7. *Über den vom Standpunkt des Relativitätsprinzips aus als „starr“ zu bezeichnenden Körper;*
von G. Herglotz.

In seiner Arbeit „Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips“[1]) hat Hr. M. Born in naheliegender Weise versucht, eine Definition derjenigen Bewegungsformen eines dreifach ausgedehnten deformierbaren Kontinuums zu geben, welche vom Standpunkte des Relativitätsprinzips aus als allgemeinste Bewegung eines „starren“ Körpers zu bezeichnen wären, dieselben aber nur in einem speziellen, leicht zu erledigenden Falle wirklich aufgestellt. Insbesondere ist dort die Frage unberücksichtigt gelassen worden, ob dem so definierten „starren“ Körper auch eine sechsfache Bewegungsfreiheit zukommt, wie man es doch wohl wünschen möchte, wenn man diesem neuen „starren“ Körper im Systeme des elektromagnetischen Weltbildes dieselbe fundamentale Bedeutung zuzumessen hat, wie dem gewöhnlichen starren Körper im Systeme des mechanischen Weltbildes.

Eben diese Frage findet nun in den folgenden Zeilen insofern eine Beantwortung, als der Nachweis geliefert wird, daß die Bewegung dieses „starren“ Körpers im allgemeinen — d. h. von speziellen, näher angegebenen Ausnahmefällen abgesehen — durch die willkürlich vorzuschreibende Bewegung eines einzigen seiner Punkte eindeutig festgelegt ist.

Insbesondere mag nach dieser Richtung hin zur Illustration gleich die Tatsache vorweg angeführt sein, daß der Körper des Hrn. Born, sobald einer seiner Punkte fest ist, nur noch, wie ein gewöhnlicher starrer Körper, um eine durch diesen Punkt gehende feste Achse gleichförmig rotieren kann.[2])

1) M. Born, Ann. d. Phys. **30.** p. 1. 1909.

2) Nach Niederschrift dieses Aufsatzes erhalte ich Kenntnis von einer im Heft vom 22. November 1909 der Physik. Zeitschr. erschienenen Notiz Hrn. P. Ehrenfests, die auf eben diese Tatsache abzielt, indem sie in äußerst einfacher Weise zeigt, daß ein einmal ruhender Körper nicht in gleichförmige Rotation versetzt werden kann.

I. Definition des „starren" Körpers vom Standpunkt des Relativitätsprinzips aus.

Den Gedankengängen Minkowskis[1]) folgend, sollen die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eines materiellen Teilchens in Verbindung mit der Zeit t, zu welcher es sich an dieser Stelle befindet, gedeutet werden als die vier Koordinaten eines Punktes der vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit $R_4(x, y, z, t)$.

Ebenso soll weiter in diesem R_4 eine Maßbestimmung eingeführt werden, nach welcher (die Lichtgeschwindigkeit fortan gleich 1 gesetzt) das Quadrat der Entfernung ds zweier unendlich benachbarter Punkte

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 \tag{1}$$

ist.

Raumartig heißen Linienelemente reeller Länge ($ds^2 > 0$), zeitartig aber solche rein imaginärer Länge ($ds^2 < 0$). Die Richtungen der von einem Punkt ausgehenden Linienelemente der Länge Null bilden einen reellen Kegel — den Minimalkegel des betreffenden Punktes — dessen beide durch $dt > 0$ und $dt < 0$ unterschiedenen Schalen bzw. der Nachkegel und Vorkegel heißen.

Zwei Richtungen $(dx : dy : dz : dt)$ und $(dx' : dy' : dz' : dt')$ stehen dieser Maßbestimmung zufolge normal zueinander, wenn

$$dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz' - dt\,dt' = 0 \tag{2}$$

ist. Die zu einem zeitartigen Element normalen Elemente sind notwendig raumartig, aber nicht umgekehrt.

Als Bewegungen im R_4 soll die Gruppe jener ∞^{10} affinen Transformationen, der Funktionaldeterminante $+1$, von x, y, z, t bezeichnet werden, welche ds^2 ungeändert lassen und Vor- und Nachkegel entsprechender Punkte nicht gegeneinander umtauschen. Lorentztransformationen sind dann jene Gruppe von ∞^6 Bewegungen, welche den Nullpunkt ($x = y = z = t = 0$) festlassen — die Drehungen um den Nullpunkt, — und umgekehrt geht die Gruppe der Bewegungen aus dieser durch Hinzunahme der ∞^4 Translationen hervor.

---

1) H. Minkowski, Die Grundgleichungen der elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, Gött. Nachr. 1908; Raum und Zeit, Vortrag, gehalten auf der 80. Naturforscherversammlung zu Köln. Leipzig 1909.

Nach diesen allgemein bekannten Festsetzungen denke man im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum $R_3(x, y, z)$ irgend ein deformierbares Kontinuum sich bewegend — es mögen zur Zeit t die Koordinaten irgend eines, durch irgend welche drei Parameter ξ, η, ζ individualisierten, materiellen Teilchens desselben sein:

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta, t), \\ y = y(\xi, \eta, \zeta, t), \\ z = z(\xi, \eta, \zeta, t). \end{cases}$$

Zu größerer Symmetrie mag in dem Kontinuum irgendwie eine Art Ortszeit τ:

$$\text{(4)} \qquad \tau = \tau(\xi, \eta, \zeta, t), \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} > 0$$

eingeführt werden, wonach sich statt (3) gleichmäßiger schreiben läßt:

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta, \tau), \\ y = y(\xi, \eta, \zeta, \tau), \\ z = z(\xi, \eta, \zeta, \tau), \\ t = t(\xi, \eta, \zeta, \tau). \end{cases}$$

Den aufeinanderfolgenden Werten von x, y, z, t für ein bestimmtes materielles Teilchen (ξ, η, ζ) entspricht nun im R_4 eine bestimmte Kurve $C_{\xi, \eta, \zeta}$, die Weltlinie dieses Teilchens, deren Gleichungen in (5) für fest gedachte ξ, η, ζ und variables τ gegeben sind.

Die Bewegung des ganzen Kontinuums wird so im R_4 durch eine dreiparametrige Kurvenschar $C(\xi, \eta, \zeta)$, eben die ∞^3 Weltlinien der Teilchen des Kontinuums repräsentiert.

Wird weiter die Voraussetzung gemacht, daß sich kein Teilchen des Kontinuums je mit Licht- oder Überlichtgeschwindigkeit bewegt, so ist jedes Linienelement irgend einer Kurve zeitartig. Die von Hrn. M. Born vom Standpunkte des Relativitätsprinzips aus aufgestellte Definition des „starren“ Körpers läßt sich jetzt so formulieren:

> *„Das Kontinuum bewegt sich dann als „starrer“ Körper, wenn im R_4 die Weltlinien $C(\xi, \eta, \zeta)$ seiner Punkte äquidistante Kurven sind.“* [1])

1) Dieser Formulierung zufolge sind die von Hrn. Born für den Fall der geradlinigen Translation errechneten Formeln sofort hin-

Damit ist gemeint, es soll der Normalabstand irgend zweier unendlich benachbarter Kurven entlang derselben konstant sein, anders ausgedrückt, es soll der von irgend zwei unendlich benachbarten Kurven gebildete Streifen überall von derselben Breite sein.

Diese Bedingung analytisch zu formulieren, berechne man nach (5) das Linienelement ds in den krummlinigen Koordinaten ξ, η, ζ, τ. Schreibt man der Gleichförmigkeit halber:

$$\xi_1 = \xi, \quad \xi_2 = \eta, \quad \xi_3 = \zeta, \quad \xi_4 = \tau, \tag{6}$$

so soll sein:

$$ds^2 = \sum_1^4{}^{ij} A_{ij}\, d\xi_i\, d\xi_j. \tag{7}$$

Da nach Voraussetzung durchgängiger Überlichtgeschwindigkeit die Elemente der Kurven $C(\xi, \eta, \zeta)$ zeitartig sind, so ist:

$$A_{44} < 0, \tag{8}$$

man wird also bei Einführung der linearen Differentialform:

$$dv = A_{14}\, d\xi_1 + A_{24}\, d\xi_2 + A_{34}\, d\xi_3 + A_{44}\, d\xi_4 \tag{9}$$

und der quadratischen bloß $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ enthaltenden:

$$d\sigma^2 = \sum_1^3{}^{ij} A_{ij}\, d\xi_i\, d\xi_j - \frac{1}{A_{44}}(A_{14}\, d\xi_1 + A_{24}\, d\xi_2 + A_{34}\, d\xi_3)^2 \tag{10}$$

schreiben können:

$$ds^2 = d\sigma^2 + \frac{1}{A_{44}}(dv)^2. \tag{11}$$

Soll jetzt das Element ds normal zur Kurve $C_{\xi,\eta,\zeta}$ stehen, so muß:

$$\frac{\partial\, ds^2}{\partial\, d\xi_4} = 0, \quad \text{d. h.} \quad dv = 0 \tag{12}$$

sein, und es ist daher der Normalabstand der Kurven $C_{\xi,\eta,\zeta}$ und $C_{\xi+d\xi,\,\eta+d\eta,\,\zeta+d\zeta}$ gerade gleich $d\sigma^2$.

Die Bedingung der Starrheit lautet somit:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\, d\sigma^2 = 0, \tag{13}$$

---

zuschreiben, denn die äquidistanten Kurven der (x, t)-Ebene mit der Maßbestimmung $ds^2 = dx^2 - dt^2$ sind natürlich (analog wie für $ds^2 = dx^2 + dt^2$) die Orthogonaltrajektorien einer Geradenschar, was eben die Bornschen Formeln besagen.

es müssen mit anderen Worten einfach die sechs Koeffizienten der quadratischen Differentialform $d\sigma^2$ von τ unabhängig sein.

Aber auch physikalisch läßt sich diese Definition der Starrheit gleich einfach formulieren.

Wird die Geschwindigkeit des Teilchens (ξ, η, ζ) zur Zeit t mit s, ihre Komponenten mit u, v, w bezeichnet:

$$(14) \qquad s^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

so ist:

$$(15) \qquad A_{44} = -(1 - s^2)\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)^2,$$

$$(16) \qquad dv = (u\,dx + v\,dy + w\,dz - dt)\frac{\partial t}{\partial \tau}.$$

Setzt man nun $dt = 0$ und betrachtet also alle Teilchen des Kontinuums zur selben Zeit t, so wird:

$$(17) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\sigma^2 - \frac{(u\,dx + v\,dy + w\,dz)^2}{1 - s^2},$$

also

$$(18) \qquad d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(u\,dx + v\,dy + w\,dz)^2}{1 - s^2}.$$

Offenbar ist nun $d\sigma^2 = \varepsilon^2$ die Gleichung eines unendlich kleinen Rotationsellipsoides der Halbachsen ε, ε, $\varepsilon\sqrt{1 - s^2}$, mit dem Teilchen (ξ, η, ζ) als Mittelpunkt und seiner Geschwindigkeitsrichtung als Figurenachse. Die Forderung $(\partial/\partial\tau)\,d\sigma^2 = 0$ besagt also, daß Volumelemente, die im Ruhezustand unendlich kleine Kugeln des Radius ε sind, bei der Bewegung in abgeplattete Rotationsellipsoide übergehen, mit der kleinen Halbachse $\varepsilon\sqrt{1 - s^2}$ in Richtung der Geschwindigkeit und der großen Halbachse ε senkrecht dazu. Es läßt sich mit anderen Worten der von Hrn. M. Born aufgestellten Definition des „starren“ Körpers diese in der Tat äußerst naheliegende Fassung geben:

> *„Ist im Körper die Geschwindigkeit nach Ort und Zeit veränderlich, so soll die Lorentz-Fitzgeraldsche Kontraktionshypothese für jedes einzelne Volumelement gelten.“* [1]

1) Dieselbe Bemerkung bei P. Ehrenfest, l. c. Es ist dies auch geometrisch sofort evident, wenn man den einem Volumelemente entsprechenden Raum-Zeitfaden betrachtet. Ist sein Normalquerschnitt an einer Stelle eine unendlich kleine Kugel, so ist er es, weil die Weltlinien äquidistant sind, an jeder Stelle. Der Querschnitt normal zur t-Achse ist dann natürlich gerade obiges Ellipsoid.

Das einzelne Volumelement besitzt hiernach eine sechsfache Bewegungsfreiheit, denn das Ellipsoid gestattet noch ∞^3 linear homogene Deformationen in sich. Gilt nun aber gleiches für einen aus solchen Elementen kontinuierlich aufgebauten Körper von durchweg endlicher Ausdehnung? Dieser Frage soll im folgenden Abschnitt näher getreten werden durch die

II. Bestimmung der äquidistanten Kurvenscharen des R_4, die eine willkürlich vorgegebene Kurve enthalten.

Man denke in einer solchen Schar $C(\xi, \eta, \zeta)$ irgendwie eine bestimmte Kurve C_0 ausgewählt, es mögen ihr die Parameterwerte (ξ_0, η_0, ζ_0) zugehören.[1])

Hierauf ziehe man die quadratische Differentialform $d\sigma^2$ in $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ heran, deren Koeffizienten bloß von ξ, η, ζ abhängen, und die, als Quadrat der Länge eines raumartigen Linienelementes definit positiven Charakter besitzt, und führe in ihr statt ξ, η, ζ andere Variable a, b, c folgendermaßen ein:

In der dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit der (ξ, η, ζ) denke man sich die von zwei Parametern abhängende Schar der vom Punkte (ξ_0, η_0, ζ_0) auslaufenden Extremalen des Integrales $\int d\sigma$ — die geodätischen Linien der Form $d\sigma^2$ — gezogen, und es seien dann b, c die Werte der beiden Parameter für die durch den Punkt (ξ, η, ζ) gehende Linie dieser Schar, und a das längs derselben von (ξ_0, η_0, ζ_0) bis (ξ, η, ζ) genommene Integral $\int d\sigma$ — die geodätische Entfernung beider Punkte. Ist dann für dieses geodätische Polarkoordinatensystem (a, b, c):

$$(19) \qquad \begin{cases} \xi = \xi(a, b, c), \\ \eta = \eta(a, b, c), \\ \zeta = \zeta(a, b, c), \end{cases}$$

so werden die Differenzen $\xi - \xi_0$, $\eta - \eta_0$, $\zeta - \zeta_0$ für $a=0$ und alle b, c verschwinden, durch a dividiert aber (bei passender Wahl der b, c) für $a = 0$ und alle b, c endlich bleiben, und

1) Die folgenden, der Deutlichkeit halber analytisch gefaßten Überlegungen haben sehr einfache geometrische Bedeutung und sind so auf die äquidistanten Kurvenscharen eines beliebigen Variationsproblems übertragbar.

es wird $d\sigma^2$ in diesen Variablen ausgedrückt, die Form annehmen: [1])

$$d\sigma^2 = da^2 + \varphi(db, dc), \tag{20}$$

wo $\varphi(db, dc)$ eine ebenfalls definit positive, quadratische Differentialform in db, dc allein bedeutet, deren Koeffizienten noch a, b, c, aber ebenso wie die früheren von $d\sigma^2$ nicht τ enthalten. Auch an Stelle von τ soll weiterhin eine andere Größe ϑ folgender Art eingeführt werden:

Man denke jene Lösung der Differentialgleichung:

$$\frac{d\tau}{da} = -\frac{1}{A_{44}}\left(A_{14}\frac{\partial \xi}{\partial a} + A_{24}\frac{\partial \eta}{\partial a} + A_{34}\frac{\partial \zeta}{\partial a}\right) \tag{21}$$

bestimmt, die für $a = 0$ den Wert $\tau = \vartheta$ annimmt:

$$\tau = \tau(a, b, c, \vartheta) \tag{22}$$

und durch diese letztere Gleichung an Stelle von τ den Parameter ϑ eingeführt, der speziell längs der Kurve C_0 mit τ identisch wird.

Durch a, b, c, τ ausgedrückt, wird dann:

$$\frac{1}{\sqrt{-A_{44}}}\sum_1^4{}^i A_{i4}\, d\xi_i = B\,db + C\,dc + \Theta\, d\vartheta \tag{23}$$

sein, also da aus dem linearen Differentialausdruck dv herausfallen.

Ersetzt man so die längs jeder Kurve konstanten Parameter (ξ, η, ζ) durch die (a, b, c) und den längs jeder Kurve variablen Parameter τ durch ϑ, so wird demnach:

$$ds^2 = da^2 + \varphi(db, dc) - (B\,db + C\,dc + \Theta\,d\vartheta)^2. \tag{24}$$

Aus dieser Form ist nun sofort zu schließen [2]), daß die Kurven:

$$b = \text{const.}, \quad c = \text{const.}, \quad \vartheta = \text{const.}$$

im $R_4\,(x, y, z, t)$ Extremalen des Integrals $\int ds$, d. h. aber gerade Linien sind. Diese so gefundenen ∞^3 Geraden $G\,(b, c, \vartheta)$ schneiden die äquidistanten Kurven $C(a, b, c)$, wegen des fehlenden Gliedes mit $da\,d\vartheta$ in ds^2, orthogonal. Hebt man aus ihnen speziell jene ∞^2 Geraden heraus, die zum selben ϑ-Wert gehören, und denkt auf jeder von ihnen den Punkt $a = 0$

1) Vgl. G. Darboux, Théorie génerale des surfaces 2. livre V. chap. VIII.

2) Vgl. G. Darboux, l. c.

markiert, so ist dieser nichts anderes als der Punkt $\tau = \vartheta$ auf der Kurve C_0, durch den sie also alle hindurchgehen, und da sie dortselbst normal zur Kurve C_0 stehen müssen, so sind sie eben die ∞^2 Normalen der Kurve C_0 im Punkt $\tau = \vartheta$. Sie bilden zusammen die Normalebene der Kurve C_0 in diesem Punkte, mit welcher hienach die Fläche $\vartheta =$ const. identisch ist.

Die Größe a ist die längs der Geraden $G_{b,c,\vartheta}$ vom Schnittpunkt mit der Kurve C_0 an gerechnete Länge $\int ds$ — die Entfernung des betreffenden Raumpunktes von der Kurve C_0.

Dies zusammengefaßt ergibt, daß die Ausdrücke der x, y, z, t durch a, b, c, ϑ notwendig diese Gestalt haben müssen:

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_0(\vartheta) + a\,x_1(b, c, \vartheta),\\ y &= y_0(\vartheta) + a\,y_1(b, c, \vartheta),\\ z &= z_0(\vartheta) + a\,z_1(b, c, \vartheta),\\ t &= t_0(\vartheta) + a\,t_1(b, c, \vartheta).\end{aligned}\right.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise soll für den Augenblick mit S stets eine über die vier Koordinaten x, y, z, t zu erstreckende Summe, in der jedoch das auf die t-Koordinate bezügliche Glied negativ in Rechnung zu setzen ist, bezeichnet werden.

Da nun die Geraden $G(b, c, \vartheta)$ die Normalen der Kurve C_0 $(a = 0)$ sind, so wird:

$$(26)\qquad \mathsf{S}\, x_1 \frac{\partial x_0}{\partial \vartheta} = 0,$$

und daraus durch Differentiation nach b und c:

$$(27)\qquad \mathsf{S} \frac{\partial x_0}{\partial \vartheta}\frac{\partial x_1}{\partial b} = \mathsf{S} \frac{\partial x_0}{\partial \vartheta}\frac{\partial x_1}{\partial c} = 0$$

sein müssen.

Wird hienach die mit (25) gebildete Form ds^2 mit dem Ausdruck (24) identifiziert, so folgen die Gleichungen:

$$(28,\alpha)\qquad \begin{aligned} &\varphi(db, dc) - (B\,db + C\,dc)^2 = \\ &= a^2\,\mathsf{S}\left(\frac{\partial x_1}{\partial b}db + \frac{\partial x_1}{\partial c}dc\right)^2 = a^2\,\psi(db, dc),\end{aligned}$$

$$(28,\beta)\qquad -B\,\Theta = a^2\,\mathsf{S}\frac{\partial x_1}{\partial b}\frac{\partial x_1}{\partial \vartheta} = a^2\beta,$$

$$(28,\gamma)\qquad -C\,\Theta = a^2\,\mathsf{S}\frac{\partial x_1}{\partial c}\frac{\partial x_1}{d\vartheta} = a^2\gamma,$$

$$(28,\delta)\qquad -\ \Theta^2 = \mathsf{S}\left(\frac{\partial x_0}{\partial \vartheta} + a\frac{\partial x_1}{\partial \vartheta}\right)^2,$$

in denen die Koeffizienten der binären, quadratischen Differentialform $\psi(db, dc)$ und die Größen β und γ offenbar von a unabhängig sind.

Speziell denke man jetzt ϑ als „Eigenzeit" längs der Kurve C_0, also:

$$\mathrm{S}\left(\frac{\partial x_0}{\partial \vartheta}\right)^2 = -1, \tag{29}$$

was durch eine diesbezügliche Wahl von τ, mit dem ϑ längs C_0 zusammenfällt, stets zu erreichen ist.

Aus den Gleichungen $(28, \delta, \beta, \gamma)$ folgt dann für $a = 0$ der Reihe nach:

$$(\Theta)_0 = 1, \quad \left(\frac{B}{a^2}\right)_0 = \beta, \quad \left(\frac{C}{a^2}\right)_0 = \gamma, \tag{30}$$

und indem man bemerkt, daß also:

$$\left(\frac{B}{a}\right)_0 = \left(\frac{C}{a}\right)_0 = 0 \tag{31}$$

ist, in gleicher Weise aus $(28, \alpha)$:

$$\left(\frac{1}{a^2}\,\varphi\,(db, dc)\right)_0 = \psi(db, dc) \tag{32}$$

und dies endlich gibt nach $(28, \alpha)$:

$$(B\,db + C\,dc)^2 = \varphi\,(db, dc) - a^2\left(\frac{1}{a^2}\,\varphi\,(db, dc)\right)_0. \tag{33}$$

Da nun aber die Koeffizienten von $\varphi(db, dc)$ von ϑ frei sind, so sind hienach die Größen B, C, und also auch β, γ von ϑ unabhängig.

Es liegen jetzt zwei Möglichkeiten offen:

A. *Es ist $B = 0$, $C = 0$.* Dann wird:

$$ds^2 = da^2 + \varphi\,(db, dc) - \Theta^2\,d\vartheta^2, \tag{34}$$

woraus man ersieht, daß die Kurven $C(a, b, c)$ die Flächen $\vartheta = \text{const.}$ — die Normalebenen der Kurve C_0 — orthogonal durchsetzen. Es läßt sich daher sagen:

Die äquidistanten Kurven sind die Orthogonaltrajektorien einer Ebenenschar.

Umgekehrt bilden aber die Orthogonaltrajektorien irgend einer Ebenenschar auch stets eine äquidistante Kurvenschar, denn auch für die Maßbestimmung ds^2 im R_4 gilt der Satz, daß die Entfernung zweier bewegter Punkte konstant ist, wenn ihre Geschwindigkeiten immer normal zu ihrer Verbindungslinie stehen.

B. *Es ist wenigstens eine der Größen B, C nicht Null.* Dann folgt aus (28, β, γ), daß auch Θ von ϑ unabhängig ist und es sind also in dem Ausdruck:

$$ds^2 = da^2 + \varphi(db, dc) - (B\,db + C\,dc + \Theta\,d\vartheta)^2 \tag{35}$$

überhaupt alle Koeffizienten von ϑ frei.

Man betrachte in diesem Falle die eingliedrige Gruppe von Transformationen des R_4, bei welcher der Punkt mit den Parameterwerten (a, b, c, ϑ) übergeht in jenen, dem die Parameterwerte:

$$a' = a, \quad b' = b, \quad c' = c, \quad \vartheta' = \vartheta + h \tag{36}$$

zugehören. Da für diese Transformationen nach dem eben erkannten:

$$ds'^2 = ds^2 \tag{37}$$

ist, so sind es Bewegungen im R_4, und da bei denselben offenbar jede einzelne Kurve $C(a, b, c)$ in sich verschoben wird, so läßt sich hier diese Aussage machen:

Die äquidistanten Kurven sind die Bahnkurven einer eingliedrigen Bewegungsgruppe.

Umgekehrt bilden aber die Bahnkurven irgend einer eingliedrigen Bewegungsgruppe auch stets eine äquidistante Kurvenschar, denn der von zwei unendlich benachbarten Kurven begrenzte Streifen läßt sich ja dann in sich verschieben, muß also überall dieselbe Breite haben.[1])

Dieses festgestellt, denke man jetzt die Kurve C_0 willkürlich gegeben, und die Aufgabe gestellt, alle äquidistanten Kurvenscharen zu bestimmen, denen diese Kurve angehört.

Nach (A) hat man in den Orthogonaltrajektorien der Normalebenen von C_0 in allen Fällen eine durch C_0 eindeutig bestimmte Lösung. Soll es neben dieser noch andere geben, so werden die betreffenden Scharen notwendig unter (B) sich einreihen und demnach die Kurve C_0 eine eingliedrige Gruppe

1) Im dreidimensionalen Raum mit der gewöhnlichen Euklidischen Maßbestimmung sind die äquidistanten Kurvensysteme entweder Orthogonaltrajektorien einer Ebenenschar, oder koaxiale Schraubenlinien gleicher Ganghöhe.

von Bewegungen in sich besitzen müssen. Umgekehrt werden die Bahnkurven jeder eingliedrigen Gruppe von Bewegungen der Kurve C_0 in sich (die bloß nicht C_0 punktweise festlassen) eine Lösung der Aufgabe liefern, und durch alle vorhandenen solche Gruppen, auch alle weiteren Lösungen erschöpft sein.

Damit sich nun C_0 in sich bewegen läßt, ist notwendig und hinreichend, daß die drei Krümmungen[1]) dieser Kurve — die ja Bewegungsinvarianten sind und die Kurve bis auf ihre Lage im Raume festlegen — längs derselben konstant sind, die Kurve also, wie man vielleicht sagen könnte, eine Schraubenlinie ist. Soll weiter C_0 mehr als eine solche Gruppe von Bewegungen in sich besitzen, so muß es auch Bewegungen geben, die C_0 punktweise festlassen, und jeder einzelnen solchen Bewegung entspricht eine weitere Gruppe von Bewegungen der Kurve in sich. Die Fixpunkte irgend einer Bewegung im R_4 bilden nun (von dem Falle eines einzigen Fixpunktes kann hier abgesehen werden) entweder eine Gerade, oder einen ebenen R_2 und umgekehrt bleiben diese Gebilde bei ∞^3 bzw. ∞^1 Bewegungen punktweise fest.

Je nachdem daher die von konstanten Krümmungen vorausgesetzte Kurve C_0 in keinem niederen Raume als höchstens einem R_3 oder einem R_2 liegt, oder endlich eine Gerade ist, besitzt sie 1 oder ∞^1 oder ∞^3 eingliedrige Bewegungsgruppen in sich, und eben dies ist dann die Zahl der weiteren Lösungen der Aufgabe, welche durch die Bahnkurven dieser Gruppen gegeben sind.

Bedenkt man schließlich, daß C_0 das Bild der Bewegung eines Punktes des „starren“ Körpers — seine Weltlinie — ist, so kann auf die Frage nach der Bewegungsfreiheit des „starren“ Körpers diese Antwort gegeben werden:

In der Bornschen Kinematik des starren Körpers ist durch die willkürlich vorzuschreibende Bewegung eines einzigen Punktes desselben die Bewegung des ganzen Körpers im allgemeinen eindeutig festgelegt.

---

1) Über die Differentialgeometrie der Kurven in höheren Räumen vgl. man etwa G. Landsberg, Crelles Journ. **114**. Man hat, um die Ausdrücke der Krümmungen für die hier zugrunde gelegte Maßbestimmung vor sich zu haben, in den dortigen Formeln natürlich bloß eine der Koordinaten durch it zu ersetzen.

Eine Ausnahme hievon findet nur statt, wenn die Weltlinie dieses Punktes im R_4 konstante Krümmungen hat, und zwar gibt es dann, je nachdem sie in keinem niederen Raume als höchstens einem R_3 oder einem R_2 liegt, oder endlich eine Gerade ist, noch 1 oder ∞^1 oder ∞^3 weitere mögliche Bewegungen.

Ist durch dieses Resultat nun auch der unmittelbar vorliegende Zweck — die Feststellung der Freiheitsgrade des „starren" Körpers — erreicht, so erscheint es doch geboten, darüber hinaus die möglichen Bewegungsformen, insbesondere auch in den Ausnahmefällen näher zu betrachten, denn sind diese zwar zur allgemeinen Definition des starren Körpers nicht verwendbar, so kommt ihnen doch vom Standpunkt des Relativitätsprinzips aus jedesfalls besondere Bedeutung zu. Es wird hiebei angemessen sein, gewisse einfache Tatsachen der Nicht-Euklidischen Geometrie heranzuziehen, die überhaupt in Fragen der Relativitätstheorie — z. B. bei der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten — mit Nutzen verwertet werden kann, wie an besonderer Stelle gezeigt werden soll.

III. Die Lorentztransformationen und die hyperbolische Geometrie im R_3.

Die im R_4 (x, y, z, t) eingeführte Maßbestimmung fällt im Büschel der ∞^3, etwa vom Nullpunkt $O(x = y = z = t = 0)$ auslaufenden Strahlen mit der auf den reellen Minimalkegel dieses Punktes als absolutem Kegel gegründeten Cayleyschen Metrik zusammen. Bei projektiver Abbildung der Strahlen des Büschels auf die Punkte eines R_3 geht dieser in eine reelle Fläche zweiter Ordnung, die Maßbestimmung daher in die auf diese reelle F_2 gegründete Cayleysche Metrik über. Den Drehungen um O im R_4 — den Lorentztransformationen — entsprechen dann im R_3 die dieser hyperbolischen Maßbestimmung zugehörenden Bewegungen. Diesem auf der Hand liegenden Zusammenhange eine bestimmte Gestalt zu geben und ihn dann für die vorliegenden Zwecke ausnutzen zu können, ist an bekannte Dinge der hyperbolischen Geometrie[1]) zu erinnern.

1) Man vgl. für den ganzen Abschnitt insbesondere F. Klein, Nicht-Euklidische Geometrie, Autogr. Vorl., Göttingen 1893, sowie die kurze

Das Strahlenbüschel des R_4 durch O auf die Punkte eines R_3 in einfachster Weise abzubilden, hat man bloß die x, y, z, t den homogenen rechtwinkeligen Koordinaten z_1, z_2, z_3, z_4 im R_3 gleichzusetzen:

$$z_1 = x\,, \quad z_2 = y\,, \quad z_3 = z\,, \quad z_4 = t\,, \tag{38}$$

wonach dem Minimalkegel im R_3 die Einheitskugel um den Ursprung entspricht:

$$z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 - z_4{}^2 = 0\,, \tag{39}$$

die also als absolute Fläche der im R_3 einzuführenden Maßbestimmung zu dienen hat.

Den ein-, zwei- und dreidimensionalen ebenen, durch O gelegten Gebilden des R_4 entsprechen die Punkte, Geraden und Ebenen des R_3. Durch ihre Lage zur Kugel veranschaulichen sie die Lage des betreffenden Gebildes zum Minimalkegel (z. B. zeitartige Strahlen = Innenpunkte, raumartige Strahlen = Außenpunkte). Zueinander normal sind irgend zwei solche Gebilde des R_4, wenn die ihnen entsprechenden des R_3 bezüglich der Polarverwandtschaft an der Kugel zueinander konjugiert sind (z. B. zwei zueinander normale Strahlen = zwei Punkte, von denen jeder auf der Polarebene des anderen liegt). Den vier Ecken eines Polartetraeders der Kugel entsprechen im R_4 vier durch O gehende, wechselweise zueinander normale Gerade; wählt man diese in passender Folge und Richtung als x', y', z', t'-Achsen (als t'-Achse natürlich die der Ecke im Kugelinneren entsprechende) eines neuen Koordinatensystems, so hängen die neuen Koordinaten x', y', z', t' mit den alten x, y, z, t durch eine Lorentztransformation zusammen.

Sind weiter

$$p_{ik}\,, \quad p_{ik} + p_{ki} = 0\,, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{40}$$

die Komponenten eines Vektors zweiter Art (Minkowski), seine beiden Invarianten:

$$\left\{\begin{aligned} D &= p_{23}\,p_{14} + p_{31}\,p_{24} + p_{12}\,p_{34}\,, \\ \varDelta &= p_{23}^2 + p_{31}^2 + p_{12}^2 + p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2\,, \end{aligned}\right. \tag{41}$$

Einleitung über projektive Maßbestimmungen in Fricke-Klein, Automorphe Funktionen I. Vornehmlich beachte man die anschauungsmäßige Schilderung der hyperbolischen Bewegungen, welche die Verhältnisse bei den Lorentztransformationen vorzüglich deutlich macht.

und setzt man den Realitätsverhältnissen der p_{ik} entsprechend, unter f_{ik} reelle Größen verstanden:

$$(42)\qquad \begin{cases} p_{23} : p_{31} : p_{12} : i p_{14} : i p_{24} : i p_{34} \\ = f_{23} : f_{31} : f_{12} : \; f_{14} : \; f_{24} : \; f_{34}, \\ f_{ik} + f_{ki} = 0, \end{cases}$$

so kann der Vektor zweiter Art rücksichtlich der Verhältnisse seiner Komponenten veranschaulicht werden, durch den linearen Komplex des R_3:

$$(43)\qquad \sum_1^4{}^{ik} f_{ik}(z_i z_k' - z_i' z_k) = 0 .$$

Solange $D \neq 0$, hat man einen allgemeinen Komplex vor sich, es gibt dann[1]) zwei bestimmte reelle Gerade, die sowohl bezüglich der Kugel als bezüglich des Komplexes konjugierte Polaren sind. Wählt man daher ein Polartetraeder der Kugel, von dem zwei gegenüberliegende Kanten in diese Geraden fallen, so werden in dem diesem entsprechenden Systeme x', y', z', t' alle Komponenten p_{ik}' des Vektors zweiter Art bis auf zwei verschwinden, deren Werte sich sofort durch D und Δ ausdrücken lassen.

Ist aber $D = 0$ (singulärer Vektor nach Minkowski), so wird der Komplex ein spezieller, bestehend aus allen Geraden, die eine bestimmte Gerade schneiden. Diese selbst schneidet, berührt, verfehlt die Kugel, je nachdem (p_{23}, p_{31}, p_{12} reell gedacht) $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ ist. Die ihr entsprechende zweidimensionale Ebene des R_4 kann zur Verdeutlichung des Vektors rücksichtlich der Verhältnisse seiner Komponenten herangezogen werden. Gleichzeitig lassen sich mit ihrer Hilfe analog dem vorigen sofort jene Koordinatensysteme des R_4 angeben, in denen möglichst viele der Komponenten des Vektors verschwinden.

Durch einen Vektor zweiter Art ist insbesondere eine jede unendlich kleine Lorentztransformation darstellbar, die Punkte des R_3 bewegen sich bei derselben jeder normal zu seiner

1) Clebsch-Lindemann, Vorles. über Geometrie **2**, 1. p. 343 ff.; vgl. auch F. Lindemann, Unendlich kleine Bewegungen und Kraftsysteme bei allgemeiner Maßbestimmung, Diss. Erlangen 1873.

Komplexebene. Je nachdem $D \neq 0$, oder $= 0$ ist, bleiben im R_4 bloß der Nullpunkt oder auch die Punkte der eben herangezogenen zweidimensionalen Ebene fest. Letztere schneidet, berührt, verfehlt den Minimalkegel je nachdem $\Delta > 0$, $= 0$, < 0 ist.

Denkt man endlich irgend eine Lorentztransformation, welche etwa (x', y', z', t'), überführt in (x, y, z, t), so entspricht dieser offenbar eine Kollineation des R_3, welche die Einheitskugel in sich überführt — eben eine hyperbolische Bewegung des R_3.

Umgekehrt entsprechen jeder solchen Kollineation, zunächst zwei linear homogene Transformationen in x, y, z, t mit der Determinante 1, welche ds^2 ungeändert lassen. Der identischen Kollineation der z_i insbesondere die beiden Transformationen:

$$(44) \qquad \begin{cases} x = x', & y = y', \quad z = z', \quad t = t', \\ x = -x', & y = -y', \quad z = -z', \quad t = -t'. \end{cases}$$

Hiervon ist nun aber bloß die erste eine Lorentztransformation, denn die zweite tauscht Vor- und Nachkegel des Punktes O gegeneinander um. *Die Lorentztransformationen entsprechen also ein-eindeutig den hyperbolischen Bewegungen im R_3.*

Nun wird weiter bei einer jeden solchen Bewegung die Kugel derart in sich transformiert, daß der auf ihr ausgebreitet gedachte komplexe Parameter:

$$(45) \qquad Z = \frac{z_1 + i z_2}{z_4 - z_3} = \frac{x + iy}{t - z}$$

eine lineare Substitution mit im allgemeinen komplexen Koeffizienten (der dazu konjugiert komplexe Parameter die konjugiert komplexe Substitution) erfährt, und jeder solchen Substitution entspricht eine bestimmte hyperbolische Bewegung im R_3.

Gehen somit durch eine Lorentztransformation x', y', z', t' in x, y, z, t über, so hängen die Größen:

$$(46) \qquad Z = \frac{x + iy}{t - z}, \quad Z' = \frac{x' + iy'}{t' - z'}$$

durch eine lineare Substitution (mit komplexen Koeffizienten)

$$(47) \qquad Z = \frac{\alpha Z' + \beta}{\gamma Z' + \delta}$$

zusammen und jeder solchen Substitution entspricht eine bestimmte Lorentztransformation.[1])

Will man daher, wie es für das Folgende nötig ist, die eingliedrigen Gruppen von Lorentztransformationen anschreiben, so hat man bloß die eingliedrigen Gruppen linearer Substitutionen in Z zu nehmen und die ihnen entsprechenden Lorentztransformationen zu bilden. Erstere sind nun, unter ϑ den (reellen) Parameter, unter λ eine beliebige reelle Größe verstanden:

$$
\begin{array}{lll}
\text{I.} & Z = Z' e^{(1+i\lambda)\vartheta} & \text{loxodromische Gruppe,} \\
\text{II.} & Z = Z' e^{i\vartheta} & \text{elliptische} \quad ,, \\
\text{III.} & Z = Z' e^{\vartheta} & \text{hyperbolische} \quad ,, \\
\text{IV.} & Z = Z' + \vartheta & \text{parabolische} \quad ,,
\end{array}
$$

Ihnen entsprechen die folgenden, passenderweise mit den gleichen Namen zu belegenden Gruppen von Lorentztransformationen:

I. Loxodromische Gruppe.

$$
\begin{aligned}
x + iy &= (x' + iy')e^{i\lambda\vartheta}, \quad & t - z &= (t' - z')e^{\vartheta}, \\
x - iy &= (x' - iy')e^{-i\lambda\vartheta}, \quad & t + z &= (t' + z')e^{-\vartheta}.
\end{aligned}
$$

II. Elliptische Gruppe.

$$
\begin{aligned}
x + iy &= (x' + iy')e^{i\vartheta}, \quad & z &= z', \\
x - iy &= (x' - iy')e^{-i\vartheta}, \quad & t &= t'.
\end{aligned}
$$

III. Hyperbolische Gruppe.

$$
\begin{aligned}
x &= x', \quad & t - z &= (t' - z')e^{\vartheta}, \\
y &= y', \quad & t + z &= (t' + z')e^{-\vartheta}.
\end{aligned}
$$

IV. Parabolische Gruppe.

$$
\begin{aligned}
x &= x' + \vartheta(t' - z'), & y &= y', \\
z &= z' + \vartheta x' + \tfrac{1}{2}\vartheta^2(t' - z'), \quad & t - z &= t' - z'.
\end{aligned}
$$

Man bemerkt wohl ohne weiteres, daß diese vier Gruppen voneinander gerade unterschieden sind durch die Art des

1) Die diesbezüglichen Formeln bei F. Klein, l. c. Sie lassen sich bei Benutzung der Quaternionen sehr kompendiös schreiben.

Vektors zweiter Art, der die zugehörige infinitesimale Transformation darstellt.

IV. Die eingliedrigen Gruppen von Bewegungen im R_4 und die zugehörigen Bewegungsformen des „starren“ Körpers.

Schreibt man der Symmetrie halber:

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 = x, & x_2 = y, & x_3 = z, & x_4 = it, \\ x_1' = x', & x_2' = y', & x_3' = z', & x_4' = it', \end{array}\right. \tag{48}$$

so wird sich irgend eine Bewegung im R_4 analytisch in der Form einer linearen Substitution ausdrücken:

$$x_i = a_i + \sum_1^4{}^j a_{ij} x_j', \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{49}$$

Es wird dabei $|a_{ij}|$ eine orthogonale Determinante mit dem Wert $+1$ sein, ferner a_{44} reell positiv und die übrigen Größen a_i, a_{ij} rein imaginär oder reell sein, je nachdem an ihnen der Index 4 hängt oder nicht.

Hat man in (49) eine kontinuierliche, vom Parameter ϑ abhängige Schar von Bewegungen vor sich, sind also a_i und a_{ij} Funktionen von ϑ, so folgt durch Differentiation nach ϑ bei Konstanthalten der x_i:

$$\frac{d x_i'}{d \vartheta} + q_i + \sum_1^4{}^j p_{ij} x_j' = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{50}$$

wobei gesetzt ist:

$$\left\{\begin{array}{l} q_i = \sum_1^4{}^j a_{ij} \dfrac{d a_{ij}}{d \vartheta}, \\ p_{ij} = \sum_1^4{}^k a_{ki} \dfrac{d a_{kj}}{d \vartheta}, \quad p_{ij} + p_{ji} = 0, \end{array}\right. \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \tag{51}$$

daher auch diese Größen q_i und p_{ij} rein imaginär oder reell sind, je nachdem sie den Index 4 tragen oder nicht.

Interpretiert man (49) als Gleichungen der Koordinatentransformation vom System $S(x, y, z, t)$ auf ein dagegen bewegtes System $S'(x', y', z', t')$, so wären hienach $-q_i$ die Komponenten des Vektors (erster Art) der Geschwindigkeit des Ursprunges O' von S' und $-p_{ij}$ die Komponenten des Vektors (zweiter Art) der Winkelgeschwindigkeit von S' um O', beide Male nach den Achsen von S' genommen.

Bildet die Schar der Bewegungen insbesondere eine Gruppe, so sind, bei passend getroffener Wahl von ϑ, die q_i und p_{ij} von ϑ unabhängig und umgekehrt liefert die Integration der Gleichungen (50) für beliebige konstante Werte der q_i und p_{ij} stets eine Gruppe von Bewegungen.

Die Bahnkurven der Gruppe — bei obiger Interpretation, die Trajektorien der mit S' fest verbundenen Punkte — die, wie man weiß, eine äquidistante Kurvenschar bilden, sind durch (49) bei konstant gedachten x_i' und variablem ϑ dargestellt; sie hängen natürlich bloß scheinbar von vier Parametern, in der Tat nur von drei Parametern ab.

Um nach diesen Bemerkungen jetzt die möglichen eingliedrigen Bewegungsgruppen des R_4 anzuschreiben und damit zugleich die entsprechenden äquidistanten Kurvenscharen, beachte man, daß, wenn die Bewegungen (49) eine Gruppe bilden, gleiches auch von den Drehungen:

$$x_i = \sum_1^4{}^j a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{52}$$

gilt und diese dann eben — im allgemeinen erst nach Ausübung einer passenden Lorentztransformation auf x_i und eben derselben auf x_i' — mit einer der vier im vorigen Abschnitt bestimmten Gruppen von Lorentztransformationen identisch sein muß; und zwar mit der Gruppe I. II. III. IV. je nachdem für die Invarianten D und Δ des Vektors p_{ij} gilt:

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{I.} & D \neq 0, & \text{II.} & D = 0, \quad \Delta > 0, \\ \text{III.} & D = 0, \quad \Delta < 0, & \text{IV.} & D = 0, \quad \Delta = 0. \end{array}\right. \tag{53}$$

Hiedurch sind die möglichen Wertsysteme der a_{ij} sofort anzugeben, die jedesmal zugehörigen Werte der a_i aber folgen aus (51):

$$a_i = \sum_1^4{}^j q_j \int a_{ij}\, d\vartheta \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{54}$$

und zwar können hier für die q_j beliebige Konstante gewählt werden, wofern bloß:

$$(55)\qquad \sum_1^4{}^i\left(\frac{d x_i}{d\vartheta}\right)^2 = \sum_1^4{}^i\left(q_i + \sum_1^4{}^j p_{ij} x_j'\right)^2 < 0$$

ist, wenigstens für einen gewissen Wertebereich der x_j'. Es sind nun weiter die Werte der p_{ij} für die vier Gruppen der Reihe nach:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & p_{21} = -p_{12} = \lambda, \quad p_{34} = -p_{43} = i \\ \text{II.} & p_{21} = -p_{12} = 1, \\ \text{III.} & p_{34} = -p_{43} = i, \\ \text{IV.} & p_{31} = -p_{13} = 1, \quad p_{41} = -p_{14} = i \end{array}\right\}\ \text{die übrigen } p_{ij} \text{ jedesmal gleich Null}$$

und in Verbindung mit (50) lehren diese, daß man durch passende Abänderung des Systems S' (und ebensolche des Systems S) stets folgende einfacheren Wertsysteme der q_i erzielen kann:

$$\begin{array}{lllll} \text{I.} & q_1 = 0, & q_2 = 0, & q_3 = 0, & q_4 = 0, \\ \text{II.} & = 0, & = 0, & = 0, & = \delta i, \\ \text{III.} & = \alpha, & = 0, & = 0, & = 0, \\ \text{IV.} & = 0, & = \beta, & = 0, & = \delta i. \end{array}$$

Alles hier Zusammengetragene ergibt nun folgende, nach den in ihnen enthaltenen Drehgruppen benannte, Bewegungsgruppen samt den zugehörigen äquidistanten Kurvenscharen und Bewegungsformen des „starren" Körpers:

I. Loxodromische Gruppe.

$$(56)\qquad \begin{cases} x + iy = (x' + iy')e^{i\lambda\vartheta}, & t - z = (t' - z')e^{\vartheta}, \\ x - iy = (x' - iy')e^{-i\lambda\vartheta}, & t + z = (t' + z')e^{-\vartheta}, \end{cases}$$

Ist für $t = 0$:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad \vartheta = \vartheta_0,$$

so folgt für die entsprechende Bewegung des „starren" Körpers:

$$(57)\qquad \begin{cases} x + iy = (x_0 + iy_0)e^{i\lambda u}, \quad u = \lg\dfrac{\sqrt{z_0^2 + t^2} - t}{z_0}, \\ x - iy = (x_0 - iy_0)e^{-i\lambda u}, \\ \qquad z = \sqrt{z_0^2 + t^2}. \end{cases}$$

Benutzt man Zylinderkoordinaten ϱ, φ, z, $(x + iy = \varrho e^{i\varphi})$, so lassen sich diese Gleichungen auch schreiben:

$$\left\{\begin{aligned} \varrho &= \varrho_0 , \\ z &= \tfrac{1}{2} z_0 \left(e^{\frac{\varphi - \varphi_0}{\lambda}} + e^{-\frac{\varphi - \varphi_0}{\lambda}}\right), \\ t &= \sqrt{z^2 - z_0^2} . \end{aligned}\right. \tag{58}$$

Es bewegen sich also die Punkte des „starren“ Körpers auf Kreiszylindern um die Z-Achse längs Kurven, die bei Abwickelung des Zylindermantels auf eine Ebene in Kettenlinien übergehen, mit der Geschwindigkeit:

$$s = \sqrt{\frac{\lambda^2 \varrho_0^2 + t^2}{z_0^2 + t^2}} . \tag{59}$$

Die Punkte auf der Z-Achse selbst bewegen sich in derselben und zwar nach dem von Hrn. Born als „Hyperbelbewegung“ bezeichneten Gesetz: $z = \sqrt{z_0^2 + t^2}$.

Ihre Weltlinien liegen in einem R_2, während die aller anderen Punkte keinem niederen Raume als dem R_4 angehören.

II. Elliptische Gruppe.

$$x + iy = (x' + iy') e^{i\vartheta} , \qquad z = z' ,$$
$$x - iy = (x' - iy') e^{-i\vartheta} , \quad t = t' + \delta\,\vartheta .$$

Ist für $t = 0$:

$$x = x_0 , \quad y = y_0 , \quad z = z_0 , \quad \vartheta = \vartheta_0 ,$$

so folgt für die zugehörige Bewegung des „starren“ Körpers:

$$\left\{\begin{aligned} x + iy &= (x_0 + iy_0) e^{i\frac{t}{\delta}} , \\ x - iy &= (x_0 - iy_0) e^{-i\frac{t}{\delta}} , \\ z &= z_0 . \end{aligned}\right. \tag{60}$$

Es rotiert derselbe also wie ein gewöhnlicher starrer Körper gleichförmig um die Z-Achse.

Die Weltlinien der Punkte auf der Z-Achse sind Gerade, die aller übrigen Punkte gehören jede einem R_3, aber keinem niederen Raume an.

III. Hyperbolische Gruppe.

$$x = x' + \alpha\vartheta, \quad t - z = (t' - z')e^{\vartheta},$$
$$y = y', \quad t + z = (t' + z')e^{-\vartheta}.$$

Ist für $t = 0$:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad \vartheta = \vartheta_0,$$

so folgt für die zugehörige Bewegung des „starren" Körpers:

$$(61) \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha \lg \dfrac{\sqrt{z_0^2 + t^2} - t}{z_0}, \\ y = y_0, \\ z = \sqrt{z_0^2 + t^2}. \end{cases}$$

Es bewegen sich also die Punkte desselben in Ebenen normal zur Y-Achse längs Kettenlinien:

$$(62) \quad z = \tfrac{1}{2} z_0 \left(e^{\frac{x - x_0}{\alpha}} + e^{-\frac{x - x_0}{\alpha}}\right)$$

mit der Geschwindigkeit:

$$(63) \quad s = \sqrt{\frac{\alpha^2 + t^2}{z_0^2 + t^2}}.$$

Die Weltlinien aller Punkte gehören jede einem R_3, aber keinem niederen Raume an.

IV. Parabolische Gruppe.

$$x = x' + \vartheta(t' - z') + \tfrac{1}{2}\delta\vartheta^2, \qquad y = y' + \beta\vartheta,$$
$$z = z' + \vartheta x' + \tfrac{1}{2}\vartheta^2(t' - z') + \frac{1}{6}\delta\vartheta^3, \quad t - z = t' - z' + \delta\vartheta.$$

Hier ist:

$$(64) \quad S\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 = (t' - z')^2 + \beta^2 - \delta(2x' + \delta'),$$

also notwendig $\delta \neq 0$.

Wird nun für $\vartheta = \vartheta_0$:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad t = t_0,$$

so bleiben obige Ausdrücke wegen der Gruppeneigenschaft ungeändert, falls man in ihnen x', y', z', t', ϑ ersetzt durch x_0, y_0, z_0, t_0, $\vartheta - \vartheta_0$. Nimmt man speziell:

$$\vartheta_0 = -\frac{1}{\delta}(t' - z'),$$

so wird $t_0 = z_0$.

Da es nun für die Bewegung des starren Körpers einzig auf die Bahnkurven der Gruppe ankommt, so kann man für

$$\vartheta + \frac{1}{\delta}(t' - z')$$

wieder ϑ schreiben und so die Gleichungen für die Bewegung des „starren“ Körpers in der Form ansetzen:

$$(65)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \frac{1}{2}\delta\vartheta^2, & y = y_0 + \beta\vartheta, \\ z = z_0 + x_0\vartheta + \frac{1}{6}\delta\vartheta^3, & t - z = \delta\vartheta. \end{cases}$$

Es bewegen sich also alle Punkte desselben längs Raumkurven dritter Ordnung mit der Geschwindigkeit:

$$(66)\qquad s = \frac{\sqrt{x^2 + 2\delta(x - x_0) + \beta^2}}{x + \delta}.$$

Die Weltlinien aller Punkte gehören jede einem R_3, aber keinem niederen Raume an.

Stellt man einer reinlichen Scheidung halber noch die Frage, welche der eben aufgestellten äquidistanten Kurvenscharen der Klasse (B) gleichzeitig auch der Klasse (A) angehören, also Orthogonaltrajektorien einer Ebenenschar sind, so muß für die der entsprechenden Gruppe zugehörenden Größen q_i und p_{ij}:

$$(67)\qquad \sum_1^4{}^i q_i\,dx_i + \sum_1^4{}^{ij} p_{ij}\,x_i\,dx_j = \varphi\,d\psi$$

sein, und hiezu ist wieder notwendig und hinreichend, daß die aus der Determinante $|p_{ij}|$ durch Hinzufügung der Zeile q_i entstehende 4×5 reihige Matrix den Rang 1 oder 2 hat. Die diesbezügliche Diskussion lehrt, daß dies bloß für die hyperbolische Gruppe II. mit $\alpha = 0$ eintritt, bei welcher auch in der Tat die Bahnkurven, die orthogonalen Trajektorien der Ebenen $Az + Bt = 0$ sind. Die korrespondierende Bewegung des „starren“ Körpers lautet:

$$(68)\qquad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = \sqrt{z_0^2 + t^2}.$$

Diese einfachste, auch von Hrn. Born betrachtete und als „Hyperbelbewegung“ bezeichnete Translationsbewegung ist also die einzige Bewegungsform, die den Klassen (A) und (B) gleichzeitig angehört.

Natürlich können die hier aufgestellten vier Typen der Bewegungsformen der Klasse (B) noch durch eine beliebige Lorentztransformation umgeformt werden.

Jedenfalls ist es auf Grund der gegebenen Zusammenstellung ein leichtes, bei vorgeschriebener Bewegung eines Punktes des „starren“ Körpers, die neben der Bewegung der Klasse (A) eventuell noch möglichen Bewegungsformen der Klasse (B) sofort explizit anzugeben. Soll z. B. ein Punkt des Körpers fest sein, so ist seine Weltlinie eine Gerade, eine solche tritt als Bahnkurve aber bloß bei der Gruppe II. auf, was unmittelbar die eingangs erwähnte Tatsache ergibt, daß ein „starrer“ Körper, von welchem ein Punkt fest ist, nur mehr um eine durch ihn gehende feste Achse, wie ein gewöhnlicher starrer Körper rotieren kann.

Noch mag zum Schlusse bemerkt werden, daß sich die Bestimmung der stets möglichen, der Klasse (A) angehörenden Bewegung des „starren“ Körpers aus der Bewegung eines seiner Punkte — also im R_4 die Bestimmung der Orthogonaltrajektorien der Normalebenen der Weltlinie dieses Punktes, — zurückführen läßt auf die Integration einer Riccattischen Gleichung.

Leipzig, 1. Dezember 1909.

(Eingegangen 7. Dezember 1909.)