

**2. Über einen Satz  
der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine  
Anwendung in der Strahlungstheorie;  
von A. Einstein und L. Hopf.**

---

§ 1. Das physikalische Problem als Ausgangspunkt.

Will man in der Theorie der Temperaturstrahlung irgend eine Wirkung der Strahlung berechnen, etwa die auf einen Oszillator wirkende Kraft, so verwendet man dazu stets als analytischen Ausdruck für die elektrische oder magnetische Kraft Fouriersche Reihen der allgemeinen Gestalt

$$\sum_n A_n \sin 2\pi n \frac{t}{T} + B_n \cos 2\pi n \frac{t}{T}.$$

Hierbei ist das Problem gleich auf einen bestimmten Raumpunkt spezialisiert, was für das Folgende ohne Bedeutung ist,  $t$  bedeutet die variable Zeit,  $T$  die sehr große Zeitdauer, für welche die Entwicklung gilt. Bei der Berechnung irgendwelcher Mittelwerte — und nur solche kommen in der Strahlungstheorie überhaupt vor — nimmt man die einzelnen Koeffizienten  $A_n, B_n$  als unabhängig voneinander an, man setzt voraus, daß jeder Koeffizient unabhängig von den Zahlenwerten der anderen das Gauss'sche Fehlergesetz befolge, so daß die Wahrscheinlichkeit<sup>1)</sup>  $dW$  einer Kombination von Werten  $A_n, B_n$  sich aus den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Koeffizienten einfach als Produkt darstellen müsse.

$$(1) \quad dW = W_{A_1} \cdot W_{A_2} \dots W_{B_1} \cdot W_{B_2} \dots dA_1 \dots dB_1 \dots$$

Da bekanntlich die Strahlungslehre, so wie sie exakt aus den allgemein anerkannten Fundamenten der Elektrizitäts-

---

1) Unter „Wahrscheinlichkeit eines Koeffizienten“ ist offenbar folgendes zu verstehen: Wir denken uns die elektrische Kraft in sehr vielen Zeitmomenten in Fouriersche Reihen entwickelt. Derjenige Bruchteil dieser Entwicklungen, bei welchem ein Koeffizient in einem bestimmten Wertebereich liegt, ist die Wahrscheinlichkeit dieses Wertebereiches des betreffenden Koeffizienten.

theorie und der statistischen Mechanik folgt, in unlösbare Widersprüche mit der Erfahrung führt, liegt es nahe, dieser einfachen Annahme der Unabhängigkeit zu mißtrauen und ihr die Schuld an den Mißerfolgen der Strahlungstheorie zuzuschreiben.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß dieser Ausweg unmöglich ist, daß sich vielmehr das physikalische Problem auf ein rein mathematisches zurückführen läßt, das zum statistischen Gesetze (1) führt.

Betrachten wir nämlich die aus einer bestimmten Richtung herkommende<sup>1)</sup> Strahlung, so hat diese gewiß einen höheren Grad von Ordnung, als die gesamte in einem Punkte wirkende Strahlung. Die Strahlung aus einer bestimmten Richtung können wir aber immer noch auffassen als von sehr vielen Emissionszentren herrührend, d. h. wir können die Fläche, welche die Strahlung aussendet, noch in sehr viele unabhängig voneinander ausstrahlende Flächenelemente zerlegen; denn der Entfernung dieser Fläche vom Aufpunkt sind ja keine Grenzen gesteckt, also auch nicht ihrer gesamten Ausdehnung. In diese von den einzelnen Flächenelementen herrührenden Strahlungselemente führen wir wieder ein höheres Ordnungsprinzip ein, indem wir diese Strahlungselemente alle als von gleicher Form und nur durch eine zeitliche Phase verschieden auffassen; mathematisch gesprochen: die Koeffizienten der Fourierschen Reihen, welche die Strahlung der einzelnen Flächenelemente darstellen, seien für alle Flächenelemente dieselben, nur der Anfangspunkt der Zeit von Element zu Element verschieden. Können wir Gleichung (1) unter Zugrundelegung dieser Ordnungsprinzipien beweisen, so gilt sie a fortiori für den Fall, daß man diese Ordnungsprinzipien fallen läßt. Bezeichnet der Index  $s$  das einzelne Flächenelement, so erhält die dort ausgesandte Strahlung die Form:

$$\sum^{(n)} a_n \sin 2\pi n \frac{t - t_s}{T}.$$

Die gesamte von uns betrachtete Strahlung wird also dargestellt durch die Doppelsummen:

$$(2) \sum_s \sum^n a_n \left( \sin 2\pi n \frac{t}{T} \cos 2\pi n \frac{t_s}{T} - \cos 2\pi n \frac{t}{T} \sin 2\pi n \frac{t_s}{T} \right).$$

1) genauer: „einem bestimmten Elementarwinkel  $d\alpha$  entsprechende“  
Annalen der Physik. IV. Folge. 33. 70

Vergleichung von (2) und (1) führt also zu den Ausdrücken:

$$(3) \quad \begin{cases} A_n = a_n \sum^s \cos 2 \pi n \frac{t_s}{T}, \\ B_n = a_n \sum^n \sin 2 \pi n \frac{t_s}{T}, \end{cases}$$

$n$  ist eine sehr große Zahl,  $t_s$  kann jeden Wert zwischen 0 und  $T$  annehmen, die einzelnen Summanden

$$\cos 2 \pi n \frac{t_s}{T} \quad \text{bzw.} \quad \sin 2 \pi n \frac{t_s}{T}$$

liegen also regellos zwischen  $-1$  und  $+1$  verteilt und sind gleich wahrscheinlich positiv wie negativ. Können wir für eine Kombination von Summen solcher Größen allgemein die Gültigkeit unserer Gleichung (1) nachweisen, so ist damit auch die Unmöglichkeit erwiesen, irgend ein Ordnungsprinzip in die im leeren Raum sich ausbreitende Strahlung einzuführen.

## § 2. Formulierung des allgemeinen mathematischen Problems.

Wir stellen uns also folgendes mathematische Problem: Gegeben ist eine sehr große Anzahl von Elementen, deren Zahlenwerte  $\alpha$  ein bekanntes statistisches Gesetz befolgen (entsprechend den  $t_s$ ). Von jedem dieser Zahlenwerte werden gewisse Funktionen  $f_1(\alpha) f_2(\alpha) \dots$  gebildet (entsprechend  $\sin 2 \pi n \frac{t_s}{T} n \cdot \cos 2 \pi n \frac{t_s}{T}$ ). Diese Funktionen müssen wir noch einer Einschränkung unterwerfen: Es ergibt sich nämlich aus der Wahrscheinlichkeit, daß eine der Größen  $\alpha$  zwischen  $\alpha + d\alpha$  liegt, ein statistisches Gesetz für die  $f$ ; die Wahrscheinlichkeit  $\varphi(f) df$ , daß  $f$  einen Zahlenwert zwischen  $f$  und  $f + df$  habe, sei nun stets eine solche Funktion, daß der Mittelwert

$$\bar{f} = \int_{-\infty}^{+\infty} f \varphi(f) df = 0.$$

(Es ist leicht einzusehen, daß unsere Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  wirklich diese Voraussetzung erfüllen; denn wenn jeder Wert von  $t_s$  zwischen 0 und  $T$  gleich wahrscheinlich ist, verschwinden die Mittelwerte  $\sin 2 \pi n \frac{t_s}{T}$  und  $\cos 2 \pi n \frac{t_s}{T}$ .)

Wir fassen nun eine (sehr große) Anzahl  $Z$  solcher Elemente  $\alpha$  zu einem System zusammen. Zu einem derartigen System gehören bestimmte Summen

$$\Sigma_{(Z)} f_1(\alpha), \quad \Sigma_{(Z)} f_2(\alpha) \dots$$

(entsprechend den Koeffizienten  $A_n/a_n, B_n/a_n$ ). Wir stellen uns die Aufgabe, das statistische Gesetz zu ermitteln, welches eine Kombination dieser Summen befolgt.

Zunächst müssen wir über einen prinzipiellen Punkt Klarheit schaffen:

Das statistische Gesetz, das die Summen  $\Sigma$  selbst befolgen, wird gar nicht von der Anzahl  $Z$  der Elemente unabhängig sein. Das können wir leicht an dem einfachen Spezialfall sehen, daß  $f(\alpha)$  nur die Werte  $+1$  und  $-1$  annehmen könne. Dann ist offenbar:

$$\Sigma_{(Z+1)} = \Sigma_{(Z)} \pm 1$$

und

$$\overline{\Sigma_{(Z+1)}^2} = \overline{\Sigma_{(Z)}^2} + 1.$$

Der quadratische Mittelwert der Summe wächst also proportional mit der Anzahl der Elemente. Wollen wir also zu einem von  $Z$  unabhängigen statistischen Gesetze gelangen, so dürfen wir nicht die  $\Sigma$  betrachten, sondern, da  $\overline{\Sigma^2}/Z$  konstant bleibt, die Größen

$$S = \frac{\Sigma}{\sqrt{Z}}.$$

### § 3. Statistisches Gesetz der einzelnen $S$ .

Ehe wir nun eine Kombination aller Größen

$$S^{(n)} = \frac{\Sigma_{(Z)} f_n(\alpha)}{\sqrt{Z}}$$

untersuchen, wollen wir das Wahrscheinlichkeitsgesetz einer einzelnen solchen Größe aufstellen.

Wir betrachten eine Vielheit von  $N$ -Systemen der oben definierten Art. Zu jedem System gehört ein Zahlenwert  $S$ . Diese Größen befolgen wegen der statistischen Verteilung der  $\alpha$  ein gewisses Wahrscheinlichkeitsgesetz, so daß die Anzahl der Systeme, deren Zahlenwert zwischen  $S$  und  $S + dS$  liegt:

$$(4) \quad dN = F(S) dS.$$

Fügen wir nun zu den aus  $Z$ -Elementen bestehenden Systemen noch je ein weiteres Element, d. h. gehen wir von  $S_Z$  zu  $S_{Z+1}$  über, so werden die einzelnen Glieder unserer Vielheit ihren Zahlenwert ändern und in ein anderes Gebiet  $dS$  einrücken. Wenn es trotzdem möglich sein soll, zu einem von  $Z$  unabhängigen statistischen Gesetz zu gelangen, so darf sich bei diesem Übergang die Anzahl  $dN$  nicht ändern. Es muß also in ein bestimmtes (in unserem einfachsten Fall eindimensionales) Gebiet  $dS$  die gleiche Anzahl von Systemen ein- wie austreten. Bezeichnet  $\Phi$  die Zahl der Systeme, welche vom Übergang von  $Z$  zu  $Z+1$  Elementen einen gewissen Zahlenwert  $S_0$  durchschreiten und zwar sowohl der Größe wie der Richtung nach, so muß:

$$(5) \quad \operatorname{div} \Phi = 0,$$

also

$$\frac{d\Phi}{dS} = 0$$

und, da ja  $\Phi$  für  $S = \infty$  jedenfalls gleich 0 sein muß, auch

$$(6) \quad \Phi = 0.$$

Nun ist:

$$S_{(Z+1)} = \frac{\Sigma_{(Z+1)} f(\alpha)}{\sqrt{Z+1}} = S_{(Z)} \sqrt{\frac{Z}{Z+1}} + \frac{f(\alpha)}{\sqrt{Z+1}},$$

oder, da  $Z$  eine sehr große Zahl sein soll:

$$(7) \quad S_{(Z+1)} = S_{(Z)} - \frac{S_{(Z)}}{2Z} + \frac{f(\alpha)}{\sqrt{Z}}.$$

Die Anzahl  $\Phi$  setzt sich also aus zwei Teilen zusammen, einem  $\Phi_1$ , der vom Summanden  $-S/2Z$  und einem  $\Phi_2$ , der von  $f(\alpha)/\sqrt{Z}$  herrührt.

$\Phi_1$  enthält alle diejenigen  $S$ , welche in einem positiven Abstand  $\leq S_0/2Z$  vom Werte  $S_0$  gelegen waren; und zwar durchschreiten diese Glieder  $S_0$  in negativer Richtung. Ihre Anzahl ist, da  $S_0/2Z$  eine sehr kleine Zahl ist, bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung:

$$(8) \quad \Phi_1 = -\frac{S_0}{2Z} F(S_0).$$

Zur Anzahl  $\Phi_2$  kommt ein Beitrag aus jeder beliebigen positiven und negativen Entfernung  $A$  von  $S_0$ , und zwar ein

positiver oder negativer Beitrag, je nachdem  $\Delta$  negativ oder positiv ist. In der Entfernung  $\Delta$  ist die Anzahl  $dN$  gegeben durch

$$F(S_0 + \Delta) dS = F(S_0 + \Delta) d\Delta,$$

oder, da doch nur kleine Werte von  $\Delta$  ins Gewicht fallen, durch

$$\left\{ F(S_0) + \Delta \left( \frac{dF}{d\Delta} \right)_{S_0} \right\} d\Delta.$$

Von dieser Anzahl durchqueren alle diejenigen den Wert  $S_0$  in positiver Richtung, die, von einem negativen  $\Delta$  herkommend, ein so großes  $f(\alpha)$  haben, daß

$$\frac{f(\alpha)}{\sqrt{Z}} \geq |\Delta|,$$

also die Anzahl

$$\int_{-\Delta\sqrt{Z}}^{+\infty} \varphi(f) df.$$

In der negativen Richtung geht analog die Anzahl

$$\int_{-\infty}^{-\Delta\sqrt{Z}} \varphi(f) df.$$

So wird:

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \int_{-\infty}^0 d\Delta \left\{ F(S_0) + \Delta \left( \frac{dF}{d\Delta} \right)_{S_0} \right\} \int_{-\Delta\sqrt{Z}}^{+\infty} \varphi(f) df \\ &\quad - \int_0^{\infty} d\Delta \left\{ F(S_0) + \Delta \left( \frac{dF}{d\Delta} \right)_{S_0} \right\} \int_{-\infty}^{-\Delta\sqrt{Z}} \varphi(f) df. \end{aligned}$$

Durch partielle Integration geht dies über in:

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= - \int_{-\infty}^0 d\Delta \left\{ \Delta \cdot F(S_0) + \frac{\Delta^2}{2} \left( \frac{dF}{d\Delta} \right)_{S_0} \right\} \varphi(-\Delta\sqrt{Z}) \cdot \sqrt{Z} \\ &\quad - \int_0^{\infty} d\Delta \left\{ \Delta \cdot F(S_0) + \frac{\Delta^2}{2} \left( \frac{dF}{d\Delta} \right)_{S_0} \right\} \varphi(-\Delta\sqrt{Z}) \cdot \sqrt{Z}. \end{aligned}$$

Da nun nach Voraussetzung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f \varphi(f) df = 0$$

wird, wenn wir  $\Delta \sqrt{Z} = f$  als Variable einführen:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_2 &= -\frac{1}{2Z} \left( \frac{dF}{dA} \right)_{S_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \varphi(f) df \\ &= -\frac{1}{2Z} \left( \frac{dF}{dA} \right)_{S_0} \cdot \bar{f}^2. \end{aligned} \right.$$

(8) und (9) in (6) eingesetzt, ergeben die Differentialgleichung:

$$SF + \bar{f}^2 \frac{dF}{dS} = 0,$$

deren Lösung:

$$(10) \quad F = \text{const. } e^{-\frac{S^2}{2\bar{f}^2}},$$

das Gauss'sche Fehlergesetz ausspricht.

#### § 4. Statistisches Gesetz einer Kombination aller $S^{(n)}$ .

Wir dehnen nun die Betrachtungen des vorigen Paragraphen vom eindimensionalen Fall auf den beliebig vieler Dimensionen aus. Wir haben diesmal eine Kombination von vielen Größen  $S^{(n)}$  zu betrachten. Die Anzahl der in einem unendlich kleinen Gebiete  $dS^{(1)} dS^{(2)} \dots$  liegenden Systeme sei:

$$(11) \quad dN = F(S^{(1)}, S^{(2)} \dots) dS^{(1)} dS^{(2)} \dots$$

Wieder fordern wir, daß  $dN$  sich nicht ändern soll, wenn wir von  $S_{(Z)}^{(n)}$  zu  $S_{(Z+1)}^{(n)}$  übergehen, wieder führt dies zu der Differentialgleichung (5)

$$\text{div } \Phi = 0.$$

Nur hat die Anzahl  $\Phi$  in unserem jetzigen Fall Komponenten in jeder Richtung  $S^{(1)}, S^{(2)} \dots$ , die wir mit  $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)} \dots$  bezeichnen wollen. (5) nimmt also die Gestalt an

$$\sum_n \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial S^{(n)}} = 0.$$

Zwischen  $S_{(Z)}^{(n)}$  und  $S_{(Z+1)}^{(n)}$  besteht, wie früher Gleichung (7), daher bleiben die Betrachtungen des vorigen Paragraphen vollkommen gültig zur Berechnung der einzelnen  $\Phi^{(n)}$ . Es wird also

$$\Phi^{(n)} = S^{(n)} P + \bar{f}^2 \frac{\partial F}{\partial S^{(n)}}.$$

Wir können diesen Ausdruck noch vereinfachen, indem wir alle  $f_n^2$  als gleich annehmen. Dies kommt ersichtlich nur darauf hinaus, daß wir die einzelnen Funktionen  $f_n$  mit passenden Konstanten multipliziert denken. (Im speziellen Fall unserer  $\sin$  und  $\cos$  ist diese vereinfachende Annahme von selbst erfüllt.)

So erhalten wir schließlich für die Funktion  $F$  die Differentialgleichung:

$$(12) \quad \sum^n \frac{\partial}{\partial S^{(n)}} \left( S^{(n)} F + f^2 \frac{\partial F}{\partial S^{(n)}} \right) = 0.$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung führt uns die Betrachtung des über den ganzen Raum erstreckten Integrals:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int \frac{1}{F} \sum_0^{n_1} \left\{ \left( S^{(n)} F + f^2 \frac{\partial F}{\partial S^{(n)}} \right)^2 \right\} dS^{(1)} \dots dS^{(n_1)} \\ & = \int \sum_0^{n_1} \left\{ \left( S^{(n)} F + f^2 \frac{\partial F}{\partial S^{(n)}} \right) \left( S^{(n)} + f^2 \frac{\partial \log F}{\partial S^{(n)}} \right) \right\} dS^{(1)} \dots dS^{(n_1)}. \end{aligned} \right.$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} & \int \sum_0^{n_1} \left\{ \left( S^{(n)} F + f^2 \frac{\partial F}{\partial S^{(n)}} \right) S^{(n)} \right\} dS^{(1)} \dots dS^{(n_1)} \\ & = \int \left( F \sum_0^{n_1} S^{(n)2} + f^2 \sum_0^{n_1} S^{(n)} \frac{\partial F}{\partial S^{(n)}} \right) dS^{(1)} \dots dS^{(n_1)}, \end{aligned}$$

oder wenn wir den zweiten Summanden partiell integrieren und bedenken, daß im Unendlichen  $F=0$  sein muß,

$$= \int F \left( \sum_0^{n_1} S^{(n)2} - f^2 \cdot n_1 \right) dS^{(1)} \dots dS^{(n_1)}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet aber, weil

$$\int F S^{(n)2} dS^{(1)} \dots dS^{(n_1)}$$

nichts anderes ist, als der im letzten Paragraphen abgeleitete Mittelwert  $\overline{S^{(n)2}}$ , falls nur ein einziges  $S$  betrachtet wird; für diesen folgt aus Gleichung (10)

$$S^2 = f^2.$$



Andererseits wird durch partielle Integration:

$$\int \sum \left\{ \left( S^{(n)} F + \bar{f}^2 \frac{\partial F}{\partial S^{(n)}} \right) \bar{f}^2 \frac{\partial \log F}{\partial S^{(n)}} \right\} dS^{(1)} \dots dS^{(n)},$$

$$= \int \bar{f}^2 \log F \sum \left( \frac{\partial}{\partial S^{(n)}} \left( S^{(n)} F + \bar{f}^2 \frac{\partial F}{\partial S^{(n)}} \right) \right) dS^{(1)} \dots dS^{(n)},$$

was nach Gleichung (12) ebenfalls verschwindet.

Somit ist erwiesen, daß das Integral (13) verschwindet; dies ist aber wegen des quadratischen Charakters des Integranden nur möglich, wenn überall für jedes  $n$  gilt:

$$(14) \quad S^{(n)} F + \bar{f}^2 \frac{\partial F}{\partial S^{(n)}} = 0.$$

So gelangen wir also für  $F$  zu einem statistischen Gesetz, welches in bezug auf jedes  $S^{(n)}$  mit dem Gauss'schen Fehlergesetz identisch ist:

$$(15) \quad F = \text{const.} \cdot e^{-\frac{S^{(1)2}}{2\bar{f}^2}} \cdot e^{-\frac{S^{(n)2}}{2\bar{f}^2}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit einer Kombination von Werten  $S^{(n)}$  setzt sich also einfach als Produkt aus den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen  $S^{(n)}$  zusammen.

Es ist klar, daß, wenn für  $S^{(1)}, S^{(2)} \dots$  die Gleichung (15) gilt, dieselbe Gleichung für eine Kombination von Größen

$$S^{(n)'} = \alpha_n S^{(n)}$$

erfüllt ist. In diesem Falle tritt statt  $\bar{f}^2$  die Größe  $\alpha_n^2 \bar{f}^2$  in die Exponenten ein. Von der Art der  $S^{(n)'}$  sind aber die Koeffizienten  $A_n, B_n$  unseres physikalischen Problems; und zwar ist

$$S^{(n)} = \frac{A_n}{\alpha_n \sqrt{Z}},$$

also

$$\alpha_n = \alpha_n \sqrt{Z}$$

zu setzen.

Somit ist auch die Gültigkeit der Gleichung (1) und die Unmöglichkeit erwiesen, eine wahrscheinlichkeits-theoretische Beziehung zwischen den Koeffizienten der die Temperaturstrahlung darstellenden Fourierreihe aufzustellen.

(Eingegangen 29. August 1910.)