**2. Über die Mechanik des deformierbaren
Körpers
vom Standpunkte der Relativitätstheorie;
von G. Herglotz.**

Der nachfolgende Versuch, die klassische Mechanik des deformierbaren Körpers im Sinne der Relativitätstheorie zu modifizieren, ist die Weiterführung eines seinerzeit gelegentlich der Beschäftigung mit dem relativ starren Körper gebildeten — sich übrigens ganz von selbst anbietenden — Ansatzes der Bewegungsgleichungen, zu dessen Ausarbeitung und Veröffentlichung ich — nach den in der Theorie des relativ starren Körpers zutage getretenen Verhältnissen — erst in diesem Frühjahr durch die Tatsache veranlaßt wurde, daß sich jene Bewegungsgleichungen der von Hrn. M. Laue aus anderem Gesichtspunkte her gegebenen allgemeinen Form¹⁾ einordnen. Diese Vergleichung veranlaßte überdies die Ausdehnung des Ansatzes auch auf nicht-adiabatische Bewegungen, so daß ich Hrn. M. Laue nach beiden Richtungen hin zu herzlichstem Dank für seine mir damals gemachten Mitteilungen verpflichtet bin.

Die Annahme, von der die vorliegenden Betrachtungen ausgehen, ist in Verfolgung der von Hrn. M. Planck in seinen Arbeiten²⁾ über das Prinzip der kleinsten Wirkung eingeschlagenen Richtung die, daß für die Bewegung des Körpers ein kinetisches Potential existiert, welches erstens den Lorentztransformationen gegenüber invariant (bei homogener Schreibweise) ist, und sich zweitens im Falle der Ruhe auf eine gegebene Funktion der Deformationen und der Entropie des einzelnen Volumelementes reduziert, wodurch sofort auch

1) Inzwischen erschienen in der Schrift „Das Relativitätsprinzip“, Braunschweig 1911, und in den Ann. d. Phys. 35. p. 524. 1911.

2) M. Planck, Berl. Ber. 1907. p. 542; Ann. d. Phys. 26. p. 1. 1908.

sein allgemeiner Ausdruck bestimmt ist (§ 5). Insbesondere erhellt, daß im Falle der Bewegung die Ruhedeformationen (§§ 1, 2) maßgebend sind, d. i. jene Deformationen, welche das Volumelement nach Rückgängigmachung der seiner Geschwindigkeit entsprechenden Lorentzkontraktion seiner Normalgestalt gegenüber aufweist.¹⁾

Aus der ersten Variation dieses kinetischen Potentials fließen nun sofort die Bewegungsgleichungen, zunächst in der Lagrangeschen (§ 6), dann in der Eulerschen Form (§ 7). In der letzteren sind sie formal mit jenem System identisch, das Hr. M. Abraham seinen Untersuchungen²⁾ über die Elektrodynamik bewegter Körper an die Spitze gestellt hat, aus welcher Vergleichung die Bedeutung der in ihnen auftretenden 16-gliedrigen Matrix zu entnehmen ist. Die zehn Relationen (§ 7), welche die Symmetrieeigenschaften jener Matrix und die Verknüpfung von Impuls, Energie und Spannung untereinander zum Ausdruck bringen, ergeben sich einfach als das vollständige System partieller Differentialgleichungen (§ 3), denen das kinetische Potential seiner durch obige beiden Annahmen bedingten Form zufolge genügen muß.

Der 10-gliedrigen Gruppe von „Bewegungen“ im (x, y, z, t) -Raum entsprechend gelten für die Bewegung des ganzen Körpers zehn allgemeine Integrale (§ 9), und zwar den vier Translationen entsprechend, die drei Impulssätze und der Energiesatz, den sechs Drehungen entsprechend aber einmal die drei Flächensätze, und dann drei weitere, diesen — zufolge der Gleichberechtigung von x, y, z, t — völlig analog gebildete Gleichungen, die mit den einmal integrierten Schwerpunktssätzen der klassischen Mechanik in Parallele zu setzen sind. Für kräftefrei-adiabatische Bewegungen insbesondere folgt aus ihnen, daß sich der Energiemittelpunkt — welcher sonach hier den Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt vertritt — geradlinig gleichförmig bewegt und daß seine Geschwindigkeit, mit der Gesamtenergie multipliziert, den Gesamtimpuls liefert.

1) Diese Bemerkung bereits bei M. Born, Ann. d. Phys. 30. p. 1. 1909.

2) M. Abraham, Rendiconti del circolo mat. di Palermo 28. p. 1. 1909.

Hängt das Ruhpotential nur von Entropie und Volumen ab, so erhält man den Fall einer idealen Flüssigkeit mit allseitig gleichem Druck (§ 10) und aus der Weberschen Form der hydrodynamischen Gleichungen ergeben sich die Helmholtzschen Sätze über Wirbelbewegungen für die Hydrodynamik der Relativitätstheorie (§ 11).

Knüpfen die Betrachtungen des ersten Teiles an die erste Variation des kinetischen Potentials an, so sind die des zweiten Teiles — über den Trägheitswiderstand und die Wellenmechanik — von der zweiten Variation desselben abhängig. Für das einzelne Volumelement hängen die Komponenten des Trägheitswiderstandes mit den Komponenten der diesen weckenden Beschleunigung durch eine lineare Transformation mit symmetrischer Determinante zusammen, deren sechs Koeffizienten als die Trägheitskoeffizienten oder Massendichten an der betreffenden Stelle des Körpers bezeichnet werden können. Will man nun nicht in jeder Richtung der gewöhnlichen Auffassung völlig entgegengesetzte¹⁾ Verhältnisse finden, so muß dem Postulate positiver Massen in der klassischen Mechanik analog die Forderung gestellt werden, daß die mit den sechs Trägheitskoeffizienten gebildete quadratische Form I — einfach die zweite Variation des kinetischen Potentials nach der Geschwindigkeit — definit positiv sein soll, oder daß, anschaulich ausgedrückt, der Trägheitswiderstand stets einen stumpfen Winkel mit der Beschleunigung bilden soll (§ 1).

Die Gesetze der Wellenmechanik werden (§ 4) durch eine andere quadratische Form W — einfach die vollständige zweite Variation des kinetischen Potentials — geliefert und es erweisen sich nun die beiden Formen I und W auf Grund ihrer Darstellungen (§§ 2, 3 und 5) als wechselweise auseinander ableitbar. Aus diesem allgemeinen Zusammenhang folgt, daß die an den Trägheitswiderstand gestellte Forderung die Unmöglichkeit von Wellen mit Überlichtgeschwindigkeit nach sich zieht, hierzu aber auch wirklich notwendig ist (§ 6).

Reduzieren sich die sechs Trägheitskoeffizienten auf nur zwei — einen longitudinalen und einen transversalen —,

1) Es wäre z. B. der hyperbolische Charakter der Bewegungsgleichungen nicht für alle Fälle sichergestellt (vgl. Anm. 1, p. 518).

so sind in dem Körper nur Longitudinal- und Transversalwellen mit nach allen Richtungen gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit möglich und umgekehrt (§ 7). Dabei lassen sich die beiden Trägheitskoeffizienten und die beiden Wellengeschwindigkeiten wechselweise auseinander ableiten.

Diese speziellen Verhältnisse sind bei der idealen Flüssigkeit (§ 8) — bei welcher aber die Geschwindigkeit der Transversalwellen Null wird — und bei dem elastischen isotropen Körper (§ 9) für verschwindende Ruhdeformationen realisiert. Bei letzterem ergibt die an den Trägheitswiderstand gestellte Forderung obere, durch die Ruhmassendichte gegebene Grenzen für die beiden Elastizitätskoeffizienten.

Erster Teil.

Das kinetische Potential und die Bewegungsgleichungen.

§ 1. Die Ruhdeformationen.

Man denke einen deformierbaren Körper sich irgendwie bewegend. Das Teilchen, dem im Normalzustande des Körpers die Koordinaten ξ, η, ζ zukommen, befinde sich zur Zeit t an der Stelle x, y, z des Raumes:

$$(1) \quad \begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta, t) \\ y = y(\xi, \eta, \zeta, t) \\ z = z(\xi, \eta, \zeta, t). \end{cases}$$

Die Formeln homogen zu gestalten, mag in dem Körper irgendwie eine Art Ortszeit:

$$(2) \quad \tau = \tau(\xi, \eta, \zeta, t), \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} > 0$$

eingeführt werden, und gesetzt sein:

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = x, & x_2 = y, & x_3 = z, & x_4 = t, \\ \xi_1 = \xi, & \xi_2 = \eta, & \xi_3 = \zeta, & \xi_4 = \tau, \end{cases}$$

wonach sich statt (1) gleichmäßiger schreiben läßt:

$$(4) \quad x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Bezeichnet man die partiellen Differentialquotienten der x_i nach den ξ_j mit a_{ij} :

$$(5) \quad a_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

so daß

$$(6) \quad dx_i = \sum_1^4 a_{ij} d\xi_j$$

wird, dann ist, unter s, u, v, w die Geschwindigkeit des Teilchens und deren Komponenten verstanden:

$$(7) \quad \frac{a_{14}}{a_{44}} = u, \quad \frac{a_{24}}{a_{44}} = v, \quad \frac{a_{34}}{a_{44}} = w, \quad a_{44} = \frac{\partial \tau}{\partial t} > 0$$

und bei durchgängiger Voraussetzung von Unterlichtgeschwindigkeit ($c = 1$) stets:

$$(8) \quad s = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} < 1.$$

Diejenige Lorentztransformation, welche die Geschwindigkeit des Teilchens auf Null bringt — die „Ruhtransformation“ — führt x, y, z, t über in:

$$(9) \quad \begin{cases} x^0 = x + \alpha u (ux + vy + wz) - \beta ut \\ y^0 = y + \alpha v (ux + vy + wz) - \beta vt \\ z^0 = z + \alpha w (ux + vy + wz) - \beta wt \\ t^0 = -\beta (ux + vy + wz) + \beta t. \end{cases}$$

$$(10) \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-s^2} (1 + \sqrt{1-s^2})}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$$

und die zu ihr inverse Transformation wird einfach durch Vertauschung der x, y, z, t und x^0, y^0, z^0, t^0 unter gleichzeitiger Vorzeichenänderung der u, v, w erhalten.

Gehen vermöge der Ruhtransformation die dx_i über in dx_i^0 :

$$(11) \quad dx_i^0 = \sum_1^4 a_{ij}^0 d\xi_j, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

so ist:

$$(12) \quad \begin{cases} a_{1i}^0 = a_{1i} + \alpha u (ua_{1i} + va_{2i} + wa_{3i}) - \beta ua_{4i} \\ a_{2i}^0 = a_{2i} + \alpha v (ua_{1i} + va_{2i} + wa_{3i}) - \beta va_{4i} \\ a_{3i}^0 = a_{3i} + \alpha w (ua_{1i} + va_{2i} + wa_{3i}) - \beta wa_{4i} \\ a_{4i}^0 = -\beta (ua_{1i} + va_{2i} + wa_{3i}) + \beta a_{4i} \end{cases}$$

und im besondern:

$$(13) \quad a_{14}^0 = a_{24}^0 = a_{34}^0 = 0, \quad a_{44}^0 = a_{44} \sqrt{1 - s^2} = \sqrt{-A_{44}} > 0.$$

Sei nunmehr:

$$(14) \quad dx^{0^2} + dy^{0^2} + dz^{0^2} = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 + 2de^2,$$

$$(15), \quad \left\{ \begin{array}{l} de^2 = e_{11} d\xi^2 + e_{22} d\eta^2 + e_{33} d\zeta^2 \\ \quad + 2e_{23} d\eta d\zeta + 2e_{31} d\zeta d\xi + 2e_{12} d\xi d\eta, \end{array} \right.$$

also:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + 2e_{11} = a_{11}^{0^2} + a_{21}^{0^2} + a_{31}^{0^2} \\ 1 + 2e_{22} = a_{12}^{0^2} + a_{22}^{0^2} + a_{32}^{0^2} \\ 1 + 2e_{33} = a_{13}^{0^2} + a_{23}^{0^2} + a_{33}^{0^2} \\ e_{23} = e_{32} = \frac{1}{2}(a_{12}^0 a_{13}^0 + a_{22}^0 a_{23}^0 + a_{32}^0 a_{33}^0) \\ e_{31} = e_{13} = \frac{1}{2}(a_{13}^0 a_{11}^0 + a_{23}^0 a_{21}^0 + a_{33}^0 a_{31}^0) \\ e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2}(a_{11}^0 a_{12}^0 + a_{21}^0 a_{22}^0 + a_{31}^0 a_{32}^0), \end{array} \right.$$

so geben die e_{ij} — die „Ruhdeformationen“ — diejenige Deformation an, welche die „Ruhgestalt“ eines Volumelements seiner Normalgestalt gegenüber aufweist, oder seine tatsächliche Deformation abzüglich der seiner Geschwindigkeit entsprechenden Lorentzkontraktion.

Für ein ruhendes Volumelement fallen die e_{ij} mit den in üblicher Weise definierten tatsächlichen Deformationen desselben zusammen.

Da die Determinante der Ruhtransformation + 1 ist, sind die Determinanten der a_{ij} und a_{ij}^0 einander gleich:

$$(16) \quad D = \frac{\partial(x, y, z, t)}{\partial(\xi, \eta, \zeta, \tau)} = |a_{ij}| = |a_{ij}^0|, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Wegen (13) aber ist $|a_{ij}^0| = \Delta a_{44}^0$, falls

$$(17) \quad \Delta = |a_{ij}^0|, \quad i, j = 1, 2, 3$$

das Verhältnis zwischen Ruhvolumen und Normalvolumen bezeichnet, so daß:

$$(18) \quad D = \Delta \sqrt{-A_{44}}.$$

Das Verhältnis zwischen tatsächlichem Volumen und Normalvolumen aber ist durch D/a_{44} gegeben.

Noch mag man die aus der Beziehung (14) abzulesende Darstellung:

$$(17') \quad \Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 + 2e_{11}, & 2e_{12}, & 2e_{13} \\ 2e_{21}, & 1 + 2e_{22}, & 2e_{23} \\ 2e_{31}, & 2e_{32}, & 1 + 2e_{33} \end{vmatrix}$$

bemerken.

§ 2. Zweite Darstellung der Ruhdeformationen.

Die quadratische Differentialform:

$$(19) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 = \sum_{i,j}^4 A_{ij} d\xi_i d\xi_j,$$

$$(20) \quad \begin{cases} A_{ij} = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + a_{3i}a_{3j} - a_{4i}a_{4j}, & i, j = 1, 2, 3, 4, \\ A_{44} = -a_{44}^2(1 - s^2) < 0, \end{cases}$$

und die lineare Differentialform:

$$(21) \quad dv = a_{14} dx + a_{24} dy + a_{34} dz - a_{44} dt = \sum_i^4 A_{i4} d\xi_i$$

gehen wegen ihrer Invarianz bezüglich der Lorentztransformationen bei Einführung der dx_i^0 an Stelle der dx_i über in:

$$(19') \quad ds^2 = dx^{0^2} + dy^{0^2} + dz^{0^2} - dt^{0^2},$$

$$(21') \quad dv = -a_{44}^0 dt^0,$$

so daß

$$(22) \quad ds^2 - \frac{1}{A_{44}} dv^2 = dx^{0^2} + dy^{0^2} + dz^{0^2}.$$

Vermöge (14) folgen hieraus die neuen Ausdrücke der Ruhdeformationen:

$$(16'') \quad \begin{cases} 1 + 2e_{11} = A_{11} - \frac{A_{14}^2}{A_{44}}, & e_{23} = e_{32} = \frac{1}{2} \left(A_{23} - \frac{A_{24}A_{34}}{A_{44}} \right), \\ 1 + 2e_{22} = A_{22} - \frac{A_{24}^2}{A_{44}}, & e_{31} = e_{13} = \frac{1}{2} \left(A_{31} - \frac{A_{34}A_{14}}{A_{44}} \right), \\ 1 + 2e_{33} = A_{33} - \frac{A_{34}^2}{A_{44}}, & e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2} \left(A_{12} - \frac{A_{14}A_{24}}{A_{44}} \right) \end{cases}$$

§ 3. Das vollständige System von zehn partiellen Differentialgleichungen für eine beliebige Funktion der Ruhdeformationen.

Welches sind nun die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß sich eine Funktion $\Omega(a_{ij})$ der 16 Größen a_{ij} durch die 6 Ruhdeformationen e_{ij} allein ausdrücken läßt?

Denkt man für den Augenblick eine vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit $R_4(X_1, X_2, X_3, X_4)$ mit der Maßbestimmung:

$$(23) \quad dS^2 = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 - dX_4^2$$

und in dieser die fünf Punkte M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 mit den Koordinaten:

$$(24) \quad \begin{cases} M_0 (X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 0), \\ M_i (X_1 = a_{1i}, X_2 = a_{2i}, X_3 = a_{3i}, X_4 = a_{4i}), \quad i = 1, 2, 3, 4, \end{cases}$$

so zeigen die Ausdrücke (20) der A_{ij} , daß diese und daher auch Ω bloß abhängen von der relativen Lage dieser fünf Punkte gegeneinander. Es ist somit Ω invariant gegenüber den „Drehungen“ um M_0 und gestattet also die sechs infinitesimalen Transformationen:

$$(25) \quad \begin{cases} X_2 \frac{\partial f}{\partial X_3} - X_3 \frac{\partial f}{\partial X_2}, & X_3 \frac{\partial f}{\partial X_1} - X_1 \frac{\partial f}{\partial X_3}, & X_1 \frac{\partial f}{\partial X_2} - X_2 \frac{\partial f}{\partial X_1}, \\ X_1 \frac{\partial f}{\partial X_4} + X_4 \frac{\partial f}{\partial X_1}, & X_2 \frac{\partial f}{\partial X_4} + X_4 \frac{\partial f}{\partial X_2}, & X_3 \frac{\partial f}{\partial X_4} + X_4 \frac{\partial f}{\partial X_3}. \end{cases}$$

Aus dieser Tatsache fließen, falls:

$$(26) \quad \Omega_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

$$(27) \quad \bar{\Omega}_{ij} = \sum_{h=1}^4 a_{jh} \Omega_{ih}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

gesetzt wird, die sechs partiellen Differentialgleichungen für Ω :

$$(28) \quad \begin{cases} \bar{\Omega}_{23} = \bar{\Omega}_{32}, & \bar{\Omega}_{31} = \bar{\Omega}_{13}, & \bar{\Omega}_{12} = \bar{\Omega}_{21} \\ \bar{\Omega}_{14} + \bar{\Omega}_{41} = 0, & \bar{\Omega}_{24} + \bar{\Omega}_{42} = 0, & \bar{\Omega}_{34} + \bar{\Omega}_{43} = 0. \end{cases}$$

Weiter bedenke man, daß die e_{ij} und daher auch Ω von der Wahl des Zeitparameters völlig unabhängig sind. Führt man aber τ' an Stelle von τ ein:

$$(29) \quad \begin{cases} \tau = \tau' + \lambda(\xi, \eta, \zeta, \tau'), \\ d\tau = d\tau' + \lambda_1 d\xi + \lambda_2 d\eta + \lambda_3 d\zeta + \lambda_4 d\tau', \end{cases}$$

so erfahren die a_{ij} die Transformation:

$$(30) \quad a'_{ij} = a_{ij} + \lambda_j a_{i4}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

der gegenüber also Ω invariant sein muß.

Aus dieser Tatsache fließen, falls die λ_j unendlich klein gewählt werden, die vier partiellen Differentialgleichungen für Ω :

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^4 a_{i4} \Omega_{i1} = 0, \quad \sum_1^4 a_{i4} \Omega_{i2} = 0, \quad \sum_1^4 a_{i4} \Omega_{i3} = 0, \\ \sum_1^4 a_{i4} \Omega_{i4} = 0, \end{array} \right.$$

oder auch vermöge (27):

$$(31') \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^4 a_{i4} \bar{\Omega}_{i1} = 0, \quad \sum_1^4 a_{i4} \bar{\Omega}_{i2} = 0, \quad \sum_1^4 a_{i4} \bar{\Omega}_{i3} = 0, \\ \sum_1^4 a_{i4} \bar{\Omega}_{i4} = 0. \end{array} \right.$$

Umgekehrt aber bilden (28) und (31) wegen der Gruppeneigenschaft der Transformationen ein vollständiges System von partiellen Differentialgleichungen mit den sechs unabhängigen Lösungen e_{ij} , so daß man in ihnen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß:

$$(32) \quad \Omega(a_{ij}) = \Omega(e_{ij})$$

ist, vor sich hat.

§ 4. Eine allgemeine Transformationsformel.

Stehen die vier Funktionen $f_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ($i = 1, 2, 3, 4$) mit den vier Funktionen $\varphi_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, ($j = 1, 2, 3, 4$) in der Beziehung:

$$(33) \quad D f_i = \sum_1^4 a_{ij} \varphi_j, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

so gilt die Identität:

$$(34) \quad D \sum_1^4 \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \sum_1^4 \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_j}.$$

Zum Beweise fasse man die Gleichungen (4) auf als Transformation der Punkte (ξ_i) eines Euklidischen R_4 in die Punkte (x_i) .

Wird dabei ein Flächenelement $d\omega$ mit den Projektionen $d\omega_j$ auf die vier Koordinatenebenen und ein von ihm ausgehendes Linienelement $d\sigma$ mit den Projektionen $d\xi_j$ auf die vier Koordinatenachsen übergeführt in ein Flächenelement do

mit den Projektionen do_i und ein von ihm ausgehendes Linien-
element ds mit den Projektionen dx_i , so ist

$$(36) \quad \sum_1^4 do_i dx_i = D \sum_1^4 d\omega_j d\xi_j,$$

denn die Summen stellen das vierfache Volumen des unendlich kleinen Kegels mit do bzw. $d\omega$ als Grundfläche und dem Endpunkte von ds bzw. $d\sigma$ als Spitze dar.

Da sich nun nach (6) die $D d\xi_j$ in die dx_i genau so transformieren, wie nach (33) die φ_j in die f_i , so muß auch sein:

$$(37) \quad \sum_1^4 f_i do_i = \sum_1^4 \varphi_j d\omega_j.$$

Integriert man hier über eine geschlossene Fläche und verwandelt gleich das Oberflächenintegral in ein über das Innere der Fläche erstrecktes Volumintegral, so folgt:

$$(38) \quad \int \sum_1^4 \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \int \sum_1^4 \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_j} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4$$

und hieraus durch Zusammenziehen der Fläche auf einen Punkt die zu beweisende Beziehung (34).

Als spezielle Folgerung aus (34) sei insbesondere die für:

$$(39) \quad \begin{cases} \varphi_1 = 0, & \varphi_2 = 0, & \varphi_3 = 0, & \varphi_4 = Df, \\ f_1 = a_{14}f, & f_2 = a_{24}f, & f_3 = a_{34}f, & f_4 = a_{44}f \end{cases}$$

sich ergebende Beziehung:

$$(40) \quad \frac{1}{D} \frac{\partial (Df)}{\partial \tau} = \frac{\partial (a_{14}f)}{\partial x} + \frac{\partial (a_{24}f)}{\partial y} + \frac{\partial (a_{34}f)}{\partial z} + \frac{\partial (a_{44}f)}{\partial t}$$

angemerkt. Aus ihr ergeben sich in leicht ersichtlicher Weise für die beiden Differentiationssymbole:

$$(41) \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$(42) \quad D_t f = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (uf)}{\partial x} + \frac{\partial (vf)}{\partial y} + \frac{\partial (wf)}{\partial z}$$

die Darstellungen:

$$(41') \quad \frac{df}{dt} = \frac{1}{a_{44}} \frac{\partial f}{\partial \tau},$$

$$(42') \quad D_t f = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{Df}{a_{44}} \right).$$

§ 5. Das kinetische Potential.

Zur Dynamik des Körpers übergehend, sei vorab noch mit:

$$(4') \quad \varepsilon = \varepsilon(\xi, \eta, \zeta, \tau)$$

die pro Einheit des Normalvolumens berechnete Entropie desselben bezeichnet und bemerkt, daß diese allen Lorentztransformationen, also insbesondere auch der Ruhtransformation gegenüber invariant¹⁾ ist.

Nunmehr soll für den Körper die Existenz eines kinetischen Potentials der Form:

$$(43) \quad \int \Phi d\xi d\eta d\zeta d\tau$$

vorausgesetzt werden. Dieses Potential soll erstens für den Fall der Ruhe die Form:

$$(43') \quad \int \Omega(e_{ij}, \varepsilon) d\xi d\eta d\zeta dt$$

eines gewöhnlichen, von den Deformationsgrößen e_{ij} und der Entropie ε abhängenden kinetischen Potentials annehmen, d. h. also, es soll

$$(44) \quad \Phi = \Omega(e_{ij}, \varepsilon) a_{44}$$

für den Fall der Ruhe sein.

Es soll dieses Potential zweitens den Lorentztransformationen gegenüber invariant sein, d. h. also, es soll Φ die gleiche Invarianz aufweisen.

Aus dieser Annahme folgt, daß der allgemeine Ausdruck von Φ erhalten wird, wenn man (44) der zur Ruhtransformation inversen Transformation unterwirft. Dies aber geschieht einfach dadurch, daß man unter den e_{ij} die Ruhdeformationen (16) versteht und a_{44} durch seinen Ruhwert a_{44}^0 aus (13) ersetzt. Sonach wird allgemein sein:

$$(45) \quad \Phi(a_{ij}, \varepsilon) = \Omega(e_{ij}, \varepsilon) a_{44}^0 = \Omega(e_{ij}, \varepsilon) \sqrt{-A_{44}}.$$

Die Temperatur ϑ ist gemäß ihres Zusammenhangs mit dem kinetischen Potential im Falle der Ruhe:

$$(46) \quad \vartheta = - \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}$$

1) M. Planck, Berl. Ber. 1907. p. 542.

und da für sie die Ruhtransformation lautet ¹⁾:

$$(47) \quad \vartheta_0 = \beta \vartheta = \frac{a_{44}}{\sqrt{-A_{44}}} \vartheta,$$

wird sie allgemein durch:

$$(48) \quad a_{44} \vartheta = - \frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

gegeben.

Die pro Einheit der Zeit und des Normalvolumens zugeführte Wärme ist dann durch:

$$(49) \quad \vartheta \frac{ds}{dt} = \frac{1}{a_{44}} \vartheta \frac{\partial s}{\partial \tau} = - \frac{1}{a_{44}^2} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \tau}$$

dargestellt.

Für die Differentialquotienten von Ω nach a_{ij} :

$$(26) \quad \Omega_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

bzw. für die aus ihnen abgeleiteten Größen:

$$(27) \quad \bar{\Omega}_{ij} = \sum_h^4 a_{jh} \Omega_{ih}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

gelten gerade die in § 3 abgeleiteten zehn Relationen (28) und (31'). Durch diese Ω_{ij} drücken sich dann die Differentialquotienten von $\Phi(a_{ij}, \epsilon)$ nach a_{ij} :

$$(50) \quad \Phi_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial a_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

in der Form aus:

$$(51) \quad \Phi_{ij} = \sqrt{-A_{44}} \Omega_{ij} - \frac{1}{2} \frac{\Omega}{A_{44}} \frac{\partial A_{44}}{\partial a_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

§ 6. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen.

Für die Bewegung des Körpers soll jetzt gelten:

$$(52) \quad \begin{cases} 0 = \delta \int \Phi d\xi d\eta d\zeta d\tau \\ \quad + \int (\Xi \delta x + H \delta y + Z \delta z + T \delta t + E \delta \epsilon) d\xi d\eta d\zeta d\tau. \end{cases}$$

1) M. Planck, l. c.

Die Integration nach ξ, η, ζ soll sich über den ganzen endlich gedachten Körper, die nach τ aber von τ_1 bis τ_2 erstrecken. Geometrisch ausgedrückt sollen, falls:

$$(53) \quad \varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

die Oberfläche des Körpers darstellt, die Integrale im (ξ, η, ζ, τ) -Raume über das durch die beiden Ebenen $\tau = \tau_1$ und $\tau = \tau_2$ aus dem Zylinder (53) herausgeschnittene Volumen genommen werden. Die $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t, \delta \varepsilon$ sollen irgendwelche Variationen der fünf Funktionen x, y, z, t, ε der unabhängig Veränderlichen ξ, η, ζ, τ bedeuten, von denen nur $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t$ für $\tau = \tau_1$ und $\tau = \tau_2$, d. h. also an den beiden Grundflächen des Zylinders verschwinden, im übrigen ebenso wie $\delta \varepsilon$ willkürlich wählbar sein sollen.

Die Größen

$$\frac{1}{a_{44}} \Xi, \quad \frac{1}{a_{44}} H, \quad \frac{1}{a_{44}} Z$$

stellen die an der Einheit des Normalvolumens angreifenden äußeren Kräfte dar, während sich die Bedeutung von T und E im weiteren Verlaufe aus (52) selbst ergibt.

Hieraus folgen nach den Regeln der Variationsrechnung erstens für jeden Punkt des Körpers die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen:

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Xi = \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi_{13}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi_{14}}{\partial \tau}, \\ H = \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi_{24}}{\partial \tau}, \\ Z = \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_{32}}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi_{33}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi_{34}}{\partial \tau}, \\ T = \frac{\partial \Phi_{41}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_{42}}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi_{43}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi_{44}}{\partial \tau}, \\ E = - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}. \end{array} \right.$$

Diese fünf Gleichungen sind aber — der Willkürlichkeit des Zeitparameters τ entsprechend — voneinander abhängig. Setzt man nämlich in (52):

$$(55) \quad \delta x_i = a_{i4} \omega, \quad \delta \varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \omega,$$

wo $\omega = \omega(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ für $\tau = \tau_1$ und $\tau = \tau_2$ verschwinden, sonst beliebig sein soll, so ist:

$$(56) \quad \delta a_{ij} = \frac{\partial a_{i4}}{\partial \xi_j} \omega = \frac{\partial a_{ij}}{\partial \tau} \omega + \frac{\partial \omega}{\partial \xi_j} a_{i4}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

$$(57) \quad \delta \Phi = \sum_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial a_{ij}} \delta a_{ij} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \omega + \sum_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial a_{ij}} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_j} a_{i4}.$$

Hier stellt das zweite Glied die Änderung von Φ bei der Transformation (30) für die differentiellen Werte $\lambda_j = \partial \omega / \partial \xi_j$ dar. Nach (45) geht bei dieser Transformation allgemein Φ über in:

$$(58) \quad \Phi(a'_{ij}, \varepsilon) = (1 + \lambda_4) \Phi(a_{ij}, \varepsilon),$$

so daß jene Änderung gleich $\lambda_4 \Phi = \Phi(\partial \omega / \partial \tau)$ und damit:

$$(57') \quad \delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \omega$$

wird.

Da nun ω für $\tau = \tau_1$ und $\tau = \tau_2$ verschwinden soll, fällt in (52) das erste Glied weg und es resultiert so die gewünschte Beziehung:

$$(59) \quad a_{14} \Xi + a_{24} H + a_{34} Z + a_{44} T + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} E = 0.$$

Da nach (48):

$$(60) \quad E = - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} = a_{44} \vartheta$$

ist, so wird:

$$(61) \quad -T = u \Xi + v H + w Z + \vartheta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}$$

und es stellt sonach $-T/a_{44}$ die Summe der pro Einheit der Zeit und des Normalvolumens geleisteten Arbeit und zugeführten Wärme dar.

Die Regeln der Variationsrechnung ergeben zweitens die Grenzglie der rechten Seite von (52) zu:

$$(62) \quad \int \sum_{ij} \Phi_{ij} \delta x_i d\omega_j,$$

wobei das Integral über die gesamte Begrenzungsfläche des Integrationsgebietes im (ξ, η, ζ, τ) -Raume zu erstrecken ist, und die $d\omega_j$ die Projektionen eines Elementes $d\omega$ dieser Fläche bezeichnen. Nun ist an den beiden Grundflächen des Zylinders $\delta x_i = 0$, während für die Elemente des Mantels:

$$(63) \quad d\omega_1 : d\omega_2 : d\omega_3 : d\omega_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

gilt, wofern:

$$(64) \quad d\varphi = \varphi_1 d\xi + \varphi_2 d\eta + \varphi_3 d\zeta + \varphi_4 d\tau, \quad \varphi_4 = 0$$

gesetzt wird.

Das Nullsetzen der Grenzglieber liefert daher die an der Oberfläche des Körpers geltenden Grenzbedingungen:

$$(65) \quad \varphi_1 \Phi_{i1} + \varphi_2 \Phi_{i2} + \varphi_3 \Phi_{i3} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Da nun vorhin bei der speziellen Variation (55) die Grenzglieber in Wegfall kamen, muß längs des Zylindermantels:

$$(66) \quad \sum_1^4 {}_{ij} a_{i4} \varphi_j \Phi_{ij} = 0$$

sein, und es ist daher wegen $a_{44} \neq 0$ die vierte der Gleichungen (65) eine Folge der übrigen und kann demnach weggelassen werden.

§ 7. Die Eulerschen Bewegungsgleichungen und die Relationen zwischen Impuls, Energie und Spannung.

Die Eulersche Form der Bewegungsgleichungen zu erhalten, hat man nur in jeder der Gleichungen (54) nach dem Satze von § 4 an Stelle der Differentialquotienten nach ξ, η, ζ, τ solche nach x, y, z, t einzuführen.

Es ergeben sich so unmittelbar, wenn

$$(67) \quad DX = \Xi, \quad DY = H, \quad DZ = Z, \quad DT = T,$$

$$(68) \quad DF_{ij} = \sum_1^4 {}_h a_{jh} \Phi_{ih}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

$$(69) \quad F = -\frac{\Omega}{A} = -\frac{\Phi}{D}$$

gesetzt wird, die Eulerschen Bewegungsgleichungen:

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{\partial F_{11}}{\partial x} + \frac{\partial F_{12}}{\partial y} + \frac{\partial F_{13}}{\partial z} + \frac{\partial F_{14}}{\partial t}, \\ Y = \frac{\partial F_{21}}{\partial x} + \frac{\partial F_{22}}{\partial y} + \frac{\partial F_{23}}{\partial z} + \frac{\partial F_{24}}{\partial t}, \\ Z = \frac{\partial F_{31}}{\partial x} + \frac{\partial F_{32}}{\partial y} + \frac{\partial F_{33}}{\partial z} + \frac{\partial F_{34}}{\partial t}, \\ T = \frac{\partial F_{41}}{\partial x} + \frac{\partial F_{42}}{\partial y} + \frac{\partial F_{43}}{\partial z} + \frac{\partial F_{44}}{\partial t}, \\ \vartheta = A\sqrt{1-s^2} \frac{\partial F}{\partial s}. \end{array} \right.$$

Hier sind X, Y, Z die an der Einheit des tatsächlichen Volumens angreifenden äußeren Kräfte, und da nach (61):

$$(71) \quad -T = uX + vY + wZ + Q,$$

$$(72) \quad Q = \frac{\vartheta}{A\sqrt{1-s^2}} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial F}{\partial s} \frac{ds}{dt}$$

ist, so stellt $-T$ die pro Einheit der Zeit und des tatsächlichen Volumens geleistete Arbeit und zugeführte Wärme dar.

Für die F_{ij} erhält man nach (27) und (51) weiter:

$$(73) \quad \Delta F_{ij} = \bar{\Omega}_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\Omega}{A_{44}} \frac{\partial A_{44}}{\partial a_{i4}} a_{j4}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

und die Beziehungen (28) und (31') zwischen den $\bar{\Omega}_{ij}$ ergeben für die F_{ij} die 10 Relationen:

$$(74) \quad \begin{cases} F_{23} = F_{32}, & F_{31} = F_{13}, & F_{12} = F_{21}, \\ F_{14} + F_{41} = 0, & F_{24} + F_{42} = 0, & F_{34} + F_{43} = 0. \end{cases}$$

$$(75) \quad \sum_1^4 a_{i4} F_{ij} + a_{j4} F = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Aus der Form¹⁾ der Gleichungen (70) entnimmt man, daß die F_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) die Spannungen darstellen, und daß Impuls $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und Energie $\mathfrak{E}$ pro Einheit des tatsächlichen Volumens berechnet durch:

$$(76) \quad \mathfrak{X} = F_{14}, \quad \mathfrak{Y} = F_{24}, \quad \mathfrak{Z} = F_{34}, \quad \mathfrak{E} = -F_{44}$$

gegeben sind, so daß man insbesondere in der vierten dieser Gleichungen:

$$(70') \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = uX + vY + wZ + Q$$

die Energiegleichung vor sich hat.

Impuls, Energie und Spannungen sind nach (75) miteinander verknüpft durch die Relationen:

$$(77) \quad \begin{cases} \mathfrak{X} = uF + uF_{11} + vF_{21} + wF_{31} \\ \mathfrak{Y} = vF + uF_{12} + vF_{22} + wF_{32} \\ \mathfrak{Z} = wF + uF_{13} + vF_{23} + wF_{33} \\ \mathfrak{E} = F + u\mathfrak{X} + v\mathfrak{Y} + w\mathfrak{Z}. \end{cases}$$

1) M. Abraham, Rendiconti del. circ. mat. d. Palermo 28, p.1. 1909.

Pro Einheit des Normalvolumens berechnet sind Impuls und Energie:

$$(78') \quad \bar{x} = \frac{D}{a_{44}} \mathfrak{X}, \quad \bar{y} = \frac{D}{a_{44}} \mathfrak{Y}, \quad \bar{z} = \frac{D}{a_{44}} \mathfrak{Z}, \quad \bar{\mathfrak{E}} = \frac{D}{a_{44}} \mathfrak{E}$$

oder bei Beachtung des Zusammenhanges zwischen den F_{ij} und Φ_{ij} :

$$(78'') \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{44} \bar{x} = \sum_1^4 a_{4i} \Phi_{1i}, \quad a_{44} \bar{y} = \sum_1^4 a_{4i} \Phi_{2i}, \quad a_{44} \bar{z} = \sum_1^4 a_{4i} \Phi_{3i}, \\ \quad \quad \quad - a_{44} \bar{\mathfrak{E}} = \sum_1^4 a_{4i} \Phi_{4i} \end{array} \right.$$

und speziell, falls $t = \tau$ gewählt wird:

$$(78''') \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = \Phi_{14} = \Phi_u, \quad \bar{y} = \Phi_{24} = \Phi_v, \quad \bar{z} = \Phi_{34} = \Phi_w, \\ \quad \quad \quad \bar{\mathfrak{E}} = -\Phi_{44} = u \Phi_u + v \Phi_v + w \Phi_w - \Phi. \end{array} \right.$$

Um schließlich auch die Grenzbedingungen (65) durch die F_{ij} auszudrücken, schreibe man sie erst symmetrischer:

$$(65) \quad \varphi_1 \Phi_{i1} + \varphi_2 \Phi_{i2} + \varphi_3 \Phi_{i3} + \varphi_4 \Phi_{i4} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

und es sei auf x, y, z, t umgerechnet:

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\xi, \eta, \zeta) = f(x, y, z, t), \\ df = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz + f_4 dt. \end{array} \right.$$

Bemerkt man dann, daß die Transformation, welche $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ in f_1, f_2, f_3, f_4 überführt — vom Faktor D abgesehen — gerade kontragredient zu derjenigen ist, welche $\Phi_{i1}, \Phi_{i2}, \Phi_{i3}, \Phi_{i4}$ in $F_{i1}, F_{i2}, F_{i3}, F_{i4}$ überführt, so erhält, daß die Grenzbedingungen in den F_{ij} ausgedrückt lauten:

$$(80) \quad f_1 F_{i1} + f_2 F_{i2} + f_3 F_{i3} + f_4 F_{i4} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Sind noch n_1, n_2, n_3 die Richtungskosinusse der Normalen der Oberfläche des Körpers und s_n die Komponente der Geschwindigkeit eines Teilchens in derselben nach dieser Normalen, so ist:

$$(81) \quad f_1 : f_2 : f_3 : f_4 = n_1 : n_2 : n_3 : -s_n.$$

Daher man statt (80) auch schreiben kann:

$$(80') \quad n_1 F_{i1} + n_2 F_{i2} + n_3 F_{i3} = s_n F_{i4}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Bei einer jeden Lorentztransformation der x_j transformieren sich die F_{ij} genau wie die Produkte $u_i x_j$ der x_j in die zu ihnen kontragredienten u_i .

Die „Ruhwerte“ F_{ij}^0 der F_{ij} ergeben sich aus dem bisherigen für $u = v = w = 0$, wo dann: $a_{ij} = a_{ij}^0$ ($i, j = 1, 2, 3$) wird zu:

$$(82) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta F_{ij}^0 = \sum_1^3 a_{jh}^0 \frac{\partial \Omega}{\partial a_{ih}^0}, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ F_{i4}^0 = F_{4i}^0 = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ F_{44}^0 = \frac{\Omega}{\Delta} = -F = -\mathfrak{E}^0. \end{array} \right.$$

Aus ihnen lassen sich die F_{ij} durch die zur Ruhtransformation inverse Transformation ableiten.

§ 8. Eine dritte Form der Bewegungsgleichungen und die relativen Spannungen.

Führt man in (70) an Stelle der Differentialquotienten $\partial/\partial t$ die Differentiationssymbole D_t (vgl. § 4) ein, so erhält man die dritte Form der Bewegungsgleichungen:

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = D_t \mathfrak{X} + \frac{\partial S_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S_{12}}{\partial y} + \frac{\partial S_{13}}{\partial z}, \\ Y = D_t \mathfrak{Y} + \frac{\partial S_{21}}{\partial x} + \frac{\partial S_{22}}{\partial y} + \frac{\partial S_{23}}{\partial z}, \\ Z = D_t \mathfrak{Z} + \frac{\partial S_{31}}{\partial x} + \frac{\partial S_{32}}{\partial y} + \frac{\partial S_{33}}{\partial z}, \\ -T = D_t \mathfrak{E} + \frac{\partial (\mathfrak{X} - u \mathfrak{E})}{\partial x} + \frac{\partial (\mathfrak{Y} - v \mathfrak{E})}{\partial y} + \frac{\partial (\mathfrak{Z} - w \mathfrak{E})}{\partial z}, \end{array} \right.$$

wobei die hier auftretenden „relativen“¹⁾ Spannungen S_{ij} , ($i, j = 1, 2, 3$):

$$(84) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{11} = F_{11} - u \mathfrak{X}, \quad S_{12} = F_{12} - v \mathfrak{X}, \quad S_{13} = F_{13} - w \mathfrak{X}, \\ S_{21} = F_{21} - u \mathfrak{Y}, \quad S_{22} = F_{22} - v \mathfrak{Y}, \quad S_{23} = F_{23} - w \mathfrak{Y}, \\ S_{31} = F_{31} - u \mathfrak{Z}, \quad S_{32} = F_{32} - v \mathfrak{Z}, \quad S_{33} = F_{33} - w \mathfrak{Z}, \end{array} \right.$$

1) M. Abraham, l. c.

mit Impuls und Energie durch:

$$(85) \quad \begin{cases} \mathfrak{X} = u \mathfrak{E} + u S_{11} + v S_{21} + w S_{31} \\ \mathfrak{Y} = v \mathfrak{E} + u S_{12} + v S_{22} + w S_{32} \\ \mathfrak{Z} = w \mathfrak{E} + u S_{13} + v S_{23} + w S_{33} \end{cases}$$

verknüpft sind.

Die Grenzbedingungen (80') werden wegen:

$$(86) \quad s_n = u n_1 + v n_2 + w n_3,$$

in den S_{ij} ausgedrückt lauten:

$$(87) \quad n_1 S_{i1} + n_2 S_{i2} + n_3 S_{i3} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

und fordern also das Verschwinden der relativen Spannungen für jedes Flächenelement.

§ 9. Die zehn allgemeinen Integrale der Bewegungsgleichungen.

Der zehngliedrigen Gruppe der „Bewegungen“ im (x, y, z, t) -Raum mit der Maßbestimmung:

$$(88) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$$

entsprechend, gelten für den ganzen Körper 10 dem Schwerpunkt-, Flächen- und Energieprinzip der gewöhnlichen Mechanik analoge Sätze.

Werden nämlich in der Relation (52) für $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t$ die Komponenten einer unendlich kleinen derartigen Bewegung genommen und dazu: $\delta \varepsilon = 0$ gewählt, so wird für diese Variationen $\delta \Phi = 0$ und somit das erste Glied der rechten Seite verschwinden. Da aber diese Variationen die Bedingung für $\tau = \tau_1$ und $\tau = \tau_2$ zu verschwinden nicht erfüllen, wird andererseits die linke Seite jener Relation nicht Null, sondern durch das Grenzglied (62) zu ersetzen sein:

$$(89) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int \sum_{i,j}^4 \Phi_{ij} \delta x_i d\omega_j \\ & = \int (\Xi \delta x + H \delta y + Z \delta z + T \delta t) d\xi d\eta d\zeta d\tau. \end{aligned} \right.$$

In dem Oberflächenintegral links fällt nun infolge der Grenzbedingungen (65) der vom Mantel des Zylinders herrührende Teil überhaupt fort, während für die Grundflächen $\tau = \tau_1$ und

$\tau = \tau_2$ des Zylinders: $d\omega_1 = d\omega_2 = d\omega_3 = 0$, $d\omega_4 = d\xi d\eta d\zeta$ ist, so daß:

$$(89') \quad \left\{ \int \sum_1^4 \Phi_{i4} \delta x_i d\xi d\eta d\zeta \right\}_{\tau_1}^{\tau_2} = \int (\Xi \delta x + H \delta y + Z \delta z + T \delta t) d\xi d\eta d\zeta d\tau.$$

Läßt man jetzt $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ werden, und wählt $t = \tau$, so folgt

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int (\mathfrak{X} \delta x + \mathfrak{Y} \delta y + \mathfrak{Z} \delta z - \mathfrak{E} \delta t) dv \\ = \int (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z + T \delta t) dv, \end{array} \right.$$

wo $dv = dx dy dz$ das Volumelement des Körpers bezeichnet, und die Integrale über den ganzen zur Zeit t von dem Körper eingenommenen Raum zu erstrecken sind.

Aus dieser für jede unendlich kleine Bewegung $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t$ gültigen Relation fließen den 10 unabhängigen infinitesimalen Bewegungen entsprechend die oben erwähnten Sätze, und zwar den infinitesimalen Translationen:

$$(91) \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}$$

entsprechend der Impuls- und Energiesatz:

$$(92) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int \mathfrak{X} dv = \int X dv, \quad \frac{d}{dt} \int \mathfrak{Y} dv = \int Y dv, \\ \frac{d}{dt} \int \mathfrak{Z} dv = \int Z dv, \quad - \frac{d}{dt} \int \mathfrak{E} dv = \int T dv, \end{array} \right.$$

den infinitesimalen Drehungen:

$$(93) \quad y \frac{\partial f}{\partial x} - z \frac{\partial f}{\partial y}, \quad z \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial z},$$

entsprechend der Flächensatz:

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int (y \mathfrak{Z} - z \mathfrak{Y}) dv = \int (y Z - z Y) dv, \\ \frac{d}{dt} \int (z \mathfrak{X} - x \mathfrak{Z}) dv = \int (z X - x Z) dv, \\ \frac{d}{dt} \int (x \mathfrak{Y} - y \mathfrak{X}) dv = \int (x Y - y X) dv \end{array} \right.$$

und den infinitesimalen Drehungen:

$$(95) \quad t \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial t}, \quad t \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial f}{\partial t}, \quad t \frac{\partial f}{\partial z} + z \frac{\partial f}{\partial t},$$

entsprechend die Sätze:

$$(96) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \int (t \mathfrak{X} - x \mathfrak{E}) dv = \int (t X + x T) dv, \\ \frac{d}{dt} \int (t \mathfrak{Y} - y \mathfrak{E}) dv = \int (t Y + y T) dv, \\ \frac{d}{dt} \int (t \mathfrak{Z} - z \mathfrak{E}) dv = \int (t Z + z T) dv. \end{cases}$$

Werden von den Gleichungen (96) die mit t multiplizierten entsprechenden Gleichungen (92) subtrahiert, so erhalten sie die Form:

$$(96') \quad \begin{cases} \int \mathfrak{X} dv = \frac{d}{dt} \int x \mathfrak{E} dv + \int x T dv, \\ \int \mathfrak{Y} dv = \frac{d}{dt} \int y \mathfrak{E} dv + \int y T dv, \\ \int \mathfrak{Z} dv = \frac{d}{dt} \int z \mathfrak{E} dv + \int z T dv, \end{cases}$$

wodurch sie in eine gewisse Parallele zu den einmal integrierten Schwerpunktsätzen der gewöhnlichen Mechanik treten.

Bewegt sich der Körper insbesondere kräftefrei-adiabatisch, so sind Impuls, Impulsmoment und Energie konstant und überdies bewegt sich der Energiemittelpunkt geradlinig und gleichförmig und seine Geschwindigkeit mit der Energie multipliziert ergibt den Impuls.

§ 10. Die hydrodynamischen Gleichungen.

Die hydrodynamischen Grundgleichungen zu erhalten, hat man Ω nur von Ruhvolumen und Entropie abhängen zu lassen:

$$(97) \quad \Omega = \Omega(A, \varepsilon) = \Omega\left(\frac{D}{V - A_{44}}, \varepsilon\right).$$

Dieser Ansatz liefert, falls

$$(98) \quad p = \frac{\partial \Omega}{\partial A}$$

gesetzt wird, nach kurzer Zwischenrechnung:

$$(99) \quad \bar{\Omega}_{ij} = p A \left(\delta_{ij} - \frac{1}{2 A_{44}} \frac{\partial A_{44}}{\partial a_{i4}} a_{j4} \right) \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{für } i \neq j, \quad \delta_{ii} = 1$$

und damit folgt dann:

$$(100) \quad F_{ij} = p \delta_{ij} - \frac{m}{a_{44}^2} \frac{\partial A_{44}}{\partial a_{i4}} a_{j4} \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

$$(101) \quad m = \frac{F + p}{1 - s^2} = \frac{\Delta \Omega_{\Delta} - \Omega}{\Delta(1 - s^2)} = - \frac{\Delta F_{\Delta}}{1 - s^2}.$$

Es sind sonach Impuls und Energie pro Einheit des tatsächlichen Volumens

$$(102) \quad \mathfrak{X} = mu, \quad \mathfrak{Y} = mv, \quad \mathfrak{Z} = mw, \quad \mathfrak{E} = m - p$$

und die relativen Spannungen erhalten die einfachen Werte:

$$(103) \quad \begin{cases} S_{11} = S_{22} = S_{33} = p, \\ S_{23} = S_{32} = S_{31} = S_{13} = S_{12} = S_{21} = 0. \end{cases}$$

Damit geht aber die dritte Form der Bewegungsgleichungen (81) über in die hydrodynamischen Grundgleichungen:

$$(104) \quad \begin{cases} D_t(mu) + \frac{\partial p}{\partial x} = X, \\ D_t(mv) + \frac{\partial p}{\partial y} = Y, \\ D_t(mw) + \frac{\partial p}{\partial z} = Z, \\ -D_t(m) + \frac{\partial p}{\partial t} = T. \end{cases}$$

Pro Einheit des Normalvolumens berechnet sind Impuls und Energie:

$$(105) \quad \bar{\mathfrak{X}} = \mu u, \quad \bar{\mathfrak{Y}} = \mu v, \quad \bar{\mathfrak{Z}} = \mu w, \quad \bar{\mathfrak{E}} = \mu - p \Delta \sqrt{1 - s^2}.$$

$$(106) \quad \mu = m \Delta \sqrt{1 - s^2} = \beta (\Delta \Omega_{\Delta} - \Omega).$$

Wählt man $t = \tau$ und bedenkt, daß dann

$$(107) \quad \Phi = \Omega \left(\frac{D}{\sqrt{1 - s^2}}, \varepsilon \right) \sqrt{1 - s^2}$$

wegen $D = |\alpha_{ij}|$ ($i, j = 1, 2, 3$) die u, v, w bloß in der Verbindung $s = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ enthält, so lehrt (78'') daß:

$$(108) \quad \mu = \frac{1}{s} \Phi_s, \quad \bar{\mathfrak{E}} = s \Phi_s - \Phi$$

ist. Insbesondere zeigt der Ausdruck (105) des Impulses, daß der Flüssigkeit eine longitudinale und transversale Trägheit zukommt, welche pro Einheit des Normalvolumens durch

$$(109) \quad \mu_t = \mu = \frac{1}{s} \Phi_s, \quad \mu_l = \Phi_{ss}$$

gegeben wird, wobei man noch berechnet:

$$(110) \quad \begin{cases} \Phi_s = s \beta (\Delta \Omega_\Delta - \Omega), \\ \Phi_{ss} = \beta^3 (\Delta \Omega_\Delta - \Omega) + s^2 \beta^3 \Delta^2 \Omega_{\Delta\Delta}. \end{cases}$$

Da hier die unabhängigen Variablen D, ϵ, s sind, hat man damit — genauer präzisiert — die adiabatisch-isochoren Werte der Trägheitskoeffizienten.

§ 11. Die Webersche Form der hydrodynamischen Gleichungen und die Helmholtzschen Sätze über Wirbelbewegungen.

Aus den Gleichungen (104) folgt in leicht ersichtlicher Weise:

$$(111) \quad \begin{cases} D [dx D_t(mu) + dy D_t(mv) + dz D_t(mw) - dt D_t(m)] \\ = -D dp + \Xi dx + H dy + Z dz + T dt. \end{cases}$$

Setzt man jetzt:

$$(112) \quad M = \frac{m D}{a_{44}^2} = \frac{\mu}{a_{44}}$$

und verwendet für D_t die Darstellung (42), so geht die linke Seite von (111) über in:

$$(113) \quad \begin{cases} \frac{\partial M a_{14}}{\partial \tau} dx + \frac{\partial M a_{24}}{\partial \tau} dy + \frac{\partial M a_{34}}{\partial \tau} dz - \frac{\partial M a_{44}}{\partial \tau} dt \\ = \frac{\partial}{\partial \tau} (M dv) - \frac{1}{2} M dA_{44} \\ = \frac{\partial}{\partial \tau} (M dv) - d(M A_{44}) - \sqrt{-A_{44}} d(M \sqrt{-A_{44}}). \end{cases}$$

Da aber weiter

$$(114) \quad M \sqrt{-A_{44}} = \mu \sqrt{1-s^2} = \Delta \Omega_\Delta - \Omega$$

ist, so schreibt sich (111) nach kurzer Reduktion schließlich:

$$(115) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} (M dv) = d(M A_{44}) + d\Pi, \\ d\Pi = \Xi dx + H dy + Z dz + T dt + E d\epsilon. \end{cases}$$

Ist also in $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, $d\tau$ ausgedrückt:

$$(116) \quad dH = A d\xi + B d\eta + \Gamma d\zeta,$$

so liefert die Vergleichung der Koeffizienten von $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ in (115) die den von H. Weber gegebenen gewöhnlichen hydrodynamischen Gleichungen analogen:

$$(117) \quad \begin{cases} \frac{\partial M A_{14}}{\partial \tau} = \frac{\partial M A_{44}}{\partial \xi} + A, \\ \frac{\partial M A_{24}}{\partial \tau} = \frac{\partial M A_{44}}{\partial \eta} + B, \\ \frac{\partial M A_{34}}{\partial \tau} = \frac{\partial M A_{44}}{\partial \zeta} + \Gamma. \end{cases}$$

Setzt man andererseits in (115) $d\tau = 0$ und wählt $t = \tau$, so folgt:

$$(118) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{\mathfrak{X}} dx + \bar{\mathfrak{Y}} dy + \bar{\mathfrak{Z}} dz \\ = d\mu(s^2 - 1) + \Xi dx + H dy + Z dz + \vartheta d\varepsilon. \end{cases}$$

Im Falle also für $dt = 0$:

$$(119) \quad \Xi dx + H dy + Z dz + \vartheta d\varepsilon = d\omega(x, y, z, t)$$

ist, wird für jeden geschlossenen, auf Null reduzierbaren Integrationsweg:

$$(120) \quad \frac{d}{dt} \int (\bar{\mathfrak{X}} dx + \bar{\mathfrak{Y}} dy + \bar{\mathfrak{Z}} dz) = 0.$$

Oder: das über eine geschlossene, stets aus den gleichen Teilchen bestehende Kurve genommene Linienintegral des Impulses hat bei der Bewegung der Flüssigkeit einen der Zeit nach konstanten Wert.

Damit aber treten sofort die Helmholtzschen Wirbelsätze in Kraft, wofern die Wirbelgeschwindigkeit p , q , r hier durch den Curl des Impulses:

$$(121) \quad p = \frac{\partial \bar{\mathfrak{Z}}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\mathfrak{Y}}}{\partial z}, \quad q = \frac{\partial \bar{\mathfrak{X}}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\mathfrak{Z}}}{\partial x}, \quad r = \frac{\partial \bar{\mathfrak{Y}}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\mathfrak{X}}}{\partial y}$$

definiert wird.

§ 12. Das kinetische Potential des isotropen elastischen Körpers für kleine Ruhdeformationen.

Handelt es sich um einen elastischen — im Normalzustand isotropen — Körper, so hat man Ω außer von der

Entropie nur noch von den drei Hauptdilatationen, welche die Ruhgestalt eines Volumelementes seiner Normalgestalt gegenüber aufweist, abhängen zu lassen. An ihrer Stelle aber kann man die drei, aus ihnen symmetrisch zusammengesetzten Invarianten J_1, J_2, J_3 der Ruhdeformation einführen, welche sich aus der Identität in λ :

$$(122) \quad \begin{vmatrix} e_{11} + \lambda, & e_{12}, & e_{13} \\ e_{21}, & e_{22} + \lambda, & e_{23} \\ e_{31}, & e_{32}, & e_{33} + \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda + J_3$$

zu:

$$(123) \quad \begin{cases} J_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}, \\ J_2 = (e_{22} e_{33} - e_{23}^2) + (e_{33} e_{11} - e_{31}^2) + (e_{11} e_{22} - e_{12}^2), \\ J_3 = e_{11} e_{22} e_{33} + 2 e_{23} e_{31} e_{12} - e_{11} e_{23}^2 - e_{22} e_{31}^2 - e_{33} e_{12}^2 \\ \quad = |e_{ij}| \end{cases}$$

bestimmen, und mit Δ durch:

$$(124) \quad \Delta^2 = 1 + 2 J_1 + 4 J_2 + 8 J_3$$

zusammenhängen. Sind insbesondere die Ruhdeformationen e_{ij} genügend klein und verschwinden die Spannungen im Normalzustand, so kann man Ω als quadratische Funktion der e_{ij} , also in der Form:

$$(125) \quad \Omega = -M - \frac{1}{2} A J_1^2 + 2 B J_2$$

annehmen, wo A, B, M noch von ε abhängen können.

Zweiter Teil.

Der Trägheitswiderstand und die Wellenmechanik.

§ 1. Die sechs Trägheitskoeffizienten und das Postulat des positiv definiten Charakters der Form I .

Wählt man für das Folgende speziell $\tau = t$, so wird:

$$(1) \quad \Phi = \Phi(a_{ij}, u, v, w, \varepsilon) \quad i, j = 1, 2, 3$$

und der Impuls pro Einheit des Normalvolumens:

$$(2) \quad \tilde{x} = \Phi_u, \quad \tilde{y} = \Phi_v, \quad \tilde{z} = \Phi_w.$$

Ändern sich nun bei einer Zunahme der Geschwindigkeitskomponenten u, v, w um $\gamma_1 dt, \gamma_2 dt, \gamma_3 dt$ diese Impulskomponenten um $\Gamma_1 dt, \Gamma_2 dt, \Gamma_3 dt$, so mögen $-\Gamma_1, -\Gamma_2, -\Gamma_3$

die pro Einheit des Normalvolumens berechneten Komponenten des durch die Beschleunigung:

$$(3) \quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \quad \gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}$$

geweckten Trägheitswiderstandes heißen.

Offenbar ist nach (2), falls:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \sum_1^3 i j \mu_{ij} \gamma_i \gamma_j \\ \quad \quad \quad = \delta^2 \Phi \text{ für } \delta u = \gamma_1, \delta v = \gamma_2, \delta w = \gamma_3 \end{array} \right.$$

gesetzt wird:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_1} = \mu_{11} \gamma_1 + \mu_{12} \gamma_2 + \mu_{13} \gamma_3, \\ \Gamma_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_2} = \mu_{21} \gamma_1 + \mu_{22} \gamma_2 + \mu_{23} \gamma_3, \\ \Gamma_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_3} = \mu_{31} \gamma_1 + \mu_{32} \gamma_2 + \mu_{33} \gamma_3, \\ \mu_{ij} = \mu_{ji}. \end{array} \right.$$

Die „Trägheitskoeffizienten“ μ_{ij} repräsentieren die pro Einheit des Normalvolumens berechneten Massen oder Dichten des Körpers.¹⁾ Es sind — da a_{ij} , u , v , w , ε die unabhängigen Variablen sind — genauer präzisiert die adiabatisch-isochoren Trägheitskoeffizienten.

Hiernach gibt es stets drei zueinander normale Richtungen der Beschleunigung — die „Hauptträgheitsrichtungen“ —, für welche der Trägheitswiderstand mit der Beschleunigung gleiche oder entgegengesetzte Richtung besitzt. Es sind die Hauptachsen der Fläche zweiten Grades: $\Gamma(x, y, z) = C$.

Nimmt man die Komponenten von Beschleunigung und Trägheitswiderstand nach diesen drei Hauptträgheitsrichtungen, so wird:

$$(4') \quad \Gamma = \mu_1 \gamma_1^2 + \mu_2 \gamma_2^2 + \mu_3 \gamma_3^2,$$

$$(5') \quad \Gamma_1 = \mu_1 \gamma_1, \quad \Gamma_2 = \mu_2 \gamma_2, \quad \Gamma_3 = \mu_3 \gamma_3.$$

1) Allgemein sind die Gleichungen I. (54) linear in den zweiten Ableitungen der Funktionen x, y, z, t nach ξ, η, ζ, τ . Wählt man nun speziell: $t = \tau$, so sind die μ_{ij} die Koeffizienten, mit denen multipliziert die drei Ableitungen zweiter Ordnung von x, y, z nach t , also die Beschleunigungen in den ersten drei der Gleichungen I. (54) auftreten.

Schließt man daher die Möglichkeit, daß eine Beschleunigung einen ihr gleich gerichteten Trägheitswiderstand weckt, aus, so sind die drei Hauptträgheitskoeffizienten μ_1, μ_2, μ_3 positiv und also die quadratische Form $I(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ definit positiv.

Wegen:

$$(6) \quad I(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 + \gamma_3 I_3$$

kann man diese Annahme auch dahin aussprechen: es soll der Trägheitswiderstand stets einen stumpfen Winkel mit der Beschleunigung bilden.

Ist die Richtung der Geschwindigkeit und jede zu ihr normale eine Hauptträgheitsrichtung, so erhält man den wohlbekannten Fall rein longitudinaler und transversaler Trägheitskoeffizienten μ_l und μ_t . Dann wird

$$(4'') \quad I = \mu_l \gamma_l^2 + \mu_t \gamma_t^2,$$

falls:

$$(7) \quad \gamma_l = \frac{1}{s}(u \gamma_1 + v \gamma_2 + w \gamma_3), \quad \gamma_t = \sqrt{\gamma^2 - \gamma_l^2}$$

die longitudinale und transversale Komponente der Beschleunigung — d. i. parallel und normal zur Geschwindigkeit — bezeichnen.

Für ein ruhendes Element sind die Trägheitskoeffizienten μ_i^0 sofort anzugeben. Aus I. (77) folgt unmittelbar:

$$(8) \quad \begin{cases} \mu_{ij}^0 = \Delta F_{ij}^0, & i \neq j, \\ \mu_{ii}^0 = \bar{\mathfrak{G}}^0 + \Delta F_{ii}^0, \end{cases}$$

also:

$$(9) \quad I_0(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \bar{\mathfrak{G}}^0(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) + \Delta \sum_{i,j}^3 F_{ij}^0 \gamma_i \gamma_j.$$

Die Hauptträgheitsrichtungen sind für ein ruhendes Element sonach einfach die Hauptspannungsrichtungen.

Für den Fall rein longitudinaler und transversaler Masse muß offenbar

$$(10) \quad F_{ij}^0 = 0, \quad i \neq j, \quad F_{ii}^0 = p,$$

also:

$$(11) \quad \mu_t^0 = \mu_l^0 = \bar{\mathfrak{G}}^0 + p \Delta$$

sein.

§ 2. Erste Darstellung der Form I .

Die Trägheitskoeffizienten für ein bewegtes Element zu berechnen, hat man jetzt nur die Form $I(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, also die zweite Variation $\delta^2 \Phi$ von:

$$(12) \quad \Phi = \Omega(e_{ij}, \epsilon) \sqrt{1-s^2}$$

für

$$(13) \quad \delta u = \gamma_1, \quad \delta v = \gamma_2, \quad \delta w = \gamma_3$$

zu bilden. Man hat zunächst:

$$(14) \quad \delta^2 \Phi = \sqrt{1-s^2} \delta^2 \Omega + 2 \delta \Omega \delta \sqrt{1-s^2} + \Omega \delta^2 \sqrt{1-s^2},$$

$$(15) \quad \begin{cases} \delta \Omega = \sum_{ij}^3 e_{ij} \frac{\partial \Omega}{\partial e_{ij}} \delta e_{ij}, \\ \delta^2 \Omega = \sum_{ijhk}^3 e_{ij} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial e_{ij} \partial e_{hk}} \delta e_{ij} \delta e_{hk} + \sum_{ij}^3 e_{ij} \frac{\partial \Omega}{\partial e_{ij}} \delta^2 e_{ij}. \end{cases}$$

Zur Bildung der δe_{ij} , $\delta^2 e_{ij}$ gehe man nun davon aus, daß $dt = d\tau = 0$ genommen:

$$(16) \quad d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(u dx + v dy + w dz)^2}{1-s^2}$$

in $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ ausgedrückt lautet:

$$(16') \quad d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 + 2 de^2,$$

$$(17) \quad de^2 = \sum_{ij}^3 e_{ij} d\xi_i d\xi_j.$$

Läßt man also in $d\sigma^2$, u , v , w übergehen in $u + \gamma_1$, $v + \gamma_2$, $w + \gamma_3$ und entwickelt nach Potenzen der $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, so wird aus $d\sigma^2$ werden:

$$(18) \quad d\sigma^{*2} = d\sigma^2 + 2 \delta de^2 + \delta^2 de^2 + \dots$$

$$(19) \quad \begin{cases} \delta de^2 = \sum_{ij}^3 \delta e_{ij} d\xi_i d\xi_j, \\ \delta^2 de^2 = \sum_{ij}^3 \delta^2 e_{ij} d\xi_i d\xi_j. \end{cases}$$

Die aus (16) direkt herzustellende Entwicklung von $d\sigma^{*2}$ nach den γ_i wird sonach durch ihre linearen Glieder die δe_{ij} , durch ihre quadratischen Glieder aber die $\delta^2 e_{ij}$ liefern.

Jene Entwicklung selbst kurz auszuführen, bemerke man erst, daß die aus $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ durch die Ruhtransformation hervorgehenden Komponenten der „Ruhbeschleunigung“:

$$(20) \quad \gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0, \gamma^0 = \sqrt{\gamma_1^{0^2} + \gamma_2^{0^2} + \gamma_3^{0^2}}$$

sind:

$$(21) \quad \begin{cases} \beta^{-2} \gamma_1^0 = \gamma_1 + \alpha u (u \gamma_1 + v \gamma_2 + w \gamma_3), \\ \beta^{-2} \gamma_2^0 = \gamma_2 + \alpha v (u \gamma_1 + v \gamma_2 + w \gamma_3), \\ \beta^{-2} \gamma_3^0 = \gamma_3 + \alpha w (u \gamma_1 + v \gamma_2 + w \gamma_3) \end{cases}$$

und speziell für die longitudinalen und transversalen Komponenten gilt:

$$(22) \quad \gamma_l^0 = \beta^3 \gamma_l, \quad \gamma_t^0 = \beta^2 \gamma_t.$$

Zweitens setze man:

$$(23) \quad \begin{cases} dv = u dx + v dy + w dz, \\ dv^0 = u dx^0 + v dy^0 + w dz^0, \end{cases}$$

$$(24) \quad \begin{cases} d\gamma = \gamma_1 dx + \gamma_2 dy + \gamma_3 dz, \\ d\gamma^0 = \gamma_1^0 dx^0 + \gamma_2^0 dy^0 + \gamma_3^0 dz^0 \end{cases}$$

und stelle auf Grund der Gleichungen, welche für $dt = 0$ die dx, dy, dz mit den dx^0, dy^0, dz^0 (I. § 1) verknüpfen, fest, daß:

$$(25) \quad \begin{cases} dv = \beta^{-1} dv^0 \\ d\gamma = \beta^{-2} (d\gamma^0 - s \gamma_t^0 dv^0) \end{cases}$$

ist. Dies vorweg genommen, wird jetzt ohne weiteres:

$$(26) \quad \begin{cases} d\sigma^{*2} = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(dv + d\gamma)^2}{1 - s^2 - 2s\gamma_t - \gamma^2} \\ = d\sigma^2 + \frac{2}{\beta} dv^0 d\gamma^0 \\ + \frac{1}{\beta^2} [d\gamma^{0^2} + 2s\gamma_t^0 dv^0 d\gamma^0 + \gamma^{0^2} dv^{0^2}] + \dots, \end{cases}$$

also:

$$(27) \quad \begin{cases} \delta d\epsilon^2 = \frac{1}{\beta} dv^0 d\gamma^0, \\ \delta^2 d\epsilon^2 = \frac{1}{\beta^2} [d\gamma^{0^2} + 2s\gamma_t^0 dv^0 d\gamma^0 + \gamma^{0^2} dv^{0^2}], \end{cases}$$

und endlich findet man noch:

$$(28) \quad \begin{cases} \delta \sqrt{1 - s^2} = -\beta s \gamma_t = -\beta^{-2} s \gamma_t^0, \\ \delta^2 \sqrt{1 - s^2} = -\beta \gamma^2 - \beta^3 s^2 \gamma_t^2 = -\beta^{-3} \gamma^{0^2}. \end{cases}$$

Alles in (14) eingesetzt, ergibt schließlich als Endresultat:

$$(29) \quad \beta^3 \Gamma = \sum_1^3 i j h k \frac{\partial^2 \Omega}{\partial e_{ij} \partial e_{hk}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk} + \sum_1^3 i j \frac{\partial \Omega}{\partial e_{ij}} \varepsilon_{ij}^* - \Omega \gamma^{0^2},$$

worin die ε_{ij} und ε_{ij}^* durch:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} dv^0 d\gamma^0 = \sum_1^3 i j \varepsilon_{ij} d\xi_i d\xi_j \\ d\gamma^{0^2} + \gamma^{0^2} dv^{0^2} = \sum_1^3 i j \varepsilon_{ij}^* d\xi_i d\xi_j \end{array} \right.$$

definiert sind.

Setzt man daher:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} dv^0 = \kappa_1 d\xi + \kappa_2 d\eta + \kappa_3 d\zeta, \\ d\gamma^0 = \pi_1 d\xi + \pi_2 d\eta + \pi_3 d\zeta, \end{array} \right.$$

wobei offenbar:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \kappa_i = a_{1i}^0 u + a_{2i}^0 v + a_{3i}^0 w, \\ \pi_i = a_{1i}^0 \gamma_1^0 + a_{2i}^0 \gamma_2^0 + a_{3i}^0 \gamma_3^0, \end{array} \right.$$

ist, so wird

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\pi_i \kappa_j + \pi_j \kappa_i), \quad i, j = 1, 2, 3, \\ \varepsilon_{ij}^* = \pi_i \pi_j + \gamma^{0^2} \kappa_i \kappa_j. \end{array} \right.$$

Hiernach hat Γ die Gestalt:

$$(34) \quad \beta^3 \Gamma = P(\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0, u, v, w) + Q(\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0),$$

wo

$$(35) \quad P = \sum_1^3 i j h k \frac{\partial^2 \Omega}{\partial e_{ij} \partial e_{hk}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk} + \gamma^{0^2} \sum_1^3 i j \frac{\partial \Omega}{\partial e_{ij}} \kappa_i \kappa_j$$

eine quadratische Form in $\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0$ sowohl, wie in u, v, w ist, während

$$(36) \quad Q = \sum_1^3 i j \frac{\partial \Omega}{\partial e_{ij}} \pi_i \pi_j - \Omega \gamma^{0^2}$$

eine quadratische Form in $\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0$ allein wird. Die Koeffizienten beider Formen sind nur noch von den a_{ij}^0 ($i, j = 1, 2, 3$) und ε abhängig.

Für ein ruhendes Element $u = v = w = 0$ wird:

$$(37) \quad I_0 = Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

und der Vergleich mit (9) lehrt, daß allgemein:

$$(38) \quad Q = \overline{\mathbb{G}}^0 \gamma^{0^2} + \Delta \sum_{ij}^3 F_{ij}^0 \gamma_i^0 \gamma_j^0$$

ist.

§ 3. Zweite Darstellung der Form I und der Charakter der Formen P und Q .

Die in § 1 gemachte Annahme bezüglich des Trägheitswiderstandes ergibt:

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} P + Q \geq 0 \text{ für alle } \gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0 \text{ und } u^2 + v^2 + w^2 < 1, \\ Q \geq 0 \text{ für alle } \gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0. \end{array} \right.$$

Über den Charakter der Form P allein gibt eine zweite Darstellung von P und Q Aufschluß, bei der Ω vermöge I (16) als Funktion der α_{ij}^0 ($i, j = 1, 2, 3$) und ε gedacht wird.

Es ist nämlich auch nach Gl. II. (14):

$$(40) \quad d\sigma^2 = dx^{0^2} + dy^{0^2} + dz^{0^2}$$

und wenn daher — unter α_i, β_i ($i = 1, 2, 3$) beliebige Zahlen verstanden, und

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\alpha^0 = \alpha_1 dx^0 + \alpha_2 dy^0 + \alpha_3 dz^0, \\ d\beta^0 = \beta_1 dx^0 + \beta_2 dy^0 + \beta_3 dz^0 \end{array} \right.$$

gesetzt — den α_{ij}^0 die Variationen:

$$(42) \quad \delta \alpha_{ij}^0 = \alpha_i (\alpha_{1j}^0 \beta_1 + \alpha_{2j}^0 \beta_2 + \alpha_{3j}^0 \beta_3)$$

erteilt werden, wodurch gleichzeitig:

$$(43) \quad \delta dx^0 = \alpha_1 d\beta^0, \quad \delta dy^0 = \alpha_2 d\beta^0, \quad \delta dz^0 = \alpha_3 d\beta^0$$

wird, so folgt durch die gleiche Überlegung wie vorhin, daß:

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta d\varepsilon^2 = d\alpha^0 d\beta^0 \\ \delta^2 d\varepsilon^2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) d\beta^{0^2} \end{array} \right.$$

ist. Der Vergleich mit (35) und (36) lehrt sofort, daß man auch

$$(35') \quad P = \sum_{ijhk}^3 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha_{ij}^0 \partial \alpha_{hk}^0} \gamma_i^0 \gamma_h^0 \pi_j \pi_k,$$

$$(36') \quad Q = \sum_{ij}^3 \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_{ij}^0} \gamma_i^0 \pi_j^0 - \Omega \gamma^{0^2}$$

schreiben kann, so daß P einfach die zweite Variation von Ω

$$(35'') \quad P = \delta^2 \Omega \quad \text{für} \quad \delta a_{ij}^0 = \gamma_i^0 \kappa_j, \quad i, j = 1, 2, 3 \\ \text{wird.}$$

Nun ist es aber für die Stabilität des Gleichgewichtes notwendig¹⁾, daß $\delta^2 \Omega$ für alle Variationen der a_{ij}^0 der Form $\delta a_{ij}^0 = A_i B_j$ definit negativ sei. Ist also diese Stabilitätsbedingung erfüllt, so wird:

$$(39') \quad P \leq 0 \quad \text{für alle} \quad \gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0, u, v, w.$$

§ 4. Die unstetigen Lösungen der Bewegungsgleichungen und die Form W .

Der Untersuchung der in dem Körper möglichen Wellen seien vorab die dazu nötigen Punkte aus der Theorie²⁾ der unstetigen Lösungen partieller, einem Variationsproblem entspringender Differentialgleichungen vorausgeschickt.

Es werde dabei an die allgemeine Form I. (54) der Bewegungsgleichungen angeknüpft, jedoch ε mit seinen ersten Differentialquotienten als stetig vorausgesetzt, d. h. die Betrachtung auf adiabatische Wellen beschränkt.

Sollen nun die zweiten Differentialquotienten von x, y, z, t nach ξ, η, ζ, τ an der „Wellenfläche“:

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0 \\ d\varphi = \varphi_1 d\xi + \varphi_2 d\eta + \varphi_3 d\zeta + \varphi_4 d\tau \end{array} \right.$$

unstetig sein, so müssen sich unter Zuhilfenahme von vier Größen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ die sprunghaften Werteänderungen dieser Differentialquotienten beim Durchgang durch die Wellenfläche in der Form:

$$(46) \quad \left[\frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_h \partial \xi_k} \right] = \lambda_i \varphi_h \varphi_k, \quad i, h, k = 1, 2, 3, 4$$

darstellen lassen, in welcher Forderung die sogen. Kompatibilitätsbedingungen gipfeln.

Bildet man dann weiter für:

$$(47) \quad \delta a_{ij} = \lambda_i \varphi_j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

1) J. Hadamard, Propagation des ondes. Paris 1903. art. 270.

2) J. Hadamard, l. c. Chap. VII.

die zweite Variation des kinetischen Potentials Φ :

$$(48) \quad W = \delta^2 \Phi = \sum_1^4 i j h k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a_{ij} \partial a_{hk}} \lambda_i \lambda_h \varphi_j \varphi_k,$$

so müssen die λ_i , φ_i den Bedingungen:

$$(49) \quad \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_4} = 0$$

genügen. Dies sind aber, da W eine quadratische Form der λ_i sowohl wie der φ_j ist, lineare homogene Gleichungen zwischen den λ_i , daher ihre Determinante, d. i. die Diskriminante der Form W bezüglich der λ_i verschwinden muß:

$$(50) \quad \left| \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right| = 0,$$

welche Gleichung eine Relation zwischen den φ_j allein — die partielle Differentialgleichung der Wellenfläche — darstellt.

Um ihre Bedeutung näher einzusehen, denke man sich die Gleichung (45) der Wellenfläche auf x, y, z, t umgerechnet:

$$(51) \quad \begin{cases} f(x, y, z, t) = 0, \\ df = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz + f_4 dt, \end{cases}$$

wobei die f_i mit den φ_j durch:

$$(52) \quad \varphi_j = \sum_1^4 a_{ij} f_i, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

zusammenhängen werden.

Bezeichnen dann n_1, n_2, n_3 die Richtungscosinusse der Wellennormale und Θ die Normalengeschwindigkeit der Welle, so ist:

$$(53) \quad \begin{cases} f_1 : f_2 : f_3 : f_4 = n_1 : n_2 : n_3 : -\Theta, \\ \Theta = \pm \frac{f_4}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}} \end{cases}$$

und es stellt sonach die in den φ_j homogene Gleichung (50) eine Relation zwischen n_1, n_2, n_3 und Θ dar.

Bei gegebener Wellennormale n_1, n_2, n_3 folgen also erst aus (50) die möglichen Werte der Wellengeschwindigkeit Θ und hierauf aus (49) die zugehörigen möglichen Richtungen des „Wellenvektors“ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

Ohne Beweis, weil im Zusammenhang nicht verwandt, sei schließlich noch bemerkt, daß die Richtungs cosinusse des Strahles s_1, s_2, s_3 und die reziproke Strahlengeschwindigkeit s_4 durch

$$(49') \quad s_1 : s_2 : s_3 : s_4 = \frac{\partial W}{\partial f_1} : \frac{\partial W}{\partial f_2} : \frac{\partial W}{\partial f_3} : \frac{\partial W}{\partial f_4}$$

gegeben werden.

§ 5. Darstellung der Form W und ihr Zusammenhang mit der Form I .

Diese Form $W(\lambda_i, \varphi_j)$, welche sonach die Gesetze der Wellenfortpflanzung vollständig liefert, soll nun speziell für ein ruhendes Element hergestellt werden, da sich ja hinterher die für ein bewegtes Element geltenden Gesetze durch Lorentztransformation aus den für ein ruhendes gefundenen jederzeit gewinnen lassen.

Überdies kann, der Willkürlichkeit des Zeitparameters τ entsprechend, stets angenommen werden, daß im betrachteten Raumzeitpunkt gerade

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0, \quad a_{44} = 1$$

ist, so daß man also mit den Ausgangswerten:

$$(54) \quad \begin{cases} a_{ij} = a_{ij}^0, & i, j = 1, 2, 3, \\ a_{14} = a_{41} = a_{24} = a_{42} = a_{34} = a_{43} = 0, \\ a_{44} = 1 \end{cases}$$

die zweite Variation von Φ für $\delta a_{ij} = \lambda_i \varphi_j$ zu bilden hat. Hierzu ist wieder zuerst:

$$(55) \quad \delta^2 \Phi = \sqrt{-A_{44}} \delta^2 \Omega + 2 \delta \Omega \delta \sqrt{-A_{44}} + \Omega \delta^2 \sqrt{-A_{44}},$$

$$(56) \quad \begin{cases} \delta \Omega = \sum_1^3 ij \frac{\partial \Omega}{\partial e_{ij}} \delta e_{ij}, \\ \delta^2 \Omega = \sum_1^3 ijhk \frac{\partial^2 \Omega}{\partial e_{ij} \partial e_{hk}} \delta e_{ij} \delta e_{hk} + \sum_1^3 ij \frac{\partial \Omega}{\partial e_{ij}} \delta^2 e_{ij}. \end{cases}$$

Zur Bildung der δe_{ij} , $\delta^2 e_{ij}$ aber hat man — eine analoge Überlegung wie in § 2 benützend — davon auszugehen, daß

$$(57) \quad \begin{cases} d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 - \frac{1}{A_{44}} dv^2, \\ dv = a_{14} dx + a_{24} dy + a_{34} dz - a_{44} dt \end{cases}$$

in $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, $d\tau$ ausgedrückt, lautet:

$$(57') \quad d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 + 2de^2.$$

Um nun wieder die Entwicklung der Form $d\sigma^{*2}$, in welche $d\sigma^2$ bei Ersetzung der a_{ij} durch $a_{ij} + \lambda_i \varphi_j$ übergeht, kurz auszuführen, setze man:

$$(58) \quad \lambda^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2,$$

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\lambda = \lambda_1 dx + \lambda_2 dy + \lambda_3 dz, \\ d\varphi = \varphi_1 d\xi + \varphi_2 d\eta + \varphi_3 d\zeta \\ \quad = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \frac{f_4}{\Theta} dn, \\ dn = n_1 dx + n_2 dy + n_3 dz. \end{array} \right.$$

Bemerkt man dann, daß allgemein $d\tau$ aus $d\sigma^2$ herausfällt, also von vornherein $d\tau = 0$ gesetzt werden darf, so gehen mit Rücksicht auf die speziellen Ausgangswerte (54) der a_{ij} die dx , dy , dz , dt , dv , A_{44} bei Ersetzung der a_{ij} durch $a_{ij} + \lambda_i \varphi_j$ über in:

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} dx^* = dx + \lambda_1 d\varphi, \quad dy^* = dy + \lambda_2 d\varphi, \\ dz^* = dz + \lambda_3 d\varphi, \quad dt^* = \lambda_4 d\varphi, \end{array} \right.$$

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} dv^* = \varphi_4 d\lambda - \lambda_4 d\varphi + (\lambda^2 - \lambda_4^2) \varphi_4 d\varphi, \\ A_{44}^* = -(1 + \lambda_4 \varphi_4)^2 + \lambda^2 \varphi_4^2. \end{array} \right.$$

Damit aber folgt ohne weiteres:

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\sigma^{*2} = d\sigma^2 + 2d\lambda d\varphi \\ \quad + [\lambda^2 d\varphi^2 - 2\lambda_4 \varphi_4 d\lambda d\varphi + \varphi_4^2 d\lambda^2] + \dots, \end{array} \right.$$

also:

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta de^2 = d\lambda d\varphi, \\ \delta^2 de^2 = \lambda^2 d\varphi^2 - 2\lambda_4 \varphi_4 d\lambda d\varphi + \varphi_4^2 d\lambda^2 \end{array} \right.$$

und endlich gibt A_{44}^* noch:

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \sqrt{-A_{44}} = \lambda_4 \varphi_4, \\ \delta^2 \sqrt{-A_{44}} = -\lambda^2 \varphi_4^2. \end{array} \right.$$

Alles in (55) eingesetzt, ergibt schließlich als Endresultat:

$$(65) \quad \Theta^2 f_4^{-2} W = \sum_1^3 i j h k \frac{\partial^2 \Omega}{\partial e_{ij} \partial e_{hk}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk} + \sum_1^3 i j \frac{\partial \Omega}{\partial e_{ij}} \varepsilon_{ij}^* - \Theta^2 \Omega \lambda^2,$$

wobei die ε_{ij} , ε_{ij}^* durch:

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\lambda \, dn = \sum_{ij}^3 \varepsilon_{ij} \, d\xi_i \, d\xi_j, \\ \lambda^2 \, dn^2 + \Theta^2 \, d\lambda^2 = \sum_{ij}^3 \varepsilon_{ij}^* \, d\xi_i \, d\xi_j \end{array} \right.$$

definiert sind.

Der Vergleich mit der Darstellung (29) von I' liefert:

$$(67) \quad f_4^{-2} \Theta^2 W = P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, n_1, n_2, n_3) + \Theta^2 Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Die Größe λ_4 fällt — wie es der Willkürlichkeit des Zeitparameters entspricht — aus W heraus, daher man die vierte der Gleichungen (49) zu streichen, und in (50) die Diskriminante von W nach $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zu setzen hat.

§ 6. Die adiabatischen Wellen.

Einer jeden Wellennormale n_1, n_2, n_3 sind also durch die Gleichung dritten Grades in Θ^2 :

$$(68) \quad \left| \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} + \Theta^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right| = 0$$

drei mögliche Wellengeschwindigkeiten und diesen entsprechend dann durch:

$$(69) \quad \frac{\partial P}{\partial \lambda_i} + \Theta^2 \frac{\partial Q}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

drei mögliche Richtungen des Wellenvektors $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zugeordnet. Insbesondere besteht zwischen n_i, λ_i, Θ^2 nach (69) die Beziehung:

$$(70) \quad P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, n_1, n_2, n_3) + \Theta^2 Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0.$$

Wird nun die in § 1 genannte Annahme bezüglich des Trägheitswiderstandes gemacht und die in § 3 genannte Stabilitätsbedingung als erfüllt angenommen, so läßt sich über die Wurzeln Θ^2 von (68) des näheren folgendes aussagen:

Da in der linearen Formenschar $P + \Theta^2 Q$ die Form Q definit ist, sind die drei Wurzeln Θ^2 sicher reell und endlich, und da stets $P < 0$, $Q > 0$ ist, wegen (70) nie negativ, also die Werte von Θ selbst immer reell.

Weiter ist nach (39) für $0 \leq s < 1$ immer

$$(71) \quad s^2 P + Q \geq 0,$$

also vermöge (70):

$$(72) \quad (1 - s^2 \Theta^2) Q \geq 0,$$

somit wegen $Q > 0$:

$$(73) \quad 1 - s^2 \Theta^2 \geq 0 \quad \text{oder} \quad \Theta^2 \leq \frac{1}{s^2}, \text{ d. h. } \Theta \leq 1.$$

Zu jeder Wellennormale gehören sonach immer drei mögliche Wellengeschwindigkeiten, welche die Einheit, d. i. die Lichtgeschwindigkeit niemals übersteigen, und ihnen entsprechend drei mögliche Richtungen des Wellenvektors.

Diese drei Richtungen lassen sich geometrisch definieren als das den beiden Ellipsoiden

$$(74) \quad \begin{cases} P(x, y, z, n_1, n_2, n_3) = -1, \\ Q(x, y, z) = +1 \end{cases}$$

gemeinsame Tripel von wechselseitig konjugierten Durchmessern. Bezeichnen l_1, l_2, l_3 die Komponenten des Wellenvektors $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nach diesen drei Richtungen, und $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ die ihnen entsprechenden Wellengeschwindigkeiten, so ist

$$(75) \quad \begin{cases} -P(\lambda_i, n_i) = m_1 \Theta_1^2 l_1^2 + m_2 \Theta_2^2 l_2^2 + m_3 \Theta_3^2 l_3^2, \\ Q(\lambda_i, n_i) = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 l_3^2, \\ m_i > 0. \end{cases}$$

Sind daher $\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0$ die Komponenten der Ruhbeschleunigung nach den der Geschwindigkeitsrichtung als Wellennormale entsprechenden drei Richtungen des Wellenvektors, so nimmt Γ die Form an:

$$(76) \quad \begin{cases} \beta^3 \Gamma = m_1 (1 - s^2 \Theta_1^2) \gamma_1^{0^2} + m_2 (1 - s^2 \Theta_2^2) \gamma_2^{0^2} \\ \quad \quad \quad + m_3 (1 - s^2 \Theta_3^2) \gamma_3^{0^2}. \end{cases}$$

§ 7. Zusammenhang der longitudinalen und transversalen Wellen mit der longitudinalen und transversalen Trägheit.

Kommt dem Körper lediglich ein transversaler und ein longitudinaler Trägheitskoeffizient μ_t und μ_l zu, und ist μ^0 ihr gemeinsamer bloß von den a_{ij}^0 ($i, j = 1, 2, 3$) abhängiger Ruhwert, so wird:

$$(77) \quad \Gamma = \mu_l \gamma_l^2 + \mu_t \gamma_t^2 = \mu_l \beta^{-6} \gamma_l^{0^2} + \mu_t \beta^{-4} \gamma_t^{0^2}$$

und daraus:

$$(78) \quad \begin{cases} Q = F_0 = \mu^0 \gamma_i^{0^2} + \mu^0 \gamma_t^{0^2}, \\ P = \beta^3 F - F_0 = (\mu_i \beta^{-3} - \mu^0) \gamma_i^{0^2} + (\mu_i \beta^{-1} - \mu^0) \gamma_t^{0^2}. \end{cases}$$

Da nun P eine quadratische Form der $\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0$ sowohl wie der u, v, w mit nur von den α_{ij}^0 ($i, j = 1, 2, 3$) abhängigen Koeffizienten ist, so muß wegen:

$$(79) \quad s \gamma_i^0 = u \gamma_1^0 + v \gamma_2^0 + w \gamma_3^0, \quad \gamma_i^{0^2} + \gamma_t^{0^2} = \gamma_1^{0^2} + \gamma_2^{0^2} + \gamma_3^{0^2}$$

sein:

$$(80) \quad \begin{cases} \mu_i \beta^{-3} - \mu^0 = -a \mu^0 s^2, \\ \mu_i \beta^{-1} - \mu^0 = -b \mu^0 s^2 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \mu_i = \mu^0 (1 - a s^2) \beta^3, \\ \mu_i = \mu^0 (1 - b s^2) \beta, \end{cases}$$

wo a, b ebenso wie μ^0 bloß von den α_{ij}^0 ($i, j = 1, 2, 3$) abhängen, womit dann:

$$(81) \quad \begin{cases} -P = \mu^0 s^2 (a \gamma_i^{0^2} + b \gamma_t^{0^2}), \\ Q = \mu^0 (\gamma_i^{0^2} + \gamma_t^{0^2}) \end{cases}$$

wird. Sind also λ_i und λ_t die longitudinale und transversale Komponente des Wellenvektors $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, d. h. parallel und normal zur Wellennormale genommen, so wird:

$$(82) \quad \begin{cases} -P(\lambda_i, n_i) = \mu^0 (a \lambda_i^2 + b \lambda_t^2), \\ Q(\lambda_i) = \mu^0 (\lambda_i^2 + \lambda_t^2). \end{cases}$$

Der Vergleich mit (75) lehrt, daß der Wellenvektor entweder parallel (Longitudinalwellen) oder normal (Transversalwellen) zur Wellennormale liegen muß, und daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten beider Wellenarten sind:

$$(83) \quad \Theta_i = \sqrt{a}, \quad \Theta_t = \sqrt{b}.$$

Nimmt man umgekehrt die Möglichkeit rein longitudinaler und rein transversaler Wellen der Geschwindigkeiten Θ_i und Θ_t an, so müssen irgend zwei zueinander normale Richtungen konjugierte Durchmesser des zweiten Ellipsoides (74), dieses also eine Kugel sein:

$$(84) \quad Q(\lambda_i) = \mu^0 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2).$$

Das gemeinsame Tripel konjugierter Durchmesser wird die Wellennormale in Verbindung mit irgend zwei zu ihr und zueinander normalen Richtungen, d. h. nach (75):

$$(85) \quad -P(\lambda_i, n_i) = \mu^0 (\Theta_i^2 \lambda_i^2 + \Theta_i^2 \lambda_i^2).$$

Also wird:

$$(86) \quad \beta^3 \Gamma = \mu^0 (1 - s^2 \Theta_i^2) \gamma_i^{0^2} + \mu^0 (1 - s^2 \Theta_i^2) \gamma_i^{0^2},$$

$$(87) \quad \Gamma = \mu^0 \beta^3 (1 - s^2 \Theta_i^2) \gamma_i^2 + \mu^0 \beta (1 - s^2 \Theta_i^2) \gamma_i^2$$

und es kommt somit dem Körper lediglich ein longitudinaler und ein transversaler Trägheitskoeffizient:

$$(88) \quad \mu_t = \mu^0 (1 - s^2 \Theta_i^2) \beta^3, \quad \mu_t = \mu^0 (1 - s^2 \Theta_i^2) \beta$$

zu.

Transversal- und Longitudinalwellen einerseits und Transversal- und Longitudinalträgheit andererseits bedingen sich also gegenseitig und die Trägheitskoeffizienten sind mit den Wellengeschwindigkeiten stets durch (88) verknüpft.

§ 8. Die adiabatischen Gaswellen.

Daß einer Flüssigkeit lediglich ein longitudinaler und ein transversaler Trägheitskoeffizient zukommt, wurde bereits in I. § 10 festgestellt und gefunden:

$$(89) \quad \begin{cases} \mu_t = (\Delta \Omega_A - \Omega + s^2 \Delta^2 \Omega_A \Delta) \beta^3, \\ \mu_t = (\Delta \Omega_A - \Omega) \beta. \end{cases}$$

Es sind in ihr also auch bloß Longitudinal- und Transversalwellen mit den Geschwindigkeiten:

$$(90) \quad \Theta_i = \sqrt{\frac{\Delta^2 \Omega_A \Delta}{\Omega_A - \Delta \Omega_A}}, \quad \Theta_t = 0,$$

d. h. Longitudinalwellen allein möglich.

Bei Einführung von Druck und Ruhenergie:

$$(91) \quad p = \Omega_A, \quad \mathfrak{E}^0 = -\frac{\Omega}{\Delta}$$

wird einfach:

$$(90') \quad \Theta_i = \sqrt{\frac{dp}{d\mathfrak{E}^0}}.$$

§ 9. Die adiabatischen, elastischen Wellen bei verschwindenden Ruhdeformationen.

Im Falle des elastischen isotropen Körpers (vgl. I. §12) mit:

$$(92) \quad \Omega = -M - \frac{1}{2} A J_1^2 + 2 B J_2$$

mag die Form Ω bloß für verschwindende Ruhdeformationen — $e_{ij} = 0$ — berechnet werden. In ihrer Darstellung (29) ist dann:

$$(93) \quad \Omega = -M, \quad \sum_1^3 i j \frac{\partial \Omega}{\partial e_{ij}} \varepsilon_{ij}^* = 0$$

zu setzen, wogegen, weil J_1^2, J_2 quadratische Formen der e_{ij} sind:

$$(94) \quad \sum_1^3 i j h k \frac{\partial^2 \Omega}{\partial e_{ij} \partial e_{hk}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk} = -A \bar{J}_1^2 + 4 B \bar{J}_2$$

wird, falls $\bar{J}_1, \bar{J}_2$ die mit den ε_{ij} statt der e_{ij} gebildeten Ausdrücke I. (123) von J_1, J_2 bedeuten. Die Werte (33) der ε_{ij} liefern für diese:

$$(95) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{J}_1 = \pi_1 \kappa_1 + \pi_2 \kappa_2 + \pi_3 \kappa_3, \\ -4 \bar{J}_2 = (\pi_2 \kappa_3 - \pi_3 \kappa_2)^2 + (\pi_3 \kappa_1 - \pi_1 \kappa_3)^2 + (\pi_1 \kappa_2 - \pi_2 \kappa_1)^2 \\ \quad = (\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2)(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2) - \bar{J}_1^2. \end{array} \right.$$

Da aber für $e_{ij} = 0$

$$dx^{0^2} + dy^{0^2} + dz^{0^2} = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$$

wird, also die a_{ij}^0 ($i, j = 1, 2, 3$) dann die Koeffizienten einer orthogonalen Transformation sind, ergibt die Substitution der Werte (32) der π_i, κ_i weiter:

$$(95') \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{J}_1 = u \gamma_1^{0^2} + v \gamma_2^{0^2} + w \gamma_3^{0^2} = s \gamma_t^{0^2}, \\ -4 \bar{J}_2 = s^2 \gamma^{0^2} - s^2 \gamma_t^{0^2} = s^2 \gamma_t^{0^2}. \end{array} \right.$$

Damit wird schließlich:

$$(96) \quad \beta^3 \Gamma = M \gamma^{0^2} - A s^2 \gamma_t^{0^2} - B s^2 \gamma_t^{0^2},$$

$$(97) \quad \Gamma = (M - A s^2) \beta^3 \gamma_t^2 + (M - B s^2) \beta \dot{\gamma}_t^2.$$

Es besitzt also der Körper lediglich einen transversalen und einen longitudinalen Trägheitskoeffizienten:

$$(98) \quad \mu_l = (M - A s^2) \beta^3, \quad \mu_t = (M - B s^2) \beta, \quad \mu_l^0 = \mu_t^0 = M$$

und es pflanzen sich in ihm rein longitudinale und transversale Wellen mit den Geschwindigkeiten:

$$(99) \quad \Theta_l = \sqrt{\frac{A}{M}}, \quad \Theta_t = \sqrt{\frac{B}{M}}$$

fort.

Die Elastizitätskoeffizienten A, B sind an die Bedingung:

$$(100) \quad 0 \leq A \leq M, \quad 0 \leq B \leq M$$

gebunden.

Leipzig, Juli 1911.

(Eingegangen 24. Juli 1911.)