit der durch (1) bestimmten Weltlinienschar vollkommen überein, und die Gesamtbilder der anderen drei Gleichungssysteme sind hiernach Zusammenfassungen unendlich vieler der durch (1) und die aus (1) transformierten Gleichungen gegebenen Bilder. Zur Darstellung des in der Wirklichkeit nach dem betrachteten Gesetze Möglichen genügt, wie gesagt, jedes einzelne von diesen. Jedes weitere ist in physikalischer Hinsicht vollkommen überflüssig.[2]

---

1) Von der imaginären Koordinate x_4 ist der absolute Wert aufgetragen zu denken.

2) Die Zusammenfassung einer ganzen Schar physikalisch gleichbedeutender Bilder in einer Darstellungsform kann dagegen unter Umständen mathematische Vorzüge bieten. (Vgl. im folgenden § 24.)

Andererseits aber läßt sich die einzelne Schar von Lichtweltlinien, die in (1) oder einer aus (1) transformierten Gleichung dargestellt ist, nicht allgemein vermindern, ohne daß damit ein neues über (1) hinausgehendes Gesetz der Lichtausbreitung eingeführt wäre. Denn unter den nach (1) überhaupt möglichen Lichterscheinungen gibt es offensichtlich keine, die allein vermöge der Gleichung (1) irgendeine andere als nicht mit ihr zusammen möglich ausschlösse. Daraus folgt, daß jedes Gleichungssystem, das die in (1) enthaltenen Gesetze und nur diese in irgendeiner Form zum Ausdrucke bringt, mindestens eine der zu Gleichung (1) und ihren transformierten Formen gehörenden Weltlinienscharen vollständig als Abbild möglicher und miteinander verträglicher Lichtbewegungen darstellen muß und demnach auch in allen den Bezugssystemen erfüllt sein muß, in denen dieses Bild, d. h. die zugehörige, aus (1) transformierte Gleichung, gilt. Die invariante Transformationsgruppe, die diese Bezugssysteme verbindet, ist folglich die engste, die sich durch irgendeine Darstellungsform der in (1) enthaltenen Gesetze physikalisch vor allen anderen auszeichnen läßt. Sie ist, wie verlangt, allein durch den physikalischen Inhalt der Gesetze unabhängig von der Art ihres Ausdruckes bestimmt, und zwar ist es nach dem Dargelegten offensichtlich die einzige Gruppe, für die das gilt. Geometrisch ist die Gruppe gekennzeichnet als die Gruppe der Transformationen, welche die Schar aller Lichtweltlinien, die nach den Gesetzen zusammen in derselben Koordinatenmannigfaltigkeit möglich sind, in sich selbst überführen. Dem zu dieser Gruppe gehörenden Relativitätspostulate, und keinem weiteren, genügt also in physikalischer Hinsicht jedes den Gleichungen (1), (2) und (3) inhaltlich gleichwertige Gleichungssystem.

§ 7. Die im vorhergehenden gegebene Bestimmung des von den angenommenen Lichtausbreitungsgesetzen erfüllten Relativitätspostulates läßt sich ohne weiteres auf beliebige Systeme physikalischer Gesetze übertragen. Dabei hat man nur, um allen Möglichkeiten gerecht zu werden, auch den Fall zu berücksichtigen, daß der Umfang der physikalisch ausgezeichneten Transformationsgruppe auch von gesetzmäßig nicht bestimmten, „zufälligen“, physikalischen Umständen abhängt.[1]) Als (allgemein) erfüllt kann dabei offensichtlich nur ein Relativitätspostulat gelten, dem unabhängig von solchen Umständen, die sich prinzipiell nach Willkür ändern lassen, genügt ist.

Nennt man ein Bezugssystem für eine gegebene Darstellungsform eines Gesetzsystems „physikalisch berechtigt"[2]), wenn es bezüglich aller Beobachtungen mit ihr verträglich ist, die durch das gegebene Gesetzsystem nicht ausgeschlossen, also als prinzipiell möglich zu betrachten sind[3]), so ergibt sich etwa folgende allgemeine Festsetzung:

Ein System physikalischer Gesetze erfüllt dann und nur dann das Relativitätspostulat einer invarianten Transformationsgruppe G, wenn bei jeder beliebig gestalteten Darstellung aller Gesetze des Systems und nur dieser Gesetze die für die Darstellung physikalisch berechtigten — und dadurch von allen übrigen durch Beobachtung prinzipiell unterscheidbaren — Bezugssysteme unter allen nach den Gesetzen möglichen physikalischen Umständen eine so große Schar bilden, daß die Schar der sie verbindenden Transformationen die Gruppe G in irgendeiner Form als Teil enthält oder ihr gleich ist.

Hiernach ist die Gültigkeit oder Ungültigkeit eines Relativitätspostulates für ein System physikalischer Gesetze von

---

1) Ein solcher Fall liegt bei der Einsteinschen Gravitationstheorie insofern vor, als nach ihr bei gewissen singulären Krümmungsverhältnissen der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, die ja nach Einstein von der zufälligen Verteilung und Bewegung der Materie abhängen, die physikalisch ausgezeichnete Gruppe ausnahmsweise mehr Transformationen umfaßt als sonst; vgl. § 25.

2) Die Transformationen zwischen den „physikalisch berechtigten" Bezugssystemen brauchen nicht in jedem Falle das zugehörige Gleichungssystem auch mathematisch invariant zu lassen. So bleibt z. B. die bekannte Form $\mathfrak{Div}\,\mathfrak{T} = 0$ der Erhaltungssätze von Energie und Impuls nur linearen Transformationen gegenüber invariant, ohne daß sich durch sie allein mittels physikalischer Beobachtungen irgendein Bezugssystem als physikalisch unberechtigt erweisen ließe. (Vgl. E. Kretschmann, Ann. d. Phys. 48. p. 932. 1915.)

3) Als Kriterium des prinzipiell Möglichen kann hier immer nur das jeweils betrachtete und, wie gesagt, stets als inhaltlich richtig angenommene Gesetzsystem benutzt werden. Ein unbedingtes Kriterium des Möglichen könnte nur bei unbedingt sicherer Kenntnis von Naturgesetzen gegeben werden.

ihrer mathematischen Ausdrucksform vollständig unabhängig und allein durch ihren physikalischen Inhalt bestimmt.

§ 8. Im folgenden soll nun untersucht werden, welchen so verstandenen Relativitätspostulaten die Einsteinsche „Allgemeine Relativitätstheorie" genügt. Dabei darf nicht verschwiegen werden, daß Hr. Einstein unter einem Relativitätspostulate offensichtlich etwas ganz anderes versteht als ich; denn nach ihm wird eine Physik „dem allgemeinen Relativitätspostulate gerecht", wenn sie folgendem Postulate genügt:

„Die allgemeinen Naturgesetze sind durch Gleichungen auszudrücken, die für alle Koordinatensysteme gelten, d. h. die beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant (allgemein kovariant) sind."[1])

Die Forderung der allgemeinen Relativität ist hier also unmittelbar und allein auf den Ausdruck der Naturgesetze gerichtet, dessen Einfluß bei meiner Fassung eines Relativitätspostulates gerade ausgeschaltet ist. Nach dieser ist ein Relativitätspostulat nur dann erfüllt, wenn die von ihm geforderte Relativität des Bezugssystems *notwendig* und durch keine Ausdrucksform der Naturgesetze zu vermeiden ist, während nach Einstein dem allgemeinen Relativitätspostulate schon genügt ist, wenn die allgemeine Gleichberechtigung aller Bezugssysteme nur *möglich* und zum Ausdrucke gebracht ist.

II. Über die prinzipielle Meßbarkeit der Komponenten $g_{\mu\nu}$ des Einsteinschen Schwerepotentials.

§ 9. Um die der Einsteinschen Theorie notwendigerweise und unabhängig von der Wahl des Ausdruckes anhaftenden Kovarianzeigenschaften zu finden, wird man versuchen, sie ohne Änderung ihres physikalischen Inhaltes auf eine möglichst wenig kovariante Form zu bringen. Es genügt, wenn dies mit einem Teil der Einsteinschen Gleichungen geschieht, und zwar sollen die Bewegungsgesetze des Lichtes und der Massenpunkte im Schwerefelde hierzu gewählt werden, auf denen die ganze Theorie ruht. Wie nun oben die Lichtausbreitungsgleichung der ursprünglichen Relativitätstheorie durch Einführung der unbestimmten Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ in den Ausdruck des Linienelementes auf allgemeiner kovariante Formen gebracht werden konnte, so kommt umgekehrt jede

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 49. p. 776. 1916.

Verwandlung der Einsteinschen Gleichungen in weniger kovariante gleichen physikalischen Inhaltes auf Festlegung aller oder eines Teiles der nur von der Wahl des Bezugssystems abhängigen Bestimmungsstücke der Koordinatenfunktionen $g_{\mu\nu}$ hinaus. Um aber zu wissen, wie weit die Bezugssysteme, in denen die getroffenen Festsetzungen über die $g_{\mu\nu}$ gelten, vor den übrigen nicht nur mathematisch, sondern auch für die Beobachtung ausgezeichnet sind, was allein über die Gültigkeit von Relativitätspostulaten, wie sie hier verstanden werden, entscheidet, muß man vor allem untersuchen, welche Angaben über die Werte der $g_{\mu\nu}$ in einem empirisch gegebenen Bezugssysteme nach der Einsteinschen Theorie durch Beobachtungen nachgeprüft werden können. Das soll im folgenden geschehen.

§ 10. Es seien $\gamma_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ die Werte, die den $g_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ in einem durch vollkommen scharfe Meßwerkzeuge verwirklichten Bezugssysteme $\Sigma(x_1 \ldots x_4)$ zugeschrieben sind und auf ihre Übereinstimmung mit den die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie in Σ erfüllenden Werten, $g_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$, geprüft werden sollen. Die zwischen den $\gamma_{\mu\nu}$ und den $g_{\mu\nu}$ etwa bestehenden Abweichungen können jedenfalls dann durch Beobachtungen festgestellt werden, wenn die $\gamma_{\mu\nu}$ an Stelle der $g_{\mu\nu}$ in die Bewegungsgleichungen des Lichtes oder die eines nur der Schwerkraft unterworfenen Massenpunktes[1]) eingesetzt, diese in $\Sigma(x_1 \ldots x_4)$ nicht erfüllen. Denn außer ihnen treten in diesen Gleichungen nur Quotienten von Koordinatendifferentialen auf, die mit den gegebenen Meßwerkzeugen mit beliebiger Annäherung bestimmt werden können.

Die Richtungen $dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4$ der von einem beliebigen Weltpunkte ausgehenden Lichtweltlinien erfüllen in Σ nach der allgemeinen Relativitätstheorie die Gleichung[1]):

$$ds^2 \equiv \sum_{\mu,\nu}^{1..4} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = 0$$

oder:

$$0 = \sum_{\mu,\nu}^{1..4} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{dx_4} \cdot \frac{dx_\nu}{dx_4} \,. \tag{4}$$

1) A. Einstein: „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie". Ann. d. Phys. 49. p. 769—822. 1916; vgl. p. 777, 778 u. 790ff. § 9.

Soll der Unterschied der $\gamma_{\mu\nu}$ von den $g_{\mu\nu}$ nicht nachweisbar sein, so muß zugleich mit (4) allgemein gelten:

$$(5) \qquad 0 = \sum_{\mu,\nu}^{1..4} \gamma_{\mu\nu} \frac{d x_\mu}{d x_4} \cdot \frac{d x_\nu}{d x_4}\,.$$

Um die hieraus folgenden Beziehungen zwischen den $\gamma_{\mu\nu}$ und den $g_{\mu\nu}$ zu erhalten, setze man:

$$\text{a)} \quad g_{\alpha\beta}' = \sum_{\mu\nu} u_\alpha^\mu u_\beta^\nu g_{\mu\nu},$$

$$\text{b)} \quad \gamma_{\alpha\beta}' = \sum_{\mu\nu} u_\alpha^\mu u_\beta^\nu \gamma_{\mu\nu},$$

$$\text{c)} \quad \sum_\mu d x_\mu' \, u_\mu^\alpha = d x_\alpha$$

$$(\alpha, \beta, \mu, \nu = 1 \ldots 4)$$

und wähle die 16 Größen u_α^μ so, daß die Determinante $|u_\alpha^\mu| \neq 0$ ist und für $\alpha \neq \beta$ gilt[1]):

$$g_{\alpha\beta}' = 0 \quad \text{und} \quad \gamma_{\alpha\beta}' = 0\,.$$

Dann gehen (4) und (5) über in:

$$(4') \quad 0 = \sum_\alpha g_{\alpha\alpha}' \left(\frac{d x_\alpha'}{d x_4'}\right)^2 \equiv g_{11}' \left(\frac{d x_1'}{d x_4'}\right)^2 + \ldots + g_{33}' \left(\frac{d x_3'}{d x_4'}\right)^2 + g_{44}'.$$

$$(5') \quad 0 = \sum_\alpha \gamma_{\alpha\alpha}' \left(\frac{d x_\alpha'}{d x_4'}\right)^2 \equiv \gamma_{11}' \left(\frac{d x_1'}{d x_4'}\right)^2 + \ldots + \gamma_{33}' \left(\frac{d x_3'}{d x_4'}\right)^2 + \gamma_{44}'.$$

Es ist[2]):

$$g_{11}' \cdot g_{22}' \cdot g_{33}' \cdot g_{44}' = |g_{\alpha\beta}'| = |u_\alpha^\mu|^2 \cdot |g_{\mu\nu}|$$

und ebenso:

$$\gamma_{11}' \cdot \gamma_{22}' \cdot \gamma_{33}' \cdot \gamma_{44}' = |\gamma_{\alpha\beta}'| = |u_\alpha^\mu|^2 \cdot |\gamma_{\mu\nu}|\,.$$

---

1) Das ist möglich; denn nach a), b), c) stellen die u_α^μ die Koeffizienten der allgemeinsten eindeutigen Transformation im unendlich Kleinen dar, bei der $g_{\mu\nu}$ und $\gamma_{\mu\nu}$ als Komponenten kovarianter Tensoren transformiert werden. Man kann nun bekanntlich durch eine Zwischentransformation erst $g_{11}' = g_{22}' = g_{33}' = g_{44}' = 1$ und $g_{\alpha\beta}' = 0$ für $\alpha \neq \beta$ erreichen und dann mittels einer Lorentztransformation die Achsen des Bezugssystemes mit den Hauptachsen des Tensors γ zur Deckung bringen, so daß ohne Änderung der $g_{\mu\nu}'$-Werte auch $\gamma_{\mu\nu}' = 0$ für $\mu \neq \nu$ wird.

2) Vgl. A. Einstein, l. c. p. 788 u. 789. Da ich der Symmetrie wegen die 4te Koordinate x_4 als imaginär annehme, so ist $|g_{\mu\nu}| > 0$ und $|g_{\mu\nu}| > 0$ statt < 0 wie bei Einstein.

Verschwände $|g_{\mu\nu}|$ in einem endlichen Koordinatengebiete, so müßten wegen

$$|g_{\mu\nu}'| = \left|\frac{\partial x_a'}{\partial x_\sigma'}\right|^2 \cdot |g_{\mu\nu}| \quad {}^{1})$$

jedem Weltpunkte des Gebietes im allgemeinen unendlich viele Koordinatenpunkte zugeordnet sein. Das ist auszuschließen[1]) und auch prinzipiell durch Beobachtung erweisbar, so daß man von vornherein auch $|\gamma_{\mu\nu}| \neq 0$ — abgesehen von singulären Stellen — voraussetzen darf.

Demnach ist keine der Größen g_{aa}' und γ_{aa}' gleich Null, und es muß sich eine im allgemeinen nicht verschwindende und von den Quotienten dx_a'/dx_4' unabhängige Größe λ in jedem Koordinatenpunkte so wählen lassen, daß für beliebige Werte von

$$\frac{dx_1'}{dx_4'}, \quad \frac{dx_2'}{dx_4'}, \quad \frac{dx_3'}{dx_4'}:$$

$$0 = \sum_a (\gamma_{aa}' - \lambda g_{aa}') \cdot \left(\frac{dx_a'}{dx_4'}\right)^2$$

ist. Durch Differentiation nach $(dx_1'/dx_4')^2$ usw. folgt hieraus:

$$\gamma_{aa}' = \lambda g_{aa}' \qquad (a = 1 \ldots 4)$$

und mittels Auflösung der Gleichungen (a) und (b) nach den $g_{\mu\nu}$ und $\gamma_{\mu\nu}$:

(6) $$\gamma_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1 \ldots 4).$$

Die $\gamma_{\mu\nu}$ müssen also den $g_{\mu\nu}$ in jedem Koordinatenpunkte proportional sein. Der Proportionalitätsfaktor λ ist eine von Null verschiedene, aber im übrigen noch unbestimmte Koordinatenfunktion.

§ 11. Zur näheren Bestimmung von λ führen die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes im Schwerefelde. Diese lassen sich nach Einstein[2]) schreiben:

(7) $$\sum_a g_{a\varrho} \frac{d^2 x_a}{ds^2} + \sum_{\mu\nu} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \varrho \end{bmatrix}_g \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0,$$

wo

$$\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \varrho \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\varrho}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho}\right)$$

ist.

---

1) Vgl. Anmerkung 1 auf vorhergehender Seite.

2) A. Einstein, l. c. p. 791, Gl. (20d) u. (21).

Führt man $\gamma_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$ ein, so wird:

$$d\sigma = \sqrt{\sum_{\mu\nu} \lambda_{\mu\nu}\, d x_\mu\, d x_\nu} = \sqrt{\lambda} \cdot d s,$$

$$\frac{d x_a}{d s} = \frac{d x_a}{d \sigma} \cdot \sqrt{\lambda}, \quad \frac{d^2 x_a}{d s^2} = \lambda \frac{d^2 x_a}{d \sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{d\sigma} \cdot \frac{d x_a}{d \sigma}$$

$$\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \varrho \end{bmatrix}_g = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \varrho \end{bmatrix}_\gamma - \frac{1}{2\lambda^2}\left(\gamma_{\mu\varrho} \cdot \frac{\partial\lambda}{\partial x_\nu} + \gamma_{\nu\varrho} \frac{\partial\lambda}{\partial x_\mu} - \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial\lambda}{\partial x_\varrho}\right)$$

$$\text{mit } \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \varrho \end{bmatrix}_\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{\mu\varrho}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial\gamma_{\nu\varrho}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho}\right).$$

Die Gleichung (7) geht damit über in:

$$\text{(7a)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_a \gamma_{a\varrho} \frac{d^2 x_a}{d\sigma^2} + \sum_{\mu\nu} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \varrho \end{bmatrix}_\gamma \frac{d x_\mu}{d\sigma} \frac{d x_\nu}{d\sigma} + \sum_a \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\sigma} \gamma_{a\varrho} \frac{d x_a}{d\sigma} - \\ &\quad - \sum_{\mu\nu} \frac{1}{2\lambda}\left(\gamma_{\mu\varrho} \frac{\partial\lambda}{\partial x_\nu} + \gamma_{\nu\varrho} \frac{\partial\lambda}{\partial x_\mu} - \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial\lambda}{\partial x_\varrho}\right) \frac{d x_\mu}{d\sigma} \frac{d x_\nu}{d\sigma} = 0. \end{aligned} \right.$$

Soll nun die Bewegungsgleichung (7) auch mit $\gamma_{\mu\nu}$ statt $g_{\mu\nu}$ erfüllt sein, so müssen die ersten beiden Glieder in (7a) verschwinden. Das dritte läßt sich wegen

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \sum_\nu \frac{\partial\lambda}{\partial x_\nu} \frac{d x_\nu}{d\sigma}$$

umformen in:

$$\sum_{a\nu} \frac{1}{2\lambda} \gamma_{a\varrho} \frac{\partial\lambda}{\partial x_\nu} \cdot \frac{d x_a}{d\sigma} \cdot \frac{d x_\nu}{d\sigma} = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{2\lambda} \gamma_{\mu\varrho} \frac{\partial\lambda}{\partial x_\nu} \cdot \frac{d x_\mu}{d\sigma} \cdot \frac{d x_\nu}{d\sigma}.$$

Es folgt also, da

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{g_{\mu\nu}}{\gamma_{\mu\nu}} \neq 0$$

ist:

$$0 = \sum_{\mu\nu}\left(\gamma_{\nu\varrho} \frac{\partial\lambda}{\partial x_\mu} - \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial\lambda}{\partial x_\varrho}\right) \frac{d x_\mu}{d s} \cdot \frac{d x_\nu}{d s}$$

oder

$$0 = \sum_{\mu\nu}\left(g_{\nu\varrho} \frac{\partial\lambda}{\partial x_\mu} - g_{\mu\nu} \frac{\partial\lambda}{\partial x_\varrho}\right) \cdot \frac{d x_\mu}{d s} \cdot \frac{d x_\nu}{d s}.$$

Die Richtungskosinusse $d x_\mu / d s$ haben nur der Bedingung

$$\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} \frac{d x_\mu}{d s} \cdot \frac{d x_\nu}{d s} = 1$$

zu genügen. Mittels des gleichen Verfahrens, durch das die Gleichung (6) aus (4) und (5) abgeleitet wurde, folgt aus den letzten beiden Gleichungen:

$$g_{\nu\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\mu} - g_{\mu\nu}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\varrho} = \Lambda\cdot g_{\mu\nu}.$$

Dies gilt für beliebige Zahlzeiger $\mu, \nu, \varrho = 1, 2, 3, 4$. Setzt man $\varrho = \mu$, so folgt $\Lambda = 0$. Es ist daher allgemein:

$$g_{\nu\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\mu} - g_{\mu\nu}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\varrho} = 0 \quad \text{oder} \quad g_{\nu\varrho}/g_{\nu\mu} = \frac{\partial\lambda}{\partial x_\varrho}\Big/\frac{\partial\lambda}{\partial x_\mu}\,.$$
$$(\mu, \nu, \varrho = 1\ldots 4)$$

Da die Glieder zweier Zeilen der Determinante $|g_{\mu\nu}| \neq 0$ einander nicht proportional sein können, so müssen alle Ableitungen von λ nach den Koordinaten verschwinden. Also ist:

$$\lambda = \text{Const.} \tag{8}$$

§ 12. Von den Bezugssystemen, in denen irgendwelche über die $g_{\mu\nu}$ als Koordinatenfunktionen getroffenen Festsetzungen gelten, können demnach nur diejenigen anderen Bezugssysteme durch keine Beobachtung der Bewegungen von Licht und ungeladenen Massen unterschieden werden, in denen alle aus den Festsetzungen folgenden Verhältnisse von $g_{\mu\nu}$ Werten des gleichen oder verschiedener *Koordinaten*punkte zueinander ihre gegebenen Werte haben. Bei den Differentialquotienten der $g_{\mu\nu}$ nach den Koordinaten, die ja durch Differenzenquotienten beliebig angenähert werden können, kann daher ebenfalls die Erfüllung jeder ihnen auferlegten Bedingung durch Beobachtung geprüft werden, bis auf die Abweichungen, die sich durch Multiplikation der $g_{\mu\nu}$ Werte aller Koordinatenpunkte mit derselben Konstanten λ erzielen lassen.

Eine von der identischen verschiedene Koordinatentransformation, welche die Funktionen $g_{\mu\nu}$ in der angegebenen Weise ändert, so daß also aus $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ in $\Sigma\; g'_{\mu\nu} = \lambda \cdot f_{\mu\nu}(x_1' \ldots x_4')$ im transformierten Bezugssysteme Σ' wird, gibt es im allgemeinen nicht. Denn jede in den $g_{\mu\nu}$ und ihren Differentialen (vom Grade n_σ) homogene Krümmungsinvariante J_σ müßte dabei aus

$$J_\sigma = f_\sigma(x_1 \ldots x_4) \quad \text{in} \quad J_\sigma' = J_\sigma = \lambda^{n_\sigma}\cdot f_\sigma(x_1' \ldots x_4')$$

übergehen. Die hieraus folgenden Gleichungen

$$f_\sigma(x_1 \ldots x_4) = \lambda^{n_\sigma}\cdot f_\sigma(x_1' \ldots x_4') \tag{9}$$

lassen sich aber, da es mehr als vier unabhängige in den $g_{\mu\nu}$

und $dg_{\mu\nu}$ homogene Invarianten J_σ gibt[1]), im allgemeinen nur durch die identische Transformation, $x_1' = x_1, \ldots x_4' = x_4$, befriedigen. Auszunehmen sind nur Fälle besonders weitgehender funktionaler Abhängigkeit der $J_\sigma(x_1 \ldots x_4)$ voneinander, also ganz besonderer Gestaltung der invarianten Krümmungsverhältnisse der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit.

Im allgemeinen sind demnach den durch irgendwelche Bedingungen für die $g_{\mu\nu}$ mathematisch hervorgehobenen Bezugssystemen auch in rein physikalischer Hinsicht keine weiteren — die ja stets derselben wirklichen Mannigfaltigkeit angehören, d. h. in jene transformierbar sein müßten — *gleichberechtigt.*

In den eben genannten Ausnahmefällen genügt offenbar eine einparametrige Gruppe von Transformationen, die $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ in $g_{\mu\nu}' = \lambda \cdot f_{\mu\nu}(x_1' \ldots x_4')$ überführt, um aus den mathematisch hervorgehobenen alle physikalisch berechtigten Bezugssysteme zu erzeugen.[2])

III. Beschränkung der Kovarianz der Einsteinschen Gleichungen.

§ 13. Ohne den physikalischen Inhalt der Einsteinschen Gleichungen zu ändern, kann man den in ihnen vorkommenden Koordinatenfunktionen $g_{\mu\nu}$ alle Bedingungen auferlegen, die sich auf jeden Fall allein durch geeignete Wahl des Bezugssystems erfüllen lassen und daher auch nur über dieses etwas aussagen. Unser Ziel ist es, so durch rein formale Änderung der Theorie eine möglichst enge Gruppe von „berechtigten" Bezugssystemen auszuzeichnen. Dahin scheint man am einfachsten zu gelangen, indem man das Koordinatensystem möglichst eng an die nach Einstein vorhandene natürliche Struktur

1) Z. B. die acht Hauptkomponenten des Krümmungstensors, bezogen auf Koordinatenrichtungen, die mit denen seiner Achsen zusammenfallen (vgl. im folgenden §§ 14 u. 17), sowie die sechs Winkel zwischen diesen Richtungen.

2) Für die Bestimmung der im Sinne von § 7 wirklich erfüllten Relativitätspostulate wird diese Ausnahme insofern bedeutungslos, als sie nur bei ganz besonderer Gestaltung der zufälligen, d. h. gesetzlich nicht bestimmten, physikalischen Umstände (Verteilung der Materie), die ja nach Einsteins Theorie den Krümmungscharakter der Welt mitbestimmen, besteht und daher durch eine (willkürliche) Änderung dieser Zufälligkeiten aufgehoben werden kann.

des Raum-Zeit-Gebietes, gegeben durch seine von Weltpunkt zu Weltpunkt wechselnde Krümmung, anschließt.[1])

1. Benutzung der „Achsenrichtungen" des Krümmungstensors als Koordinatenrichtungen.

Die Komponenten $(\lambda\nu,\ \mu\tau)$ des Riemann-Christoffelschen Krümmungstensors R im $x_1 \ldots x_4$-Raume mit dem invarianten Linienelemente

$$ds = \sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu}$$

sind gegeben durch[2]):

$$(10)\quad \begin{cases} R_{\lambda\nu,\mu\tau} = (\lambda\nu,\mu\tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\tau}}{\partial x_\nu \partial x_\mu} + \frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda \partial x_\tau} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu \partial x_\tau} - \frac{\partial^2 g_{\nu\tau}}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\right) \\ \qquad + \sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}\left(\begin{bmatrix}\lambda\tau\\ \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu\mu\\ \beta\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda\mu\\ \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu\tau\\ \beta\end{bmatrix}\right). \end{cases}$$

Dabei ist:

$$\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\right)$$

und $g^{\alpha\beta}$ die normierte Adjungierte von $g_{\alpha\beta}$ in der Determinante $|g_{\mu\nu}|$ der $g_{\mu\nu}$. Alle griechischen Zahlzeiger α, β, λ, ν usf. laufen von 1 bis 4.

Der Tensor R ist kovariant vom Range 4. Seine Komponenten transformieren sich also nach dem Gesetze:

$$(11)\qquad (\lambda\nu,\mu\tau)' = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\lambda'} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\nu'} \cdot \frac{\partial x_\gamma}{\partial x_\mu'} \cdot \frac{\partial x_\delta}{\partial x_\tau'} \cdot (\alpha\beta,\gamma\delta).$$

Ferner gelten die Identitäten:

$$(10a)\qquad (\lambda\nu,\ \mu\tau) \equiv (\mu\tau,\ \lambda\nu),$$

$$(10b)\qquad (\lambda\nu,\ \mu\tau) \equiv -(\nu\lambda,\ \mu\tau) \equiv -(\lambda\nu,\ \tau\mu).$$

also

$$(\lambda\lambda,\ \mu\tau) = (\lambda\nu,\ \mu\mu) = 0$$

und:

$$(10c)\qquad (12,\ 34) + (23,\ 14) + (31,\ 24) \equiv 0\ ,$$

so daß nur 20 der Komponenten von R algebraisch unabhängig voneinander sind. Denn jede nicht verschwindende Kom-

---

1) Auf diese Möglichkeit, gerade mittels der allgemeinen Relativitätstheorie Koordinatenrichtungen absolut festzulegen, wies mich Hr. G. Mie brieflich schon im Februar 1916 hin.

2) Christoffel, Journ. f. Math. 70. p. 54. 1869.

ponente ist gleich oder entgegengesetzt gleich einer der 36 Komponenten $(\lambda\nu, \mu\tau)$, bei denen $\lambda\nu$ und $\mu\tau$ je einem der sechs Ziffernpaare 2 3, 3 1, 1 2, 3 4, 2 4, 1 4 gleich sind. Diese 36 Komponenten bilden, nach den $\lambda\nu$ in der hingeschriebenen Reihenfolge in Reihen und nach den $\mu\tau$ ebenso in Kolonnen geordnet, die Elemente einer symmetrischen Matrix, M, deren Hauptdiagonale die sechs Komponenten der Form $(\lambda\nu, \lambda\nu)$ enthält, während die obere Hälfte der Nebendiagonale aus den drei links stehenden Gliedern der Gleichung (10c) gebildet wird. Von den 9 verschiedenen Diagonalelementen von M, die ich als die Hauptkomponenten von R bezeichnen will, sind daher nur 8 algebraisch unabhängig. Zu ihnen kommen als ebenfalls unabhängige „Nebenkomponenten" noch die 12 außerhalb der Diagonalen doppelt auftretenden Elemente von M.

§ 14. Diese Nebenkomponenten kann man nun in einem beliebigen Weltpunkte, durch geeignete Wahl der Achsenrichtungen des Bezugssystemes, zum Verschwinden bringen.

Sei nämlich $\Sigma'(x_1' \ldots x_4')$ das ursprüngliche Bezugssystem mit beliebig gegebenen Werten der $(\lambda\nu, \mu\tau)'$ und $\Sigma(x_1 \ldots x_4)$ das gesuchte, in dem die 12 Nebenkomponenten von R im betrachteten Punkte, P, verschwinden sollen, so ist dies jedenfalls erreicht, wenn man die Werte der 16 Differentialquotienten

$$\frac{\partial x_\varrho}{\partial x_\sigma'} \; (\varrho, \sigma = 1 \ldots 4)$$

und die 8 unabhängigen in Σ gemessenen Hauptkomponenten von R im Punkte P so bestimmt, daß die Transformationsgleichungen (11) erfüllt sind, während alle auf ihren rechten Seiten vorkommenden Nebenkomponenten von R in Σ verschwinden. Denkt man sich, was stets erlaubt ist, die Transformation von Σ' in Σ für die unendlich kleine Umgebung von P in eine Transformation, bei der die vier $\partial x_\varrho / \partial x_\varrho'$ gleich Eins sind, und in eine nachfolgende reine Achsendehnung zerlegt, bei der die 12 übrigen

$$\frac{\partial x_\varrho}{\partial x_\sigma'} \; (\varrho \neq \sigma)$$

verschwinden, so bringt die letzte Transformation den Gleichungen (11) zufolge gewiß keine neue Komponente von R

zum Verschwinden. Der Tensor R' muß sich daher, wenn überhaupt, auch für

$$\frac{\partial x_\varrho}{\partial x_\varrho'} = 1 \; (\varrho = 1 \ldots 4)$$

auf die gewünschte Normalform bringen lassen. Und dies ist möglich, da die für

$$\frac{\partial x_\varrho}{\partial x_\varrho'} = 1$$

und verschwindende Nebenkomponenten von R in Σ aus (11) berechnete Funktionaldeterminante von 20 unabhängig gegebenen Komponenten, $(\lambda\nu, \mu\tau)'$, von R' in Σ' bezüglich der zwölf

$$\frac{\partial x_\varrho}{\partial x_\sigma'} \; (\varrho \neq \sigma)$$

und acht unabhängiger Hauptkomponenten von R in Σ nicht identisch verschwindet.[1]) Hieraus folgt zugleich, daß im allgemeinen die

$$\frac{\partial x_\varrho}{\partial x_\sigma'} \; (\varrho \neq \sigma)$$

bestimmte Funktionen der $(\lambda\,\nu\,\mu\,\tau)'$ sind, und daß daher nur für bestimmte ausgezeichnete Richtungen der vier Koordinatenachsen in einem gegebenen Weltpunkte alle Nebenkomponenten des Krümmungstensors R verschwinden.

§ 15. Dieses System von Richtungen, welche kurz die Achsenrichtungen des Krümmungstensors R heißen mögen, kann bei besonderer Beschaffenheit von R natürlich un-

1) Man berechnet die Funktionaldeterminante am leichtesten für

$$\frac{\partial x_\varrho}{\partial x_\sigma'} = 0 \; (\varrho \neq \sigma).$$

Von den Differentialquotienten der acht Hauptkomponenten von R' sind dann nur die — in der Hauptdiagonale stehenden — nach den entsprechenden Hauptkomponenten von R von Null verschieden, nämlich gleich Eins. In den zwölf übrigen, den Nebenkomponenten von R' zugeordneten Zeilen stehen nur je drei durch Differentiation von (11) nach den $\partial x_\varrho / \partial x_\sigma'$ sich ergebende Hauptkomponenten von R, und zwar so geordnet, daß die ganze Determinante gleich dem Produkte dreier nicht verschwindender Determinanten vierter Ordnung wird, deren Elemente in den zu $(12, 13)'$, $(42, 43)'$, $(21, 24)'$, $(31, 34)'$ bzw. $(23, 24)'$, $(13, 14)'$, $(32, 31)'$, $(42, 41)'$ bzw. $(12, 14)'$, $(32, 34)'$, $(23, 21)'$, $(43, 41)'$ gehörenden Zeilen stehen.

bestimmt werden oder sonstwie ausarten. Die in der Einsteinschen Theorie wichtigste besondere Form von R ist die, welche R im „materiefreien"[1]) Schwerefelde annimmt. In diesem verschwindet der Einsteinsche Tensor $B_{\mu\nu}$ der Schwerkraftquellen[1]), und da, wie man leicht ausrechnet[2]), identisch

$$B_{\mu\nu}' \equiv \sum_{\lambda\tau} (\lambda\,\nu, \mu\,\tau)\, g^{\lambda\tau}$$

ist, so gilt:

$$B_{\mu\nu} \equiv \sum_{\lambda\tau} (\lambda\,\nu,\ \mu\,\tau)\, g^{\lambda\tau} = 0\,. \tag{12}$$

Es sei nun möglich, in einem materiefreien Weltpunkte P die Koordinatenrichtungen und -maße so zu wählen, daß erstens

$$g^{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu \quad \text{und} \quad g^{\nu\nu} = 1 \quad \left(\begin{smallmatrix}\mu\\ \nu\end{smallmatrix}\right\} = 1 \ldots 4)$$

ist, oder auch $g_{\mu\nu} = 0\ (\mu \neq \nu)$ und $g_{\nu\nu} = 1$, was bekanntlich stets erfüllt werden kann, und daß zweitens alle Nebenkomponenten von R verschwinden. Für die Hauptkomponenten von R folgen dann aus (12) nur noch die vier Beziehungen:

$$\sum_{\lambda} (\lambda\,\nu,\ \lambda\,\nu) = 0\,, \tag{13}$$

welche die sechs Glieder $(\lambda\nu,\ \lambda\nu)$ der Hauptdiagonale in der Matrix, M, der $(\lambda\nu,\ \mu\tau)$ auf zwei unabhängige zurückführen. Ebenso sind nach (10c) und (10a) nur zwei Elemente der Nebendiagonale voneinander unabhängig, so daß man im ganzen gerade vier unabhängige Hauptkomponenten von R in dem gewählten Bezugssysteme hat.

Transformiert man dies nun durch eine beliebige Lorentztransformation, also so, daß wieder $g_{\nu\nu} = 1$ und $g_{\mu\nu} = 0\ (\mu \neq \nu)$ gilt, so geht R nach (11) in einen Tensor R' über, der, da die Lorentztransformation auch bezüglich der Komponenten von R wesentlich sechsparametrig ist[3]), $4 + 6 = 10$ voneinander

---

1) A. Einstein, l. c. p. 802, 803 § 14. A. Einstein bezeichnet „alles außer dem Gravitationsfeld als Materie".

2) Vgl. A. Einstein u. M. Großmann, l. c. p. 35 u. 36, Gl. (43), (44) u. (46), und A. Einstein, l. c. p. 800 u. 801, Gl. (43) u. (44). Die neueste Änderung der Einsteinschen Quellgleichungen des Schwerefeldes (A. Einstein, Berl. Ber. p. 142—152. 1917) konnte leider nicht mehr berücksichtigt werden.

3) Man hat zum Beweise nur zu zeigen, daß es keine infinitesimale Lorentztransformation gibt, die R in sich selbst überführt. Da aber wegen

$$\sum_{\sigma} (\partial x_{\varrho} / \partial x_{\sigma}')^2 = 1$$

unabhängige Komponenten hat. Zwischen den 20 nicht durch (10a, b, c) verknüpften Komponenten von R' können sich demnach nicht mehr als $20 - 10 = 10$ unabhängige Beziehungen ergeben, und das müssen offensichtlich gerade die 10 Gleichungen sein, die ganz allgemein für $g^{\nu\nu} = 1$, $g^{\mu\nu} = 0$ $(\mu \neq \nu)$ aus (12) folgen.

Die oben angenommene Möglichkeit, die Koordinatenrichtungen in einem materiefreien Weltpunkte, $B_{\mu\nu} = 0$, so zu wählen, daß sie in die Achsenrichtungen von R fallen und zugleich $g_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$ ist, bedeutet also für R keine über (12) hinausgehende Beschränkung und besteht demnach allgemein. Nennt man wie üblich Koordinatenrichtungen, für die $g_{\mu\nu} = 0$ $(\mu \neq \nu)$ ist, zueinander senkrecht[1]), so stehen hiernach in jedem materiefreien Weltpunkte die vier Achsenrichtungen des Weltkrümmungstensors aufeinander senkrecht. Die Anwesenheit von „Materie" bewirkt im allgemeinen, daß das Achsenkreuz von R schiefwinklig wird.

§ 16. Ein Bezugssystem, dessen Achsenrichtungen mit denen des Krümmungstensors R überall zusammenfallen, gibt es wegen der hierfür notwendigen Integrabilitätsbedingungen im allgemeinen nicht. Dagegen darf man ohne weiteres fordern, daß die x_4-Richtung $(dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0)$ überall in eine

---

bei einer solchen, bis auf ∞ kleine Glieder 2ter Ordnung, $\partial x_\varrho / \partial x_\varrho' = 1$ ist, so folgt die Behauptung schon daraus, daß die nach (11) gebildete Funktionaldeterminante der 12 Nebenkomponenten von R' nach den 12 unendlich kleinen Transformationskoeffizienten $\partial x_\varrho / \partial x_\sigma'$ $(\varrho \neq \sigma)$ von Null verschieden ist (vgl. Anm. 1, § 14; die Gleichung (13) ändert daran nichts), also diese Koeffizienten durch die Komponenten von R' und R ausgedrückt werden können und somit für $R' = R$ nur den einen hiermit nach (11) verträglichen Wert Null haben können.

1) Dies ergibt sich unmittelbar, wenn man den Cosinus des Winkels α zwischen zwei Richtungen:

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)_1, \ldots \left(\frac{dx_4}{ds}\right)_1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dx_1}{ds}\right)_2, \ldots \left(\frac{dx_4}{ds}\right)_2$$

definiert durch:

$$\cos \alpha = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \left(\frac{dx_\mu}{ds}\right)_1 \cdot \left(\frac{dx_\nu}{ds}\right)_2 .$$

Vgl. z. B. L. Bianchi-Lukat: „Vorlesungen über Differentialgeometrie".

dieser Richtungen fällt.[1]) Denkt man sich diese Forderung als Bedingung für die Koordinatenfunktionen $g_{\mu\nu}$, die ja nach (10) den Krümmungstensor R bestimmen, ausgedrückt und in die Einsteinschen Gleichungen eingeführt, so ist das entstehende Gleichungssystem stetigen Drehungen der x_4-Richtung, d. h. den eigentlichen Geschwindigkeitstransformationen gegenüber jedenfalls nicht invariant. Die so mathematisch ausgezeichneten Bezugssysteme sind nach § 12 im allgemeinen auch für die Beobachtung vor allen übrigen gekennzeichnet.

Im Sinne der in Abschnitt I dargelegten Auffassung genügt demnach die Einsteinsche Theorie jedenfalls keinem Relativitätspostulate der Geschwindigkeit.[2])

2. Über die Einführung absoluter Invarianten als Raum- und Zeitkoordinaten.

§ 17. In viel bestimmterer und zugleich einfacherer Weise kann man indessen Bezugssysteme mittels der absoluten Invarianten festlegen, die sich aus den Komponenten von R und den $g_{\mu\nu}$ bilden lassen. Da nur 16 Koeffizienten, $\partial x_\nu / \partial x_\varrho'$, in die Transformationsgesetze der Tensorkomponenten $(\lambda\nu, \mu\tau)$ und $g_{\mu\nu}$ eingehen, unter denen zusammen $20 + 10 = 30$ unabhängige sind, so muß es im allgemeinen $30 - 16 = 14$ solcher algebraisch unabhängiger Invarianten geben und in materiefreien Gebieten, wo die 10 Gleichungen (12) gelten, immer noch $14 - 10 = 4$. In diesem Falle müssen die Invarianten offensichtlich Funktionen der (invarianten) Hauptkomponenten von R sein, gemessen in dem orthogonalen infinitesimalen Bezugssysteme $\Sigma(dx_1, \ldots dx_4)$, dessen Achsenrichtungen mit denen von R zusammenfallen und für das die $g_{\nu\nu} = 1$ sind. Im allgemeinen Falle, $B_{\mu\nu} \neq 0$, vermehrt sich, wie gezeigt, in einem auf entsprechende Weise nach Lage und Maß bestimmten infinitesimalen Bezugssysteme die Zahl der unabhängigen Hauptkomponenten von R auf 8, und dazu kommen noch 6 Größen, welche die Winkel zwischen den

1) Darüber hinaus könnte man z. B. noch verlangen, daß für $x_4 = 0$ die x_3-Richtung, für $x_4 = x_3 = 0$ die x_2-Richtung und endlich die x_1-Achse, $x_4 = x_3 = x_2 = 0$, überall in eine der Achsenrichtungen von R fallen.

2) Dagegen bleiben auch nach Einführung der auf die angegebene Weise ausgezeichneten Bezugssysteme die Gleichungen invariant bezüglich der unendlichen Gruppe der Transformationen, welche die x_4-Richtung überall ungeändert lassen.

vier Achsenrichtungen von R messen. Das sind zusammen gerade 14 unabhängige absolut invariante Funktionen der $(\lambda\nu, \mu\tau)$ und $g_{\mu\nu}$.

Es seien nun J_1, J_2, J_3, J_4 vier Funktionen dieser Invarianten, die sowohl für $B_{\mu\nu} \neq 0$ wie für $B_{\mu\nu} = 0$ voneinander unabhängig sind, so ist ein Bezugssystem mathematisch vollständig festgelegt und nach § 12 auch physikalisch vor allen übrigen ausgezeichnet, wenn man setzt:

$$(13) \qquad x_1 = J_1, \quad x_2 = J_2, \quad x_3 = J_3, \quad x_4 = J_4 .$$

§ 18. Die Einführung eines der durch Gleichungen der Art (13) bestimmten Bezugssysteme in die allgemeine Relativitätstheorie, die dadurch mathematisch auf die Form einer vollkommenen „Absoluttheorie" gebracht würde, ist aber nur unter der Voraussetzung zulässig, daß in keinem endlichen vierdimensionalen Gebiete die als Koordinaten gewählten Invarianten $J_1 \ldots J_4$ funktional voneinander abhängig seien; denn anderenfalls würden ganze Kontinua von Weltpunkten je einem Koordinatenpunkte zugeordnet werden.

Es ist nun zu fragen, ob diese für die Einführung der Bezugssysteme (13) notwendige Voraussetzung, die wegen der Invarianz von $J_1 \ldots J_4$ zweifellos physikalischen Inhalt hat, der Einsteinschen Theorie etwas physikalisch Neues hinzufügt. Denn nur, wenn das nicht der Fall ist, kann der Nachweis als erbracht gelten, daß nach der in Teil I dargelegten Auffassung der physikalischen Relativitätspostulate die Einsteinsche Theorie physikalisch eine vollkommene Absoluttheorie ist.

Für die wirkliche, wahrnehmbare Welt könnte, die Richtigkeit der Einsteinschen Theorie vorausgesetzt, in der Tat jede funktionale Abhängigkeit der $J_1 \ldots J_4$ voneinander in einem nach Zeit und Raum endlich ausgedehnten Gebiete als unendlich unwahrscheinlich oder unmöglich gelten, da sie stets nur einen singulären Fall unter unendlich vielen Fällen völliger Unabhängigkeit der $J_1 \ldots J_4$ voneinander bildet.

Die Gesetze der Einsteinschen Theorie an und für sich bestimmen indessen wie die jeder anderen physikalischen Theorie nicht sowohl, was wirklich geschieht, sondern was überhaupt „möglich", d. h. mit ihnen verträglich ist. Die Annahme der Unabhängigkeit von $J_1 \ldots J_4$ schließt aber gewisse nach ihnen offene, wenngleich singuläre Möglichkeiten aus; und zwar sind diese wegen der Invarianz der J_ν von allen übrigen auch topologisch verschieden und somit prinzipiell durch Beobachtung von ihnen unterscheidbar. In diesem Sinne bildet die genannte Annahme daher auch einen physikalischen Zusatz zur Einsteinschen Theorie.

3. Nähere Bestimmung des Bezugssystems durch den $g_{\mu\nu}$ auferlegte Bedingungen.

§ 19. Deshalb soll eine möglichst weitgehende Befreiung der Einsteinschen Theorie von ihren nur formalen Kovarianzeigenschaften noch auf eine andere Art versucht werden, die dem eben geäußerten Bedenken nicht unterliegt. Das Verfahren besteht einfach darin, die Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ im Ausdrucke des Weltlinienelementes, die in der allgemeinen Relativitätstheorie als teilweise unbestimmte und willkürlich wählbare Koordinatenfunktionen auftreten, durch soviel willkürliche Bedingungen näher zu bestimmen, wie sich ohne neue physikalische Voraussetzungen allein durch geeignete Wahl des Bezugssystemes erfüllen lassen, das eben dadurch bestimmt wird.

Eine solche Bedingung, nämlich die Gleichung $|g_{\mu\nu}| = 1$, hat bekanntlich Einstein selbst zur Vereinfachung seiner Gleichungen eingeführt[1]) und auch gelegentlich bemerkt, daß entsprechend den vier willkürlich wählbaren Koordinaten im allgemeinen vier Funktionen der $g_{\mu\nu}$ als Koordinatenfunktionen frei gewählt werden dürfen.[2])

Schreibt man z. B.

$$(14)\qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} \equiv 1 \text{ für alle } x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$$

vor, so hat, man um ein gegebenes Bezugssystem $\Sigma'(x_1' \ldots x_4')$ in ein System $\Sigma\,(x_1 \ldots x_4)$, in dem (14) gilt, zu transformieren, nur die vier Differentialgleichungen

$$(15)\qquad 1 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}'(\varphi_1, \ldots \varphi_4)\,\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\alpha}\qquad (\alpha = 1 \ldots 4)$$

---

1) A. Einstein, l. c. p. 801. Nach Hrn. Einsteins Auffassung liegt hierin aber kein Beweis, daß seine Theorie (in anderer Form) nicht das allgemeinste Relativitätspostulat erfüllen könne. (Vgl. § 8 und A. Einstein, l. c. p. 776 u. 789.)

2) A. Einstein, l. c. p. 812 oben und Anm. 1.

durch geeignete Wahl der vier Funktionen $\varphi_\nu (x_1, \ldots x_4) = x_\nu'$ oder ihrer Umkehrfunktionen $f_\nu (x_1' \ldots x_4') = x_\nu$, die Σ' in Σ überführen, zu erfüllen, was stets möglich ist.[1])

Die Funktionen φ_ν können sogar noch in je einem Raume $x_\nu =$ Const., etwa $x_\nu = 0$ willkürlich gewählt werden. (Vgl. Anmerkung 1.) Neben (14) darf daher zur näheren Bestimmung von φ_1

$$g_{12} = 0 \text{ für } x_1 = 0$$

festgesetzt werden. Denkt man sich — im groben überschlagend — die hieraus für die φ_ν folgende Differentialgleichung (wieder) nach einem der (noch unbestimmten) Differentialquotienten

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4}$$

von φ_1 etwa nach $\partial\varphi_1/\partial x_2$ aufgelöst, so folgt, daß zur Bestimmung von φ_1 auch noch

$$g_{13} = 0 \text{ für } x_1 = x_2 = 0$$

und schließlich ebenso, daß zugleich

$$g_{14} = 0 \text{ für } x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

gesetzt werden darf. Entsprechende Festsetzungen zur Bestimmung der übrigen Transformationsfunktionen, φ_2, φ_3, φ_4, ergeben sich aus denen für φ_1 durch zyklische Vertauschung. Im ganzen erhält man so außer (14) die Bedingungen:

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} g_{12} = 0 \text{ für } x_1 = 0 \text{ und für } x_2 = x_3 = x_4 = 0 \\ g_{23} = 0 \quad ,, \quad x_2 = 0 \quad ,, \quad ,, \quad x_3 = x_4 = x_1 = 0 \\ g_{34} = 0 \quad ,, \quad x_3 = 0 \quad ,, \quad ,, \quad x_4 = x_1 = x_2 = 0 \\ g_{41} = 0 \quad ,, \quad x_4 = 0 \quad ,, \quad ,, \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0 \\ \qquad g_{24} = 0 \text{ für } x_2 = x_3 = 0 \text{ und für } x_4 = x_1 = 0 \\ \qquad g_{31} = 0 \quad ,, \quad x_3 = x_4 = 0 \quad ,, \quad ,, \quad x_1 = x_2 = 0. \end{array} \right.$$

Die Bedingungen (14) und (16) sind offensichtlich so gewählt, daß im Ursprunge $0 \, (x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0)$ und soweit wie möglich in seiner Umgebung und auf den Koordinatenachsen,

1) Zunächst kann man sich Σ' in ein (gleichbezeichnetes) Bezugssystem transformiert denken, dessen Achsenrichtungen nirgends mit der Richtung, $ds = 0$, einer Vor- oder Nachkegelseite zusammenfallen. Dann ist überall $g_{\nu\nu}' \neq 0 \; (\nu = 1 \ldots 4)$ und die Gleichungen (15) lassen sich nach den vier völlig unabhängigen Differentialquotienten $\partial \varphi_\nu / \partial x_\nu \; (\nu = 1 \ldots 4)$ auflösen.

-flächen und -räumen das „natürliche" Maßsystem, $g_{\nu\nu} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$ $(\mu \neq \nu)$, gilt.

Unbestimmt bleiben hierbei nach der oben angestellten vorläufigen Überlegung allein: erstens die Werte von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ in 0, zweitens aber noch sechs weitere, die Funktionen φ_ν mitbestimmende Parameter, etwa die Werte von sechs Differentialquotienten der φ_ν in 0, da ja das Verschwinden jeder der sechs Größen $g_{\mu\nu}$ $(\mu \neq \nu)$ in 0 unter den die φ_ν bestimmenden Festsetzungen doppelt gezählt ist. Hiernach gibt es im allgemeinen bei gegebener Gestaltung der invarianten Weltkrümmung für jeden Weltpunkt als Ursprung eine gerade sechsparametrige Schar von Bezugssystemen, in denen die Gleichungen (14) und (16) mathematisch erfüllt sind.

§ 20. Der strenge Beweis hierfür ließ sich nur für die Umgebung von 0 unter der Voraussetzung führen, daß die $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}'$ und φ_ν analytische Funktionen ihrer Argumente seien.

In diesem Falle sind die Bedingungen (14) und (16) vollständig erfüllt, wenn nur alle die Differentialquotienten der $g_{\mu\nu}$ in 0 gleich 0 sind, deren Verschwinden in 0 aus (14) und (16) folgt, und jede Funktion φ_ν $(x_1 \ldots x_4)$ ist vollständig bestimmt, wenn ihr eigener Wert und die Werte ihrer sämtlichen Differentialquotienten in 0 bestimmt sind.

Um nun zu untersuchen, wie weit ein Bezugssystem Σ $(x_1 \ldots x_4)$ durch die Bedingungen (14) und (16) festgelegt ist, nehme ich an, daß der Ursprung des Bezugssystemes Σ $(x_1 \ldots x_4)$ mit dem eines fest gegebenen Bezugssystemes Σ' $(x_1' \ldots x_4')$ zusammenfällt und daß sowohl in Σ für die $g_{\mu\nu}$ $(x_1 \ldots x_4$ wie in Σ' für die $g_{\mu\nu}'$ $(x_1' \ldots x_4')$ die Gleichungen (14) und (16) erfüllt sind. Dann folgen zunächst für die 16 ersten Differentialquotienten von

$$x_1' = \varphi_1 (x_1 \ldots x_4), \ldots x_4' = \varphi_4 (x_1 \ldots x_4)$$

aus

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\beta} \cdot g_{\mu\nu}' \tag{17}$$

nach (14) und (16) die 10 Gleichungen:

$$g_{\alpha\alpha} = 1 = \sum_\nu \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\alpha}\right)^2, \tag{18a}$$

$$g_{\alpha\beta} = 0 = \sum_\nu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\beta} \quad (\alpha \neq \beta). \tag{18b}$$

Die letzten sechs Gleichungen sagen aus, daß in Σ sowohl wie in Σ' die Anfangsrichtungen der Koordinatenachsen aufeinander senkrecht stehen. Läßt man sie zusammenfallen, so daß

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\alpha} = 0 \text{ für } \nu \neq \alpha$$

und nach (18a)

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha} = +1$$

ist, so sind damit also gerade sechs weitere Bestimmungsparameter (nebst den Vorzeichen von $\partial\varphi_\alpha / \partial x_\alpha$) für Σ willkürlich festgelegt.

Für die 40 zweiten Differentialquotienten der $\varphi_\nu(x_1 \ldots x_4)$ erhält man, da nach (14) und (16) alle ersten Differentialquotienten der $g_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ und $g_{\mu\nu}'(x_1' \ldots x_4')$ in 0 verschwinden, durch Differentiation von (17) die 40 Gleichungen.

$$0 = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} \equiv \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}' \left(\frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma} \cdot \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\beta} + \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x_\beta \partial x_\sigma} \cdot \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\alpha} \right),$$

oder mit Berücksichtigung der für die $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}'$ und die ersten Differentialquotienten der φ_ν festgesetzten Werte:

$$0 = \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma} + \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\sigma} \quad (\alpha, \beta, \sigma = 1 \ldots 4).$$

Die Gleichungen für die 3ten Differentialquotienten der φ_ν und für die jeder höheren Ordnung ergeben sich in entsprechender Weise, indem man mittels (17) die Ausdrücke für alle nach (14) und (16) verschwindenden um je einen Grad niedrigeren Differentialquotienten der $g_{\alpha\beta}$ bildet und gleich Null setzt. Dabei erhält man für die

$$4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots (4 + n)}{(n+1)!}$$

Differentialquotienten $(n+1)$ter Ordnung der φ_ν nach (14) und (16) auch gerade ebensoviel[1]) Gleichungen.

---

1) Es liefert jede der ersten 4 Gleichungen (16) je $1 + \frac{3 \cdot 4 \ldots (n+2)}{n!}$ und jede der letzten 2 je $2 \cdot \frac{2 \cdot 3 \ldots (n+1)}{n!}$ Gleichungen. Das sind zusammen mit den aus (14) folgenden $4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \ldots (n+3)}{n!}$ Gleichungen wie behauptet:

$$4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \ldots (n+4)}{(n+1)!} \times \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 3(n+1) \cdot (n+2) + 2 \cdot 3 \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{(n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)} = 4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \ldots (n+4)}{(n+1)!}$$

Wenn alle Differentialquotienten der φ_ν von der 2ten bis einschließlich $n$ten Ordnung verschwinden, so haben diese Gleichungen die einfache Form [1])

$$(19)\quad 0 = \frac{\partial^n g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma_1} \cdot \partial x_{\sigma_2} \ldots \partial x_{\sigma_n}} \equiv \frac{\partial^{n+1} \varphi_\beta}{\partial x_\alpha \cdot \partial x_{\sigma_1} \ldots \partial x_{\sigma_n}} + \frac{\partial^{n+1} \varphi_\alpha}{\partial x_\beta \cdot \partial x_{\sigma_1} \ldots \partial x_{\sigma_n}}$$

$$(\alpha, \beta, \sigma_1, \ldots \sigma_n = 1 \ldots 4).$$

Die Differentialquotienten der φ_ν verschwinden daher von der 2ten bis zu jeder beliebigen Ordnung, wenn nur die Diskriminanten D_n aller zugehörigen Bestimmungsgleichungen (19) von Null verschieden sind.

Die nicht schwierige, aber etwas umständliche Untersuchung dieser Diskriminanten ergibt nun, daß sie alle die genannte Bedingung erfüllen, bis auf die für $n = 2$ gebildete, also den zweiten Differentialquotienten der $g_{\mu\nu}$ zugeordnete, Diskriminante D_2, welche allein verschwindet. [2])

---

1) Wegen

$$\frac{\partial x_\nu'}{\partial x_\sigma} \equiv \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\sigma} = 0 \text{ für } \nu \neq \sigma$$

treten rechts nur dieselben Differentialquotienten der $g_{\mu\nu}'$ nach $x_1' \ldots x_4$ wie links der $g_{\mu\nu}$ nach $x_1 \ldots x_4$ auf, also lauter verschwindende.

2) Aus (14), (16) und (19) folgt, daß ebenso wie in jeder Zeile von D_n auch in jeder Kolonne nur ein oder zwei Elemente von Null verschieden, also gleich Eins sein können. Denkt man sich jedes Paar nicht verschwindender Elemente der gleichen Zeile oder Kolonne durch eine Gerade verbunden, so entstehen Linienzüge, die nur für $n = 1$ und $n = 2$ geschlossen sein können und, wenn sie offen sind, stets eine ungerade Anzahl von Elementen verbinden. Jede Diskriminante D_n bildet ein Produkt der aus den Elementen je eines Linienzuges gebildeten Unterdeterminanten. Von diesen verschwindet keine außer der des — für $n = 2$ einzigen — geschlossenen Linienzuges, der die vier zu

$$\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x_3 \partial x_4}, \quad \frac{\partial^2 g_{23}}{\partial x_4 \partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 g_{34}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 g_{41}}{\partial x_2 \partial x_3}$$

gehörenden Zeilen verbindet. Also ist nur $D_2 = 0$. Ersetzt man einen der eben aufgezählten Differentialquotienten durch

$$\frac{\partial^2 g_{24}}{\partial x_1 \partial x_3} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 g_{13}}{\partial x_4 \partial x_2},$$

so nimmt die entsprechend gebildete Unterdeterminante den Wert $+2$ an. $D_2^* \neq 0$. Das hängt damit zusammen, daß in den Ausdrücken (10) für die Komponenten des Krümmungstensors, R, die letztgenannten zwei Differentialquotienten nur summiert und mit keinem anderen zweiten Differentialquotienten der $g_{\mu\nu}$ als den vier vorher angeführten verbunden — in $R_{12\,34}$, $R_{23\,14}$, $R_{31\,24}$ — auftreten.

Setzt man indessen noch einen geeignet gewählten, durch (16) nicht bestimmten 2ten Differentialquotienten der $g_{\mu\nu}$ (in Σ und in Σ') gleich 0, z. B.

$$\frac{\partial^2 g_{24}}{\partial x_1 \cdot \partial x_3} = 0 \tag{20}$$

und die hieraus nach (17) folgende Gleichung an die Stelle der aus

$$\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x_3 \cdot \partial x_4} = 0 \tag{21}$$

abgeleiteten, so tritt statt D_2 eine neue Diskriminante, D_2^*, auf, die sich als verschieden von 0 erweist.[1] Mit Hilfe dieser neuen Festsetzung (20) sind folglich sämtliche Differentialquotienten der φ_ν, außer den vier $\partial \varphi_\nu / \partial x_\nu$, die gleich 1 sind, zum Verschwinden gebracht. Das Bezugssystem Σ fällt mit Σ' zusammen und ist somit vollständig festgelegt.

Dabei ist zu seiner Bestimmung die eben ausgeschiedene Bedingung (21) noch gar nicht benutzt. Unter Voraussetzung der übrigen aus (14) und (16) für die ersten und zweiten Differentialqnotienten der $g_{\mu\nu}$ folgenden Gleichungen kann sie aber nach (10) ersetzt werden durch die Gleichung

$$R_{2413} \equiv (24, 13) = 0\,, \tag{21a}$$

welche gemäß den Transformationsgleichungen (11) der $R_{\lambda\nu\mu\tau}$ stets durch geeignete Drehung der aufeinander senkrechten Achsenrichtungen von Σ in 0 erfüllbar ist. Die Bedingung (21) kann daher im allgemeinen[2] eine der sechs Parameterfestsetzungen vertreten, die diese Richtungen bestimmen sollten.

Es fehlt noch der Beweis, daß es für jede Gestaltung der invarianten Weltkrümmnng mindestens ein Bezugssystem gibt, in dem die Bedingungen (14), (16) und (20) erfüllt sind. Dies läßt sich leicht durch vollständige Induktion zeigen.

---

1) Vgl. Anmerkung 2 auf vorhergehender Seite.

2) Die einzige Ausnahme bildet der Fall, daß $R_{24\,13} = 0$ für jede Lage der orthogonalen Achsenrichtungen von Σ in 0 gilt. Das tritt, wie sich aus den Transformationsgesetzen (11) der $R_{\lambda\nu\mu\tau}$ schließen läßt, nur dann ein, wenn 0 in einem Weltpunkte liegt, in dem alle Komponenten des Krümmungstensors R verschwinden. Dieser Fall kann indessen durch die Bedingung, $R \neq 0$ in 0, ausgeschlossen werden, die nach der allgemeinen Relativitätstheorie stets erfüllbar ist außer in einer durchaus materie- und gravitationsfreien, d. h. gänzlich leeren Welt, ($R \equiv 0$).

Es seien nämlich in Σ und in Σ' alle aus (14), (16) und (20) für die $g_{\mu\nu}$ bzw. $g_{\mu\nu}'$ und ihre Differentialquotienten bis zur $(n-1)$ten Ordnung folgenden Bedingungen erfüllt, und von den Differentialquotienten der n ersten Ordnungen der Transformationsfunktionen $\varphi_\nu(x_1 \dots x_4) = x_\nu'$ wieder nur die vier

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\nu} = 1 \quad (\nu = 1 \dots 4)$$

von Null verschieden, dann ergeben die Bedingungen für die Differentialquotienten $n$ter Ordnung der $g_{\mu\nu}$ nach (17) Gleichungen der Form:

$$(19\mathrm{a}) \left\{ \begin{aligned} 0 = \frac{\partial^n g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma_1} \dots \partial x_{\sigma_n}} = \frac{\partial^{n+1} \varphi_\beta}{\partial x_\alpha \cdot \partial x_{\sigma_1} \dots \partial x_{\sigma_n}} &+ \frac{\partial^{n+1} \varphi_\alpha}{\partial x_\beta \cdot \partial x_{\sigma_1} \dots \partial x_{\sigma_n}} \\ &+ \frac{\partial^n g_{\alpha\beta}'}{\partial x_{\sigma_1}' \dots \partial x_{\sigma_n}'}, \end{aligned} \right.$$

die sich von den Gleichungen (19) nur durch die hinzugekommenen dritten Glieder der rechten Seiten unterscheiden. Sie können daher, wenn für $n = 2$ wieder (20) für (21) eintritt, ebenfalls nach den $(n+1)$ten Differentialquotienten der φ_ν aufgelöst und folglich durch geeignete Wahl dieser Größen oder anders ausgedrückt: des Bezugssystemes Σ bei festgehaltenem Σ' befriedigt werden. Da ferner die für die $g_{\mu\nu}$ selbst aufgestellten Bedingungen (18a) und (18b) für sich bekanntlich stets ∞^6 Systeme von Lösungen $\partial\varphi_\nu / \partial x_\alpha$ zulassen, von denen ∞^5 zugleich die Bedingung (21) erfüllen, so gibt es auch stets ∞^5 und im allgemeinen ($R \neq 0$ in 0) nicht mehr Bezugssysteme Σ, die bei gegebener Lage ihres Ursprunges allen aufgestellten Bedingungen (14), (16) und (20) genügen.

§ 21. Dieses nur für analytische Funktionen, $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}'$, φ_ν, und die Umgebung von 0 bewiesene Ergebnis bestätigt durchaus die vorher ohne diese beschränkenden Voraussetzungen angestellte Vorüberlegung.[1]) Es darf daher wohl, wie es im folgenden geschieht, ohne Bedenken auf beliebige stetige und differenzierbare Funktionen $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}'$ und φ_ν und auf beliebig weit ausgedehnte Gebiete übertragen werden.

Demnach sind durch die rein formale Änderung der Einsteinschen Theorie, welche in der näheren Bestimmung der bei Einstein in weitem Umfange willkürlich wählbaren Koordinatenfunktionen $g_{\mu\nu}$ durch die Festsetzungen (14), (16)

1) Diese galt natürlich nur dem allgemeinen Falle $R \neq 0$.

und (20) liegt, im allgemeinen die Bezugssysteme einer $(4 + 5 = 9)$ parametrigen Gruppe mathematisch und nach § 12 auch für physikalische Beobachtungen vor allen übrigen als „berechtigte" ausgezeichnet. Nur bei singulärer Gestaltung der Weltkrümmung ist die Parameterzahl der physikalisch ausgezeichneten Schar um eins oder — nur für $R = 0$ — um zwei größer. Diese Schar ist also im allgemeinen enger begrenzt als bei der ursprünglichen Einsteinschen Relativitätstheorie (11 Parameter) und kann durch weitere Bedingungen, z. B. der Form $R_{\lambda\nu,\mu\tau} = 0$ in 0, leicht noch mehr eingeschränkt werden.

§ 22. Dabei ist noch zu beachten, daß die Transformationen zwischen den durch irgendwelche nähere Bestimmungen der $g_{\mu\nu}$ ausgezeichneten Bezugssystemen für die verschiedenen möglichen invarianten Krümmungsverhältnisse[1] der Welt im allgemeinen auch verschiedene Gruppen bilden.[2] Nach § 7 kann aber in physikalischem Sinne die Einsteinsche Theorie nur einem Relativitätspostulate genügen, dessen Gruppe unabhängig von dem zufälligen metrischen Charakter der Wirklichkeit berechtigt, also einer Untergruppe jeder einzelnen der erwähnten Gruppen gleich oder ähnlich ist.[3] Die weiteste Gruppe, die dieser Bedingung zugleich für jede physikalisch adäquate Darstellungsform der Theorie genügt, bestimmt die von der Theorie wirklich erfüllten Relativitätspostulate.

1) Es wäre sinnlos, zu fordern, daß in ein und demselben, bezüglich einer gegebenen Form der Einsteinschen Theorie berechtigten Bezugssysteme diese Form für zwei verschiedene oder gar für alle möglichen Krümmungsverhältnisse der Welt zugleich gelten müsse. Denn in keinem Weltpunkte und daher auch in keinem Koordinatenpunkte irgendeines überhaupt zulässigen Bezugssystemes dürfen nach der Theorie zwei verschiedene Werte derselben Krümmungsinvarianten als zugleich gültig vorgestellt werden.

2) Auszunehmen ist der Fall, daß nur $|g_{\mu\nu}| = \text{Const.}$ festgesetzt ist. Hier verknüpft stets dieselbe Gruppe von Transformationen, bestimmt durch $|g_{\mu\nu}| / | g_{\mu\nu}'| = \text{Const.} = |\partial x_\mu / \partial x_\nu'|^2$, die ausgezeichneten Bezugssysteme.

3) Eine solche Gruppe ist die Gruppe der Transformationen, bezüglich derer die aufgestellten Gleichungen kovariant sind. Doch ist nicht gesagt, daß es die weiteste Gruppe der verlangten Art ist, da nur Ähnlichkeit, nicht Formgleichheit, mit je einer Untergruppe jeder der verschiedenen, unter verschiedenen physikalischen Umständen ausgezeichneten Gruppen verlangt ist.

IV. Geometrische Bestimmung des von der neuen Einsteinschen Relativitätstheorie physikalisch erfüllten Relativitätspostulates und Vergleich mit der ursprünglichen Relativitätstheorie.

§ 23. Welche Gruppe dies ist oder: welche Relativitätspostulate die Einsteinsche Theorie im Sinne des § 7, d. h. unabhängig von der Darstellungsform der Theorie und den zufälligen physikalischen Bedingungen der Wirklichkeit, erfüllt, kann man aber weit einfacher und deutlicher, als wenn man die den $g_{\mu\nu}$ auferlegten Bedingungen bis an die Grenze des Zulässigen zu vermehren versuchte, durch Betrachtung des vierdimensionalen geometrischen Bildes erkennen, unter dem sich das Bewegungsgesetz, $\delta \int ds = 0$, der Einsteinschen Theorie für Lichtimpulse, $(ds = 0)$, und Massenpunkte,

$$(ds^2 = \Sigma\, g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu < 0),$$

in einer beliebigen Koordinatenmannigfaltigkeit $\Sigma\,(x_1 \ldots x_4)$ darstellt. Für jedes System beliebig gegebener Koordinatenfunktionen $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}\ (x_1 \ldots x_4)$, $(|\,g_{\mu\nu}\,| > 0)$ bestimmt die Gleichung

$$\delta \int d\,s = 0 \tag{22}$$

mit $ds^2 \leqq 0$ eine unendliche Schar von Weltlinien, den Extremalen der Mannigfaltigkeit $\Sigma\,(x_1 \ldots x_4)$. Jede der Weltlinien stellt eine nach der Theorie mögliche Bewegung eines Massenpunktes $(ds < 0)$ oder Lichtimpulses im Äther dar und ihre Gesamtheit die Gesamtheit der in derselben Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit möglichen Bewegungen von Lichtimpulsen und Massenpunkten.[1]) Die Menge aller dieser den verschiedenen Funktionensystemen $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}\,(x_1 \ldots x_4)$ zugeordneter Weltlinienscharen zerfällt nun in unendlich viele Teilmengen, deren jede alle Weltlinienscharen umfaßt, die je einer topologisch gleich sind und daher durch reine Beobachtungen von Licht und Massenbewegungen — ohne willkürliche Beziehung auf ein bestimmtes Bezugssystem — nicht voneinander unterschieden werden können. Zu jeder durch ein bestimmtes

1) Möglich heißt stets: mit den angenommenen Gesetzen verträglich, also hier: mit den angeführten Bewegungsgesetzen vereinbar. Vgl. § 7 Anm. 3.

Funktionensystem $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ gegebenen Extremalenschar gehören ferner nach Teil II ∞^1 weitere, die ihr nicht nur topologisch gleich sind, sondern sich mit ihr vollständig decken, nämlich alle, die zu den Funktionensystemen der Form $g_{\mu\nu} = \lambda \cdot f_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ gehören, wo λ unabhängig von $x_1 \ldots x_4$ ist. Jede der genannten Teilmengen läßt sich daher zerlegen in ∞^1 Untermengen, deren jede auch metrisch genau die gleichen Weltlinienscharen enthält. Diejenigen Unterschiede in den invarianten Krümmungsverhältnissen der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, die durch die Verschiedenheit der diesen Untermengen zugeordneten Werte des Parameters λ nach § 12 bedingt sind, kommen eben in den Bewegungsgesetzen der Einsteinschen Theorie für Lichtimpulse und Massenpunkte physikalisch nicht zum Ausdrucke.

§ 24. Die absolute mathematische Invarianz der Einsteinschen Bewegungsgesetze erfordert es und beruht offensichtlich auf dem Umstande, daß jede der genannten Untermengen alle Weltlinienscharen enthält, die durch stetige Deformationen aus einer von ihnen entstehen können; denn nach dem oben Ausgeführten ist ein Übergang einer Weltlinienschar von einer Untermenge zur anderen bei keiner stetigen Transformation möglich.

Der physikalische, durch reine (topologische) Beobachtungen prüfbare Inhalt des durch die Weltlinienscharen einer Untermenge Dargestellten ist aber schon vollständig durch jede beliebige einzelne Schar der Menge gegeben, da ja ein topologischer Unterschied zwischen den Scharen derselben Menge nicht besteht und sich jede Schar in jede andere allein durch geeignete Wahl des Bezugssystemes überführen läßt. Aus jeder Untermenge dürften daher alle Weltlinienscharen bis auf eine beliebige ausgeschieden werden, ohne daß dadurch der physikalische Inhalt der Darstellung gegenüber der Einsteinschen Gleichungen (22) eingeschränkt oder sonst wie verändert würde. Vielmehr wären bei diesem Verfahren nur solche Teile des durch (22) gegebenen Bildes entfernt, die sachlich nichts als wiederholte Darstellungen schon einmal dargestellter physikalischer Möglichkeiten bedeuten, obgleich sie, wie gesagt, zur Herstellung der mathematischen Invarianz der Theorie und wohl auch ihrer mathematisch eleganten Form unentbehrlich sind. Dagegen genügt eine Darstellung der oben beschriebenen Art[1]) der Forderung größtmöglicher sachlicher Knappheit.[2])

§ 25. Die Bezugssysteme der Wirklichkeit, in denen eine solche Darstellung erfüllt ist, d. h. in denen die Weltlinien der wirklichen Lichtimpulse und Massenpunkte einer der in ihr enthaltenen Extremalenscharen angehören, können wegen des rein kinematischen Charakters des Dargestellten prinzipiell durch geeignete Beobachtungen von allen übrigen unterschieden werden (vgl. § 4). Die Einsteinsche Theorie erfüllt daher physikalisch kein Relativitätspostulat, bezüglich dessen invarianter Transformationsgruppe nicht jede einzelne der genannten Extremalenscharen für sich invariant ist; denn da die Scharen durchweg topologisch verschieden oder durch den nach § 12 im allgemeinen unveränderlichen Parameter λ unterschieden sind, so ist eine Transformation der einen in die andere im allgemeinen unmöglich. In sich selbst kann aber nach Teil II eine vollständige Extremalenschar der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit nur bei einer Transformation übergehen, die das zugehörige Funktionensystem $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ bis auf einen konstanten Faktor λ ungeändert läßt, und außer der identischen gibt es keine Koordinatentransformation, die das allgemein leistet. Bezüglich jeder anderen Transformation besteht die Invarianz sogar nur in singulären und in der Wirklichkeit wohl ausgeschlossenen Fällen (vgl. § 12).

1) Analytisch nähert man sich einer solchen Darstellung durch das in Teil III, 3, angewandte Verfahren, den $g_{\mu\nu}$ als Koordinatenfunktionen Bedingungen aufzuerlegen, die sich allein durch geeignete Wahl des Bezugssystemes unabhängig von dem zufälligen invarianten metrischen Charakter der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit erfüllen lassen und die daher niemals alle ineinander transformierbaren und dem gleichen λ zugehörenden Extremalenscharen ausschließen können. Ob sie auf diesem Wege, der jedenfalls, wie in §§ 20, 21 gezeigt, recht weit führt, vollständig erreicht werden kann, ist fraglich. Indessen kommt es ja nicht darauf an, eine Darstellung der gekennzeichneten Art in mathematisch geschlossener Form wirklich herzustellen, sondern es genügt, daß sie überhaupt, wenn auch nur als geometrisches Bild, denkbar ist.

2) Vorausgesetzt, daß der Parameter λ eine wirkliche physikalische Bedeutung hat. Anderenfalls wäre aus jeder der in der Darstellung enthaltenen Mengen von je ∞^1 topologisch gleichen und nur durch den zugeordneten Wert von λ unterschiedenen Weltlinienscharen alle bis auf eine zu entfernen.

Die Einsteinsche Theorie genügt demnach physikalisch im Sinne des in § 7 Ausgeführten *überhaupt keinem Relativitätspostulate; sie ist ihrem Inhalte nach eine vollkommene Absoluttheorie.*

§ 26. Relativitätspostulate im Sinne des § 7 kann eine Theorie, die das Bewegungsgesetz (22) für Lichtimpulse und Massenpunkte anerkennt oder den durch (22) dargestellten Extremalen sonst eine physikalische Bedeutung zumißt, nur dann erfüllen, wenn sie zugleich nur solche singuläre Gestaltung der invarianten Weltkrümmung als möglich zuläßt, bei der durch nicht identische Koordinatentransformationen die Funktionen $g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x_1 \ldots x_4)$ auf die Form

$$g_{\mu\nu}' = \lambda \cdot f_{\mu\nu}(x_1' \ldots x_4')$$

gebracht und somit die zugehörige Extremalenschar in sich selbst transformiert werden kann. Je mehr eine Theorie in dieser Richtung die Möglichkeit verschiedenartiger Krümmungsverhältnisse der Welt einschränkt[1]), desto umfassenderen Relativitätspostulaten kann sie genügen. Die äußerste Grenze ist jedenfalls erreicht, wenn, wie es in der ursprünglichen Einsteinschen Relativitätstheorie geschieht, der Weltkrümmungstensor identisch gleich Null gesetzt wird. In diesem Falle gibt es bekanntlich nur eine Extremalenschar, und diese ist invariant bezüglich der Lorentzgruppe, komponiert mit den Gruppen der gleichförmigen Dilatation und Translation, d. h. sie geht in sich selbst über bei jeder Drehung, Verschiebung und gleichförmigen Dehnung der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit.

Es ergibt sich hiermit also: *Eine physikalische Theorie, welche den Extremalen (22) einer Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit mit Minkowskischer Normalform des Linienelements eine der Beobachtung zugängliche Bedeutung zuerkennt oder den invarianten metrischen Charakter der Mannigfaltigkeit sonstwie in gleichem Umfange als prinzipiell beobachtbar hinstellt, kann keinem weiteren Relativitätspostulate im Sinne des § 7 genügen, als denen der ursprünglichen Einsteinschen Relativitätstheorie.* Diese Theorie erscheint somit im Lichte der hier vertretenen Auffassung des

1) Das kann durch invariante, den $g_{\mu\nu}$ auferlegte Bedingungen geschehen, deren äußerste, $R_{\lambda\nu.\mu\tau} = 0$, das identische Verschwinden der Weltkrümmung verlangt.

Sinnes der physikalischen Relativitätspostulate nicht als eine mittlere unter gleichfalls möglichen, teils spezielleren, teils allgemeineren Relativitätstheorien, sondern als die Erfüllung des weitesten Relativitätspostulates, dem unter der bereits genannten Voraussetzung, daß die durch die Weltextremalen bestimmten invarianten Weltkrümmungsverhältnisse irgendwie prinzipiell beobachtbar seien, überhaupt genügt werden kann. Das entgegengesetzte Extrem ist verwirklicht in der neuen Einsteinschen Theorie, die, wie oben dargelegt, physikalisch gar kein Relativitätspostulat erfüllt.

Schluß:
Über den Grund der Unerfüllbarkeit des allgemeinen Relativitätspostulates.

§ 27. Ebenso wie die betrachteten Bewegungsgesetze bestimmen auch andere kinematische Gesetze allein durch ihren topologischen, durch Beobachtung prüfbaren Inhalt eine ihnen eigentümliche invariante Transformationsgruppe, deren Relativitätspostulat sie erfüllen.

Stellt man z. B. die kinematischen Gesetze des starren Körpers oder, genauer gesagt, die kinematischen Gesetze starr verbundener Massenpunkte etwa in der Form:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r^2 = \text{Const.}$$
$$t_1 - t_2 = 0$$

auf[1]), so ist die Gruppe der Transformationen, welche die durch die Gleichungen dargestellte unendliche Schar von Weltlinien und Weltliniensystemen in sich überführen, als invariante — von allen ihr ähnlichen nicht unterschiedene — Gruppe aufgefaßt, nur durch die Topologie dieser Weltlinienschar bestimmt, und da die Gleichungen die in ihnen enthaltenen Gesetze ohne überflüssige Wiederholungen ausdrücken, so muß jede Darstellung derselben Gesetze das zu dieser Gruppe gehörende Relativitätspostulat erfüllen. Es besteht also in jedem Falle physikalische Invarianz bezüglich der, je nach Wahl des Bezugssystemes verschieden geformten, Gruppe aller Transformationen, welche die Räume konstanter Zeit und die räumlichen Entfernungen gleichzeitiger Weltpunkte invariant lassen. Jede weitere Transformation ist

1) In dieser Form ist die Undurchdringlichkeit des starren Körpers nicht berücksichtigt.

physikalisch unberechtigt, gleichgültig ob die Gleichungen in einer auch ihr gegenüber invarianten Form aufgestellt sind oder nicht.

§ 28. Dies legt die Frage nahe, auf welcher allgemeinen Eigenschaft der kinematischen Gesetze diese Hervorhebung einer bestimmten invarianten Gruppe von Koordinatentransformationen als der physikalisch allein berechtigten beruht und ob nicht kinematische Gesetze denkbar seien, die auch physikalisch dem allgemeinsten Relativitätspostulate genügen.

Angenommen, ein solches Gesetzsystem sei gegeben. Denkt man sich dann wieder seinen Inhalt durch eine Schar oder allgemeiner (unendlich) viele, topologisch durchweg verschiedene Scharen von Weltlinien, -flächen usw. dargestellt, die je eine Gesamtheit der nach dem Gesetzsystem in derselben Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit möglichen Bewegungen und Konstellationen wiedergeben, so muß jede einzelne Schar bei jeder beliebigen stetigen Verzerrung wieder in sich selbst übergehen. Greift man also aus irgendeiner Schar einen beliebigen Teil, bestehend aus irgendeinem System von Weltlinien o. dgl., heraus, so ist dieser Teil nicht nur in der herausgegriffenen Form und Lage in der Schar enthalten, sondern zugleich in allen anderen beliebig verzerrten und verschobenen Gestalten und Lagen, die sich mit der ersten in jeder denkbaren Weise berühren und durchdringen. Das bedeutet aber: ein physikalisch dem allgemeinen Relativitätspostulate genügendes Gesetzsystem kann bei den räumlich-zeitlichen Gegenständen, für die es gilt, keine Art von gegenseitiger Berührung und Durchdringung ausschließen, die überhaupt geometrisch bei Wahrung des topologischen Charakters der einzelnen Gegenstände denkbar sind.

Dagegen kann ein solches Gesetzsystem sehr wohl das (regelmäßige) *unbedingte* [1]) Vorhandensein bestimmter Berührungen oder Durchdringungen fordern. Denn denkt man sich diese im geometrischen Bilde der Gesetze einmal gegeben, so

1) Wären die Berührungen oder Durchdringungen nur notwendige Folge anderer Koinzidenzen, so wäre damit das Vorhandensein dieser letzten für sich allein wieder ausgeschlossen, und die Gesetze könnten daher nicht dem allgemeinen Relativitätspostulate genügen.

folgt aus der absoluten Invarianz des Bildes eben nur, daß sie zugleich in jeder anderen durch Verschiebung und Verzerrung entstehenden Lage in ihm auftreten müssen. Das kann aber ihr Vorhandensein an sich niemals ausschließen oder einschränken.

Demnach ist es also der verneinende Inhalt der uns bekannten kinematischen Gesetze, d. h. die in ihnen enthaltene Beschränkung und Verneinung von Koinzidenzmöglichkeiten, welche die physikalische Erfüllung des allgemeinen Relativitätspostulates unmöglich machen.

§ 29. Bei dem oben betrachteten Gesetze der Licht- und Massenbewegung im Äther, das die Weltlinien der Lichtimpulse und Massenpunkte mit Extremalen der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit identifiziert, besteht der verneinende Teil des Inhaltes offensichtlich in dem aus dieser Gleichsetzung folgenden Satze, daß durch zwei verschiedene Weltpunkte niemals zwei verschiedene der genannten Weltlinien gehen können. In der Tat ist es gerade dieser Satz, der in jeder Koordinatenmannigfaltigkeit die Schar der miteinander verträglichen Weltlinien und damit zugleich die Gruppe der Transformationen, die sie in sich überführen — im allgemeinen ist es nur die identische Transformation — begrenzt, da er durch jede weitere der Schar zugefügte Weltlinie verletzt würde.

Ebenso sind Systeme starr verbundener Massenpunkte nur vermöge des Ausschlusses ihrer freien Beweglichkeit gegeneinander zu Messungen (z. B. als Skalenpunkte starrer Maßstäbe) und damit zur physikalischen Auszeichnung einer bestimmten Transformationsgruppe prinzipiell verwendbar.

Als Beispiel eines unbedingten rein bejahenden kinematischen Gesetzes könnte man etwa den Satz aufstellen, daß jeder Massenpunkt im Laufe der Zeit mit mindestens einem anderen zusammentreffen und dann dauernd mit ihm vereint bleiben müsse. Das geometrische Bild, das die Gesamtheit der diesem fingierten Gesetze nicht widersprechenden Weltlinien enthält, muß bei jeder stetigen Koordinatentransformation in sich selbst übergehen; denn seine Überdeckung mit einem beliebig verzerrten Bilde kann niemals eine einzeln stehende, mit keiner anderen zusammenfließende Weltlinie ergeben, also keine im ursprünglichen Bilde noch nicht enthaltene Weltlinie.

Tatsächlich scheinen indessen kinematische Gesetze dieser rein bejahenden Art niemals aufgestellt worden zu sein. *Aber nur dann, wenn ausschließlich solche unbedingten und bejahenden Gesetze, an Stelle der allein bekannten verneinenden und bedingten, die Welt beherrschten, würde das allgemeine Relativitätspostulat sachliche Geltung im Sinne des § 7 besitzen.*

Königsberg i. Pr., den 6. August 1917.

(Eingegangen 14. August 1917.)