1909. № 11.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 30.

1. *Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips;*

von Max Born.

Dem Andenken Hermann Minkowskis gewidmet.

Einleitung.

Die große Bedeutung, welche den Begriffen des starren Körpers und der starren Verbindung in der Newtonschen Mechanik zukommt, ist aufs engste mit den grundlegenden Anschauungen über Raum und Zeit verknüpft, auf denen sich diese Disziplin aufbaut. Denn die Forderung, daß Längen zu verschiedenen Zeiten mit einander vergleichbar sein sollen, führt direkt zu Bildung des Begriffes von Maßstäben, deren Länge von der Zeit und Bewegung unabhängig ist, d. h. die starr sind. Später erweist sich dieser Begriff des starren Körpers auch fruchtbar für den Ausbau der Dynamik selbst; denn der starre Körper ist nicht nur als kontinuierliches Massensystem von nur sechs Freiheitsgraden kinematisch von höchster Einfachheit, sondern auch dynamisch, indem er eine Zusammensetzung der an seinen Punkten angreifenden Kräfte zu ebenso vielen „resultierenden" Kräften und Momenten gestattet, deren Kenntnis zur Beschreibung der Bewegung hinreicht. Alle diese Möglichkeiten beruhen in letzter Linie auf der Galilei-Newtonschen Verknüpfung des Raumes und der Zeit zu einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit (die ich mit Minkowski[1]) „Welt" nennen will), eine Verknüpfung, die im wesentlichen in dem Satze enthalten ist, daß die Naturgesetze nicht nur von der Wahl des Nullpunktes und der Einheit der Zeit sowie der Lage des räumlichen Bezugsystems und der Längeneinheit unabhängig sein sollen, sondern auch von einer dem Bezugsystem erteilten gleichförmigen Translation unter Beibehaltung des Zeitmaßes.

Gerade diese Grundlagen der Kinematik sind es, die man aufzugeben hat, wenn das elektrodynamische Relativitätsprinzip, wie es von Lorentz, Einstein, Minkowski und anderen aufgestellt worden ist, zur Geltung gelangt. Denn hier ist die Verknüpfung des Raumes und der Zeit zur „Welt" eine andere: die Unabhängigkeit der Naturgesetze von der gleichförmigen Translation des räumlichen Bezugsystems hat nur statt, wenn auch der Zeitparameter eine Änderung erfährt, die nicht nur auf eine Verlegung des Nullpunktes und Wahl einer anderen Einheit herausläuft. Hiermit ist dann aufs engste verknüpft, daß Maßstäbe, die bei einer gleichförmigen Translation im mitbewegten Koordinatensystem ihre Länge beibehalten, von einem ruhenden System aus betrachtet eine Längenänderung, nämlich eine Verkürzung in der Richtung ihrer Geschwindigkeit, erleiden. Damit fällt der Begriff des starren Körpers wenigstens in seiner der Newtonschen Kinematik angepaßten Fassung.

Gleichwohl ist ein entsprechender Begriff auch in der neuen Kinematik keinesfalls zu entbehren, weil sonst die Vergleichung von Längen bewegter Körper zu verschiedenen Zeiten illusorisch wird. Für relativ zueinander gleichförmig bewegte Systeme entsteht bei der Bildung dieses Begriffes auch keine Schwierigkeit,

1) H. Minkowski, Raum und Zeit. Physik. Zeitschr. **10.** p. 104. 1909, und Jahresber. d. deutsch. Mathematiker-Vereinigung, **18.** (Auch als Sonderdruck erschienen.) Die Kenntnis dieser Arbeit wird bei meinen Darlegungen vorausgesetzt.

und die oben genannten Verfasser der grundlegenden Arbeiten über diese Theorie bedienen sich dieses Umstandes, ohne eine besondere Definition der Starrheit zu geben.

Die Schwierigkeit erhebt sich erst, wenn Beschleunigungen vorhanden sind. Es liegt in dieser Richtung nur ein Versuch vor, den Einstein[1]) gemacht hat, ohne die Sachlage ganz zu klären. Ich habe daher die Ausarbeitung der *Kinematik des starren Körpers unter Zugrundelegung des Relativitätspostulates* unternommen. Die Möglichkeit davon ist von vornherein wahrscheinlich, weil in jeder Beziehung die Newtonsche Kinematik einen Grenzfall der neuen darstellt, nämlich den, bei dem die Lichtgeschwindigkeit c als unendlich groß angesehen wird. Die Methode, die ich einschlage, besteht darin, die Starrheit statt durch ein Integralgesetz durch ein Differentialgesetz zu definieren.

In der Tat gelangt man so zu den allgemeinen Starrheitsbedingungen in differentieller Form, die sehr analog den entsprechenden Bedingungen der alten Kinematik sind und auch für $c = \infty$ in diese übergehen. Die Integration dieser Bedingungen, die in der alten Kinematik sehr einfach allgemein ausführbar ist und zu der Konstanz des Abstandes starr verknüpfter Punkte führt, habe ich hier nur für den Fall geradliniger, beschleunigter Translation ausgeführt; das Resultat steht an Einfachheit und Anschaulichkeit der alten Kinematik kaum nach und legt die Vermutung nahe, was sich bei beliebigen krummlinigen und rotatorischen Bewegungen ergeben mag; doch gehe ich nicht darauf ein. Das Hauptergebnis ist, daß bei der geradlinigen Bewegung wieder die Bewegung eines einzigen Punktes des starren Körpers die aller übrigen nach einem sehr einfachen Gesetze mitbestimmt, daß der Körper also nur *einen Freiheitsgrad* hat.

Es erhebt sich nun die Frage, ob nicht, ebenso wie in der alten Mechanik, der starre Körper auch in der neuen in seinem dynamischen Verhalten einfache Eigenschaften hat, wobei es sich hier natürlich um die elektromagnetischen Kräfte handeln wird.

---

1) A. Einstein, Jahrb. der Radioakt. und Elektronik **4.** Heft 4. § 18. 1907.

Der praktische Wert der Neudefinition der Starrheit muß sich also an der Dynamik des Elektrons erweisen; die größere oder geringere Durchsichtigkeit der dabei erzielten Resultate wird dann bis zu gewissem Grade auch für oder gegen die Annahme des Relativitätsprinzips überhaupt geltend zu machen sein, da die Experimente wohl noch keine eindeutige Weisung gegeben haben und vielleicht auch nicht geben werden.

Die Theorie von Abraham, welche die Bewegung eines im gewöhnlichen Sinne starren Elektrons in dem von ihm selbst herrührenden Kraftfelde studiert, hat ja nicht nur zu einer qualitativ befriedigenden Erklärung der Trägheitserscheinungen freier Elektronen auf rein elektrischer Grundlage, sondern auch für die Abhängigkeit der elektrodynamischen Masse von der Geschwindigkeit bei kleinen Beschleunigungen zu einem quantitativen Gesetze geführt, das man durch die Versuche wohl noch nicht als widerlegt anzusehen hat. Aber diese Theorie, die den der alten Mechanik angepaßten starren Körper der Elektrodynamik aufpfropft, genügt nicht dem Relativitätsprinzip, und daher kommt es, daß ihre Weiterführung, an der Sommerfeld[1]), P. Hertz[2]), Herglotz[3]), Schwarzschild[4]) u. a. beteiligt sind, zu außerordentlichen mathematischen Komplikationen führt. Nun hat bereits Lorentz es versucht, die Abrahamsche Theorie dem Relativitätsprinzip anzupassen und hat zu diesem Zwecke sein „deformierbares“ Elektron konstruiert. Gerade dieses Elektron ist gemäß der von mir gegebenen Definition als starr zu bezeichnen. Daß trotz dieser Übereinstimmung die Lorentzsche Theorie zu Widersprüchen Anlaß gibt, auf die Abraham[5]) hingewiesen hat, liegt daran, daß man die Gesetze der Zusammensetzung von Kräften am starren Körper zu Resultierenden ohne Kritik aus der alten Mechanik übernimmt;

---

1) A. Sommerfeld, Nachr. d. k. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, math.-physik. Kl. Heft 2 u. 5. 1904.

2) P. Hertz, Math. Ann. 65. p. 1. 1907.

3) G. Herglotz, Nachr. d. k. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, math.-physik. Kl. Heft 6. 1903.

4) K. Schwarzschild, Nachr. d. k. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, math.-physik. Kl. p. 125. 1903.

5) Vgl. M. Abraham, Theorie der Elektrizität 2. Aufl. Bd. 2. § 22.

wie diese Gesetze zu modifizieren sind, wird sich bei der hier gewählten Darstellung von selbst ergeben. Die Lorentzsche Formel für die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit, durch die die Versuche ebensogut wie durch die Abrahamsche dargestellt werden, erweist sich auch in der strengeren Theorie als zutreffend. Denn dieses Gesetz ist, wie schon Einstein bemerkt hat und ich in einer Arbeit[1]) über „die träge Masse und das Relativitätsprinzip" für beliebige Strömungen ausgeführt habe, ein direkter Ausfluß der Kinematik und hängt mit der eigentlichen elektrodynamischen Masse, der „Ruhmasse", gar nicht wesentlich zusammen.

Meine Theorie liefert aber streng die Abhängigkeit der Ruhmasse von der Beschleunigung für eine Klasse von Bewegungen, die als die prinzipiell einfachsten beschleunigten Bewegungen den gleichförmig beschleunigten der alten Mechanik entsprechen und die ich „Hyperbelbewegungen" nenne, und zwar erweist sich die Ruhmasse bis zu ungeheuren Beschleunigungen als konstant. Für diese Bewegungen gelten Bewegungsgleichungen von der Form der dem Relativitätsprinzip angepaßten mechanischen Grundgleichungen.[2]) Da sich aber jede beschleunigte Bewegung durch solche Hyperbelbewegungen approximieren läßt, wenn ihre Beschleunigung nicht zu plötzlich variiert, so gewinnt man auf diese Weise eine elektrodynamische Begründung der Grundgleichungen der Mechanik. Nur für sehr schnell veränderliche Beschleunigungen versagt diese Theorie; es treten dann neben den Trägheitswiderständen auch Strahlungswiderstände auf. *Bemerkenswert ist, daß ein Elektron bei einer Hyperbelbewegung, so groß auch ihre Beschleunigung sein mag, keine eigentliche Strahlung veranlaßt, sondern sein Feld mit sich führt*, was bis jetzt nur für gleichförmig bewegte Elektronen bekannt war. *Die Strahlung und der Widerstand der Strahlung treten erst bei Abweichungen von der Hyperbelbewegung auf.*

Meine Starrheitsdefinition erweist sich dem Systeme der Maxwellschen Elektrodynamik als durchaus in derselben

---

1) M. Born, Ann. d. Phys. **28.** p. 571. 1909.

2) Vgl. A. Einstein, Ann. d. Phys. **17.** p. 891. 1905; M. Planck, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **8.** p. 136. 1906; H. Minkowski, Nachr. d. k. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, math.-phys. Kl. p. 54. 1908; vgl. M. Born, l. c.

Weise angemessen, wie die alte Definition der Starrheit dem Systeme der Galilei-Newtonschen Mechanik. Das in diesem Sinne starre Elektron stellt die dynamisch einfachste Elektrizitätsbewegung dar. Man kann sogar so weit gehen, zu behaupten, daß die Theorie deutliche Hinweise auf die atomistische Struktur der Elektrizität liefert, was in der Abrahamschen Theorie keineswegs der Fall ist. Meine Theorie ist also in Übereinstimmung mit dem atomistischen Instinkt so vieler Experimentatoren, bei denen der interessante Versuch von Levi-Civita[1]), die Bewegung der Elektrizität als einer durch keine kinematischen Bedingungen gefesselten, freibeweglichen Flüssigkeit unter der Wirkung ihres eigenen Feldes zu beschreiben, schwerlich Beifall finden wird.

Da demnach die Einfachheit der Dynamik der Einfachheit der Kinematik des neuen starren Körpers nicht nachsteht, so wird man diesem Begriffe der Starrheit im System des elektromagnetischen Weltbildes dieselbe fundamentale Bedeutung zuzumessen haben wie dem gewöhnlichen starren Körper im Systeme des mechanischen Weltbildes.

Erstes Kapitel.

Die Kinematik des starren Körpers.

§ 1. Der starre Körper der alten Mechanik.

Im Hinblick auf die elektrodynamischen Anwendungen des zweiten und dritten Kapitels werden wir uns nicht mit starren Systemen diskreter Punkte, sondern mit kontinuierlichen starren Körpern befassen. Eine kontinuierliche Strömung der Materie kann in der nach Lagrange benannten Weise dadurch dargestellt werden, daß man die Raumkoordinaten x, y, z als Funktionen der Zeit t und dreier Parameter ξ, η, ζ, etwa der Werte von x, y, z zur Zeit $t = 0$, gibt:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta, t), \\ y = y(\xi, \eta, \zeta, t), \\ z = z(\xi, \eta, \zeta, t). \end{cases}$$

1) T. Levi-Civita, Sui campi elettromagnetici puri, bei C. Ferrari, Venezia 1908; Sulle azione meccaniche etc., Rendiconti d. R. Acad. dei Lincei **18.** 5a. Diese Theorie scheint auch, auf Kathodenstrahlen angewandt, zu Widersprüchen mit dem Experimente zu führen.

Das Massensystem ist starr, wenn die Entfernung von irgend zwei seiner Punkte

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \tag{2}$$

von der Zeit unabhängig, also gleich

$$\sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}$$

ist.

Daraus folgt dann, daß die Gleichungen (1) die Form

$$\left\{\begin{aligned} x &= a_1 + a_{11}\,\xi + a_{12}\,\eta + a_{13}\,\zeta, \\ y &= a_2 + a_{21}\,\xi + a_{22}\,\eta + a_{23}\,\zeta, \\ z &= a_3 + a_{31}\,\xi + a_{32}\,\eta + a_{33}\,\zeta \end{aligned}\right. \tag{3}$$

haben, wobei die Größen a_α, $a_{\alpha\beta}$ Funktionen der Zeit t sind und die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (a_{\alpha\beta})$$

orthogonal[1]) ist; d. h. wenn $\bar{A}$ die transponierte Matrix von A und 1 die Einheitsmatrix bedeutet, so ist

$$\bar{A}\,A = 1. \tag{4}$$

Um die Verallgemeinerungsfähigkeit dieser Bedingung für die Kinematik des Relativitätsprinzips zu übersehen, ist es vorteilhaft, sich der von Minkowski in der eben zitierten Arbeit verwendeten Deutung der Variabeln x, y, z, t als Parallelkoordinaten in einem Raume von vier Dimensionen, „Welt" genannt, zu bedienen. Im folgenden werden die Figuren stets den ebenen Schnitt $y = 0$, $z = 0$ durch diesen vierdimensionalen Raum bedeuten; wir zeichnen in ihnen die x-Achse

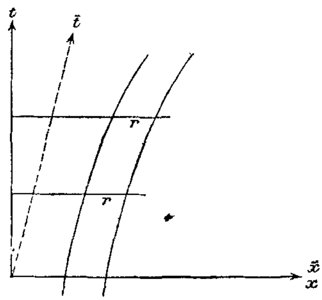

Fig. 1.

1) Um Weitläufigkeiten des Ausdruckes zu vermeiden, bediene ich mich des Matrizenkalkuls, der diesen Überlegungen am angemessendsten ist; eine sehr einfache, ohne Vorkenntnisse verständliche Darstellung desselben findet sich im § 11 der Arbeit von Minkowski über „die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern" (zitiert in Anm. 2, p. 5).

horizontal, die t-Achse nach oben. Die Bahn eines Punktes wird in der $xyzt$-Mannigfaltigkeit (Welt) als Kurve, „Weltlinie", die Bewegung eines Körpers durch eine Schar von Weltlinien dargestellt. Die obige Bedingung $dr/dt = 0$ bedeutet nun, daß die Verbindungslinie der Durchtrittspunkte je zweier Weltlinien durch ein dreidimensionales Gebilde $t =$ konst. für alle diese Gebilde dieselbe Länge hat. Sie bezieht sich also auf die zum Raume $t = 0$ „parallelen" dreidimensionalen Räume $t =$ konst.

Die Bedeutung dieser Starrheitsbedingung für die Newtonsche Mechanik liegt darin, daß sie invariant ist gegenüber den Transformationen, welche die Newtonschen Bewegungsgleichungen in sich überführen. Diese Transformationen haben bei Beibehaltung des Nullpunktes die Form

$$\left\{\begin{aligned} x &= k_{11}\bar{x} + k_{12}\bar{y} + k_{13}\bar{z} + k_1 t, \\ y &= k_{21}\bar{x} + k_{22}\bar{y} + k_{23}\bar{z} + k_2 t, \\ z &= k_{31}\bar{x} + k_{32}\bar{y} + k_{33}\bar{z} + k_3 t, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

wo die $k_{\alpha\beta}$, k_α Konstante sind und die Matrix

$$K = (k_{\alpha\beta})$$

orthogonal ist:

$$\bar{K}K = 1. \tag{6}$$

Dieser orthogonale Bestandteil bedeutet nur den Übergang von dem ursprünglichen Koordinatensystem zu einem um den Nullpunkt gedrehten; der zweite Teil aber bedeutet eine gleichförmige Translation in der Zeit. Diese stellt sich in unsrer vierdimensionalen Welt als Übergang von der ursprünglichen t-Achse zu einer geneigten $\bar{t}$-Achse dar. Man sieht sofort (Fig. 1), daß dabei in der Tat die Größe r ungeändert bleibt.

Das Relativitätsprinzip der Elektrodynamik spricht eine Invarianz der Naturgesetze gegen *andere* lineare Substitutionen aus, und damit wird die Bedeutung der Größe r hinfällig. Diese „Lorentztransformationen" verknüpfen die vier Größen x, y, z, t mit vier neuen $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{t}$ durch solche linearen Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} x &= k_{11}\bar{x} + k_{12}\bar{y} + k_{13}\bar{z} + k_{14}\bar{t}, \\ y &= k_{21}\bar{x} + k_{22}\bar{y} + k_{23}\bar{z} + k_{24}\bar{t}, \\ z &= k_{31}\bar{x} + k_{32}\bar{y} + k_{33}\bar{z} + k_{34}\bar{t}, \\ t &= k_{41}\bar{x} + k_{42}\bar{y} + k_{43}\bar{z} + k_{44}\bar{t}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

welche den Ausdruck

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \tag{8}$$

in sich transformieren, wobei c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

Hierbei wird also die Zeit (oder vielmehr die Größe $c t \sqrt{-1}$) mit den Koordinaten in symmetrischer Weise transformiert, und bei der Transformation wird nicht nur die t-Achse

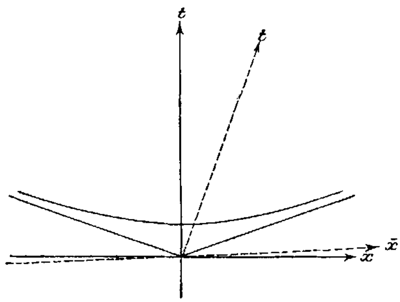

Fig. 2.

geneigt, sondern es bekommt auch der Raum $t = 0$ eine andere Stellung in der vierdimensionalen Welt.[1] Da also die Räume $t =$ konst. nicht in Räume $\bar{t} =$ konst. übergehen, so ist jetzt weder die Größe r, noch die Bedingung $dr/dt = 0$ invariant.

Es scheint zunächst auch nicht möglich, eine analoge Bedingung zwischen zwei Weltlinien anzugeben, da es gegenüber der Transformation (7), (8), keine dreidimensionalen Räume gibt, die derart ausgezeichnet sind, wie vorher die Räume $t =$ konst. gegenüber (5).

Daher muß man sich zum Zwecke der Verallgemeinerung nach einer anderen Definition der Starrheit in der alten Kinematik umsehen. Dazu kann man den Umstand benutzen, daß man die Bedingung $r =$ konst., die zwischen zwei endlich entfernten Weltlinien statthat, ersetzen kann durch eine Differentialbedingung zwischen unendlich benachbarten Weltlinien derart, daß, wenn die Differentialbedingung im ganzen Raume erfüllt ist, sie die Gleichung $r =$ konst. zur Folge hat.

1) Die nähere geometrische Beschreibung der Lorentztransformationen vgl. bei H. Minkowski, Raum und Zeit, l. c. (Anm. 1, p. 2).

Zu diesem Zwecke betrachten wir zur Zeit t die Entfernung zweier unendlich benachbarter Weltlinien, d. h. das Bogenelement

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Setzt man dies gleich einer Konstanten ε, so stellt die Gleichung

$$ds^2 = \varepsilon^2$$

eine unendlich kleine Kugel dar. Diese ist während der durch (1) dargestellten Bewegung aus einem unendlich kleinen Ellipsoid entstanden, das man erhält, wenn man die Größe ds^2 vermöge der Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta \end{aligned}\right. \tag{9}$$

als quadratische Form von $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ darstellt; sei diese Form:

$$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & p_{11}\, d\xi^2 + p_{22}\, d\eta^2 + p_{33}\, d\zeta^2 \\ & + 2 p_{12}\, d\xi\, d\eta + 2 p_{13}\, d\xi\, d\zeta + 2 p_{23}\, d\eta\, d\zeta. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Dabei ist die Matrix der „Deformationsgrößen“ $p_{\alpha\beta}$

$$P = (p_{\alpha\beta})$$

aus der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \tag{11}$$

in der Weise zusammengesetzt:

$$P = \bar{A} A. \tag{12}$$

Man wird die Bewegung nun *in den kleinsten Teilen starr* nennen, wenn ein unendlich kleines Gebilde sich bei der Bewegung nicht verändert, wenn also die sämtlichen $p_{\alpha\beta}$ von der Zeit unabhängig sind. Wir haben also die *infinitesimalen Starrheitsbedingungen:*

$$\frac{d p_{\alpha\beta}}{dt} = 0. \tag{13}$$

Wenn ξ, η, ζ die Anfangswerte von x, y, z sind, so ist für $t = 0$ die Matrix A gleich der Einheitsmatrix 1, also lautet (12) dann:

$$P = \bar{A} A = 1 .$$

Es ist nun ein elementarer Satz der Infinitesimalgeometrie [1]), daß, wenn diese Bedingung überall erfüllt ist, die Strömung durch Gleichungen der Form (3) dargestellt wird, daß es sich also um die Bewegung eines starren Körpers handelt.

Diese infinitesimale Starrheitsbedingung (13) läßt sich nun leicht auf die Kinematik des Relativitätsprinzips übertragen.

§ 2. Die Differentialbedingungen der Starrheit.

Im folgenden sollen nur solche Größen physikalische Bedeutung haben, die gegenüber den Lorentztransformationen (7), (8) invariant sind.

Wir betrachten nun eine Strömung, die wir aber anstatt durch Gleichungen der Form (1) durch die folgenden Gleichungen darstellen, welche der durch das Relativitätsprinzip geforderten Symmetrie der Größen x, y, z, t besser entsprechen:

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta, \tau), \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta, \tau), \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta, \tau), \\ t &= t(\xi, \eta, \zeta, \tau). \end{aligned} \right.$$

Dabei sei τ die *Eigenzeit*, d. h. es bestehe die Identität

$$(15) \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)^2 = - c^2 ;$$

τ werde von irgend einem „Querschnitte“ der Strömungen an gemessen.

Die ξ, η, ζ sollen die einzelnen Stromfäden charakterisieren, doch lassen wir ihre Bedeutung sonst dahingestellt. Wir setzen nun für den Augenblick

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} x(0, 0, 0, \tau) &= \mathfrak{x}(\tau), \\ y(0, 0, 0, \tau) &= \mathfrak{y}(\tau), \\ z(0, 0, 0, \tau) &= \mathfrak{z}(\tau), \\ t(0, 0, 0, \tau) &= \mathfrak{t}(\tau) \end{aligned} \right.$$

---

1) Der Satz wird selten explizite formuliert, ist aber eine unmittelbare Folge der einfachsten Abbildungssätze.

und betrachten den Faden von Weltlinien, welcher die Weltlinie (16) $\xi = \eta = \zeta = 0$ umgibt.

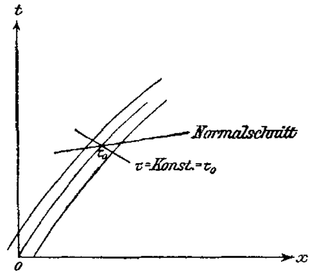

Fig. 3.

Dieser läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$
(17) \qquad \left\{ \begin{aligned}
x &= \mathfrak{x} + x_\xi \, d\xi + x_\eta \, d\eta + x_\zeta \, d\zeta + \ldots, \\
y &= \mathfrak{y} + y_\xi \, d\xi + y_\eta \, d\eta + y_\zeta \, d\zeta + \ldots, \\
z &= \mathfrak{z} + z_\xi \, d\xi + z_\eta \, d\eta + z_\zeta \, d\zeta + \ldots, \\
t &= \mathfrak{t} + t_\xi \, d\xi + t_\eta \, d\eta + t_\zeta \, d\zeta + \ldots,
\end{aligned} \right.
$$

wobei wir uns auf die in den Inkrementen $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ (die zunächst als klein, aber endlich zu denken sind) linearen Glieder beschränken. Hier sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ die durch (16) definierten Funktionen und es ist

$$
x_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi}(0, 0, 0, \tau), \; \ldots
$$

gesetzt.

Zwei Raumzeitvektoren mit den Komponenten x_1, y_1, z_1, t_1 und x_2, y_2, z_2, t_2 heißen *normal*, wenn ihre Richtungen bezüglich des invarianten hyperbolischen Gebildes

$$
(18) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = -1
$$

konjugiert sind, wenn also

$$
(19) \qquad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - c^2 t_1 t_2 = 0
$$

ist. Alle zu einem zeitartigen Vektor[1]) x_1, y_1, z_1, t_1 normalen Vektoren erfüllen ein dreidimensionales lineares Gebilde, das durch eine geeignete Lorentztransformation zum Raume $t = 0$ gemacht werden kann; wir nennen es *Normalschnitt* des Vektors.

1) D. h. einem Vektor, der das Gebilde (18) reell trifft.

Die so definierten Begriffe sind offenbar invariant gegen Lorentztransformationen.

Jetzt betrachten wir einen bestimmten Punkt P auf der Weltlinie $\xi = \eta = \zeta = 0$, der zu dem Wert τ_0 der Eigenzeit gehört. Durch diesen Punkt P legen wir den Normalschnitt zu dem Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{x}_0'$, $\mathfrak{y}_0'$, $\mathfrak{z}_0'$, $\mathfrak{t}_0'$ in P:

$$(20)\qquad \mathfrak{x}_0'(x - \mathfrak{x}_0) + \mathfrak{y}_0'(y - \mathfrak{y}_0) + \mathfrak{z}_0'(z - \mathfrak{z}_0) - c^2\mathfrak{t}_0'(t - \mathfrak{t}_0) = 0\,;$$

dabei ist

$$\mathfrak{x}' = \frac{d\mathfrak{x}}{d\tau} = \left[\frac{\partial x}{\partial \tau}\right]_{\xi=\eta=\zeta=0}, \;\ldots$$

und der Index 0 bedeutet, daß in den Funktionen $\tau = \tau_0$ einzusetzen ist.

In (20) ersetzen wir x, y, z, t durch ihre Ausdrücke (17) als Funktionen von $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ und τ:

$$(21)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_0'\{\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 + x_\xi d\xi + x_\eta d\eta + x_\zeta d\zeta + \ldots\} + \ldots \\ \qquad \ldots - c^2\mathfrak{t}_0'\{\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_0 + t_\xi d\xi + t_\eta d\eta + t_\zeta d\zeta + \ldots\} = 0\,. \end{cases}$$

Dies können wir als eine Gleichung für τ ansehen, aus der man die zu dem Normalschnitt τ_0 gehörigen Werte der Eigenzeit τ auf den Nachbarlinien $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ berechnen kann. Da die Differenz $\tau - \tau_0 = d\tau$ klein ist, wird (21) eine lineare Gleichung in $d\tau$. Entwickelt man nämlich

$$(22)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_0' d\tau + \ldots, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_\xi = x_\xi^0 + (x_\xi')_0 d\tau + \ldots, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

und beachtet, daß nach (15) identisch in τ

$$(23)\qquad \mathfrak{x}'^2 + \mathfrak{y}'^2 + \mathfrak{z}'^2 - c^2\mathfrak{t}'^2 = -c^2$$

ist, so folgt aus (21), wenn man alle in $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, $d\tau$ quadratischen Glieder vernachlässigt:

$$(24)\qquad \begin{cases} c^2 d\tau = \mathfrak{x}_0'(x_\xi^0 d\xi + x_\eta^0 d\eta + x_\zeta^0 d\zeta) + \ldots \\ \qquad\qquad \ldots - c^2\mathfrak{t}_0'(t_\xi^0 d\xi + t_\eta^0 d\eta + t_\zeta^0 d\zeta), \end{cases}$$

oder, wenn wir

$$
(25)\qquad \begin{cases} x_\xi^0\, d\xi + x_\eta^0\, d\eta + x_\zeta^0\, d\zeta = \Xi\,, \\ y_\xi^0\, d\xi + y_\eta^0\, d\eta + y_\zeta^0\, d\zeta = \mathsf{H}\,, \\ z_\xi^0\, d\xi + z_\eta^0\, d\eta + z_\zeta^0\, d\zeta = \mathsf{Z}\,, \\ t_\xi^0\, d\xi + t_\eta^0\, d\eta + t_\zeta^0\, d\zeta = \mathsf{T} \end{cases}
$$

setzen:

$$
(26)\qquad c^2\, d\tau = \mathfrak{x}_0'\,\Xi + \mathfrak{y}_0'\,\mathsf{H} + \mathfrak{z}_0'\,\mathsf{Z} - c^2\mathfrak{t}_0'\,\mathsf{T}\,.
$$

Wir betrachten nun das um den Punkt $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\tau = \tau_0$ als Zentrum gelegte (einschalige) hyperbolische Gebilde:

$$
(27)\qquad (x - \mathfrak{x}_0)^2 + (y - \mathfrak{y}_0)^2 + (z - \mathfrak{z}_0)^2 - c^2(t - \mathfrak{t}_0)^2 = \varepsilon^2.
$$

Dieses schneidet den Normalschnitt (20) in einer Figur, die man als die „Ruhgestalt“ des Fadens an dieser Stelle anzusehen hat.

Ersetzen wir in (27) demgemäß x, y, z, t durch die Ausdrücke (17) und dann die Größen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$, x_ξ, ... durch die Entwicklungen (22), so kommt

$$
(28)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{x}_0'\, d\tau + x_\xi^0\, d\xi + x_\eta^0\, d\eta + x_\zeta^0\, d\zeta)^2 + \dots \\ \qquad \dots - c^2(\mathfrak{t}_0'\, d\tau + t_\xi^0\, d\xi + t_\eta^0\, d\eta + t_\zeta^0\, d\zeta)^2 = \varepsilon^2, \end{cases}
$$

und hierin ist auf dem Normalschnitt $d\tau$ die durch (26) definierte Funktion von $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$; also geht (28) über in:

$$
(29)\qquad \begin{cases} \left\{\left(1 + \frac{\mathfrak{x}_0'^2}{c^2}\right)\Xi + \frac{\mathfrak{x}_0'\,\mathfrak{y}_0'}{c^2}\mathsf{H} + \frac{\mathfrak{x}_0'\,\mathfrak{z}_0'}{c^2}\mathsf{Z} - \mathfrak{x}_0'\,\mathfrak{t}_0'\,\mathsf{T}\right\}^2 + \dots \\ \dots - c^2\left\{\frac{\mathfrak{t}_0'\,\mathfrak{x}_0'}{c^2}\Xi + \frac{\mathfrak{t}_0'\,\mathfrak{y}_0'}{c^2}\mathsf{H} + \frac{\mathfrak{t}_0'\,\mathfrak{z}_0'}{c^2}\mathsf{Z} + (1 - \mathfrak{t}_0'^2)\,\mathsf{T}\right\}^2 = \varepsilon^2. \end{cases}
$$

Hierdurch ist die Ruhgestalt als quadratische Form in $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ gegeben. Da der Punkt $\xi = \eta = \zeta = 0$, $\tau = \tau_0$ ein beliebiger Punkt der Strömung war, kann man die Indizes 0 weglassen und $\mathfrak{x}'$ ... durch x_τ, ... ersetzen. Schreiben wir dann (29) in der Form:

$$
(30)\qquad \begin{cases} (c_{11}\, d\xi + c_{12}\, d\eta + c_{13}\, d\zeta)^2 + (c_{21}\, d\xi + c_{22}\, d\eta + c_{23}\, d\zeta)^2 \\ + (c_{31}\, d\xi + c_{32}\, d\eta + c_{33}\, d\zeta)^2 + (c_{41}\, d\xi + c_{42}\, d\eta + c_{43}\, d\zeta)^2 = \varepsilon^2, \end{cases}
$$

so ist die rechteckige Matrix von 4 Zeilen und 3 Kolonnen $C = (c_{\alpha\beta})$ gleich dem Produkt zweier Matrizen S und A, welche aus den Ableitungen der Funktionen (14) gebildet sind:

$$
(31)\qquad C = S\,A\,;
$$

und zwar ist:

$$
(32) \qquad S = \begin{pmatrix}
1 + \frac{x_\tau^2}{c^2} & \frac{x_\tau y_\tau}{c^2} & \frac{x_\tau z_\tau}{c^2} & - \frac{x_\tau t_\tau}{i c} \\
\frac{y_\tau x_\tau}{c^2} & 1 + \frac{y_\tau^2}{c^2} & \frac{y_\tau z_\tau}{c^2} & - \frac{y_\tau t_\tau}{i c} \\
\frac{z_\tau x_\tau}{c^2} & \frac{z_\tau y_\tau}{c^2} & 1 + \frac{z_\tau^2}{c^2} & - \frac{z_\tau t_\tau}{i c} \\
- \frac{t_\tau x_\tau}{i c} & - \frac{t_\tau y_\tau}{i c} & - \frac{t_\tau z_\tau}{i c} & 1 - t_\tau^2
\end{pmatrix},
$$

$$
(33) \qquad A = \begin{pmatrix}
x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\
y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\
z_\xi & z_\eta & z_\zeta \\
i c t_\xi & i c t_\eta & i c t_\zeta
\end{pmatrix}.
$$

Entwickeln wir nun die quadratische Form (30) nach $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, so hat man:

$$
(34) \qquad \begin{cases} p_{11}\, d\xi^2 + p_{22}\, d\eta^2 + p_{33}\, d\zeta^2 \\ \qquad + 2 p_{12}\, d\xi\, d\eta + 2 p_{13}\, d\xi\, d\zeta + 2 p_{23}\, d\eta\, d\zeta, \end{cases}
$$

wobei

$$
(35) \qquad P = (p_{\alpha\beta}) = \bar{C} C = \bar{A} \bar{S} S A
$$

wird.

Mit Hilfe der Gleichung (15), die das Verschwinden der Determinante von S zur Folge hat, kann man diese Relation (35) noch weiter vereinfachen; es ergibt sich nämlich leicht durch Ausrechnen:

$$
(36) \qquad \bar{S} S = S,
$$

und damit geht (33) über in:

$$
(37) \qquad P = \bar{A} S A.
$$

Das ist das Analogon zu der in § 1 abgeleiteten Gleichung (12). Die sechs Größen $p_{\alpha\beta}$ werden als „Deformationsgrößen" zu bezeichnen sein und würden in einer dem Relativitätsprinzip angepaßten Elastizitätstheorie von Wichtigkeit werden.

In den kleinsten Teilen starr werden wir einen Faden nennen, dessen Ruhgestalt von der Eigenzeit τ unabhängig ist, d. h. für den die sechs Gleichungen

$$
(38) \qquad \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial \tau} = 0
$$

bestehen.

Wenn diese Gleichungen im ganzen Raume erfüllt sind, so haben wir es mit der Bewegung eines starren Körpers zu tun.

Damit haben wir die allgemeinen Differentialbedingungen der Starrheit gewonnen. Da sie allein mit Hilfe solcher Begriffe aufgebaut worden sind, die gegen Lorentztransformationen invariant sind, so haben sie notwendig dieselbe Eigenschaft.

§ 3. Die Kontinuitätsgleichung und die inkompressible Strömung.

Ist ϱ die zu der Strömung (1) gehörige Dichte, so ist sie bekanntlich mit den Geschwindigkeitskomponenten

$$w_x = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad w_y = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad w_z = \frac{\partial z}{\partial t} \tag{39}$$

durch die Kontinuitätsgleichung verknüpft.

Diese kann man auf zwei Arten formulieren. Nach der Eulerschen Art sieht man ϱ, w_x, w_y, w_z als Funktionen von x, y, z, t an; dann lautet die Kontinuitätsbedingung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho w_x}{\partial x} + \frac{\partial \varrho w_y}{\partial y} + \frac{\partial \varrho w_z}{\partial z} = 0. \tag{40}$$

Nach der Lagrangeschen Art sieht man x, y, z, ϱ als Funktionen von ξ, η, ζ, t an; dann lautet die Bedingung:

$$\frac{\partial \varrho \Theta}{\partial t} = 0, \tag{41}$$

wo Θ die Funktionaldeterminante

$$\Theta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \tag{42}$$

ist.

Die Verbindung zwischen beiden Formeln wird hergestellt durch die Identität[1]):

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho w_x}{\partial x} + \frac{\partial \varrho w_y}{\partial y} + \frac{\partial \varrho w_z}{\partial z} = \frac{1}{\Theta} \frac{d \varrho \Theta}{d t}. \tag{43}$$

1) Vgl. etwa Weber-Riemann, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik 2. § 146. 1901.

Beide Formen der Kontinuitätsgleichung lassen sich auf die Darstellung der Strömung mit Hilfe der Eigenzeit durch die Gleichungen (14) übertragen. Zunächst hat man offenbar:

$$w_x = \frac{x_\tau}{t_\tau}, \quad w_y = \frac{y_\tau}{t_\tau}, \quad w_z = \frac{z_\tau}{t_\tau}. \tag{44}$$

Ersetzen wir ferner ϱ durch die „Ruhdichte"

$$\varrho^* = \frac{\varrho}{t_\tau}, \tag{45}$$

so geht (40) über in:

$$\frac{\partial \varrho^* x_\tau}{\partial x} + \frac{\partial \varrho^* y_\tau}{\partial y} + \frac{\partial \varrho^* z_\tau}{\partial z} + \frac{\partial \varrho^* t_\tau}{\partial t} = 0. \tag{46}$$

Das Analogon zu der Formel (41) bekommen wir, indem wir die Richtigkeit der (43) entsprechenden Identität

$$\frac{\partial \varrho^* x_\tau}{\partial x} + \frac{\partial \varrho^* y_\tau}{\partial y} + \frac{\partial \varrho^* z_\tau}{\partial z} + \frac{\partial \varrho^* t_\tau}{\partial t} = \frac{1}{D} \frac{\partial \varrho^* D}{\partial \tau} \tag{47}$$

nachweisen, wo D die Funktionaldeterminante

$$D = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta & x_\tau \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta & y_\tau \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta & z_\tau \\ t_\xi & t_\eta & t_\zeta & t_\tau \end{vmatrix} \tag{48}$$

bedeutet.

Zu diesem Zwecke ersetzen wir der Kürze halber für den Augenblick

$$x,\ y,\ z,\ t \quad \text{durch} \quad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,$$
$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \tau \quad \text{durch} \quad \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4.$$

Dann haben wir für die linke Seite von (47):

$$\sum_\alpha \frac{\partial\left(\varrho^* \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_4}\right)}{\partial x_\alpha} = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial\left(\varrho^* \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_4}\right)}{\partial \xi_\beta} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_\alpha}$$
$$= \sum_{\alpha,\beta} \left(\varrho^* \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial \xi_\beta \partial \xi_4} + \frac{\partial \varrho^*}{\partial \xi_\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_4}\right) \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_\alpha}.$$

Bezeichnen wir nun in dem Schema der Determinante D die zu $\partial x_\alpha / \partial \xi_\beta$ gehörige Subdeterminante mit $S(\partial x_\alpha / \partial \xi_\beta)$, so ergibt sich durch sukzessives Differenzieren der Gleichungen (14) nach x_α und Auflösen der so entstehenden linearen Gleichungen:

$$\frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{S\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_\beta}\right)}{D}. \tag{49}$$

Setzen wir das oben ein, so kommt

$$\sum_\alpha \frac{\partial\left(\varrho^* \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_4}\right)}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{D}\sum_{\alpha,\beta}\left\{\varrho^* \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial \xi_\beta \partial \xi_4} S\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_\beta}\right) + \frac{\partial \varrho^*}{\partial \xi_\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_4} S\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_\beta}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{D}\left\{\varrho^* \frac{\partial D}{\partial \xi_4} + \frac{\partial \varrho^*}{\partial \xi_4} D\right\}$$

nach allgemeinen Determinantensätzen. Also folgt

$$\sum_\alpha \frac{\partial\left(\varrho^* \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_4}\right)}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{D}\frac{\partial \varrho^* D}{\partial \xi_4},$$

und das ist die zu beweisende Identität (47).

Demnach kann man die Kontinuitätsbedingung in der Form schreiben:

$$\frac{\partial \varrho^* D}{\partial \tau} = 0. \tag{50}$$

Die Formeln (46), (47) und (50) haben gegenüber Lorentz-transformationen invarianten Charakter.

Die Größe

$$\varrho^* D = \varrho_0 \tag{51}$$

ist nur von ξ, η, ζ abhängig; wenn D für $\tau = 0$ gleich 1 ist (was man immer annehmen kann), so ist ϱ_0 der „Anfangswert der Ruhdichte".

In der alten Kinematik heißt eine Strömung inkompressibel, wenn ϱ konstant, von der Zeit t unabhängig ist. In der neuen Kinematik werden wir folgendermaßen definieren:

Eine Strömung ist inkompressibel, wenn die Ruhdichte ϱ^* konstant, d. h. von der Eigenzeit τ unabhängig ist.

Aus (46) und (50) ergeben sich zwei Formen der Inkompressibilitätsbedingung.

Zunächst kann man nämlich (46) schreiben:

$$\varrho^* \left(\frac{\partial x_\tau}{\partial x} + \frac{\partial y_\tau}{\partial y} + \frac{\partial z_\tau}{\partial z} + \frac{\partial t_\tau}{\partial t}\right)$$
$$+ \frac{\partial \varrho^*}{\partial x} x_\tau + \frac{\partial \varrho^*}{\partial y} y_\tau + \frac{\partial \varrho^*}{\partial z} z_\tau + \frac{\partial \varrho^*}{\partial t} t_\tau = 0,$$

oder:

(52) $$\varrho^* \left(\frac{\partial x_\tau}{\partial x} + \frac{\partial y_\tau}{\partial y} + \frac{\partial z_\tau}{\partial z} + \frac{\partial t_\tau}{\partial t}\right) + \frac{d \varrho^*}{d \tau} = 0;$$

soll nun ϱ^* von τ nicht abhängen, so folgt *die erste Form der Inkompressibilitätsbedingung*:

(53) $$\frac{\partial x_\tau}{\partial x} + \frac{\partial y_\tau}{\partial y} + \frac{\partial z_\tau}{\partial z} + \frac{\partial t_\tau}{\partial t} = 0.$$

Aus (50) ergibt sich sofort *die zweite Form*:

(54) $$\frac{\partial D}{\partial \tau} = 0.$$

Danach ist, wenn D für $\tau = 0$ gleich 1 ist, D identisch gleich 1 und nach (51)

$$\varrho^* = \varrho_0(\xi, \eta, \zeta).$$

§ 4. Die geradlinige Translation des starren Körpers.

Wir wollen nun die Differentialbedingungen der Starrheit (38) integrieren für den einfachsten Fall der geradlinigen Translation. Wenn wir bedenken, daß in diesem Falle die Starrheit mit der Inkompressibilität identisch sein muß, so gewinnen wir dadurch nicht nur ein Kriterium dafür, daß unsere Starrheitsdefinition sinngemäß ist, sondern auch gleichzeitig eine Methode zur Integration.

Wir setzen also

(55) $$y = \eta, \quad z = \zeta$$

und nehmen an, daß x und t nur von ξ und τ abhängen. Dann bekommen wir aus (32) und (33):

$$S = \begin{vmatrix} 1 + \frac{x_\tau^2}{c^2} & 0 & 0 & -\frac{x_\tau t_\tau}{i c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{t_\tau x_\tau}{i c} & 0 & 0 & 1 - t_\tau^2 \end{vmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} x_\xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i c t_\xi & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bildet man hieraus die Matrix

$$P = \bar{A} S A,$$

so findet man leicht

$$P = \begin{pmatrix} (x_\xi t_\tau - x_\tau t_\xi)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die sechs Starrheitsbedingungen reduzieren sich also auf die eine Gleichung:

(56) $$\frac{d}{d\tau}(x_\xi t_\tau - x_\tau t_\xi) = 0.$$

Andrerseits wird die Determinante (48):

(57) $$D = \begin{vmatrix} x_\xi & 0 & 0 & x_\tau \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_\xi & 0 & 0 & t_\tau \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\tau \\ t_\xi & t_\tau \end{vmatrix}.$$

Mithin ist die Inkompressibilitätsbedingung

$$\frac{dD}{d\tau} = 0$$

mit der Starrheitsbedingung (56) identisch.

Infolgedessen können wir letztere auch ersetzen durch die andere Form (53) der Inkompressibilitätsgleichung, die hier die Gestalt annimmt:

(58) $$\frac{\partial x_\tau}{\partial x} + \frac{\partial t_\tau}{\partial t} = 0.$$

In dieser Form ist nun die Integration leicht auszuführen.

Setzt man:

(59) $$x_\tau = p, \quad t_\tau = -q,$$

so hat man für p, q die beiden Gleichungen:

(60) $$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} - \dfrac{\partial q}{\partial t} = 0, \\ p^2 - c^2 q^2 = -c^2. \end{cases}$$

Diese sind äquivalent einer partiellen Differentialgleichung für eine Funktion von zwei unabhängigen Variabeln. Setzt man nämlich

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad q = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{61}$$

so ist die erste Gleichung (60) erfüllt, und die zweite geht über in

$$\varphi_t^2 - c^2 \varphi_x^2 = -c^2. \tag{62}$$

Die einfachste Lösung dieser Gleichung bekommt man, wenn man φ_t und φ_x gleich Konstanten γ und $-\delta$ setzt, welche die Bedingung

$$\gamma^2 - c^2 \delta^2 = -c^2 \tag{63}$$

erfüllen müssen. Es wird dann

$$p = x_\tau = \gamma, \quad q = -t_\tau = -\delta,$$

woraus folgt:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= W(\xi) + \gamma \tau, \\ t &= V(\xi) + \delta \tau, \end{aligned} \right. \tag{64}$$

wobei W und V zwei willkürliche Funktionen von ξ bedeuten. Infolge der Gleichung (63) bleibt die Form der Gleichungen (64) in der Tat erhalten, wenn man x, t einer Lorentztransformation unterwirft.

Die Gleichungen (64) stellen zusammen mit (55) eine geradlinige, gleichförmige Bewegung dar. Die Funktionen $W(\xi)$, $V(\xi)$ bestimmen sich durch den Wert, den x und t für $\tau = 0$ haben sollen. Hier ist es nicht bequem, für $\tau = 0$ $x = \xi$ anzunehmen, sondern die Funktionen $W(\xi)$, $V(\xi)$ so zu bestimmen, daß die Formeln (64) diejenige Lorentztransformation darstellen, die den Körper auf Ruhe transformiert, d. h. zu setzen:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \alpha \xi + \gamma \tau, \\ t &= \beta \xi + \delta \tau, \end{aligned} \right. \tag{65}$$

wobei die Bedingungen

$$\alpha^2 - c^2 \beta^2 = 1, \quad \alpha \gamma - c^2 \beta \delta = 0, \quad \gamma^2 - c^2 \delta^2 = -1 \tag{66}$$

erfüllt sind.

Sobald in (62) die eine der beiden Größen φ_t, φ_x von t abhängig ist, muß es auch die andere sein. In diesem Falle läßt sich die Integration von (62) mit Hilfe einer Legendretransformation leicht ausführen. Man kann dann nämlich die Größe

$$\varphi_t = p \tag{67}$$

als unabhängige Variable neben x einführen und aus (67) t als Funktion von x und p berechnet denken. Führt man dann statt φ die neue unbekannte Funktion

$$\psi(p, x) = \varphi - p\,t$$

ein, so ist

$$\left\{\begin{array}{l} \psi_p = \varphi_t t_p - p\,t_p - t = -t, \\ \psi_x = \varphi_x + \varphi_t t_x - p\,t_x = \varphi_x. \end{array}\right. \tag{68}$$

Demnach geht (62) in folgende Gleichung für $\psi(p, x)$ über:

$$p^2 - c^2 \psi_x^{\,2} = -c^2,$$

und diese läßt sich sofort integrieren. Es ergibt sich:

$$\left\{\begin{array}{l} \psi_x = \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}} = q, \\ \psi = q\,x - w(p), \end{array}\right. \tag{69}$$

wo w eine willkürliche Funktion bedeutet. Hieraus folgt durch Differentiation nach p mit Rücksicht auf (68):

$$\frac{p}{c^2 q}\,x - w'(p) = -t. \tag{70}$$

Denkt man sich hieraus p als Funktion von t berechnet und in $\varphi = \psi + p\,t$ eingesetzt, so hat man die gewünschte allgemeinste Lösung von (62):

$$\varphi = q\,x - w(p) + p\,t. \tag{71}$$

Nach (59) und (61) ist nun offenbar

$$\frac{x_\tau}{t_\tau} = \frac{dx}{dt} = -\frac{\varphi_t}{\varphi_x};$$

daraus folgt, daß jede Gleichung $\varphi = \text{konst.} = -\xi$ die Weltlinie eines Punktes des starren Körpers darstellt. Aus (70) und (71) finden wir demnach folgende Darstellung der Weltlinien:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{p}{c^2}\,x + q\,t = q\,w', \\ q\,x + p\,t = w - \xi, \end{array}\right. \tag{72}$$

oder, nach x und t aufgelöst:

$$
(73) \qquad \begin{cases} x = q(w - \xi) - p\,q\,w', \\ t = -\frac{p}{c^2}(w - \xi) + q^2 w'. \end{cases}
$$

Hier sind die Weltlinien des starren Körpers dadurch beschrieben, daß x und t als Funktionen der unabhängigen Variabeln ξ, p gegeben sind. Diese Darstellung wollen wir nun diskutieren.

Zunächst ist zu bemerken, daß die geradlinige Translationsbewegung nur von *einer willkürlichen Funktion eines Argumentes $w(p)$* abhängt. Man kann demnach sagen, daß auch hier wie in der alten Kinematik *nur ein Freiheitsgrad* vorhanden ist. Wesentlich ist dabei die Benutzung der unabhängigen Variabeln $p = x_\tau$, die auch weiterhin von großer Bedeutung sein wird. Ferner gehen die Gleichungen (73) in die entsprechende Darstellung der geradlinigen Translation der alten Kinematik über, wenn $c = \infty$ wird. Denn dann wird $q = \sqrt{1 + (p^2/c^2)}$ gleich 1; aus der zweiten Gleichung (73) folgt für $c = \infty$, daß p nur von t abhängt, so daß die erste die Form

$$x = \xi + a(t)$$

annimmt.

Endlich wenden wir uns der Charakterisierung der Weltlinien in der Ebene $x\,t$ zu. Man erkennt, daß (72) und (73) die Form einer Lorentztransformation und ihrer Inversen haben, welche die Variabeln x, y in die Variabeln $\bar{x} = w - \xi$, $\bar{t} = q\,w'$ überführen und lauten:

$$
(74) \qquad \begin{cases} \bar{x} = q\,x + \frac{p}{c}\,c\,t, & x = q\,\bar{x} - \frac{p}{c}\,c\,\bar{t}, \\ c\,\bar{t} = \frac{p}{c}\,x + q\,c\,t, & c\,t = -\frac{p}{c}\,\bar{x} + q\,c\,\bar{t}; \end{cases}
$$

denn die Gleichungen (66) zwischen den Koeffizienten sind wegen (60) offenbar erfüllt.

Wir haben also eine von dem Parameter p abhängige Schar von Lorentztransformationen vor uns. Die Bewegung, oder vielmehr das zugehörige Weltlinienbüschel, läßt sich nun so beschreiben:

Gibt man ξ einen bestimmten Wert ξ_1, so sind durch die Gleichungen (73) x und t als bestimmte Funktionen von p gegeben, die die Weltlinie des Punktes ξ_1 darstellen. Die

Komponenten des Weltvektors Geschwindigkeit nach den Achsen x und t sind p, $-q$. Durch die eine Kurve ξ_1 sind alle Kurven der Schar mitbestimmt. Man konstruiert sie folgendermaßen: Zu der Tangente in einem Punkte p der Kurve lege man die darauf im Sinne des § 2 (p. 12) normale Gerade; diese bildet mit der Tangente zusammen die x- und t-Achse eines transformierten Koordinatensystems. Auf dieser x-Achse trage man in der Einheit dieses Koordinatensystems [1]) die Strecke $\xi_1 - \xi$ ab. Bewegt man jetzt dieses Koordinatensystem längs der Kurve ξ_1, so beschreibt der Punkt ξ die zum Parameterwerte ξ gehörige Weltlinie. Alle Punkte einer solchen Normalen (x-Achse) gehören zu demselben Werte p, haben also dieselbe Geschwindigkeit.

Die geradlinige Bewegung eines starren Körpers ist also so beschaffen, daß, sobald man *einen* Punkt auf Ruhe transformiert, durch dieselbe Transformation seine sämtlichen Punkte auf Ruhe transformiert werden. Diese Ruhtransformation ist eben (74). Die Geraden gleicher Geschwindigkeit $p =$ konst. haben, außer bei gleichförmiger Bewegung, immer eine Enveloppe; an dieser hört die Regularität der Bewegung auf. Bei gegebenen Dimensionen des Körpers kann also die Krümmung der Weltlinien eine gewisse Grenze nicht überschreiten, und umgekehrt. *Daraus folgt, daß ein starrer Körper notwendig nach allen Seiten endlich ausgedehnt ist und um so kleiner sein muß, je größere Beschleunigungen er erfahren soll* Hier haben wir den ersten Hinweis auf die fundamentale Bedeutung der Atomistik in der neuen Dynamik. Trägt der starre Körper eine Substanz von der Ruhdichte ϱ^*, so ist diese von p unabhängig und eine Funktion von ξ, η, ζ allein, die wir mit

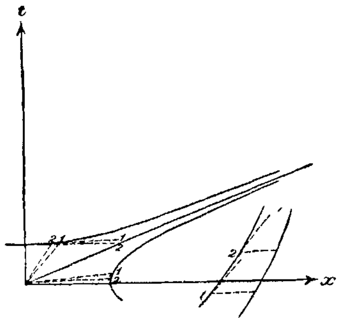

Fig. 4.

$$\varrho_0(\xi, \eta, \zeta)$$

bezeichnen.

1) Vgl. H. Minkowski, Raum u. Zeit, l. c. (Anm. p. 2).

§ 5. Die Hyperbelbewegung.

Die einfachste, von der gleichförmigen Translation verschiedene Bewegung werden wir erhalten, wenn wir in (72) und (73) die willkürliche Funktion $w = 0$ setzen. Dann wird

$$(75)\qquad \begin{cases} x = -q\,\xi, \\ t = \dfrac{p}{c^2}\,\xi. \end{cases}$$

Eliminiert man hieraus p, so folgt

$$(76)\qquad x^2 - c^2 t^2 = \xi^2.$$

Hieraus erkennt man, daß die zugehörigen Weltlinien in der $x\,t$-Ebene und den dazu parallelen Ebenen $y = \eta$, $z = \zeta$ Hyperbeln sind, welche die der Lichtgeschwindigkeit entsprechenden Geraden durch den Nullpunkt zu Asymptoten haben und die x-Achse im Abstande ξ vom Nullpunkte schneiden. Ein Bündel solcher Hyperbeln stellt eine Bewegung dar, bei der der starre Körper aus dem unendlichen kommt, sich dem Nullpunkt nähert, umkehrt und sich wieder ins Unendliche entfernt, wobei seine Geschwindigkeit von der Lichtgeschwindigkeit c zuerst bis Null abnimmt und nach der Umkehr wieder bis c zunimmt. Diese, der gleichförmig beschleunigten der alten Kinematik einigermaßen analoge Bewegung, wollen wir kurz die *Hyperbelbewegung* nennen.

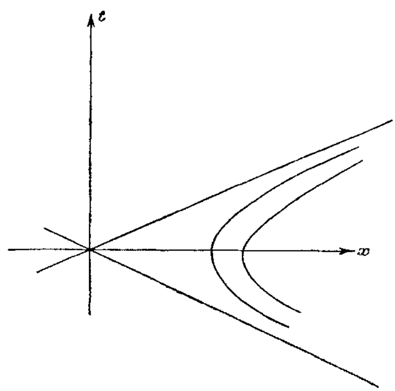

Fig. 5.

Da der Nullpunkt ein ganz beliebiger Punkt ist, so stellen die Hyperbeln

$$(77)\qquad (x-\alpha)^2 - c^2(t-\beta)^2 = \xi^2$$

keine wesentlich andere Bewegung dar; nur ist dann für $t = 0$ die Geschwindigkeit von Null verschieden. Wir werden uns also auf die Formeln (75), (76) beschränken können.

Diese Hyperbelbewegung erweist sich nicht nur kinematisch, sondern auch dynamisch als die einfachste. Es hängt das eng mit dem Umstande zusammen, daß jede beliebige Weltlinie in jedem ihrer Punkte P von einer solchen Hyperbel, der „Krümmungshyperbel", oskuliert wird, wobei der von deren Mittelpunkte bis nach dem Punkte P hin gerichtete Vektor vom Betrage $b = c^2/\xi$ den Beschleunigungsvektor der Weltlinie in P darstellt.

In der Tat, berechnen wir die Beschleunigungskomponenten der Hyperbelbewegung, so finden wir zunächst

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} = 0. \tag{78}$$

Zur Berechnung der x- und t-Komponente beachten wir die Gleichungen

$$\begin{cases} \xi_t = -p, & p_t = \dfrac{c^2 q^2}{\xi}, \\ \xi_x = -q, & p_x = \dfrac{p q}{\xi}. \end{cases} \tag{79}$$

Dann wird

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} = p_\tau = p_x x_\tau + p_t t_\tau = \frac{p q}{\xi} p - \frac{c^2 q^2}{\xi} q.$$

Also erhalten wir

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} = b_x = -q b, \tag{80}$$

und ebenso

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} = b_t = \frac{p}{c^2} b, \tag{81}$$

wo

$$b = \sqrt{b_x^2 - c^2 b_t^2} = \frac{c^2}{\xi} \tag{82}$$

der Betrag der Beschleunigung ist. Aus (80), (81), (82) folgt die obige Behauptung.[1])

Die Beschleunigung ist also für jede Weltlinie der Hyperbelbewegung dem Betrage nach konstant; darin liegt ihre Analogie mit der gleichförmig beschleunigten Bewegung der alten Mechanik, die durch parabolische Weltlinien dargestellt wird. Sie ist also die einfachste beschleunigte Bewegung, und jede Bewegung kann durch Hyperbelbewegungen approximiert werden.

---

1) H. Minkowski, Raum und Zeit, l. c. (Anm. p. 2).

Hierauf gestützt, wollen wir im folgenden die Dynamik der Hyperbelbewegungen genauer ergründen, vor allem die Kraft zu bestimmen suchen, die ein elektrisch geladener starrer Körper dabei auf sich selbst ausübt. Das Resultat wird dann auch als Annäherung Aufschluß geben über alle Bewegungen, bei denen der Betrag des Beschleunigungsvektors sich nur wenig ändert.

Zweites Kapitel.

Das Feld des starren Elektrons bei der Hyperbelbewegung.

§ 6. Retardierte Potentiale und Feldstärken.

Die von bewegten elektrischen Ladungen ausgeübten Kräfte, welche in die Bewegungsgleichungen dieser Ladungen eingehen, leiten sich aus gewissen Hilfsgrößen ab, den retardierten Potentialen und den Feldstärken. Wir wollen die im folgenden verwendeten Ausdrücke für diese Größen zusammenstellen.

Es sei eine elektrische Strömung durch Gleichungen der Form (14) dargestellt; der Anfangswert ihrer Ruhdichte (vgl. § 3, p. 18, (51)) sei

$$\varrho_0(\zeta, \eta, \zeta).$$

Dann werden die retardierten Potentiale durch die folgenden Ausdrücke gegeben:

$$(83)\quad \left\{\begin{aligned} &4\pi\,\Phi_x(x,y,z,t) \\ &= \iiint \left[\frac{\bar\varrho_0\,\bar x_\tau}{(x-\bar x)\,\bar x_\tau + (y-\bar y)\,\bar y_\tau + (z-\bar z)\,\bar z_\tau - c^2(t-\bar t)\,\bar t_\tau}\right]_{h=0} d\bar\xi\, d\bar\eta\, d\bar\zeta, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &4\pi\,\Phi(x,y,z,t) \\ &= \iiint \left[\frac{c\,\bar\varrho_0\,\bar t_\tau}{(x-\bar x)\,\bar x_\tau + (y-\bar y)\,\bar y_\tau + (z-\bar z)\,\bar z_\tau - c^2(t-\bar t)\,\bar t_\tau}\right]_{h=0} d\bar\xi\, d\bar\eta\, d\bar\zeta; \end{aligned}\right.$$

dabei bedeuten $\bar x$, $\bar y$, $\bar z$, $\bar t$ und $\bar x_\tau$, $\bar y_\tau$, $\bar z_\tau$, $\bar t_\tau$ die Funktionen (14) bzw. ihre Ableitungen nach τ, genommen für die Argumente $\bar\xi$, $\bar\eta$, $\bar\zeta$, und in den eckigen Klammern ist für τ die Funktion von x, y, z, t, $\bar\xi$, $\bar\eta$, $\bar\zeta$ einzusetzen, die sich durch Auflösen der Gleichung

$$(84)\qquad h = (x-\bar x)^2 + (y-\bar y)^2 + (z-\bar z)^2 - c^2(t-\bar t)^2 = 0$$

nach τ ergibt; und zwar ist diejenige eindeutig bestimmte

Lösung[1]) der Gleichung zu nehmen. für die $t > \bar{t}$ ist. Wie die Ausdrücke (83), die für kontinuierliche Strömungen in dieser Form wohl noch nicht gebraucht worden sind, mit den üblichen Formeln für die retardierten Potentiale zusammenhängen, soll im nächsten Paragraphen kurz erläutert werden.

Aus den Potentialen leiten sich die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ und die magnetische $\mathfrak{M}$ nach den Vektorgleichungen ab:

$$(85) \qquad \begin{cases} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z) - \operatorname{grad} \Phi, \\ \mathfrak{M} = \operatorname{curl}(\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z). \end{cases}$$

Die Potentiale (83) sind Lösungen der Gleichungen[2])

$$(86) \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{lor} \Phi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial t^2} - \Delta \Phi_x = \frac{\varrho^*}{c} x_\tau, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{lor} \Phi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = \varrho^* t_\tau, \end{cases}$$

und zwar speziell solche Lösungen, für die die Größe

$$(87) \qquad \operatorname{lor} \Phi = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

für sich verschwindet.

Die Gleichungen (86) sind die **Lagrangeschen** Gleichungen zu dem Variationsproblem[3]), diejenigen Funktionen $\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z, \Phi$ zu finden, für die das Integral

$$(88) \quad W = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \left\{\tfrac{1}{2}(\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{E}^2) - \frac{\varrho^*}{c}(\Phi_x x_\tau + \Phi_y y_\tau + \Phi_z z_\tau - \Phi t_\tau)\right\} dx\, dy\, dz\, dt,$$

---

1) Diese Gleichung hat eine und nur eine solche Lösung, weil die Geschwindigkeit der Strömung die Lichtgeschwindigkeit nicht erreichen kann. Vgl. H. Minkowski, l. c. (Anm. p. 7).

2) Ich folge in dieser Darstellung dem Vorgange von W. Ritz, indem ich die Potentiale als die Wirkungen von Ladung zu Ladung durchaus als das primäre ansehe und die partiellen Differentialgleichungen erst in die zweite Reihe rücke. Charakteristisch ist, daß in meiner ganzen Theorie von den eigentlichen Maxwellschen Feldgleichungen für $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$ gar kein Gebrauch gemacht wird.

3) Vgl. K. Schwarzschild, l. c. (Anm. p. 4); M. Born, l. c. (Anm. p. 5).

erstreckt über ein Gebiet G der $xyzt$-Mannigfaltigkeit, ein Extremum wird, wobei die Strömung der Elektrizität und die Werte der Potentiale auf der Begrenzung von G gegeben sind.

§ 7. Vergleich der Ausdrücke für die retardierten Potentiale

Die Ausdrücke (83) für die Potentiale kann man ansehen als die Superposition der Elementarpotentiale, die von den einzelnen bewegten Punkten der Strömung herrühren. Für letztere hat man nämlich nach Liénard und Wiechert[1]) die Ausdrücke

$$(89)\qquad \left\{\begin{array}{l} 4\pi\varphi_x = \left[\dfrac{e\,w_x}{c\,r\left(1-\dfrac{w_r}{c}\right)}\right]_{t-\bar{t}=\frac{r}{c}}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 4\pi\varphi = \left[\dfrac{e}{r\left(1-\dfrac{w_r}{c}\right)}\right]_{t-\bar{t}=\frac{r}{c}}. \end{array}\right.$$

Dabei bedeutet e die Ladung des wirkenden Punktes

$$(90)\qquad x = \bar{x}(t), \quad y = \bar{y}(t), \quad z = \bar{z}(t);$$

ferner

$$(91)\qquad r = \sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 + (z-\bar{z})^2}$$

die Entfernung desselben vom Aufpunkte x, y, z,

$$(92)\qquad w_r = \frac{1}{r}\{(x-\bar{x})\bar{w}_x + (y-\bar{y})\bar{w}_y + (z-\bar{z})\bar{w}_z\}$$

die Komponente seiner Geschwindigkeit w_x, w_y, w_z in der Richtung von r, und es ist in den eckigen Klammern für t der Wert $\bar{t}$ zu setzen, der sich aus der Gleichung

$$(93)\qquad t - \bar{t} = \frac{r}{c}$$

ergibt.

Hat man jetzt eine kontinuierliche Strömung, so ist die Weltlinie (90) durch ein Bündel von Weltlinien zu ersetzen,

---

1) E. Wiechert, Arch. néerl. (2) **5.** p. 549. 1900; A. Liénard, L'éclairage électrique **16.** p. 5, 53, 106. 1898.

indem man die Funktionen (90) durch Einführung von drei Parametern ξ, η, ζ auf die Form (1) bringt und e durch die Dichte $\varrho\,(\xi, \eta, \zeta)$ ersetzt. Dann werden die Funktionen φ_x, φ_y, φ_z, φ noch von ξ, η, ζ abhängig, und man kann sie über den ganzen Raum integrieren. Dabei ist noch zu beachten, daß bei der Raumintegration

$$dx\,dy\,dz = \Theta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

ist, und daß sich die Funktionaldeterminante Θ mit der Dichte ϱ nach § 3, (41) zu der Anfangsdichte $\varrho_0 = \varrho\,\Theta$ verbindet.

Die entstehenden Ausdrücke lassen sich leicht auf die Form (83) bringen. Dazu hat man nur die Bewegungsgleichungen des wirkenden Punktes homogen in der Gestalt

$$(94) \qquad x = \bar{x}(\tau), \quad y = \bar{y}(\tau), \quad z = \bar{z}(\tau), \quad t = \bar{t}(\tau),$$

zu schreiben, wo τ die Eigenzeit bedeutet, und ϱ durch die Ruhdichte ϱ^* zu ersetzen. Die Gleichung (93) geht dann in

$$(95) \qquad h = (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2 - c^2 (t - \bar{t})^2 = 0$$

über, aus der sich τ bei der Nebenbedingung $t > \bar{t}$ eindeutig ergibt.[1])

Der Zusammenhang der Ausdrücke (83) mit den sonst üblichen Ausdrücken für die Potentiale ist auch leicht zu ergründen. Letztere lauten[2]):

$$(96) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 4\pi\,\Phi_x = \displaystyle\iiint \frac{d\bar{x}\,d\bar{y}\,d\bar{z}}{r} \left[\frac{\varrho\,w_x}{c}\right]_{\bar{t} = t - \frac{r}{c}}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 4\pi\,\Phi = \displaystyle\iiint \frac{d\bar{x}\,d\bar{y}\,d\bar{z}}{r} \left[\varrho\right]_{\bar{t} = t - \frac{r}{c}}. \end{array} \right.$$

Dabei ist die Strömung durch Gleichungen der Form (1) (p. 6) dargestellt zu denken, ferner ist

$$r = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2},$$

1) Vgl. l. c. (Anm. 1 p. 28).

2) Vgl. etwa M. Abraham, Theorie der Elektrizität **2**. 2. Aufl., Formeln (51 b), (51 c) p. 57.

und in den eckigen Klammern sind als Argumente $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{t} = t - r/c$ einzusetzen. Die Integrationen in (95) sind über alle Ladungen zu erstrecken, also, da diese sich bewegen, über zeitlich variable Grenzen. Der Übergang von den Ausdrücken (95) zu den Ausdrücken (83) besteht nun eben darin, daß man die Integrale auf feste, von der Zeit unabhängige Grenzen bringt. Dies hat in folgender Weise zu geschehen.

In den Stromgleichungen (1) ersetzen wir t durch $\bar{t} = t - r/c$; dann bekommen wir Gleichungen der Form

$$(97) \qquad \begin{cases} \bar{x} = \bar{x}\{\xi, \eta, \zeta, \bar{t}\,(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t)\}, \\ \bar{y} = \bar{y}\{\xi, \eta, \zeta, \bar{t}\,(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t)\}, \\ \bar{t} = \bar{t}\,\{\xi, \eta, \zeta, \bar{t}\,(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t)\}, \end{cases}$$

welche $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ mit ξ, η, ζ verbinden und offenbar genau die Transformation darstellen, welche, auf (96) angewandt, die Integrale auf feste Grenzen bringt; denn diese Transformation (97) stellt $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ als Funktion ihrer Anfangswerte für den in den eckigen Klammern in Betracht kommenden Zeitpunkt dar.

Um die Funktionaldeterminante der Transformation (97)

$$(98) \qquad \varDelta = \left[\frac{\partial\,(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial\,(\xi, \eta, \zeta)}\right]_{t\,=\,\text{konst.}}$$

zu berechnen, wollen wir die Ableitung von $\bar{x}$ nach ξ bei festgehaltenem $\bar{t}$ mit $(\partial\,\bar{x}/\partial\,\xi)_{\bar{t}}$, bei festgehaltenem t mit $(\partial\bar{x}/\partial\xi)_t$ bezeichnen. Differenzieren wir dann die Gleichungen (97) der Reihe nach nach ξ, η, ζ, so bekommen wir drei Gleichungssysteme mit gleichlautenden Koeffizienten; z. B. bei der Differentiation nach ξ:

$$\left(\frac{\partial\,\bar{x}}{\partial\,\xi}\right)_t = \left(\frac{\partial\,\bar{x}}{\partial\,\xi}\right)_{\bar{t}} + \frac{\partial\,\bar{x}}{\partial\,\bar{t}}\left\{\frac{\partial\,\bar{t}}{\partial\,\bar{x}}\left(\frac{\partial\,\bar{x}}{\partial\,\xi}\right)_t + \frac{\partial\,\bar{t}}{\partial\,\bar{y}}\left(\frac{\partial\,\bar{y}}{\partial\,\xi}\right)_t + \frac{\partial\,\bar{t}}{\partial\,\bar{z}}\left(\frac{\partial\,\bar{z}}{\partial\,\xi}\right)_t\right\},$$

$$\left(\frac{\partial\,\bar{y}}{\partial\,\xi}\right)_t = \left(\frac{\partial\,\bar{y}}{\partial\,\xi}\right)_{\bar{t}} + \frac{\partial\,\bar{y}}{\partial\,\bar{t}}\left\{\frac{\partial\,\bar{t}}{\partial\,\bar{x}}\left(\frac{\partial\,\bar{x}}{\partial\,\xi}\right)_t + \frac{\partial\,\bar{t}}{\partial\,\bar{y}}\left(\frac{\partial\,\bar{y}}{\partial\,\xi}\right)_t + \frac{\partial\,\bar{t}}{\partial\,\bar{z}}\left(\frac{\partial\,\bar{z}}{\partial\,\xi}\right)_t\right\},$$

$$\left(\frac{\partial\,\bar{z}}{\partial\,\xi}\right)_t = \left(\frac{\partial\,\bar{z}}{\partial\,\xi}\right)_{\bar{t}} + \frac{\partial\,\bar{z}}{\partial\,\bar{t}}\left\{\frac{\partial\,\bar{t}}{\partial\,\bar{x}}\left(\frac{\partial\,\bar{x}}{\partial\,\xi}\right)_t + \frac{\partial\,\bar{t}}{\partial\,\bar{y}}\left(\frac{\partial\,\bar{y}}{\partial\,\xi}\right)_t + \frac{\partial\,\bar{t}}{\partial\,\bar{z}}\left(\frac{\partial\,\bar{z}}{\partial\,\xi}\right)_t\right\},$$

oder

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi}\right)_t \left(1 + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{x}}\right) + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi}\right)_t \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{y}} + \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi}\right)_t \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi}\right)_{\bar{t}},$$

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi}\right)_t \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi}\right)_t \left(1 + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{y}}\right) + \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi}\right)_t \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi}\right)_{\bar{t}},$$

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi}\right)_t \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi}\right)_t \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{y}} + \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi}\right)_t \left(1 + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{z}}\right) = \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi}\right)_{\bar{t}}.$$

Dazu treten zweimal drei Gleichungen, bei denen ξ mit η bzw. ζ vertauscht ist. Bezeichnen wir nun die hier auftretenden Matrizen folgendermaßen:

$$(99)\qquad P = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi}\right)_t & \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi}\right)_t & \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi}\right)_t \\ \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta}\right)_t & \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta}\right)_t & \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \eta}\right)_t \\ \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \zeta}\right)_t & \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \zeta}\right)_t & \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta}\right)_t \end{pmatrix},$$

$$(100)\qquad Q = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{x}} & \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{y}} & \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{z}} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{x}} & 1 + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{y}} & \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{z}} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{x}} & \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{y}} & 1 + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix},$$

$$(101)\qquad R = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi}\right)_{\bar{t}} & \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi}\right)_{\bar{t}} & \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi}\right)_{\bar{t}} \\ \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta}\right)_{\bar{t}} & \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta}\right)_{\bar{t}} & \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \eta}\right)_{\bar{t}} \\ \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \zeta}\right)_{\bar{t}} & \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \zeta}\right)_{\bar{t}} & \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta}\right)_{\bar{t}} \end{pmatrix},$$

so lassen sich unsere neun Gleichungen in die Matrizengleichung zusammenfassen:

$$P\bar{Q} = R.$$

Daraus folgt die Determinantenrelation:

$$|P| \cdot |Q| = |R| . \tag{102}$$

Nun ist offenbar nach (98)

$$|P| = \Delta ; \tag{103}$$

ferner ist nach § 3, (42), p. 16:

$$|R| = [\Theta]_{\bar{t} = t - \frac{r}{c}} . \tag{104}$$

Endlich findet man leicht

$$\begin{aligned} |Q| &= 1 + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}}\frac{\partial r}{\partial \bar{z}}\right), \\ &= 1 + \frac{1}{c}\left(\bar{w}_x \frac{\partial r}{\partial \bar{x}} + \bar{w}_y \frac{\partial r}{\partial \bar{y}} + \bar{w}_z \frac{\partial r}{\partial \bar{z}}\right), \end{aligned}$$

und das ist nach (92) zu schreiben:

$$Q = \left[1 - \frac{w_r}{c}\right]_{\bar{t} = t - \frac{r}{c}} . \tag{105}$$

Demnach wird:

$$\Delta = \left[\frac{\Theta}{1 - \frac{w_r}{c}}\right]_{\bar{t} = t - \frac{r}{c}} \tag{106}$$

Setzen wir das in (96) und beachten, daß nach § 3, (41), p. 16

$$\varrho\, \Theta = \varrho_0 (\xi, \eta, \zeta)$$

zu setzen ist, so kommt:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4\pi\, \Phi_x = \iiint \varrho_0 (\xi, \eta, \zeta) \left[\dfrac{w_x}{c\, r\left(1 - \dfrac{w_r}{c}\right)}\right]_{t - \bar{t} = \frac{r}{c}} d\xi\, d\eta\, d\zeta , \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ 4\pi\, \Phi = \iiint \varrho_0 (\xi, \eta, \zeta) \left[\dfrac{1}{r\left(1 - \dfrac{w_r}{c}\right)}\right]_{t - \bar{t} = \frac{r}{c}} d\xi\, d\eta\, d\zeta . \end{array} \right. \tag{107}$$

Ersetzen wir jetzt noch w_x durch x_τ / t_τ usw. wie auf p. 30, so gehen die Formeln (107) direkt in die Ausdrücke (83) über. In der Tat tritt in diesen *nur die Anfangsdichte* ϱ_0 auf.

§ 8. Berechnung der Potentiale bei der Hyperbelbewegung.

Wir wollen jetzt die Potentiale (83) für die Hyperbelbewegung

(108) $$x = -q\xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta, \quad t = \frac{p}{c^2}\xi$$

auswerten.

Da $y_\tau = z_\tau = 0$ sind, so sind auch $\Phi_y = \Phi_z = 0$. Da wir in (108) statt τ die Größe p als unabhängige Variable neben ξ, η, ζ haben, werden wir auch die Gleichung (84) $h = 0$ als Gleichung für p ansehen. Sie lautet dann:

(109) $$(x + \bar{q}\bar{\xi})^2 + (y - \bar{\eta})^2 + (z - \bar{\zeta})^2 - c^2\left(t - \frac{\bar{p}\bar{\xi}}{c^2}\right)^2 = 0;$$

wenn man die Abkürzungen

(110) $$\begin{cases} s = x^2 - c^2 t^2 = \bar{\xi}^2, \\ k = -\dfrac{1}{2\bar{\xi}}\left(s + \bar{\xi}^2 + (y - \bar{\eta})^2 + (z - \bar{\zeta})^2\right) \end{cases}$$

einführt, kann man (109) so schreiben:

$$\bar{p}\,t + \bar{q}\,x = k;$$

dazu tritt

$$\bar{p}^2 - c^2\bar{q}^2 = -c^2.$$

Aus diesen Gleichungen ist $\bar{p}$ zu berechnen; und zwar ist der Wert von $\bar{p}$ zu wählen, für den $t > \bar{t}$ wird. Setzt man den aus der ersten Gleichung folgenden Wert

$$\bar{p} = \frac{k - \bar{q}\,x}{t}$$

in die zweite ein, so entsteht die quadratische Gleichung für $\bar{q}$:

$$\bar{q}^2 - \bar{q}\frac{2kx}{s} = -\frac{k^2 + c^2 t^2}{s}.$$

Daraus folgt:

$$\bar{q} = \frac{1}{s}\left(kx + ct\sqrt{k^2 - s}\right).$$

Setzen wir noch zur Abkürzung für die positive Wurzel

(111) $$B = \sqrt{k^2 - s}$$

und berechnen $\bar{p}$, so finden wir

$$\bar{p} = -\frac{c}{s}(kct \pm Bx),$$

$$\bar{q} = \quad \frac{1}{s}(kx \pm Bct).$$

Hier ist dasjenige Vorzeichen zu wählen, das dem kleineren Werte von $\bar{t}$ entspricht. Da nun $\bar{t} = \bar{p}\,\bar{\xi}/c^2$ ist, so ergibt sich, vorausgesetzt, daß das Elektron rechts vom Nullpunkte $x = 0$ sich bewegt, d. h. $\bar{\xi} > 0$ ist, das Folgende:

für alle Aufpunkte, bei denen $x/s > 0$ ist, ist das positive Zeichen zu nehmen,

für alle Aufpunkte, bei denen $x/s < 0$ ist, ist das negative Zeichen zu nehmen.

Die Verteilung dieser Aufpunkte geht aus der Figur hervor.

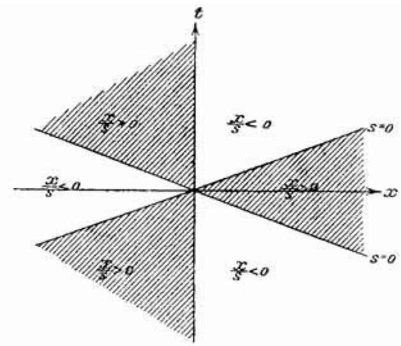

Fig. 6.

Wir wollen im folgenden meist voraussetzen, daß $x/s > 0$ *ist; nur solche Punkte können innere Punkte des Elektrons bei der Hyperbelbewegung sein.* Für sie ist also die positive Wurzel B zu nehmen. Wenn wir gelegentlich auch Punkte betrachten, für die $x/s < 0$ ist, so haben wir überall $+B$ durch $-B$ zu ersetzen.

Wir haben also:

$$(112)\quad \begin{cases} \bar{p} = -\dfrac{c}{s}(k\,c\,t + B\,x), \\ \bar{q} = \dfrac{1}{s}(k\,x \;+ B\,c\,t). \end{cases}$$

Nun berechnen wir den Nenner des Integrals (83) für diese Werte von $\bar{p}$, $\bar{q}$.

Wegen $y_\tau = z_\tau = 0$, $x_\tau = p$, $t_\tau = -q$ wird dieser:

$$(x + \bar{q}\,\bar{\xi})\,\bar{p} + c^2\left(t - \frac{\bar{p}}{c^2}\,\bar{\xi}\right)\bar{q} = x\,\bar{p} + c^2\,t\,\bar{q} = -\,c\,B.$$

Das setzen wir in die Integrale ein; es kommt:

$$(113)\quad \begin{cases} 4\pi\,\Phi_x(x,y,z,t) = \iiint \frac{\bar{\varrho}_0}{s\,B}(k\,c\,t + B\,x)\,d\bar{\xi}\,d\bar{\eta}\,d\bar{\zeta}, \\ 4\pi\,\Phi(x,y,z,t) = \iiint \frac{\bar{\varrho}_0}{s\,B}(k\,x + B\,c\,t)\,d\bar{\xi}\,d\bar{\eta}\,d\bar{\zeta}. \end{cases}$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$(114)\quad \begin{cases} \psi_1(s) = \frac{1}{s}\iiint \bar{\varrho}_0\,d\bar{\xi}\,d\bar{\eta}\,d\bar{\zeta} = \frac{e}{s}, \\ \psi_2(s) = \frac{1}{s}\iiint \bar{\varrho}_0\,\frac{k}{B}\,d\bar{\xi}\,d\bar{\eta}\,d\bar{\zeta}, \end{cases}$$

wobei e die Gesamtladung des Elektrons bedeutet, so wird einfach:

$$(115)\quad \begin{cases} 4\pi\,\Phi_x = \psi_1(s)\,.\,x + \psi_2(s)\,.\,c\,t, \\ 4\pi\,\Phi = \psi_2(s)\,.\,x + \psi_1(s)\,.\,c\,t. \end{cases}$$

Hier sind ψ_1 und ψ_2 Funktionen der Verbindung s von x und t allein.

Diese Potentiale erfüllen insbesondere die Gleichung (87) $\operatorname{lor}\Phi = 0$; denn man hat, weil $\partial s/\partial x = 2\,x$, $\partial s/\partial t = -\,2\,c^2 t$ ist:

$$4\pi\,\frac{\partial\,\Phi_x}{\partial\,x} = \psi_1 + 2\,\psi_1'\,x^2 + 2\,\psi_2'\,c\,t\,x,$$

$$4\pi\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,t} = \psi_1\,c - 2\,\psi_2'\,c^2\,t\,x - 2\,\psi_1'\,c^3\,t^2;$$

also

$$\operatorname{lor}\Phi = \frac{\partial\,\Phi_x}{\partial\,x} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,t} = \frac{1}{2\pi}(\psi_1 + s\,\psi_1').$$

Nun ist

$$\psi_1' = -\,\frac{e}{s^2},$$

also wird

$$(116)\qquad \operatorname{lor}\Phi = 0.$$

Wir wollen die Potentiale (115) für spätere Zwecke gleich noch in anderer Weise schreiben. Dazu bedenken wir, daß nach (108)

$$x = -\,q\,\xi, \quad t = \frac{p}{c^2}\,\xi, \quad \text{also} \quad s = \xi^2$$

zu setzen ist. Führen wir dann statt der Abkürzungen ψ_1, ψ_2 die folgenden ein:

$$(117)\quad \begin{cases} 4\pi\,\bar{\Phi}_x = -\,\xi\,\psi_1 = -\,\frac{e}{\xi}, \\ 4\pi\,\bar{\Phi} = -\,\xi\,\psi_2 = -\,\frac{1}{\xi}\iiint \bar{\varrho}_0\,\frac{k}{B}\,d\bar{\xi}\,d\bar{\eta}\,d\bar{\zeta}, \end{cases}$$

so kann man statt (115) schreiben:

$$(118)\qquad \begin{cases} \Phi_x = q\,\bar{\Phi}_x - \frac{p}{c}\,\bar{\Phi}, \\ \Phi = -\frac{p}{c}\,\bar{\Phi}_x + q\,\bar{\Phi}. \end{cases}$$

Die Funktionen Φ_x, Φ hängen also mit den Hilfsfunktionen $\bar{\Phi}_x$, $\bar{\Phi}$ durch dieselbe Lorentztransformation zusammen, die (p. 23, (74)) *den starren Körper auf Ruhe transformiert.* Wir werden $\bar{\Phi}_x$, $\bar{\Phi}$ daher *Ruhpotentiale* nennen; es sind Funktionen von ξ, η, ζ allein, die nicht mehr von p abhängen.

Aus den Relationen (118) erkennen wir, daß das Elektron sein Feld mitführt; die Ruhpotentiale, die von einem mit dem Elektron bewegten Beobachter wahrgenommen werden, hängen nur von den Ruhkoordinaten ξ, η, ζ ab.

Für das skalare Ruhpotential $\bar{\Phi}$ wollen wir noch den expliziten Ausdruck angeben:

$$(119)\qquad 4\pi\,\bar{\Phi}(\xi,\eta,\zeta) = -\frac{1}{\xi}\iiint \bar{\varrho}_0\,\frac{1}{r}\,\frac{r^2 + 2\,\xi\,\bar{\xi}}{\sqrt{r^2 + 4\,\xi\,\bar{\xi}}}\,d\bar{\xi}\,d\bar{\eta}\,d\bar{\zeta},$$

wobei

$$(120)\qquad r^2 = (\xi - \bar{\xi})^2 + (\eta - \bar{\eta})^2 + (\zeta - \bar{\zeta})^2$$

gesetzt ist. Liegt der Aufpunkt in dem Gebiete $x/s < 0$, so ist statt des positiven das negative Zeichen zu wählen. Sowohl $\bar{\Phi}_x$ wie $\bar{\Phi}$ werden bei $\xi = 0$ unendlich; für diesen Wert ist die ganze Hyperbelbewegung singulär; die Feldstärken aber bleiben, wie wir sehen werden, überall endlich und sind in der ganzen $x\,y\,z\,t$-Mannigfaltigkeit definiert.

§ 9. Die Feldstärken bei der Hyperbelbewegung.

Aus den Ausdrücken (115) für die Potentiale wollen wir nun gemäß den Formeln (85) die Feldstärken berechnen. Diese lauten hier:

$$(121)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_x}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, & \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ \mathfrak{M}_x = 0, & \mathfrak{M}_y = \frac{\partial \Phi_x}{\partial z}, \quad \mathfrak{M}_z = -\frac{\partial \Phi_x}{\partial y}. \end{cases}$$

Nun finden wir aus (115) bei Beachtung von (110):

$$4\pi \frac{\partial \Phi_x}{\partial t} = c\,\psi_2 - 2\,\psi_1{}'\,c^2\,t\,x - 2\,\psi_2{}'\,c^3\,t^2,$$

$$4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \psi_2 + 2\,\psi_2{}'\,x^2 + 2\,\psi_1{}'\,c\,t\,x.$$

Also wird:

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{1}{2\pi}(\psi_2 + s\,\psi_2{}'). \tag{122}$$

Daraus folgt, daß $\mathfrak{E}_x$ außer von η, ζ nur von s, d. h. von ξ abhängt, aber nicht von p. *Die x-Komponente der elektrischen Feldstärke ist also längs jeder Weltlinie des Elektrons konstant.*

Rechnet man $\mathfrak{E}_x$ aus, so ergibt sich:

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{1}{\pi}\iiint \bar{\varrho}_0 \frac{\bar{\xi}^2\left(r^2 - 2\,\xi\,(\xi - \bar{\xi})\right)}{r^3\,(r^2 + 4\,\xi\,\bar{\xi})^{3/2}}\,d\bar{\xi}\,d\bar{\eta}\,d\bar{\zeta}, \tag{123}$$

wobei r durch (120) definiert ist.

$\mathfrak{E}_x$ wird bei $\xi = 0$ nicht unendlich. Man kann aber $\mathfrak{E}_x$ auch über die Geraden $\xi = 0$, d. h. $x + c\,t = 0$ und $x - c\,t = 0$ fortsetzen. Dabei hat man in den Gebieten $x/s < 0$ dem mit B^3 identischen Nenner das entgegengesetzte Vorzeichen zu geben. Sodann ist zu bedenken, daß durch die Gleichungen (108), die für reelle Werte von ξ die auf der x-Achse normalen Hyperbeln der $x\,t$-Ebene darstellen, für rein imaginäre ξ die auf der t-Achse normalen Hyperbeln dargestellt werden. Die Klammerausdrücke im Zähler und Nenner von $\mathfrak{E}_x$ kann man in der Form

$$\bar{\xi}^2 - \xi^2 + (\eta - \bar{\eta})^2 + (\zeta - \bar{\zeta})^2,$$

$$[\xi^2 + \bar{\xi}^2 + (\eta - \bar{\eta})^2 + (\zeta - \bar{\zeta})^2]^2 - 4\,\xi^2\,\bar{\xi}^2$$

schreiben; es kommt in ihnen nur das Quadrat von ξ vor, so daß sie auch für rein imaginäre Werte von ξ reell sind. Ferner kann der Nennerausdruck im Integrationsgebiet, d. h. für $\bar{\xi}^2 > 0$, nie Null werden; denn setzt man $\xi = i\,\alpha$, so wird er

$$[-\alpha^2 + \bar{\xi}^2 + (\eta - \bar{\eta})^2 + (\zeta - \bar{\zeta})^2]^2 + 4\,\alpha^2\,\bar{\xi}^2 > 0.$$

Daher ist $\mathfrak{E}_x$ in der ganzen $x\,t$-Ebene definiert.

Wir wollen jetzt die übrigen Feldkomponenten berechnen. Es wird:

$$(124)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_y = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = -\dfrac{x}{4\pi}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial \eta} = q\dfrac{\xi}{4\pi}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial \eta}, \\ \mathfrak{E}_z = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = -\dfrac{x}{4\pi}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial \zeta} = q\dfrac{\xi}{4\pi}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial \zeta}, \end{cases}$$

$$(125)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_y = \dfrac{\partial \Phi_x}{\partial z} = \dfrac{ct}{4\pi}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial \zeta} = \dfrac{p}{c}\dfrac{\xi}{4\pi}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial \zeta}, \\ \mathfrak{M}_z = -\dfrac{\partial \Phi_x}{\partial y} = -\dfrac{ct}{4\pi}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial \eta} = -\dfrac{p}{c}\dfrac{\xi}{4\pi}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial \eta}. \end{cases}$$

Nun findet man leicht:

$$(126)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \psi_2}{\partial \eta} = -8\displaystyle\iiint \bar{\varrho}_0 \dfrac{\bar{\xi}^2(\eta-\bar{\eta})}{r^3(r^2+4\,\xi\,\bar{\xi})^{3/2}}\, d\bar{\xi}\, d\bar{\eta}\, d\bar{\zeta}, \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial \zeta} = -8\displaystyle\iiint \bar{\varrho}_0 \dfrac{\bar{\xi}^2(\zeta-\bar{\zeta})}{r^3(r^2+4\,\xi\,\bar{\xi})^{3/2}}\, d\bar{\xi}\, d\bar{\eta}\, d\bar{\zeta}. \end{cases}$$

Demnach sind die y- und z-Komponenten der Feldstärken außer von η, ζ nicht bloß von der Verbindung $\xi^2 = x^2 - c^2 t^2$ abhängig, sondern auch von x und t explizite; man kann sie also als Funktionen von ξ, η, ζ, p ansehen.

In den Gebieten, wo $x/s < 0$ ist, ist wieder das Vorzeichen der Ausdrücke (126) umzukehren.

Man erkennt, daß auch die y- und z-Komponenten der Feldstärken bei $\xi = 0$ nicht unendlich werden. Auf eine genauere Diskussion des Feldverlaufes in dem festen Koordinatensystem wollen wir nicht eingehen. Nur so viel sieht man sofort, daß $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$ bei $x = 0$ verschwinden, daß dort also die Kraftlinien parallel der x-Achse sind, und daß $\mathfrak{M}_y$ und $\mathfrak{M}_z$ bei $t = 0$ verschwinden, d. i. in dem Augenblicke, wo das Elektron umkehrt und daher momentan ruht. Hieraus ersieht man wieder, daß das Feld vom Elektron in der Tat mitgeführt wird, da das magnetische Feld momentan überall verschwindet, wenn das Elektron in einem Augenblicke ruht.

§ 10. Transformation der Wellengleichung, der Potentiale und Feldstärken auf ein mitbewegtes Koordinatensystem.

Die Form (118), die wir den retardierten Potentialen gegeben hatten, führt dazu, die Wellengleichung (86) selbst auf ein mit dem Elektron bewegtes Koordinatensystem, d. h. auf die unabhängigen Variablen ξ, η, ζ, p zu transformieren.

Um die Umrechnung zu vereinfachen, transformieren wir statt der Differentialgleichungen (86) das Variationsproblem (88).

Wir haben also zunächst die Komponenten der Feldstärken (121) zu transformieren.

Es ist wegen (79):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_x}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_x}{\partial \xi}\xi_t + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_x}{\partial p}p_t = -\frac{\partial \Phi_x}{\partial \xi}\frac{p}{c} + \frac{\partial \Phi_x}{\partial p}\frac{c q^2}{\xi},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\xi_x + \frac{\partial \Phi}{\partial p}p_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}q + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{p q}{\xi}.$$

Wir führen nun die Ruhpotentiale $\bar{\Phi}_x$, $\bar{\Phi}$ durch dieselben Relationen (118) wie früher ein:

$$(118)\quad \begin{cases} \Phi_x = q\,\bar{\Phi}_x - \frac{p}{c}\,\bar{\Phi}, \\ \Phi = -\frac{p}{c}\,\bar{\Phi}_x + q\,\bar{\Phi}. \end{cases}$$

Dann ist offenbar:

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial \xi} = q\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \xi} - \frac{p}{c}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -\frac{p}{c}\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \xi} + q\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi},$$

und entsprechendes gilt für die Ableitungen nach η und ζ. Dagegen wird:

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial p} = \frac{p}{c^2 q}\bar{\Phi}_x - \frac{1}{c}\bar{\Phi} + q\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{d p} - \frac{p}{c}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial p},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{c}\bar{\Phi}_x + \frac{p}{c^2 q}\bar{\Phi} - \frac{p}{c}\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial p} + q\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial p}.$$

Demnach wird:

$$(127)\quad \begin{cases} -\mathfrak{E}_x = \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_x}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi}\left(\bar{\Phi} - c q\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial p}\right), \\ -\mathfrak{E}_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{p}{c}\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \eta} + q\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta}, \\ -\mathfrak{E}_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{p}{c}\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \zeta} + q\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \zeta}; \end{cases}$$

$$(128)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_x = 0, \\ \mathfrak{M}_y = \frac{\partial \Phi_x}{\partial z} = q\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \zeta} - \frac{p}{c}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \zeta}, \\ -\mathfrak{M}_z = \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} = q\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \eta} - \frac{p}{c}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta}. \end{cases}$$

Jetzt ergibt sich:

$$\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{E}^2 = -\left[\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi}\left(\bar{\Phi} - c\,q\,\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial p}\right)\right]^2 + \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \eta}\right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \zeta}\right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \zeta}\right)^2. \tag{129}$$

Ferner wird:

$$\frac{\varrho^*}{c}(\Phi_x x_\tau + \Phi_y y_\tau + \Phi_z z_\tau - \Phi\, t_\tau) = -\varrho^*\left(\frac{p}{c}\,\Phi_x + q\,\Phi\right) = -\varrho^*\,\bar{\Phi}. \tag{130}$$

Endlich wird die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x, y, z, t)}{\partial(\xi, \eta, \zeta, p)} = -\frac{\xi}{c^2 q}. \tag{131}$$

Daher geht das Variationsproblem (88) in das folgende über:

$$\begin{aligned} W = \iiiint \Bigg\{ \frac{\xi}{2c^2 q}\Bigg(& \left[\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi}\left(\bar{\Phi} - c\,q\,\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial p}\right)\right]^2 \\ & - \left[\left(\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \eta}\right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \zeta}\right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \zeta}\right)^2\right]\Bigg) \\ & + \frac{\xi}{c^2 q}\,\varrho^*\,\bar{\Phi}\Bigg\}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dp = \text{Min.} \end{aligned} \tag{132}$$

Hieraus entnimmt man die *Differentialgleichungen der Elektrodynamik für ein hyperbolisch beschleunigtes Bezugsystem:*

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi}\left(\bar{\Phi} - c\,q\,\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial p}\right)\right\} \\ & \qquad - \frac{\xi}{q}\left\{\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_x}{\partial \zeta^2}\right\} = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\xi\,\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} + \bar{\Phi} - c\,q\,\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial p}\right\} + \xi\left\{\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \zeta^2}\right\} \\ & \qquad - \left\{\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi}\left(\bar{\Phi} - c\,q\,\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial p}\right)\right\} = \varrho^*\,\xi. \end{aligned}\right. \tag{133}$$

Diesen Gleichungen müssen notwendig auch die in § 8 gewonnenen Ruhpotentiale (117) genügen. Diese hängen aber von p nicht ab, ebenso wie die Dichte $\varrho^* = \varrho_0(\xi, \eta, \zeta)$; es sind also „statische Potentiale" bezüglich des beschleunigten Koordinatensystems. Durch Weglassen der Ableitungen nach p

erhalten wir aus (133) die *Differentialgleichungen der Elektrostatik in einem hyperbolisch beschleunigten Bezugsystem*:

$$(134)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \bar{\Phi}_x}{\partial \eta^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{\Phi}_x}{\partial \zeta^2} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \dfrac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi}\right) + \xi\left(\dfrac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \eta^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \zeta^2}\right) - \dfrac{\bar{\Phi}}{\xi} = \varrho_0 \xi. \end{cases}$$

Außerdem genügten aber die Potentiale Φ_x, Φ der Gleichung lor $\Phi = 0$; diese geht bei der Transformation über in

$$(135)\quad \frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi}\left(\bar{\Phi}_x - q c \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial p}\right) = 0.$$

Wenn $\bar{\Phi}_x$, $\bar{\Phi}$ von p unabhängig sind, so wird das:

$$(136)\quad \frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial \xi} + \frac{\bar{\Phi}_x}{\xi} = 0.$$

Wir wollen nun direkt zeigen, daß die Ausdrücke (117) bzw. (119) in der Tat die Gleichungen (134), (136) befriedigen.

Für $\bar{\Phi}_x = -\frac{1}{4\pi}\frac{e}{\xi}$ ist das von vornherein klar; sowohl die erste Gleichung (134), als auch (136) sind befriedigt.

Für $\bar{\Phi}$ benutzen wir den expliziten Ausdruck (119). Wir werden zeigen, daß derselbe das genaue Analogon ist zu dem elektrostatischen Potential gegebener Ladungen

$$4\pi u(\xi, \eta, \zeta) = \iiint \frac{\varrho}{r}\, d\bar{\xi}\, d\bar{\eta}\, d\bar{\zeta},$$

und daß er zu der Differentialgleichung

$$(137)\quad \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi}\right) + \xi\left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \zeta^2}\right) - \frac{\bar{\Phi}}{\xi} = f(\xi, \eta, \zeta)$$

in genau derselben Beziehung steht, wie das gewöhnliche Potential u zu der Gleichung

$$\Delta u = f(\xi, \eta, \zeta).$$

Zunächst ist nämlich die in den beiden Variabelnreihen ξ, η, ζ; $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ symmetrische Funktion

$$\frac{1}{r}\,\frac{1}{\xi\bar{\xi}}\,\frac{r^2 + 2\xi\bar{\xi}}{\sqrt{r^2 + 4\xi\bar{\xi}}}$$

eine Lösung[1]) der homogenen Gleichung (137) ($f = 0$), die der

1) Es ist, genau wie $1/r$ für $\Delta u = 0$, die Greensche Funktion der Differentialgleichung (137) für den unendlichen Raum mit der Randbedingung, daß die Lösung im Unendlichen verschwinden und die mit r^2 multiplizierte Ableitung in einer beliebigen Richtung endlich bleiben soll.

Lösung $1/r$ von $\Delta u = 0$ entspricht. Daß sie in der Tat der Gleichung genügt, kann man durch eine allerdings langwierige Rechnung direkt einsehen. Ferner hat sie für $r = 0$, d. h. $\xi = \bar{\xi}$, $\eta = \bar{\eta}$, $\zeta = \bar{\zeta}$, eine Singularität von der Ordnung $1/r$ und der Faktor von $1/r$ wird für $r = 0$ gleich $1/\bar{\xi}$. Allerdings muß dabei ausgeschlossen werden, daß ξ oder $\bar{\xi}$ Null werden; dieser Wert ist natürlich für die Differentialgleichung (137) selber singulär. Aus diesem Verhalten unserer Grundlösung folgt nun genau wie in der Potentialtheorie, daß, wenn f eine für $\xi \gtreqless 0$ definierte Funktion ist, der Ausdruck

$$4\pi\,\bar{\Phi}(\xi,\eta,\zeta) = \iiint \frac{f(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{\zeta})}{r}\,\frac{1}{\xi\bar{\xi}}\,\frac{r^2 + 2\xi\bar{\xi}}{\sqrt{r^2 + 4\xi\bar{\xi}}}\,d\bar{\xi}\,d\bar{\eta}\,d\bar{\zeta}$$

der inhomogenen Gleichung (137) genügt (natürlich nur, solange ξ von Null verschieden ist). Ersetzt man hierin noch f durch seinen Wert $\varrho_0\,\xi$, der den mitbewegten Ladungen nach (134) entsprach, so wird man auf (119) zurückgeführt. Das verschiedene Vorzeichen in verschiedenen Gebieten des Aufpunktes resultierte dabei aus den Überlegungen, daß die aus $\bar{\Phi}_x$, $\bar{\Phi}$ zusammengesetzten Φ_x, Φ im ruhenden Koordinatensystem retardierte, nicht avancierte Potentiale sein sollten. Demnach wird man die Ruhpotentiale $\bar{\Phi}_x$, $\bar{\Phi}$ in analoger Weise durch die Differentialgleichungen (134), (136) und durch ihr Verhalten im Unendlichen eindeutig festlegen können, wie das gewöhnliche statische Potential. Doch will ich hierauf nicht näher eingehen.

Beachtet man nun, daß $\bar{\Phi}_x$ nicht von p, η, ζ abhängt, so gewinnt man aus (127), (128) für die *Feldstärken die folgenden Ausdrücke durch das Ruhpotential $\bar{\Phi}$ allein:*

$$(138)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = \dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\xi} + \dfrac{\bar{\Phi}}{\xi}, & \mathfrak{M}_x = 0, \\[2ex] \mathfrak{E}_y = -q\,\dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\eta}, & \mathfrak{M}_y = -\dfrac{p}{c}\,\dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\zeta}, \\[2ex] \mathfrak{E}_z = -q\,\dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\zeta}; & \mathfrak{M}_z = \dfrac{p}{c}\,\dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\eta}. \end{cases}$$

Man sieht leicht, daß diese Ausdrücke mit (122), (124), (125) identisch sind.

Nach Minkowski[1]) werden wir noch außer den Ruhpotentialen die *Ruhfeldstärken* einführen.

Die *elektrische Ruhkraft* ist definiert durch

$$(139)\qquad \begin{cases} \overline{\mathfrak{E}}_x = t_\tau \mathfrak{E}_x + \frac{1}{c}(y_\tau \mathfrak{M}_z - z_\tau \mathfrak{M}_y), \\ \overline{\mathfrak{E}}_y = t_\tau \mathfrak{E}_y + \frac{1}{c}(z_\tau \mathfrak{M}_x - x_\tau \mathfrak{M}_z), \\ \overline{\mathfrak{E}}_z = t_\tau \mathfrak{E}_z + \frac{1}{c}(x_\tau \mathfrak{M}_y - y_\tau \mathfrak{M}_x). \end{cases}$$

Dazu tritt der Ausdruck für die *elektrische Ruharbeit:*

$$(139^*)\qquad \overline{A} = x_\tau \mathfrak{E}_x + y_\tau \mathfrak{E}_y + z_\tau \mathfrak{E}_z.$$

Ferner ist die *magnetische Ruhkraft* definiert durch

$$(140)\qquad \begin{cases} \overline{\mathfrak{M}}_x = t_\tau \mathfrak{M}_x - \frac{1}{c}(y_\tau \mathfrak{E}_z - z_\tau \mathfrak{E}_y), \\ \overline{\mathfrak{M}}_y = t_\tau \mathfrak{M}_y - \frac{1}{c}(z_\tau \mathfrak{E}_x - x_\tau \mathfrak{E}_z), \\ \overline{\mathfrak{M}}_z = t_\tau \mathfrak{M}_z - \frac{1}{c}(x_\tau \mathfrak{E}_y - y_\tau \mathfrak{E}_x); \end{cases}$$

und die *magnetische Ruharbeit:*

$$(140^*)\qquad \overline{B} = x_\tau \mathfrak{M}_x + y_\tau \mathfrak{M}_y + z_\tau \mathfrak{M}_z.$$

Setzt man hier die Ausdrücke (138) ein und bedenkt, daß

$$x_\tau = p, \quad t_\tau = -q, \quad y_\tau = z_\tau = 0$$

zu setzen ist, so erhält man:

$$(141)\qquad \begin{cases} \overline{\mathfrak{E}}_x = -q\left(\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \xi} + \frac{\overline{\Phi}}{\xi}\right), & \overline{\mathfrak{M}}_x = 0, \\ \overline{\mathfrak{E}}_y = \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \eta}, & \overline{\mathfrak{M}}_y = 0, \\ \overline{\mathfrak{E}}_z = \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \zeta}, & \overline{\mathfrak{M}}_z = 0, \\ \overline{A} = p\left(\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \xi} + \frac{\overline{\Phi}}{\xi}\right); & \overline{B} = 0. \end{cases}$$

Die magnetische Ruhkraft und Ruharbeit sind also, wie zu erwarten, identisch Null. Die elektrische Ruhkraft und Ruharbeit aber leiten sich allein aus dem Ruhpotential $\overline{\Phi}$ ab. Aus dem

1) H. Minkowski, l. c. (Anm. p. 5, vgl. p. 32 ff.).

Werte (119) von $\bar{\Phi}$ findet man die folgenden expliziten Ausdrücke für die elektrischen Ruhkräfte:

$$
(142)\quad \begin{cases}
\bar{\mathfrak{E}}_x = \dfrac{q}{\pi} \iiint \bar{\varrho}_0 \dfrac{\bar{\xi}^2 [r^2 - 2\,\xi\,(\xi - \bar{\xi})]}{r^3 (r^2 + 4\,\xi\,\bar{\xi})^{3/2}}\, d\bar{\xi}\, d\bar{\eta}\, d\bar{\zeta}, \\[2ex]
\bar{\mathfrak{E}}_x = -\dfrac{2}{\pi}\,\xi \iiint \bar{\varrho}_0 \dfrac{\bar{\xi}^2 (\eta - \bar{\eta})}{r^3 (r^2 + 4\,\xi\,\bar{\xi})^{3/2}}\, d\bar{\xi}\, d\bar{\eta}\, d\bar{\zeta}, \\[2ex]
\bar{\mathfrak{E}}_z = -\dfrac{2}{\pi}\,\xi \iiint \bar{\varrho}_0 \dfrac{\bar{\xi}^2 (\zeta - \bar{\zeta})}{r^3 (r^2 + 4\,\xi\,\bar{\xi})^{3/2}}\, d\bar{\xi}\, d\bar{\eta}\, d\bar{\zeta};
\end{cases}
$$

und die Ruharbeit $\bar{A}$ geht aus $\bar{\mathfrak{E}}_x$ durch Vertauschung von q mit $-p$ hervor. Diese Ausdrücke gelten jedenfalls im Innern des Elektrons selbst.

Vergleicht man die Ausdrücke (141) mit den Gleichungen (108), so erkennt man, daß sich die Größen

$$\bar{\mathfrak{E}}_x, \quad \bar{\mathfrak{E}}_y, \quad \bar{\mathfrak{E}}_z, \quad \frac{1}{c^2}\bar{A}$$

aus den nur von ξ, η, ζ abhängigen Größen

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} + \frac{\bar{\Phi}}{\xi}, \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \zeta} \quad \text{und} \quad p,\ q$$

gerade so zusammensetzen wie x, y, z, t aus ξ, η, ζ und p, q. Daraus folgt, daß sich bei Lorentztransformation

$$\bar{\mathfrak{E}}_x, \quad \bar{\mathfrak{E}}_y, \quad \bar{\mathfrak{E}}_z, \quad \frac{1}{c^2}\bar{A}$$

gerade so transformieren wie x, y, z, t, d. h. wie ein Raumzeitvektor erster Art.

Drittes Kapitel.

Die Dynamik des starren Elektrons bei der Hyperbelbewegung.

§ 11. Die resultierenden Kräfte und die Bewegungsgleichungen.

Bekanntlich wird das Produkt der Ruhdichte in die im vorigen Paragraphen definierte elektrische Ruhkraft als ponderomotorische Kraft des Feldes bezeichnet und mit gewöhnlichen mechanischen Kräften als äquivalent angesehen.

In der Abrahamschen Theorie des starren Elektrons sowohl wie in der Lorentzschen des „deformierbaren" Elektrons werden die Bewegungsgleichungen eines von gewöhnlicher Masse freien Elektrons dann in folgender Weise gebildet: Durch Integration über den in einem Moment t vom

Elektron erfüllten Raum werden die Resultierenden jener ponderomotorischen Kräfte sowohl des äußeren wie des vom Elektron selbst erzeugten Feldes gebildet (bzw. die resultierenden Momente, wenn Rotationen mit berücksichtigt werden), und die Summe dieser Resultierenden wird gleich Null gesetzt.

Dieses Verfahren entspricht natürlich nicht dem von uns eingeschlagenen Wege. Denn die so gebildeten Resultierenden hängen offenbar von dem gewählten Bezugsysteme ab. *Wir werden suchen, solche Bewegungsgleichungen aufzustellen, die gegen Lorentztransformationen invariant sind.*

Die Form der vom Elektron selbst erzeugten Ruhkräfte (141) und (142) und die Bemerkung auf p. 45 über ihr Verhalten bei Lorentztransformation aber legt es nahe, in welcher Weise man die Resultierenden zu bilden hat, damit die Bewegungsgleichungen gegen Lorentztransformation invariant sind, d. h. damit die Resultierenden selber sich wie Raumzeitvektoren erster Art transformieren. *Wir werden als resultierende Kraft eines Kraftfeldes das Integral des Produktes von Ruhladung und Ruhkraft über die Ruhgestalt des Elektrons, d. h. nach ξ, η, ζ bei festem p, verstehen.*

Wie man in dem Falle, daß Rotationen zugelassen sind, die resultierenden Momente zu definieren hat, darauf wollen wir nicht eingehen.

Ferner werden wir die *Bewegungsgleichungen eines starren Elektrons* folgendermaßen aussprechen: *Das starre Elektron bewegt sich so, daß die Resultierende seines eigenen Feldes entgegengesetzt gleich ist der Resultierenden des äußeren Feldes.*

Ehe wir für die Hyperbelbewegung die Resultierende des inneren Feldes wirklich ausrechnen, wollen wir eine Bemerkung über die Impuls- und Energiesätze machen.

Bekanntlich gelten infolge der elektromagnetischen Grundgleichungen die folgenden Identitäten:

$$(143)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial t} = \varrho^* \overline{\mathfrak{F}}_x, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial z} + \dfrac{\partial W}{\partial t} = \varrho^* \overline{A}. \end{cases}$$

Dabei sind

$$(144)\quad \begin{cases} X_x = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2) + \frac{1}{2}(\mathfrak{M}_x^2 - \mathfrak{M}_y^2 - \mathfrak{M}_z^2), \\ X_y = \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y + \mathfrak{M}_x \mathfrak{M}_y, \\ X_z = \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_z + \mathfrak{M}_x \mathfrak{M}_z \end{cases}$$

und zweimal drei entsprechende Größen die Komponenten der *Maxwellschen Spannungen,* ferner ist

$$(145)\qquad \mathfrak{S} = c\,[\mathfrak{E}\,\mathfrak{M}]$$

der *Strahlvektor* und

$$(146)\qquad W = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{M}^2)$$

die *Energiedichte.* Integriert man diese Gleichungen über einen von einer geschlossenen Fläche begrenzten Raum, so gewinnt man die Gleichungen

$$(147)\quad \begin{cases} \iiint \varrho^* \overline{\mathfrak{E}}_x\, dv = \iint T_x\, df - \frac{d}{dt}\iiint \frac{1}{c}\,\mathfrak{S}_x\, dv, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \iiint \varrho^* \overline{A}\, dv = \iint \mathfrak{S}_n\, df - \frac{d}{dt}\iiint W\, dv, \end{cases}$$

wo dv die Integration über den Raum, df die über die Begrenzung andeutet, und wobei $\mathfrak{S}_n$ die Normalkomponente von $\mathfrak{S}$ und

$$T_x = X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z)$$

die Normalkomponente der x-Spannungen an der Begrenzung ist. Diese Gleichungen besagen, daß die im alten Sinne gebildete resultierende Kraft gleich der Abnahme der in einem Volumen befindlichen elektromagnetischen Bewegungsgröße $\frac{1}{c}\,\mathfrak{S}$ vermehrt um die Gesamtspannung auf der Begrenzung des Volumens ist, und daß die von den Kräften geleistete Arbeit gleich der Abnahme der elektromagnetischen Gesamtenergie vermehrt um die durch die Begrenzung tretende Strahlung ist.

Betrachten wir nun zuerst die Abrahamsche Theorie; in dieser wird der Äther als ruhendes absolutes Bezugsystem angenommen und das Elektron ist im alten Sinne starr. Hier hat die Bildung der Resultierenden durch Integration über den Raum für festes t ihre Berechtigung. Denn, wenn wir uns auf den Fall geradliniger Translation beschränken, so haben zu einer Zeit t alle Punkte des Elektrons dieselbe Geschwindigkeit w; die einzelnen Punkte des Elektrons leisten relativ zueinander keine Arbeit, die zwischen ihnen wirkenden Kräfte treten nicht in Erscheinung, und daher kann man die Integrale der Kraftkomponenten und der Arbeit über das Volumen des Elektrons als resultierende Kraftkomponenten und Gesamtarbeit ansehen. Dabei ist dann allerdings kein Relativitätsprinzip irgendwelcher Art erfüllt.

In der Lorentzschen Theorie wird das Elektron bei quasistationärer Bewegung als deformierbar angesehen, und zwar nach demselben Gesetze, nach dem ein im Sinne der hier dargelegten Theorie starrer, gleichförmig bewegter Körper von einem ruhenden Bezugsystem deformiert erscheint. Definiert man hier die resultierenden Kräfte usw. als die Integrale bei festem t, so wird man ganz andere Werte bekommen, je nach dem Bezugsystem, das man zugrunde legt; die Gleichungen (143) sind allerdings invariant, d. h. behalten ihre Form, wenn man die Koordinaten einer Lorentztransformation unterwirft, aber nur, wenn man gleichzeitig die Größen $X_x, \ldots \mathfrak{S}_x, \ldots W$ in gewisser Weise transformiert. Dieser Umstand bewirkt das scheinbare Auftreten einer Deformationsenergie und -Bewegungsgröße, worauf Planck und Abraham aufmerksam gemacht haben. Demnach haben in der Kinematik des Relativitätsprinzips die durch Integration bei festem t gebildeten Werte der resultierenden Kraft, der Arbeit, der Spannungen und des Strahles keine unmittelbare Bedeutung. Aus der Nichtbeachtung dieses Umstandes erklären sich sofort die Widersprüche in der Lorentzschen Theorie.

Wir können sagen, daß die Lokalisation der Energie und des Impulses im Äther in der alten Weise dem Relativitätsprinzipe nicht entspricht. Für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen brauchen wir aber die Energie- und Impulssätze in der erörterten Form gar nicht. Vielmehr reicht die auf p. 46 gegebene Definition vollkommen aus. Der Energiesatz tritt dann zu den drei Bewegungsgleichungen als die von ihnen abhängige Aussage hinzu, daß die Summe der Arbeiten der

Resultierenden des äußeren und des inneren Feldes stets gleich Null ist.

§ 12. Die resultierenden inneren Kräfte bei der Hyperbelbewegung.

Aus den Ausdrücken (141) oder (142) bilden wir jetzt die Resultierenden der inneren Ruhkräfte. Bezeichnen wir das Raumelement $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ mit $d\omega$, so erhalten wir:

$$(148)\quad \begin{cases} K_x^{(i)} = \int \varrho_0\, \mathfrak{E}_x\, d\omega = \dfrac{q}{\pi} \iint \varrho_0\, \bar{\varrho}_0\, \dfrac{\bar{\xi}^2 [r^2 - 2\,\xi\,(\xi - \bar{\xi})]}{r^3 (r^2 + 4\,\xi\,\bar{\xi})^{3/2}}\, d\omega\, d\bar{\omega}, \\ K_y^{(i)} = \int \varrho_0\, \bar{\mathfrak{E}}_y\, d\omega = -\dfrac{2}{\pi} \iint \varrho_0\, \bar{\varrho}_0\, \dfrac{\xi\,\bar{\xi}^2 (\eta - \bar{\eta})}{r^3 (r^2 + 4\,\xi\,\bar{\xi})^{3/2}}\, d\omega\, d\bar{\omega}, \\ K_z^{(i)} = \int \varrho_0\, \mathfrak{E}_z\, d\omega = -\dfrac{2}{\pi} \iint \varrho_0\, \bar{\varrho}_0\, \dfrac{\xi\,\bar{\xi}^2 (\zeta - \bar{\zeta})}{r^3 (r^2 + 4\,\xi\,\bar{\xi})^{3/2}}\, d\omega\, d\bar{\omega}. \end{cases}$$

Die resultierende Arbeit $K^{(i)}$ geht aus $K_x^{(i)}$ durch Vertauschung von q mit $-p$ hervor.

Zunächst betrachten wir das Integral $K_x^{(i)}$. Hier werden wir statt der Koordinate ξ, die von dem Schnittpunkte der Asymptoten der Hyperbelbewegung an rechnet, die Koordinate von irgend einem Punkte a des Elektrons einführen und demnach

$$\xi \text{ durch } a + \xi,$$
$$\bar{\xi} \text{ durch } a + \bar{\xi}$$

ersetzen. Wir werden sogleich beweisen, daß das Elektron einen Mittelpunkt haben muß. *Wir wählen daher diesen Mittelpunkt als Bezugspunkt.*

Dann haben wir unter dem Integral den Ausdruck

$$\frac{(a + \bar{\xi})^2 [r^2 - 2\,(a + \xi)\,(\xi - \bar{\xi})]}{r^3 [r^2 + 4\,(a + \xi)\,(a + \bar{\xi})]^{3/2}}$$

zu untersuchen.

Nun ist nach Gleichung (82) der Betrag der Beschleunigung des Mittelpunktes a gleich

$$(149)\qquad b = \frac{c^2}{a};$$

führen wir das in obigen Ausdruck ein, so wird er die folgende Funktion der Beschleunigung:

$$(150)\qquad f = \frac{(c^2 + \bar{\xi}\, b)\,[b\, r^2 - 2\,(c^2 + \xi\, b)\,(\xi - \bar{\xi})]}{r^3\,[r^2 b^2 + 4\,(c^2 + \xi\, b)\,(c^2 + \bar{\xi}\, b)]^{3/2}}.$$

Bezeichnen wir diese als Funktion der beiden Punkte $P(\xi, \eta, \zeta)$, $\overline{P}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ mit $f(P, \overline{P})$, so läßt sich f in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Teil zerlegen:

$$f(P, \overline{P}) = f_1(P, \overline{P}) + f_2(P, \overline{P}),$$

wo

$$f_1 = \tfrac{1}{2}\,[f(P, \overline{P}) + f(\overline{P}, P)] \text{ symmetrisch,}$$

$$f_2 = \tfrac{1}{2}\,[f(P, \overline{P}) - f(\overline{P}, P)] \text{ schiefsymmetrisch}$$

ist. Nun ist klar, daß das Integral

$$\iint \varrho\, \bar{\varrho}_0\, f_2(P, \overline{P})\, d\omega\, d\bar{\omega}$$

identisch verschwindet.

Folglich können wir uns auf die Untersuchung von f_1 beschränken. Es ergibt sich:

$$(151)\quad f_1 = \frac{b}{2}\,\frac{r^2\,[(c^2 + \xi\, b)^2 + (c^2 + \bar{\xi}\, b)^2] + 2\,(\xi - \bar{\xi})\,(c^2 + \xi\, b)\,(c^2 + \bar{\xi}\, b)}{r^3\,[r^2 b^2 + 4\,(c^2 + \xi\, b)\,(c^2 + \bar{\xi}\, b)]^{3/2}}.$$

Mithin wird das sechsfache Integral in $K_x^{(i)}$ proportional mit b. Fassen wir b mit dem Faktor q nach (80) zu $-b_x$ und, indem wir die Arbeit $K^{(i)}$ bilden, b mit p zu $c^2 b_t$ zusammen, so können wir schreiben:

$$(152)\qquad \begin{cases} K_x^{(i)} = -\,\mu\, b_x, \\ K^{(i)} = -\,c^2 \mu\, b_t. \end{cases}$$

Dabei ist die Ruhmasse μ folgende, nur von dem Betrage b der Beschleunigung des Mittelpunktes a abhängige Größe:

$$(153)\quad \mu = \frac{1}{2\pi}\iint \frac{\varrho\, \bar{\varrho}}{r^3\,[r^2 b^2 + 4\,(c^2 + \xi\, b)\,(c^2 + \bar{\xi}\, b)]^{3/2}} \Big\{ r^2\,[(c^2 + \xi\, b)^2 + (c^2 + \bar{\xi}\, b)^2] + 2\,(\xi - \bar{\xi})^2\,(c^2 + \xi\, b)\,(c^2 + \bar{\xi}\, b) \Big\}\, d\omega\, d\bar{\omega}.$$

Da b nur von der Anfangskoordinate a des Mittelpunktes abhängt, ist es bei jeder Hyperbelbewegung konstant. *Also ist μ für jede Hyperbelbewegung eine nur von der Gestalt und Ladungsverteilung des Elektrons abhängige Konstante.*

Aus (151) gewinnt man die Bewegungsgleichung der x-Koordinate, indem man die Summe der inneren Kraft $K_x^{(i)}$ und der äußeren $K_x^{(a)}$ gleich Null setzt; und ebenso ist $K^{(i)} + K^{(a)} = 0$ der Ausdruck der Energiegleichung. Das gibt:

$$\left\{\begin{aligned} \mu\, b_x &= K_x^{(a)}, \\ \mu\, b_t &= \frac{1}{c^2} K^{(a)}. \end{aligned}\right. \tag{154}$$

Es ist nun noch zu zeigen, daß man ein äußeres Kraftfeld angeben kann, das imstande ist, eine Hyperbelbewegung aufrecht zu erhalten. Das leistet eine in der x-Richtung wirkende elektrische Kraft E_x, die von Ort und Zeit unabhängig ist. Dann ist nämlich die Ruhkraft nach (139)

$$\overline{E}_x = t_\tau E_x = -q\, E_x,$$

ebenso die Ruharbeit

$$\overline{A} = x_\tau E_x = p\, E_x,$$

und wenn E_x konstant ist, so liefert die Integration von $\varrho_0 \overline{E}_x$ und $\varrho_0 \overline{A}$ nach ξ, η, ζ einfach

$$\begin{aligned} K_x^{(a)} &= -q\, e\, E_x, \\ K^{(a)} &= p\, e\, E_x. \end{aligned}$$

Diese Kraft wird die Hyperbelbewegung mit der Beschleunigung b aufrecht erhalten können, wenn man

$$E_x = \frac{\mu}{e} b \tag{155}$$

wählt.

Ist das äußere Kraftfeld nur wenig variabel, so daß man es im Innern des Elektrons als konstant ansehen kann, so wird es eine Bewegung erzeugen, die von einer Hyperbelbewegung nur wenig abweicht. Wenn wir auch in diesem Falle die Gleichungen (154) für gültig ansehen, so vernachlässigen wir die Strahlung.

Wir erhalten also für wenig veränderliche, aber beliebig große Beschleunigungen die folgenden Bewegungs- und Energiegleichungen:

$$(156)\qquad \begin{cases} \mu \dfrac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} = t_\tau e E_x, \\ \mu \dfrac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} = \dfrac{1}{c^2} x_\tau e E_x, \end{cases}$$

wobei x und t sich auf den Mittelpunkt des Elektrons beziehen. *Diese Gleichungen sind invariant gegen Lorentztransformation und haben die Form der mechanischen Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes.*

Sieht man μ als konstant an (was der nächste Paragraph rechtfertigen wird), führt dann die „gewöhnliche" Masse durch die Relation

$$(157)\qquad m = \mu t_\tau = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

ein und ersetzt die Ableitungen nach τ durch Ableitungen nach t, so erhält man:

$$(158)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial m w_x}{\partial t} = e E_x, \\ \dfrac{\partial m}{\partial t} = \dfrac{1}{c^2} e E_x w_x. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen ist die Bewegungsgleichung in einer den Newtonschen Gleichungen der alten Mechanik analogen Form, die zweite die Energiegleichung. Die Größe $c^2 m$ entspricht also der kinetischen Energie der alten Mechanik. *Die Abhängigkeit der Masse m von der Geschwindigkeit wird durch die Lorentzsche Formel (157) gegeben*; wesentlicher als diese, auch für gewöhnliche (nicht elektromagnetische) Masse in der neuen Kinematik gültige Relation ist die Abhängigkeit der Ruhmasse μ von dem Betrage b der Beschleunigung gemäß der Formel (153). Diese Abhängigkeit wollen wir im folgenden Paragraphen näher studieren.

Zuvor haben wir noch die y- und z-Komponente der inneren Kraft zu betrachten.

Wenden wir auf $K_y^{(i)}$ dieselben Überlegungen an, wie auf $K_x^{(i)}$, indem wir den Integranden in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Teil spalten, so bekommen wir:

$$(159)\qquad K_y^{(i)} = -\frac{2}{\pi} b \iint \varrho_0 \bar{\varrho}_0 \frac{(\eta - \bar{\eta})(\xi - \bar{\xi})(c^2 + b\xi)(c^2 + b\bar{\xi})}{r^3 \{r^2 b^2 + 4(c^2 + b\xi)(c^2 + b\bar{\xi})\}} d\omega\, d\bar{\omega},$$

und ein analoger Ausdruck gilt für $K_z^{(i)}$.

Setzt man die Beschleunigung b als klein voraus, so wird:

$$[K_y^{(i)}]_0 = -\frac{b}{4\pi c^2}\iint \varrho_0\,\bar{\varrho}_0\,\frac{(\eta-\bar{\eta})(\xi-\bar{\xi})}{r^3}\,d\omega\,d\bar{\omega}\,. \tag{160}$$

Wir werden nun postulieren, daß bei verschwindend kleiner Beschleunigung das Elektron keine seitlichen Kräfte auf sich ausübt. Wäre das nämlich der Fall, so würden schon bei quasistationärer Translation äußere seitliche Kräfte erforderlich sein, um die Bewegung aufrecht zu erhalten. Das widerspricht aber der Beobachtung an Kathoden- und Becquerelstrahlen, die sich ohne äußere seitliche Einwirkung von selbst geradlinig bewegen.

Damit aber $[K_y^{(i)}]_0 = 0$ ist, muß die Ladungsverteilung symmetrisch sein zu einer der Ebenen $\xi = 0$ oder $\eta = 0$. Ebenso sieht man, daß sie auch symmetrisch zu einer der Ebenen $\xi = 0$ oder $\zeta = 0$ sein muß, damit $[K_z^{(i)}]_0 = 0$ ist.

Da ferner die Bewegungsrichtung eine willkürliche Richtung im Elektron ist, so muß die Ladung symmetrisch zu jeder durch den Mittelpunkt gehenden Ebene verteilt sein. Mithin ist sie in konzentrischen Schichten um den Mittelpunkt gelagert.

Aus der Beobachtungstatsache, daß zur Aufrechterhaltung der quasistationären Translation keine äußeren seitlichen Kräfte nötig sind, folgt also, daß das Elektron einen Mittelpunkt hat, um den die Ladung in konzentrischen Schichten verteilt ist.

Ist das aber der Fall, so ergibt sich ohne weiteres aus (159), daß dann $K_y^{(i)}$ für beliebige Werte von b verschwindet; und dasselbe gilt für $K_z^{(i)}$. Demnach haben wir das Resultat:

Das Elektron übt bei beliebig beschleunigten Hyperbelbewegungen keine seitlichen Kräfte auf sich selbst aus.

Damit ist auch der noch fehlende Teil des Trägheitsgesetzes elektrodynamisch abgeleitet. Mit derselben Näherung, mit der die Gleichungen (156) und (158) für Bewegungen mit geringen Beschleunigungsänderungen gelten, können wir auch dieses Resultat auf solche Bewegungen übertragen.

Die Erkenntnis, daß man aus dem Verhalten der Elektronen bei quasistationärer Translation auf die Existenz eines Mittelpunktes und die Ladungsverteilung in konzentrischen Schichten schließen kann, ist ein weiterer Beitrag zur Befestigung der atomischen Vorstellung der Elektrizität. Ich glaube nicht, daß irgend eine andere Theorie eine so enge Verknüpfung der Atomistik mit den Prinzipien der Dynamik gegeben hat.

§ 13. Die elektrodynamische Ruhmasse.

Zunächst wollen wir den Wert der Ruhmasse für quasistationäre Bewegungen, d. h. für verschwindend kleine Werte von b, berechnen. Setzen wir in dem Ausdrucke (153) $b = 0$, so geht er über in

$$\mu_0 = \frac{1}{8\pi c^2}\left\{\iint \frac{\varrho_0 \bar{\varrho}_0}{r}\, d\omega\, d\bar{\omega} + \iint \varrho_0 \bar{\varrho}_0 \frac{(\xi - \bar{\xi})^2}{r^3}\, d\omega\, d\bar{\omega}\right. .$$

Das erste dieser beiden Integrale ist die *elektrostatische Energie des Elektrons*

$$4\pi U = \iint \frac{\varrho_0 \bar{\varrho}_0}{r}\, d\omega\, d\bar{\omega}. \tag{161}$$

Das zweite Integral läßt sich wegen der zentrischen Symmetrie des Elektrons auch in den Formen

$$\iint \varrho_0 \bar{\varrho}_0 \frac{(\eta - \bar{\eta})^2}{r^3}\, d\omega\, d\bar{\omega}$$

und

$$\iint \varrho_0 \bar{\varrho}_0 \frac{(\zeta - \bar{\zeta})^2}{r^3}\, d\omega\, d\bar{\omega}$$

darstellen. Addieren wir diese drei Ausdrücke, so erhalten wir wieder $4\pi U$. Das zweite Integral ist also gleich $\frac{4\pi}{3} U$, und wir bekommen für die *Ruhmasse bei quasistationärer Bewegung*:

$$\mu_0 = \frac{2}{3c^2} U. \tag{162}$$

Ist das Elektron speziell eine homogen geladene Kugel vom Radius R, so ergibt sich:

$$\mu_0 = \frac{1}{5\pi} \frac{e^2}{R c^2}, \tag{163}$$

wo e die gesamte Ladung bedeutet.

Dieser Ausdruck stimmt mit dem von allen anderen Theorien gegebenen Werte überein.[1])

---

1) Vgl. z. B. M. Abraham, Theorie d. Elektrizität 2. 2. Aufl. p. 179, Formel (117c). Dort ist eine andere Einheit zugrunde gelegt; unsere Formel (163) geht in die Abrahamsche

$$\mu_0 = \frac{4}{5} \frac{e^2}{R c^2}$$

über, wenn man e durch $\sqrt{4\pi}\, e$ ersetzt.

Ist die Bewegung nicht mehr quasistationär, so hat man den allgemeinen Ausdruck (153) für μ zu benutzen. Man wird dann μ nach Potenzen von b entwickeln:

(164) $$\mu = \mu_0 + b\,\mu_1 + b^2\,\mu_2 + \dots$$

Wir beweisen nun, daß der Koeffizient μ_1 von b gleich Null ist. Man findet nämlich für ihn folgenden Ausdruck:

$$\mu_1 = -\frac{1}{16\,\pi\,c^2}\int\!\!\int\!\!\int \varrho_0\,\bar{\varrho}_0\,\frac{(\xi + \bar{\xi})\,(r^2 + (\xi - \bar{\xi})^2)}{r^3}\,d\omega\,d\bar{\omega}.$$

Da nun die Ladung des Elektrons in konzentrischen Schichten verteilt ist, so entspricht jedem Wertsystem ξ, η, ζ; $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ ein anderes $-\xi$, η, ζ; $-\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, für das der Integrand den entgegengesetzten Wert annimmt. Folglich ist $\mu_1 = 0$.

Ferner findet man:

(165) $$\begin{cases} \mu_2 = -\dfrac{1}{32\,\pi\,c^6}\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int \varrho_0\,\bar{\varrho}_0 \left\{3\,r + 2\,\dfrac{\xi^2 + \bar{\xi}^2 + 6\,\xi\,\bar{\xi}}{r} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{(\xi - \bar{\xi})^2\,(3\,\xi^2 + 3\,\bar{\xi}^2 + 10\,\xi\,\bar{\xi})}{r^3}\right\} d\omega\,d\bar{\omega}\,. \end{cases}$$

Dieser Wert ist außerordentlich klein gegenüber dem Werte von μ_0; denn während dieser für abnehmenden Radius R des Elektrons gegen unendlich konvergiert, konvergiert μ_2 wie R gegen Null. Ferner hat μ_2 die sechste Potenz der Lichtgeschwindigkeit im Nenner. Wir können daher sagen:

In der Reihe für die Ruhmasse

(166) $$\mu = \mu_0 + b^2\,\mu_2 + \dots$$

ist der Koeffizient von μ_2 gegen μ_0 so außerordentlich klein, daß bereits das in der Beschleunigung quadratische Glied in keinem Falle bei irgend einer Beobachtung merklich werden kann.

Demnach kann man die Ruhmasse in allen praktischen Fällen als Konstante ansehen. Ihr Wert ist durch den Ausdruck (162) für μ_0 gegeben.

Damit sind die Grundzüge der Dynamik des geradlinig bewegten Elektrons auf elektromagnetischer Basis gegeben. Natürlich erweitert sich der Gültigkeitsbereich der Theorie sofort durch die Überlegung, daß sich den geradlinigen Bewegungen irgend eine gleichförmige Translation in beliebiger

Richtung superponieren läßt; denn das läuft ja nur auf den Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen mit Hilfe einer Lorentztransformation hinaus, wobei unsere Bewegungsgleichungen invariant sind. *Die Theorie umfaßt daher die Ablenkung der Elektronen durch elektrische Felder, die irgend eine Richtung zu ihrer Geschwindigkeit haben und örtlich und zeitlich nicht zu rapide wechseln. Dagegen gilt sie nicht unmittelbar für die magnetische Ablenkung*; doch erkennt man leicht, daß für quasistationäre Bewegungen auch die magnetische Ablenkung von der Theorie wiedergegeben wird.

(Eingegangen 13. Juni 1909).