5. *Welche Züge der Lichtquantenhypothese spielen in der Theorie der Wärmestrahlung eine wesentliche Rolle?*

von Paul Ehrenfest.

Die Lichtquantenhypothese wird in der letzten Zeit auf einen rasch sich erweiternden Kreis von Fragen angewendet, die mit dem Problem der Wärmestrahlung zum Teil nur in sehr losem Zusammenhang stehen. Das Schicksal dieser Hypothese wird ja wohl vor allem durch die experimentellen Ergebnisse gerade in den neuen Anwendungsgebieten entschieden werden. Zurzeit liegt aber von dieser Seite her noch keine deutliche Entscheidung vor. Es mag deshalb gestattet sein, eine Reihe von Überlegungen vorzubringen, die — wie mir scheint — folgendes leistet: *Sie schält einige Züge der Lichtquantenhypothese heraus, die schon jetzt im Hinblick auf die Eigentümlichkeiten der schwarzen Strahlung als gesichert gelten müssen.* Eben dadurch wirft sie einiges Licht darauf, inwieweit andere, charakteristische Züge der Lichtquantenhypothese vom Standpunkt der Wärmestrahlung als noch modifizierbar angesehen werden können.

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse, sowie die Formulierung anschließender Fragen findet man in § 14.

§ 1. Zusammenstellung derjenigen Eigentümlichkeiten der Wärmestrahlung, auf die sich weiterhin die Untersuchung beruft.

I. Bei reversibel-adiabatischer Kompression einer in ein vollkommen spiegelndes Gefäß eingeschlossenen (ungeordneten) Strahlung ändert sich ihre Entropie nicht, gleichgültig, ob die Strahlung schwarz oder nicht schwarz ist.

II. *Das Verschiebungsgesetz.* Die Spektralverteilung ist in folgender allgemeinen Form enthalten:

$$\varrho(\nu, T)\, d\nu = \alpha \nu^3 \cdot f\left(\beta \frac{\nu}{T}\right) d\nu. \tag{1}$$

Das Verschiebungsgesetz an sich schränkt die Gestalt von f noch nicht näher ein.

III. *Die Bewährung der Rayleigh-Jeansschen Gleichung für sehr große Wellenlängen.* Da sich die Formel

$$\varrho(\nu, T)\, d\nu = \frac{8\pi k}{c^3} \cdot \nu^2 T \tag{2}$$

für sehr große Wellenlängen — kleine Werte von ν/T gut bewährt, so werden wir fordern, daß $f\left(\beta \frac{\nu}{T}\right)$ für abnehmendes Argument schließlich wie $\left(\beta \frac{\nu}{T}\right)^{-1}$ verlaufe, d. h. es soll sein

$$\lim_{\sigma=0} \{\sigma \cdot f(\sigma)\} = 1. \tag{3}$$

Diese Forderung möge „*Rotforderung*“ heißen. Die W. Wiensche Strahlungsformel genügt ihr nicht; für sie würde dieser lim gleich Null sein.

IV. *Die Vermeidung der Rayleigh-Jeans-Katastrophe im Ultravioletten.* Die Rayleigh-Jeanssche Gleichung (2) versagt bekanntlich für kürzere Wellen: sie läßt $\varrho(\nu, T)$ mit ν über alle Grenzen wachsen, während es — damit die Totalenergie endlich bleibe — stärker als ν^{-1} gegen Null gehen muß: $f\left(\beta \frac{\nu}{T}\right)$ in Gleichung (1) muß — bei festem T — mit wachsendem ν stärker als ν^{-4} gegen Null gehen; es muß sein:

$$\lim_{\sigma=\infty} \{\sigma^4 \cdot f(\sigma)\} = 0. \tag{4}$$

Diese Forderung hieße „*Violettforderung*“.

V. *Die verstärkte Violettforderung.* Unter Berufung auf den Umstand, daß sich für große Werte von ν/T die Strahlungsmessungen gut durch die Formel von W. Wien

$$\varrho(\nu, T) = \alpha \nu^3 c^{-\beta \frac{\nu}{T}} \tag{5}$$

darstellen lassen, kann man über Gleichung (4) hinausgehend fordern, es seien nur solche Strahlungsformeln zuzulassen, für die $f(\sigma)$ mit unbegrenzt wachsendem σ stärker gegen Null geht, als jede endliche negative Potenz von σ; d. h. es soll sein

$$\lim_{\sigma=\infty}\{\sigma^n \cdot f(\sigma)\} = 0 \quad \text{(für beliebig große } n\text{).} \tag{6}$$

Die Forderung (4) muß wohl als evident gelten; die Gleichung (6) — sie heiße „*verstärkte Violettforderung*" — stellt hingegen ein Postulat vor, das schon viel weiter über die Erfahrung hinausgreift. Die Folgerungen, die sich aus (6) ergeben werden, besitzen dementsprechend weit weniger Stringenz als die schon aus (4) ableitbaren (vgl. § 8, 9).

VI. *Die Wien-Plancksche Violettforderung.* Bekanntlich besitzt die Plancksche Strahlungsformel

$$\varrho(\nu, T) = \alpha \nu^3 \frac{1}{e^{\beta\frac{\nu}{T}} - 1} \tag{5a}$$

für große ν/T denselben Verlauf, wie die W. Wiensche Formel (5); oder anders formuliert: das $f(\sigma)$ der Planckschen Formel genügt der Forderung, daß eine endliche und von Null verschiedene Größe L existiert, so daß

$$\lim_{\sigma=\infty}\left\{\frac{f(\sigma)}{e^{-L\sigma}}\right\} = M \quad \left\{\begin{matrix}\text{endliche von Null} \\ \text{verschiedene Konstante}\end{matrix}\right\} \tag{7}$$

ist. Es ist methodisch interessant, in den theoretischen Grundlagen dieser beiden Formeln gerade diejenigen gemeinsamen Züge herauszupräparieren, die bewirken, daß in beiden Formeln die $f(\sigma)$ der Gleichung (7) — der „*Wien-Planckschen Violettforderung*" — genügen, die ungemein viel spezieller ist als die Gleichung (6). Deshalb werden wir im § 12 die Klasse aller Strahlungsformeln analysieren, deren $f(\sigma)$ der Gleichung (7) genügt. — Es wäre aber natürlich verfehlt, aus der guten Übereinstimmung, welche im Gebiete großer ν/T zwischen Messung und Gleichung (5) bzw. (5a) besteht, zu schließen, daß etwa wirklich alle $f(\sigma)$ zu verwerfen seien, welche nicht der Gleichung (7) genügen.[1])

§ 2. Die elektromagnetischen Hilfsmittel.

Wir werden uns der Methode der *Eigenschwingungen* bedienen, wie sie zuerst Rayleigh und Jeans in die Theorie

1) Vgl. die Bemerkungen am Ende von § 12.

der Hohlraumstrahlung eingeführt haben. Man könnte aber in jedem Augenblick, wohl ohne irgend eine neue Schwierigkeit überwinden zu müssen, zu der *Resonatorenterminologie* übergehen, deren sich Planck in seinen Arbeiten bedient. — Bezüglich der allgemeinen Entwickelung über die elektromagnetischen Eigenschwingungen eines Hohlraumes sei auf § 165 des Buches von Planck verwiesen. Man findet dort den Beweis für folgende Aussage:

I. Für einen leeren Spiegelwürfel von der Seitenlänge l ist die Zahl der *voneinander unabhängigen* elektromagnetischen Eigenschwingungen, deren Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$ liegt, gegeben durch:

$$N(\nu)\,d\nu = \frac{8\pi l^3 \nu^2}{c^3}\,d\nu\,. \tag{8}$$

Unschwer beweist man folgenden Satz[1]):

II. Wenn durch Zusammenschieben der Spiegelwände der Würfel sich unendlich langsam verkleinert, so wachsen (auf Kosten der gegen den Strahlungsdruck geleisteten Kompressionsarbeit) die Partialenergien aller Eigenschwingungen in einer und derselben Proportion und zwar direkt proportional wie ihre Frequenz ν und somit umgekehrt proportional zur Seitenlänge l des Würfels:

$$\frac{E'_{\nu'}}{\nu'} = \frac{E_\nu}{\nu}\,, \tag{9}$$

$$\nu' l' = \nu\, l\,. \tag{10}$$

§ 3. Die wahrscheinlichkeits-theoretischen Hilfsmittel.

Sie lassen sich etwa folgendermaßen charakterisieren: Es wird bei gegebener Totalenergie die „wahrscheinlichste“ Verteilung der Eigenschwingungen über alle möglichen Erregungsbereiche nach demselben Verfahren bestimmt, nach welchem Boltzmann die — bei gegebener Totalenergie — „wahrscheinlichste“ Verteilung der Moleküle eines aus vielen

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 1902. p. 339. Lord Rayleigh zeigt, wie man mit Hilfe der von ihm gegebenen Gleichungen das Boltzmann-Stefansche Gesetz ableiten kann. — Die Gleichungen (9) (10) liefern aber auch die bequemste Ableitung für das *Wiensche Verschiebungsgesetz*.

Molekülsorten besehenden Gasgemisches über alle möglichen Geschwindigkeitsbereiche bestimmte. Die Eigenschwingungen eines und desselben Frequenzbereiches $d\nu$ spielen dabei die Rolle der Moleküle einer und derselben Substanz.

Nur in *einem* wesentlichen Punkte verallgemeinern wir das Boltzmannsche Verfahren: durch Einführung einer zunächst noch willkürlichen „*Gewichtsfunktion*". Fragt man nämlich nach der relativen Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Koordinaten $q_1 \ldots q_n$ und Momente $p_1 \ldots p_n$ eines *individuellen* Moleküles in dem einen oder anderen von zwei irgendwie abgegrenzten (q, p)-Gebieten liegen, so setzt Boltzmann diese relative Wahrscheinlichkeit immer proportional dem Quotienten der „(q, p)-Volumina" der beiden Bereiche. Eine genauere Analyse dieser Festsetzung, die also für jedes individuelle Molekül den ganzen (q, p)-Raum mit einem von (q, p) unabhängigen Gewicht belegt, zeigt bekanntlich, daß sie zwar in vielen Beziehungen als *einfachste*, aber ganz gewiß *nicht als einzig mögliche* anzusehen ist.[1])

Der Erregungszustand einer Eigenschwingung kann durch ihren Energieinhalt und ihre Phase charakterisiert werden. Für die individuelle Eigenschwingung sind alle Phasen als gleichberechtigt anzusehen. Die Gewichtsfunktion ist also von der Phase unabhängig. Für die Wahrscheinlichkeit, daß eine *individuelle* Eigenschwingung von der Frequenz ν einen Energiebetrag aufweist, der zwischen E und $E + dE$ liegt, erhalten wir somit einen Ansatz von der Form:

$$\gamma(\nu, E)\, d\nu\,. \tag{11}$$

---

1) Es ist leider üblich geworden zu sagen, daß die Boltzmannsche Gewichtswahl die *einzig mögliche* ist, falls das betrachtete System dem Hamiltonschen Prinzip und damit dem Liouvilleschen Theorem gehorcht. Diese — für die nächste Zeit wohl unausrottbare Behauptung — ist völlig unbegründet. Sie würde nur erst dann die einzig mögliche sein, wenn überdies die Hypothese zugegeben wird, daß das System — sich selbst überlassen — schließlich „durch" (!) jede mit der gegebenen Totalenergie verträgliche Phase geht (Ergodenhypothese). — Vgl. Math. Enc. **IV**. 32. — Formell kann man übrigens die Einführung einer nicht konstanten Gewichtsfunktion vermeiden, indem man an Stelle dessen bei der Aufsuchung des Minimums von H entsprechende Nebenbedingungen einführt. Vgl. P. Ehrenfest, Physik. Zeitschr. **7**. p. 528. 1906.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von den $N(\nu)\,d\nu$ Eigenschwingungen der Frequenz ν *irgendwelche* $a_1, a_2 \ldots$ Eigenschwingungen in die konsekutiven Energiebereiche $dE_1, dE_2 \ldots$ fallen[1]), berechnet sich dann nach dem Boltzmannschen Verfahren zu:

$$[\gamma(\nu, E_1)\cdot dE_1]^{a_1}\cdot[\gamma(\nu, E_2)\cdot dE_2]^{a_2}\cdots\frac{[N(\nu)\,d\nu]!}{a_1!\,a_2!\ldots}. \tag{12}$$

In der bekannten Weise geht man mit Hilfe der Stirlingschen Formel über zu der Darstellung des Logarithmus dieser Wahrscheinlichkeit mit Hilfe eines Integrales über kontinuierliche Funktionen. Man erhält so:

$$\left\{\begin{aligned} \log W = \text{const.} &+ \int_0^\infty d\nu\, N(\nu)[\log N(\nu) - 1] + \\ &+ \int_0^\infty d\nu \int_0^\infty dE\cdot a(\nu, E)[\log\gamma(\nu, E)] - \\ &- \int_0^\infty d\nu \int_0^\infty dE\cdot a(\nu, E)[\log a(\nu, E) - 1]. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Bei irgendwie schon getroffener Wahl der Gewichtsfunktion $\gamma(\nu, E)$ gewinnt man die *„wahrscheinlichste" Verteilung bei gegebener Totalenergie* $\mathfrak{E}$, wenn man diejenige Verteilung $a(\nu, E)$ aufsucht, welche bei den Nebenbedingungen

$$\int_0^\infty dE\cdot a(\nu, E) = N(\nu) \tag{14}$$

und

$$\int_0^\infty d\nu \int_0^\infty dE\cdot E\,a(\nu, E) = \mathfrak{E} \tag{15}$$

die Größe *log W zu einem Maximum* macht. Man erhält:

$$a(\nu, E) = e^{\lambda(\nu)}\,\gamma(\nu, E)\,e^{-\mu E}. \tag{16}$$

---

1) Da es sich hier nur um die Aufsuchung der „wahrscheinlichsten" Verteilung handelt, so können wir schon von vornherein die Verteilung über die Phasen als gleichmäßig annehmen und die $a_1, a_2 \ldots$ nun von den E abhängen lassen. Bei der Analyse von Schwankungen um die wahrscheinlichste Verteilung würde dies nicht gestattet sein.

Hierbei sind $\lambda(\nu)$ und $(-\mu)$ die Lagrangeschen Multiplikatoren der Nebenbedingungen (14) und (15).

Den Multiplikator $\lambda(\nu)$ kann man mit Hilfe von (14) eliminieren: man setze (16) in (14) ein. Das gibt:

$$e^{\lambda(\nu)} \cdot \int_0^\infty d\,E \cdot \gamma(\nu, E)\, e^{-\mu E} = N(\nu). \tag{17}$$

Aus (17) und (16) erhält man:

$$a(\nu, E) = N(\nu) \frac{\gamma(\nu, E)\, e^{-\mu E}}{\int_0^\infty d\,E \cdot \gamma(\nu, E)\, e^{-\mu E}}. \tag{18}$$

Der Multiplikator μ wäre nun noch mit Hilfe der Nebenbedingung (15) auszudrücken. Das könnte natürlich nur dadurch geschehen, daß man für $\gamma(\nu, E)$ eine konkrete Funktion wählt und nach Einsetzung von (18) in (15) alle Integrationen ausführt. Wie sich in § 6 zeigen wird, haben wir aber für unsere Zwecke nicht nötig, μ durch $\mathfrak{E}$ auszudrücken. — Für späteren Gebrauch folgende Bemerkungen:

I. Bei bestimmter Wahl von $\gamma(\nu, E)$ hängt μ nur noch von $\mathfrak{E}$ ab, hingegen — als Multiplikator der Nebenbedingung (15) — nicht von ν und E.[1])

II. Zwei verschiedene Gewichtsfunktionen $\gamma_1(\nu, E)$ und $\gamma_2(\nu, E)$, die sich nur um einen von ν allein abhängenden Faktor voneinander unterscheiden:

$$\gamma_2(\nu, E) = Q(\nu) \cdot \gamma_1(\nu, E), \tag{19}$$

liefern eine und dieselbe wahrscheinlichste Verteilung: $Q(\nu)$ kürzt sich in (18). [Beruht auf der Existenz der Nebenbedingung (14)].

III. Bisher wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß $\gamma(\nu, E)$ überall endlich sei und daß also nur erst endlichen Energiebereichen ein endliches Totalgewicht zukommt, nicht aber einem einzelnen Energiegewicht. Weiterhin (§ 7, 8, 9) werden

1) Daß im Gegensatz zu μ der Multiplikator λ von ν abhängen muß, erklärt sich daraus, daß „die" Nebenbedingung (14) eigentlich so viele Nebenbedingungen repräsentiert, als es verschiedene ν gibt. Der Ansatz $\lambda(\nu)$ gibt jeden von ihnen ihren besonderen Multiplikator.

wir auch zulassen müssen, daß gewissen *singulären Energiewerten* ein solches Gewicht zukommt, wie im allgemeinen nur einem endlichen Energiebereich. Die Betrachtungen lassen sich ohne weiteres auf diesen allgemeineren Fall übertragen. Es treten dann nur noch zu den Integralen über das Kontinuum aller E-Werte *Summen über die singulären E-Werte* hinzu.

§ 4. Die Verknüpfung von „wahrscheinlichster" Verteilung mit „schwarzer" Strahlung und von $\log W$ mit der thermodynamisch-definierten Strahlungsentropie.

Wir stellen diese Verknüpfung nur implizit und partiell her, indem wir — *als einschränkende Voraussetzungen für die Wahl der Gewichtsfunktion* $\gamma(\nu, E)$ — folgende Forderungen formulieren:

I. Die „wahrscheinlichste" Verteilung der Eigenschwingungen über die Erregungsbereiche soll eine spektrale Energieverteilung aufliefern, welche die im § 1 zusammengestellten Eigentümlichkeiten der schwarzen Strahlung zeigt.[1])

II. Bei unendlich langsamer Kompression des Spiegelwürfels bleibt $\log W$ konstant, gleichgültig, von welcher Anfangsverteilung $a(\nu, E)$ man ausgeht.

§ 5. Die Gewichtsfunktion hat — abgesehen von einem belanglosen Faktor — die Gestalt: $\gamma(\nu, E) = G(E/\nu)$.

Der Beweis stützt sich auf die Verknüpfung deer Forderung II in § 4 mit dem Satz II in § 2:

Es herrsche anfänglich die Zustandsverteilung $a(\nu, E)$. Wir komprimieren den Spiegelwürfel unendlich langsam von der Seitenlänge l auf l'. Wir setzen

$$\frac{l}{l'} = m. \tag{20}$$

Verfolgen wir dabei jede einzelne Eigenschwingung, so haben wir nach Gleichung (9) und (10)

$$\nu' = m\nu, \tag{21}$$

$$E' = mE. \tag{22}$$

1) Die Gleichung (1) wird dabei — vgl. Gleichung (36) — den Parameter μ der Formel (18) mit T verknüpfen.

Die Eigenschwingungen, deren Frequenz und Energie ursprünglich zwischen ν und $\nu + d\nu$ E und $E + dE$ lagen, liegen jetzt zwischen

(23) $m\nu$ und $m\nu + m\,d\nu$, mE und $mE + m\,dE$.

Also ist:

(24) $$a'(\nu', E') \cdot m\,d\nu \cdot m\,dE = a(\nu, E) \cdot d\nu\,dE.$$

Somit

(25) $$a'(\nu', E') = \frac{1}{m^2}\,a(\nu, E),$$

(26) $$N(\nu') = \frac{1}{m}\,N(\nu).$$

Nun soll (II § 4) für alle *möglichen* Anfangs- $a(\nu, E)$ und jeden Wert von m gelten:

(27) $$\log W' - \log W = 0.$$

Wegen (13) und (20) bis (26) gilt das nach einfacher Zwischenrechnung, daß für alle *möglichen* Anfangs- $a(\nu, E)$ und alle m sein soll:

(28) $$\int_0^\infty d\nu \int_0^\infty dE\; a(\nu, E) \log \frac{\gamma(m\nu, mE)}{\gamma(\nu, E)} + \int_0^\infty d\nu\; N(\nu) \log m = 0$$

oder, was wegen (14) damit äquivalent ist:

(29) $$\int_0^\infty d\nu \int_0^\infty dE\; a(\nu, E) \log \left\{ \frac{m \cdot \gamma(m\nu, mE)}{\gamma(\nu, E)} \right\} = 0.$$

Dürfte man in dieser Gleichung dem $a(\nu, E)$ jede *beliebige* Gestalt geben, so würde unmittelbar folgen, daß der Ausdruck unter dem log für jeden Wert von m gleich 1 sein müsse. Nun ist aber $a(\nu, E)$ durch die Bedingung (14) eingeschränkt. Um zu einer Aussage über den Ausdruck unter dem log und damit über die Gestalt von von $\gamma(\nu, E)$ zu gelangen, beachte man, daß die linke Seite von (29) bei jeder mit (14) verträglichen Variation von $a(\nu, E)$ beständig Null liefern muß. Löst man dieses *Variationsproblem*, so gelangt man — vgl. Anhang A — zum Resultat, daß $\gamma(\nu E)$ die Gestalt haben muß:

(30) $$\gamma(\nu, E) = Q(\nu) \cdot G\left(\frac{E}{\nu}\right).$$

Da aber (§ 3, II) der Faktor $Q(\nu)$ keinen Einfluß auf die Strahlungsverteilung hat, so ist die Behauptung der Paragraphüberschrift bewiesen.

§ 6. Aufbau der Funktion $f\left(\beta\frac{\nu}{T}\right)$ des Verschiebungsgesetzes mit Hilfe der Gewichtsfunktion $G\left(\frac{E}{\nu}\right)$.

Die „*wahrscheinlichste*" Spektralverteilung der im cm³ enthaltenen Strahlungsenergie berechnet sich mit Hilfe der Gleichung (18) zu:

$$\text{(31)}\qquad \frac{N(\nu)}{l^3}\cdot\frac{\int\limits_0^\infty dE\cdot E e^{-\mu E}\gamma(\nu,E)}{\int\limits_0^\infty dE\cdot e^{-\mu E}\gamma(\nu,E)}.$$

Wegen (8) und (30) geht dieser Ausdruck über in:

$$\text{(32)}\qquad \frac{8\pi\nu^3}{c^3}\cdot\frac{\frac{1}{\nu}\int\limits_0^\infty dE\cdot E e^{-\mu E} G\left(\frac{E}{\nu}\right)}{\int\limits_0^\infty dE\cdot e^{-\mu E} G\left(\frac{E}{\nu}\right)}.$$

Setzt man

$$\text{(33)}\qquad \frac{E}{\nu}=q,$$

so geht (32) über in:

$$\text{(34)}\qquad \frac{8\pi}{c^3}\nu^3\cdot\frac{\int\limits_0^\infty dq\cdot q e^{-\mu\nu q} G(q)}{\int\limits_0^\infty dq\cdot e^{-\mu\nu q} G(q)}=\frac{8\pi}{c^3}\nu^3 f(\nu\mu).$$

Damit nun — im Sinne der Forderung I § 4 — dieser Ausdruck die Form

$$\text{(35)}\qquad \alpha\nu^3 f\left(\beta\frac{\nu}{T}\right)$$

aufweise, dafür ist hinreichend und notwendig, daß man den Parameter μ von T in folgender Weise abhängen läßt:[1])

$$\mu = \frac{\beta}{T}. \tag{36}$$

Mit den Abkürzungen

$$\nu\mu = \beta\frac{\nu}{T} = \sigma, \tag{37}$$

$$\frac{\alpha c^3}{8\pi} = C, \tag{38}$$

$$Z(\sigma) = \int_0^\infty dq\cdot q e^{-\sigma q} G(q), \tag{39}$$

$$N(\sigma) = \int_0^\infty dq\cdot e^{-\sigma q} G(q) \tag{40}$$

nimmt (34) die Gestalt an:

$$Cf(\sigma) = \frac{Z(\sigma)}{N(\sigma)}. \tag{41}$$

§ 7. Einführung von Punktbelegungen neben der Streckenbelegung $G(E/\nu)$.

An dieser Stelle ist es nun leicht, sich von der Einschränkung freizumachen, auf die schon § 3, III hingewiesen wurde: Neben der *Streckenbelegung* $G(q)$, die dem Element dq das infinitesimale Gewicht $G(q)\cdot dq$ zuweist, kann man noch für die Punkte $q_0, q_1, q_2 \ldots$ als endliche Sondergewichte die *Punktbelegungen* $G_0, G_1, G_2 \ldots$ einführen. Modifiziert man dementsprechend die Schlüsse der §§ 3—6, so erhält man an Stelle von (41) die Gleichung

$$Cf(\sigma) = \frac{P(\sigma)}{Q(\sigma)}, \tag{42}$$

---

1) Der Parameter μ war (I, § 3) bei bestimmter Wahl der Gewichtsfunktion noch Funktion der Totalenergie $\mathfrak{E}$. Festsetzung (36) läuft also darauf hinaus, daß wir — bei bestimmter Wahl von $G(E/\nu)$ die Totalenergie — $\mathfrak{E}$ in passender Weise von T abhängen lassen. Die Bestimmung der Konstanten α und β geschieht prinzipiell durch Vergleichung der berechneten mit der beobachteten Spektralverteilung.

wo zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\sum_0^\infty {}_r\, q_r e^{-\sigma q_r} G_r + \int_0^\infty d q \cdot q e^{-\sigma q} G(q) = P(\sigma), \tag{43}$$

$$\sum_0^\infty {}_r\, e^{-\sigma q_r} G_r + \int_0^\infty d q \cdot e^{-\sigma q} G(q) = Q(\sigma). \tag{44}$$

Indem man alle $G_r = 0$ setzt, kann man immer zur reinen Streckenbelegung und zu (41) zurückkehren.

Bemerkung: In allen Fällen, wo bei Differentiation von $Q(\sigma)$ nach σ die Reihenfolge von Differentiation nach σ und Integration (bzw. Summation) nach q vertauscht werden darf, ist ersichtlich:

$$Z(\sigma) = -\frac{d}{d\sigma} N(\sigma), \tag{44a}$$

$$P(\sigma) = -\frac{d}{d\sigma} Q(\sigma), \tag{44b}$$

$$C f(\sigma) = -\frac{d}{\partial\sigma} \{\lg Q(\sigma)\}. \tag{44c}$$

§ 8. Die Violettforderung ist mit reiner Streckenbelegung unverträglich.

Angenommen, es sei $G_0 = G_1 = \ldots = 0$, also $f(\sigma)$ durch Gleichung (41) gegeben. Der Bau von (41) zeigt unmittelbar, daß das *Verhalten von* $f(\sigma)$ *bei* $q = \infty$ (im „Ultravioletten“) davon abhängt, *wie sich* $G(q)$ *bei* $q = 0$ *verhält.* Denn wenn σ schon sehr groß ist, so läßt der Faktor $e^{-\sigma q}$ nur mehr die kleinsten Werte von q in den Integralen zur Geltung kommen.

Weiter kann man zeigen, daß $f(\sigma)$ mit unbegrenzt wachsendem σ desto stärker gegen Null abfällt zu je höheren Werten $G(q)$ bei Annäherung an $q = 0$ ansteigt. Das geht aus der folgenden Tabelle hervor (Ableitung in Anhang B). In der ersten Spalte Verhalten von $G(q)$ bei Annäherung an $q = 0$; in den folgenden Spalten der Gang von $Z(\sigma)$, $N(\sigma)$ und $f(\sigma)$ bei wachsendem σ.

$G(q)$	$Z(\sigma)$ wie:	$N(\sigma)$ wie:	$Cf(\sigma)$ wie:
Von $q>R$ bis $q=0$ wie $(q-R)^N$; von R bis 0 sei $G(q)=0$	$\frac{e^{-R\sigma}}{\sigma^{N+1}} R\,\Gamma(N+1)$	$\frac{e^{-R\sigma}}{\sigma^{N+1}} \Gamma(N+1)$	R
$G(q) \cong q^N$	$\sigma^{-N-2}\,\Gamma(N+2)$	$\sigma^{-N-1}\,\Gamma(N+1)$	$\frac{N+1}{\sigma}$
$G(q)$ beliebig integrabel-unendlich	—	—	$\geqq \frac{1}{\sigma^{2+\delta}}$ [1]

$Z(\sigma)$ fällt immer stärker gegen Null als $N(\sigma)$, dank des Faktors q neben $G(q)$; und der Einfluß dieses Faktors kommt desto stärker zur Geltung, je stärker $G(q)$ bei Annäherung an $q=0$ anwächst. Aber selbst, wenn $G(q)$ auf die stärkste Weise anwächst, die zulässig ist, wenn das Nennerintegral $N(\sigma)$ noch einen Sinn haben soll — nämlich integrabel unendlich —, so wirkt doch noch immer der Abfall von $N(\sigma)$ dem Abfall von $Z(\sigma)$ so stark entgegen, daß $f(\sigma)$ zu langsam abfällt, um die „Violettforderung" zu erfüllen: selbst im letzten Fall wächst noch $\sigma^4 f(\sigma)$ mit σ gegen ∞ im Widerspruch zur Violettforderung (4).

§ 9. **Um die Violettforderung zu erfüllen, muß der Energiewert $E=0$ mit einem Sondergewicht G_0 belegt werden und überdies muß $G(q)$ bei Annäherung an $q=0$ stärker als von zweiter Ordnung gegen Null gehen, bzw. von unendlich hoher Ordnung, wenn die verstärkte Violettforderung befriedigt werden soll.**

Der Punkt $q=0$ muß — durch ein Sondergewicht — noch stärker akzentuiert werden, als es durch ein integrabel-unendliches Anwachsen der Streckenbelegung $G(q)$ zu erreichen war. *Beweisgang:*

---

1) Für diejenigen integrabel unendlichen $G(q)$, die wie $q^{-1+\varepsilon}$ verlaufen, liefert schon die vorhergehende Zeile eine viel feinere $f(\sigma)$-Abschätzung: $s\,\sigma^{-1}$. Vermutlich ließe sich allgemein die Abschätzung der letzten Zeile verfeinern und auch weniger künstlich durchführen, als es im Anhang B geschieht. Für unsere Zwecke reicht natürlich obige Abschätzung aus.

1. Wenn der Punkt $q = 0$ kein Sondergewicht erhält, wohl aber andere Punkte, so bleibt die Violettforderung noch immer verletzt [Anhang C].

2. Erhält der Punkt $q_0 = 0$ das Sondergewicht G_0, so ist

$$\lim_{\sigma=\infty} Q(\sigma) = G_0. \tag{45}$$

Während also in Gleichung (41) der Nenner $N(\sigma)$ immer gegen Null ging und dadurch den Abfall von $f(\sigma)$ hemmte, ist das mit dem Nenner $Q(\sigma)$ der Gleichung (42) nicht mehr der Fall: *Es wird jetzt $f(\sigma)$ gerade so stark gegen Null abfallen, wie der Zähler $P(\sigma)$.*

3. Was den Abfall von $P(\sigma)$ betrifft, so ist zu beachten: a) Wegen des Faktors $q_0 = 0$ geht G_0 in $P(\sigma)$ nicht ein; b) Falls $G(q)$ bei Annäherung an $q = 0$ von endlicher (N^{ter}) Ordnung gegen Null geht, so fällt $P(\sigma)$ für genügend große σ wie $Z(\sigma)$ ab, denn dort überwiegt in (43) das langsamer abfallende Integral über die Summe, deren Glieder ja mit *unendlich* hoher Ordnung gegen Null gehen.

$Z(\sigma)$ fällt aber wie $\sigma^{-(N+2)}$, falls $G(q)$ wie q^N gegen Null geht. [Vgl. $Z(\sigma)$ Verlauf in Tabelle des § 8.]

4. Aus dieser Bemerkung folgen schon unmittelbar die beiden letzten Aussagen der Paragraphüberschrift.

§ 10. Die Erfüllung der Rotforderung ist nur dann gefährdet, wenn die Gewichte mit wachsendem E zu stark gegen Null gehen.

Im Hinblick auf den wahrscheinlichkeits-theoretischen Sinn der Gewichtsfunktion wird man von vorneherein nur solche Punkt- und Streckengewichte in Betracht ziehen, die mit unbegrenzt wachsendem E (also auch q) kleiner werden oder höchstens konstant bleiben.

$Q(\sigma)$ kann bei Annäherung an $\sigma = 0$ unter einer endlichen (positiven) Grenze bleiben oder unendlich werden [für $\sigma = 0$ kann das Integral und eventuell auch die Summe in $Q(\sigma)$ divergieren]; keinesfalls kann aber $Q(\sigma)$ dabei zu Null abnehmen. Wenn also — entsprechend der Rotforderung Gleichung (3) — $f(\sigma)$ mit $\sigma = 0$ wie σ^{-1} unendlich werden soll, so ist dies nur so möglich, daß dabei $P(\sigma)$ unendlich wird und zwar um eine Ordnung höher als $Q(\sigma)$.

Die Rotforderung wird also verletzt sein, falls die Gewichte für große q so stark abnehmen, daß auch noch

(46) $$P(0) = \sum_{1}^{\infty} q_r\, G_r + \int_{0}^{\infty} dq \cdot q\, G(q)$$

endlich bleibt. Wir begegnen diesem Fall bei Analyse derjenigen Gewichtsfunktion, auf welcher die W. Wiensche Strahlungsformel beruht (§ 13, II). Vgl. auch § 11, Nr. 4.

§ 11. Erläuterung der bisherigen Ergebnisse an einem Beispiel.

Nur der Punkt $q = 0$ sei mit einem Sondergewicht $G_0 = A$ belegt und sonst kein anderer Punkt. Das Streckengewicht $G(q)$ sei gleich Null von $q = 0$ bis $q = R$ und gleich B für alle $q > R$. Dann ist

(47) $$Q(\sigma) = A + B e^{-R\sigma} \sigma - 1,$$

(48) $$P(\sigma) = -\frac{dQ}{d\sigma} = B e^{-R\sigma}(R \sigma^{-1} + \sigma^{-2}),$$

(49) $$C f(\sigma) = \frac{B e^{-R\sigma}}{\sigma} \cdot \frac{R\sigma + 1}{A\sigma + B e^{-R\sigma}}.$$

Bemerkungen:

1. Erzeugt man die Punktbelegung in $q = 0$ dadurch, daß man zunächst alle q mit dem konstanten Streckengewicht B belegt, dann aber den zwischen $q = 0$ und $q = R$ liegenden Teil der Belegung nach dem linken Ende $q = 0$ zusammenschiebt — setzt man also $A = RB$ —, so läßt sich $f(\sigma)$ auf folgende Gestalt bringen: [1])

(50) $$C f(\sigma) = \frac{1 + \sigma^{-1}}{1 + \sigma e^{\sigma}}.$$

Dieses $f(\sigma)$ erfüllt die Rot- und (verstärkte) Violettforderung. [2])

---

1) R wurde $= 1$ gesetzt, was auf eine passende Wahl der Maßeinheiten für E und ν hinausläuft.

2) Die berechnete $f(\sigma)$ verläuft für sehr große und sehr kleine σ ebenso wie

$$f(\sigma) = \frac{e^{-\sigma}}{\sigma},$$

welche zur Strahlungsformel:

$$\varrho(\nu, T) = \alpha \nu^2 T e^{-\beta \frac{\nu}{T}}$$

gehört. Diese letztere Formel hat Rayleigh (Phil. Mag. 1900) als empirischen Ansatz angegeben: sie verläuft nämlich für kleine ν wie die Rayleigh-Jeanssche Formel (2), fällt aber im Gegensatz zu ihr für große ν mit unendlich hoher Ordnung gegen Null ab.

2. Die Violettforderung wird verletzt, falls man in (49) $A = 0$ nimmt (dem Punkt $q = 0$ sein Sondergewicht entzieht) oder $R = 0$ setzt (wo dann Gleichung (9) konstant bleibt, statt — vgl. § 9 — von höherer als der zweiten Ordnung Null zu werden). Man hat hier bzw.

$$Cf(\sigma) = R + \frac{1}{\sigma}, \tag{51}$$

$$Cf(\sigma) = \frac{1}{\frac{A}{B}\sigma^2 + \sigma}. \tag{52}$$

3. Wird $A = R = 0$ gesetzt, d. h. werden *alle q mit gleichem Gewicht belegt,* so ist

$$Cf(\sigma) = \frac{1}{\sigma}, \tag{53}$$

was zur Rayleigh-Jeansschen Strahlungsformel (2) führt.

4. In allen diesen Fällen bleibt die Rotforderung — Gleichung (3) — erfüllt. Sie bliebe auch erfüllt, wenn für $q > R$ das $G(q) = q^N$ mit $N > -2$ wäre. Für $N < -2$ würde sie hingegen verletzt werden.

5. Die Annahme, daß $G(q)$ in einem endlichen an $q = 0$ anliegenden Intervall gleich Null sei, ist zur Erfüllung der „verstärkten“ Violettforderung hinreichend, aber durchaus nicht notwendig[1])

§ 12. **Die Besonderheiten der Wien-Planckschen Violettforderung: Damit $f(\sigma)$ für unbegrenzt wachsende σ nicht schwächer als $Me^{-L\sigma}$ abfalle, muß $G(q) = 0$ sein von $q = 0$ bis mindestens $q = L$; damit $f(\sigma)$ gerade so wie $Me^{-L\sigma}$ abfalle, muß überdies der Punkt $q_1 = L$ mit einem Sondergewicht belegt werden.**

Damit im Sinne der ersten Forderung

$$\lim_{\sigma=\infty}\left\{\frac{f(\sigma)}{e^{-L\sigma}}\right\} \tag{54}$$

nicht unendlich sei, muß dies wegen Gleichung (45) auch für

1) So führt z. B.

$$G(q) = e^{\frac{1}{q}} q^{-\frac{5}{2}} \quad \text{zu} \quad f(\sigma) = e^{-2\sqrt{\sigma}}.$$

$$(55)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\sigma=\infty}\left\{\frac{P(\sigma)}{e^{-L\sigma}}\right\} = \lim\limits_{\sigma=\infty}\left\{\sum_1^\infty{}^r q_r\, G_r\, e^{(L-q_r)\sigma} \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \int\limits_0^\infty dq\cdot q\, G(q)\, e^{(L-q)\sigma}\right\} \end{cases}$$

der Fall sein. Für alle q und q_r, die kleiner als L sind, wächst aber

$$e^{(L-q_r)\sigma} \quad \text{und} \quad e^{(L-q)\sigma}$$

mit wachsendem σ über alle Grenzen.

Damit die Limite in (54) *nicht unendlich* wird, muß also:

A) $G(q)$ von $q=0$ bis mindestens $q=L$ gleich Null sein.

B) Der erste von q_0 verschiedene Punkt q_1, der Sondergewicht besitzt, muß, falls er überhaupt existiert, die Bedingung erfüllen: $q_1 \geqq L$.

Damit — im Sinne der zweiten Forderung — die Limite (54) *zugleich auch nicht Null sei,* muß[1]):

C) außer $q_0 = 0$ wirklich noch mindestens *ein* weiterer Punkt q_1 mit Sondergewicht existieren, und

D) sein q_1 gerade gleich L sein.

Während die Notwendigkeit eines Sondergewichtes in $q_0 = 0$ aus der geradezu evidenten Gleichung (4) folgte, ergab sich die Notwendigkeit eines Sondergewichtes in einem zweiten Punkt $q_1 \neq 0$ nur dadurch, daß wir $f(\sigma)$ willkürlich der Gleichung (7) unterwerfen, die wesentlich über jede experimentelle Kontrolle hinausgreift. Es hieße die Resultate des vorliegenden Paragraphen mißbrauchen, wenn man nun aus der guten Übereinstimmung, die bekanntlich für große ν/T zwischen den Messungen und Gleichung (5) besteht, schließen wollte, daß alle $G(q)$ zu verwerfen sind, die z. B. nicht der Bedingung C genügen.

---

1) Gäbe es nämlich keinen zweiten Punkt mit Sondergewicht, so müßte in (55) allein schon das Integral für die Erfüllung der Forderung aufkommen. Aber wenn $G(q)$ bei Annäherung an $q = L$ — von $q < L$ her — gegen Null geht, endlich bleibt (vgl. Beispiel in § 11) oder selbst (integrabel-) unendlich wird — immer ist die Limite des Integrales gleich *Null.* — Sobald $q_1 = L$ sein Sondergewicht erhalten hat, übt der Verlauf der Streckenbelegung $G(q)$ für $q \geqq L$ schon keinen Einfluß mehr auf die Erfüllung der Violettforderung aus, wohl aber auf den sonstigen Verlauf von $f(\sigma)$ und auf die Erfüllung der Rotforderung.

Bekanntlich zeigt die der Planckschen Strahlungsformel zugrunde liegende Gewichtsverteilung in der Tat die obigen Eigentümlichkeiten. Wir werden im folgenden Paragraphen sehen, in welcher Art dies auch für die der W. Wienschen Formel zugrunde liegende Gewichtsverteilung der Fall ist.

§ 13. Beispiele zu § 12.

Beispiel I. Die Grundlagen der W. Wienschen Strahlungsformel. — Hier ist zu setzen[1]):

$$G(q) = 0, \quad q_r = r, \quad G_r = \frac{1}{r!} \cdot \tag{56}$$

Es ergibt sich dann:

$$Cf(\sigma) = \frac{\sum\limits_{0}^{\infty}{}_r \, r \frac{1}{r!} e^{-r\sigma}}{\sum\limits_{0}^{\infty}{}_r \frac{1}{r!} e^{-r\sigma}} = e^{-\sigma}. \tag{57}$$

a) Die Violettforderung ist in Form der Gleichung (7) erfüllt; die Gewichtsfunktion erfüllt die in § 12 angegebenen Bedingungen.

b) Die Rotforderung Gleichung (3) ist verletzt. Ursache: die Gewichtsfunktion fällt mit wachsendem q so rasch ab, daß die unendliche Reihe im Zähler von $f(\sigma)$ auch für $\sigma = 0$ noch konvergiert.

Beispiel II. Die Grundlagen der Planckschen Strahlungsformel[2]):

$$G(q) = 0, \quad q_r = r, \quad G_r = A, \tag{58}$$

$$Cf(\sigma) = \frac{\sum\limits_{0}^{\infty}{}_r \, r \, e^{-r\sigma}}{\sum\limits_{0}^{\infty}{}_r \, e^{-r\sigma}} = \frac{1}{e^{\sigma} - 1} \cdot \tag{59}$$

---

1) Vgl. § 14, III.

2) M. Planck, „Vorlesungen" § 150.

a) Erfüllung der Violettforderung, wie im Beispiel I.

b) Die Rotforderung ist erfüllt, wie man sich überzeugt, indem man e^{σ} in Potenzen von σ entwickelt.

Beispiel III. Belegt man $q_0 = 0$ und $q_1 = 1$ mit den Gewichten $G_0 = G_1 = A$ und nimmt für $0 \leqq q \leqq 1$ das $G(q)$ gleich Null weiterhin beliebig, nur so, daß $\lim_{q=\infty} G(q) = A$ ist, so erhält man immer ein $f(\sigma)$, das für $\sigma \cong 0$ und $\sigma \cong \infty$ wie das Plancksche $f(\sigma)$ verläuft.

§ 14. Rekapitulation der Ergebnisse im Hinblick auf die Lichtquantenhypothese und Formulierung der anschließenden Fragestellungen.

I. Aus den im § 1 zusammengestellten allgemeinen Eigentümlichkeiten der schwarzen Strahlung, insbesonders aus der Notwendigkeit eines genügend starken Abfalles der Strahlungskurve mit unbegrenzt wachsendem ν konnten wir bestimmte Aussagen gewinnen über den Verlauf der Funktion $\gamma(\nu, E)$, wo

$$\gamma(\nu, E_1)\, dE_1 : \gamma(\nu, E_2)\, dE_2$$

mißt den Quotienten der Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Energie einer *individuellen* Eigenschwingung des Strahlungerfüllten Hohlraumes — ihre Frequenz sei ν — zwischen

$$E_1 \text{ und } E_1 + dE_1 \quad \text{bzw.} \quad E_2 \text{ und } E_2 + dE_2$$

liegt. Mit Rücksicht auf die Lichtquantenhypothese sind folgende Ergebnisse hervorzuheben:

A) $\gamma(\nu, E)$ hat — abgesehen von einem physikalisch bedeutungslosen Faktor — die Gestalt $G(E/\nu)$ [§ 5].

B) Der *eine* Energiewert $E = 0$ besitzt eine Wahrscheinlichkeit von derselben Größenordnung, wie im übrigen nur ein ganzes endliches Intervall von Energiewerten [§§ 8, 9].

C) Die dem Wert $E = 0$ naheliegenden Energiebereiche besitzen eine verschwindend kleine Wahrscheinlichkeit — präzise Fassung vgl. §§ 9, 12. Dieser „Hof" verschwindend kleiner $G(E/\nu)$-Werte ist desto stärker ausgeprägt, je stärker die Energiekurve der schwarzen Strahlung mit unbegrenzt

$$0 < E < h\nu, \quad G\left(\frac{E}{\nu}\right) = 0$$

wachsendem ν gegen Null abfallen soll. Speziell müßte [§ 12] für alle
sein, wenn man fordern wollte, daß die Energiekurve mit unbegrenzt wachsendem ν/T *nicht schwächer* gegen Null abfalle, als

$$\alpha \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}.$$

D) Die Ausdehnung des Hofes der Energiewerte von verschwindend kleiner Wahrscheinlichkeit ist wegen (A) für die verschiedenen Eigenschwingungen proportional ihrer Schwingungszahl ν.

E) Geht man von der Rayleigh-Jeansschen „*Eigenschwingungs*“-Terminologie zu der von Planck bevorzugten „*Resonatoren*“-Terminologie über, so würde man die Ergebnisse $A - D$ mit Verzicht auf Präzision etwa so formulieren können: *Ein genügender Abfall der Strahlungskurve für unbegrenzt wachsende ν kommt nur dadurch zustande, daß die Resonatoren so etwas wie eine „Reizschwelle“ aufweisen*[1], *deren Höhe im übrigen der Frequenz des Resonators proportional ist.*

F) Der *einfachste* Ansatz für $G(E/\nu)$, der mit dieser Annahme einer endlichen Reizschwelle verträglich ist (vgl. § 11), würde zur Spektralkurve

$$\varrho(\nu, T) = \alpha \nu^3 \frac{1 + \sigma - 1}{1 + \sigma e^{\sigma}} \quad \left(\sigma = \frac{h\nu}{kT}\right)$$

führen, welche für $\nu \cong 0$ und $\nu \cong \infty$ verläuft wie

$$A\nu^2 T \quad \text{bzw.} \quad A\nu^2 T e^{-\frac{h\nu}{kT}}.$$

II. Stellen wir anderseits die charakteristischen Züge zusammen, welche die Lichtquantenhypothese in derjenigen Form aufweist, in der sie etwa Einstein benutzt. Sie schließt da folgende Annahmen in sich:

A) Ein Resonator von der Frequenz ν kann nur folgende diskrete Energiewerte aufweisen: $0, h\nu, 2h\nu, \ldots$

---

1) Diesen Ausdruck gebraucht Hr. Planck in seiner Arbeit „Eine neue Strahlungshypothese“, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. **13.** p. 142. 1911; an jener Stelle wird diesem Ausdruck jedoch eine stärker präzisierte Bedeutung gegeben als es hier in meiner Absicht liegt.

B) Diese Energiewerte kommen durch die Aneinanderlagerung einer Anzahl elementarer, voneinander unabhängiger Energiebeträge $h\nu$ zustande.

C) Diese Lichtquanten funktionieren nicht nur bei allen Emissions- und Absorptionserscheinungen als Atome, sondern besitzen auch im von Materie freien Raum ihre Sonderexistenz.[1])

III. Was zunächst die Annahme A) in II. betrifft, so wird sie durch die Ergebnisse I (A—D) in einigen sehr charakteristischen Zügen bestätigt: die Akzentuierung des Energiewertes Null, die verschwindend kleinere Wahrscheinlichkeit benachbarter Energiewerte und die Proportionalität des „Hofes" mit ν. Hingegen schon die Akzentuierung des Energiewertes $h\nu$ blieb dahingestellt (§ 12) und um so mehr der weitere Verlauf von $G(E/\nu)$ — abgesehen von der allgemeinen Aussage, die noch die „Rotforderung" für unendlich große E lieferte (§ 10). — Natürlich ist da zu beachten, daß wir unseren Schlüssen nur Aussagen über den *asymptotischen* Verlauf von $\varrho(\nu, T)$ für gegen 0 und gegen ∞ gehende Werte von ν/T zugrunde legten.

Zu einer vollen Entscheidung über die Aussage A käme man hingegen dann, wenn man in

$$\varrho(\nu, T) = \alpha\,\nu^3 f\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$

die Gestalt der Funktion f als *völlig* bekannt voraussetzt.[2]) — In diesem Falle würde — das ergibt sich aus Gleichung (42) bis (44c) — die Bestimmung von $G(E/\nu)$ auf die Lösung der folgenden *Funktionalgleichung*[3]) hinauslaufen:

$$\sum_0^\infty {}_r\, G_r\, e^{-q_r \sigma} + \int_0^\infty dq \,.\, G(q)\, e^{-q\sigma} = Q(\sigma), \tag{60}$$

1) Vgl. A. Einstein, Ann. d. Phys. **17.** p. 132 [§ 6]. 1905; **20.** p. 199. 1906; Physik. Zeitschr. **10.** p. 185. 1909.

2) Dieses Problem hatte ich schon 1906 (Physik. Zeitschr. **7.** p. 528.) formuliert, hatte aber damals noch nicht bemerkt, daß $\gamma(\nu, E)$ immer die Gestalt $G(E/\nu)$ haben muß.

3) Die obige Funktionalgleichung — ohne das Summenglied — findet schon bei Riemann in der Arbeit „Über die Anzahl der Primzahlen . . ." (gesamm. Abh.) und wird von Riemann mit Hilfe komplexer Integration gelöst.

wo $Q(\sigma)$ durch $f(\sigma)$ in folgender Weise bestimmt ist (vgl. Gleichung (44c)):

$$Q(\sigma) = e^{-\int f(\sigma)\, d\sigma}. \tag{61}$$

Als Illustration zur Handhabung dieser Methode möchte ich hier nur noch auf die Bestimmung der den $f(\sigma)$ der Planckschen und der W. Wienschen Strahlungsformel:

$$f(\sigma) = \frac{1}{e^\sigma - 1} \text{ bzw. } f(\sigma) = e^{-\sigma} \tag{62}$$

zugehörigen $G(E/v)$ mit der mir von befreundeter Seite gemachten Bemerkung zurückkommen, daß man durch die den entsprechenden beiden $Q(\sigma)$ gemeinsame Eigenschaft, die rein imaginäre Periode $2\pi i$ zu besitzen, darauf geführt wird $G(g)$ aberall gleich Null zu setzen und die Punktgewichte auf die äquidistanten Punkte 0, 1, 2, ... zu legen.[1])

Setzt man in unseren Fällen

$$Q(\sigma) = F(e^{-\sigma}), \tag{63}$$

und beachtet man, daß nach dem obigen Ansatz die Funktionalgleichung (60) die spezielle Gestalt annimmt:

$$\sum_0^\infty {}^r\, G_r (e^{-\sigma})^r = F(e^{-\sigma}), \tag{64}$$

so sieht man, daß die Bestimmung der Punktgewichte G_r darauf hinausläuft, $F(e^{-\sigma})$ nach steigenden Potenzen seines Argumentes zu entwickeln.

IV. Gesetzt die Annahme (A) in II sei auf irgend einem Wege gesichert; was folgt daraus für die Annahmen (B) und (C) in II? — Es ist diesbezüglich, wenn ich nicht irre — folgende Ansicht verbreitet: Die Einsteinsche Lichtquantenhypothese greife im wesentlichen nur mit der Annahme (C) über die Plancksche Theorie hinaus.[2]) Die Annahme (B) hingegen

1) Unter Benutzung einer von Hilbert (Lineare Integralgleichungen IV. Mitt. Göttinger Nachr. 1906) eingeführten Terminologie: Die Lösung der Funktionalgleichung besteht in einem reinen „*Punktspektrum*“, ein „*Streckenspektrum*“ fehlt.

2) Als vor kurzem Hr. Planck in seinem Aufsatz „zur Theorie der Wärmestrahlung“ Ann. d. Phys. **31.** p. 758. 1910 zur Einsteinschen Fassung der Lichtquantenhypothese Stellung nahm, legte er das Hauptgewicht darauf zu zeigen, daß seiner Theorie die Annahme C fremd ist.

trete schon in den Grundlagen der Planckschen Theorie auf und zwar als völlig äquivalent mit der Annahme (A).

Diese Ansicht wird sich darauf berufen, daß die zwei verschiedenen Ableitungen, die Hr. Planck für seine Strahlungsformel gibt: Bestimmung der wahrscheinlichsten Verteilung

a) der *Resonatoren über* die verschiedenen *Energie*bereiche,

b) der *Energie über* die verschiedenen *Resonatoren* (§ 150 bzw. § 148 des Planckschen Buches) sich beziehungsweise auf die folgenden beiden Annahmen stützen:

α) Jeder individuelle Resonator von der Frequenz ν kann nur die Energiewerte 0, $h\nu$, $2h\nu$, ... annehmen und diese mit gleicher Wahrscheinlichkeit.

β) Die Strahlungsenergie der Frequenz ν verteilt sich in endlichen Elementarquanten von der Größe $h\nu$ über die ν-Resonatoren. Dabei entfällt das individuelle Elementarquantum auf die verschiedenen Resonatoren mit gleicher Wahrscheinlichkeit und die einzelnen Elementarquanten sind als voneinander unabhängig verlegbar anzusehen.

Eine derartige Argumentation würde aber auf einem Versehen beruhen: Das Verfahren b) zur Ableitung der Planckschen Strahlungsgleichung ist allerdings vollständig identisch mit dem Verfahren a); sein kombinatorischer Apparat unterscheidet sich von dem des Verfahrens a) nur durch eine andere Art der Zusammenfassung der abzuzählenden Komplexionen. Unrichtig wäre es hingegen, zu glauben, daß das Verfahren a) sich auf die Annahme β) stützt oder stützen läßt.

Man kann zeigen: *Die Annahme β) führt nicht zur Planckschen Strahlungsformel, sondern zu einer einfach unendlichen Schar von anderen Strahlungsformeln, wobei dann die Heraushebung einer bestimmten Formel dieser Schar durch eine Zusatzforderung geschieht.*

Die Einsteinsche Lichtquantenhypothese trennt sich also von den Grundlagen der Planckschen Theorie nicht erst dort, wo sie die Annahme der Existenz individueller, voneinander unabhängiger Strahlungsquanten im *Materie-freien* Raum einführt, sondern schon dort, wo sie diese Annahme bezüglich des *Energieinhaltes der Resonatoren* macht.[1])

Anhang.

A.

[Zu § 2; Gleichung (30)]. — Man führe in (29) und (14) folgende Substitutionen ein:

$$\frac{E}{\nu} = q, \quad a(\nu, E) = b(\nu, q), \quad \gamma(\nu, E) = K(\nu, q)$$

und beachte, daß

$$\gamma(m\,\nu, m\,E) = K(m\,\nu, q),$$

Gleichungen (29) und (14) nehmen dann Gestalt an:

$$(29') \qquad \int\limits_0^\infty d\,\nu \cdot \nu \int\limits_0^\infty d\,q \cdot b(\nu, q) \log \frac{m\,K(m\,\nu, q)}{K(\nu, q)} = 0$$

$$(14') \qquad \nu \int\limits_0^\infty d\,q \cdot b(\nu, q) = N(\nu).$$

Um das Variationsproblem des Textes zu lösen, hat man die Nebenbedingung (14') mit einem Multiplikator A einzuführen, wobei zu beachten ist, daß A wohl von ν und *m nicht aber von q abhängen kann.* Man erhält so folgende Bedingung für die Gestalt von K

$$\log \frac{m\,K(m\,\nu, q)}{K(\nu, q)} = A(m, \nu).$$

Geben wir hier der Größe ν den Wert 1, der Größe q einmal den Wert 1, ein anderes Mal einen beliebigen Wert, so folgt die Beziehung:

$$\frac{K(m, q)}{K(1, q)} = \frac{K(m, 1)}{K(1, 1)}$$

---

1) Auf diese Frage, über die ich im April 1911 in der Petersburger physikalischen Gesellschaft vortrug, werde ich an anderer Stelle zurückkommen.

$K(1, 1)$ ist eine Konstante, $K(m, 1)$ eine Funktion nur von m, $K(1, q)$ eine Funktion nur von q. Die Funktion K muß also von ihren beiden Argumenten — wir können sie jetzt wieder mit ν und q bezeichnen — in folgender Weise abhängen:

$$K(\nu, q) = Q(\nu) \cdot G(q).$$

Damit ist gezeigt, daß $\gamma(\nu, E)$ die Gestalt hat:

$$\gamma(\nu, q) = Q(\nu) \cdot G\left(\frac{E}{\nu}\right) \quad \text{w. z. b. w.}$$

B.

[Zur Tabelle des § 8.] Durch Substitution

$$\sigma q = \xi$$

erhält man aus (39) und (40):

$$(39') \qquad Z(\sigma) = \sigma^{-2} \int_0^\infty d\,\xi \cdot \xi\, e^{-\xi}\, G\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)$$

$$(40') \qquad N(\sigma) = \sigma^{-1} \int_0^\infty d\,\xi \cdot e^{-\xi}\, G\left(\frac{\xi}{\sigma}\right).$$

Beweisen wir zunächst die letzte Zeile der Tabelle in § 8. Die zu beweisende Ungleichung

$$\text{(a)} \qquad \frac{Z(\sigma)}{N(\sigma)} \geqq \sigma^{-(2+\varepsilon)} \text{ [für genügend große } \sigma]$$

läßt sich wegen (39') und (40') auf die folgende äquivalente Form bringen:

$$\text{(b)} \qquad \int_0^\infty d\,\xi \cdot e^{-\xi} (\xi - \sigma^{-1-\varepsilon})\, G\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) \geqq 0 \text{ [für genügend große } \sigma].$$

Wir zerlegen das Integral in seinen negativen und positiven Teil:

$$\int_0^{\sigma^{-1-\varepsilon}} = I(\sigma), \qquad \int_{\sigma^{-1-\varepsilon}}^\infty = II(\sigma).$$

Daß die Ungleichung (b) und damit (a) erfüllt sei, ist offenbar vollkommen bewiesen, falls wir zeigen können, daß

(c) $$\lim_{\sigma=\infty} II(\sigma) \neq 0$$

(d) $$\lim_{\sigma=\infty} I(\sigma) = 0;$$

denn dann ist für genügend große σ das negative $I(\sigma)$ schließlich sicher nicht mehr imstande das immer positive und nicht bis zu Null abnehmende $II(\sigma)$ zu überwältigen.

Beweis von (*c*): $II(\sigma)$ ist sicher größer als das von $\sigma^{-1-\varepsilon}$ bis 1 erstreckte Integral; für letzteres gilt weiter die Ungleichung:

$$\int_{\sigma^{-1-\varepsilon}}^{1} d\xi \cdot e^{-\xi}(\xi - \sigma^{-1-\varepsilon})\, G\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) \geqq e^{-1}\int_{\sigma^{-1-\varepsilon}}^{1} d\xi \cdot (\xi - \sigma^{-1-\varepsilon}) \cdot G\left(\frac{\xi}{\sigma}\right).$$

Da aber $G(q)$ bei $q = 0$ integrabel-unendlich wird, so ist die Limite des letzten Integrales sicher *eine von Null verschiedene* positive Größe.

Beweis von (*d*): Der Absolutwert von $I(\sigma)$ ist kleiner oder gleich dem Wert des Integrales

$$s(\sigma) = \int_0^{\sigma^{-1-\varepsilon}} d\xi\, (\sigma^{-1-\varepsilon} - \xi) \cdot G\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)$$

$$= \sigma^{-\varepsilon}\int_0^{\sigma^{-2-\varepsilon}} dq \cdot G(q) - \sigma^2 \int_0^{\sigma^{-2-\varepsilon}} dq \cdot q\, G(q).$$

Formt man das zweite Integral rechts durch partielle Integration um[1]), wobei man setzt:

$$\int_0^q dq \cdot G(q) = H(q),$$

so erhält man nach kurzer Zwischenrechnung:

$$s(\sigma) = \sigma^2 \int_0^{\sigma^{-2-\varepsilon}} dq \cdot H(q).$$

1) Die Bedingungen für die Erlaubtheit dieser Umformung sind hier erfüllt.

Nun kann $H(q)$ zwar langsamer als jede noch so kleine positive Potenz von q gegen Null gehen; da es aber doch gegen Null geht, und zwar monoton, so ist man sicher, daß für genügend kleine q schließlich $H(q)$ mindestens unter einer gewissen endlichen Grenze M bleiben wird; daraus gewinnt man, daß für genügend große σ.

$$s(\sigma) < \sigma^2 \cdot M \sigma^{-2-\varepsilon}$$

und damit ist dann (d) bewiesen.

Beweis der mittleren Zeile der Tabelle in § 8. Wäre $G(q)$ geradezu gleich q^N, so erhielte man durch die Substitution $\sigma q = \xi$ unmittelbar

$$N(\sigma) = \frac{1}{\sigma^{N+1}} \int_0^\infty d\xi \cdot e^{-\xi} \xi^N = \frac{1}{\sigma^{N+1}} \Gamma(N+1)$$

und analog den Ausdruck für $Z(\sigma)$. — Ist aber

$$G(q) = A q^N (1 + \varepsilon(q)),$$

wo $\varepsilon(q)$ mit q gegen Null geht, so zerlege man zum Zwecke der Abschätzung die Integrale über q, welche $Z(\sigma)$ und $N(\sigma)$ darstellen, in zwei Teile: Von $q = 0$ bis $q = \sigma^{-1/2}$ und von da bis ∞.

Beweis der ersten Zeile der Tabelle. Die Integrale, die $Z(\sigma)$ und $N(\sigma)$ darstellen, gehen hier von $q = R$ bis $q = \infty$. Zieht man den Faktor $e^{-R\sigma}$ vor das Integral und führt unter dem Integral die Substitution

$$q - R = p$$

aus, so erhält man Integrale, welche die gleiche Form besitzen, wie das $N(\sigma)$ in der zweiten Zeile der Tabelle.

C.

[Zu § 9, 1]. *Beweisgang*: Sei der erste Punkt mit Sondergewicht der Punkt q_1. Man hat dann zwei Klassen von $G(q)$ zu unterscheiden: I. Falls $G(q)$ schon für Werte von $q < q_1$ von Null abweicht. II. Falls von $q = 0$ bis $q = q_1$ das Streckengewicht $G(q) = 0$ ist. — Mit Hilfe einer Methode, die im Beginn des § 12 dargelegt wird, kann man in beiden Fällen die relative Grenzgeschwindigkeit abschätzen, mit der für genügend große σ: $q_1 e^{-q_1\sigma}$ und $Z(\sigma)$ bzw. $e^{-q_1\sigma}$ und $N(\sigma)$ gegen Null gehen. Es zeigt sich: Im Falle I verschwinden schließlich $q_1 e^{-q_1 \varrho}$ gegen $Z(\sigma)$, $e^{-q_1 \sigma}$ gegen $N(\sigma)$ der Verlauf von $f(\sigma)$ ist dann wieder aus der Tabelle des § 8 zu entnehmen. Im Falle II verschwinden umgekehrt $Z(\sigma)$ und $N(\sigma)$ gegen $q_1 e^{-q_1 \sigma}$ und $e^{-q_1 \sigma}$ und zwar selbst dann, wenn $G(q)$ bei Annäherung an $q = q_1$ von $q > q_1$ her (integrabel-)*unendlich* wird. Infolgedessen ist hier $\lim_{\sigma = \infty} f(\sigma) = q_1$. — In beiden Fällen ist die Violettforderung verletzt.

(Eingegangen 8. Juli 1911.)