

**4. *Diffraction und Reflexion,*
abgeleitet aus den Maxwell'schen Gleichungen;
*von W. v. Ignatowsky.***

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, einen stetigen Übergang von den Maxwell'schen Gleichungen zu den Diffraktions- bez. Reflexionserscheinungen zu schaffen. Diesbezüglich ging ich von einem allgemeinen Integral aus, welches dem Huyghensschen Prinzip entspricht, aber in strenger Weise aus den Maxwell'schen Gleichungen abgeleitet wurde. Durch Spezialisierung (§ 2) für zylindrische Körper ist das Integral bedeutend vereinfacht worden.

Auch hier wie bei dem Huyghensschen Prinzip sind gewisse Annahmen bezüglich der Oberflächenwerte nötig, um zu bestimmten Lösungen zu gelangen. Diese Annahmen, die wir einführen (§ 4), sind Folgerungen der Maxwell'schen Theorie und der Größenverhältnisse zwischen den Dimensionen der beugenden bez. reflektierenden Körper und der Wellenlänge λ der einfallenden Welle. Als letztere setzten wir eine Lichtwelle voraus. Die Erörterungen der beiden ersten Paragraphen und teilweise des § 3 sind aber für beliebige Wellenlängen gültig.

Die Intensität der Lichtstrahlung wurde auf Grund des Poyntingschen Satzes berechnet und nicht mit Hilfe des Quadrates der elektrischen Kraft. Daß diese beiden Berechnungsarten zu verschiedenen Resultaten führen, wird in § 5 gezeigt.

Speziell in der vorliegenden Arbeit wird die Reflexion an einer Ebene und die Diffraction an einem Draht genauer untersucht. Die Behandlung der Diffraction an anderen Körpern bez. der Reflexion bleibt einer weiteren Arbeit vorbehalten.

Die Bezeichnungen entsprechen den üblichen Bezeichnungen der Vektoranalysis. (Vgl. z. B. Föppl-Abraham, Einführung in die Maxwell'sche Theorie.) Dementsprechend bedeuten i, j, k die Einheitsvektoren längs den Achsen X, Y, Z .

§ 1. Das allgemeine Integral der Maxwell'schen Gleichungen.

In meiner früheren Arbeit¹⁾ habe ich schon auf ein derartiges Integral hingewiesen, möchte aber hier die allgemeinere Form desselben hinschreiben, aus welcher das zitierte Integral abgeleitet wurde.²⁾ Diese Form ist für die Berechnung der Diffraktionserscheinungen am geeignetsten.

Es sei K ein Raum, welcher durch die Oberfläche S begrenzt ist. In diesem Raum K sollen keine Diskontinuitäten der elektrischen bez. der magnetischen Kräfte \mathfrak{E} und \mathfrak{H} vorkommen. Dasselbe soll auch für die ersten und zweiten Derivierten der Komponenten von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} längs den Koordinatenachsen gelten. Außerdem sollen in K die Dielektrizitätskonstante ϵ und Leitfähigkeit σ konstant sein.

Wir erhalten dann für einen Punkt P innerhalb des Raumes K , für die elektrische Kraft \mathfrak{E} , folgenden Ausdruck:

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} = & -\frac{1}{4\pi} \int_K \frac{1}{r} \cdot \left(4\pi\sigma \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{\epsilon-1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} \right) d\omega \\ & -\frac{1}{4\pi c} \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{V} \nabla \lg r \mathcal{V} n \mathfrak{E} \cdot d\omega \\ & -\frac{1}{4\pi} \int_S \nabla \frac{1}{r} \cdot \mathfrak{E} n d\omega + \frac{1}{4\pi} \int_S \mathcal{V} \nabla \frac{1}{r} \mathcal{V} n \mathfrak{E} d\omega \\ & + \frac{1}{4\pi c} \int_S \nabla \lg r \cdot \frac{\partial n \mathfrak{E}}{\partial t} d\omega + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} \mathcal{V} n \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} d\omega. \end{aligned} \right.$$

$t = t - \frac{r}{c}$

1) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 18. p. 505. 1905.

2) Die allgemeinste Form des Integrals werde ich bei einer anderen Gelegenheit mitteilen.

Hier bedeuten:

c = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum,

∇ = Gradient eines Skalars,

V = Vektorprodukt,

n = Einheitsvektor längs der äußeren Normale zu S ,

dx und $d\omega$ = Raum- bez. Flächenelement,

r = Entfernung vom Aufpunkt P bis zu den obigen Elementen.

Die Permeabilität μ ist gleich 1 angenommen.

In den Integralen muß vor der Integration statt t , $t - r/c$ gesetzt werden.

Alle Größen sind im absoluten elektromagnetischen Maßsystem ausgedrückt.

Die Ableitung von (1) setzt voraus, daß P innerhalb von S liegt. Liegt P außerhalb von S , so ist $\mathfrak{M} = 0$, falls wir mit \mathfrak{M} die rechte Seite von (1) bezeichnen.

Haben wir n Körper und liegt P außerhalb derselben, so ist für alle Körper:

$$(2) \quad \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_3 = \dots \mathfrak{M}_n = 0.$$

Wir nehmen jetzt $K = \infty$ an und setzen voraus, daß in K n Körper mit den entsprechenden Konstanten ϵ und σ verteilt sind. Die äußere Begrenzung dieses Raumes setzt sich jetzt zusammen: erstens aus einer unendlich weit vom Punkte P entfernten Oberfläche, auf welcher also \mathfrak{E} und \mathfrak{H} verschwinden, und zweitens aus den n Oberflächen der einzelnen Körper. Bezeichnen wir für diesen Fall die rechte Seite von (1) mit \mathfrak{M}_0 , so folgt nach (2):

$$(3) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \dots \mathfrak{M}_n.$$

Zieht man jetzt in Betracht, daß n in \mathfrak{M}_0 die innere Normale, und in $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots \mathfrak{M}_n$ die äußere Normale zu den Körpern darstellt und daß die tangentialen Komponenten von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} an den Oberflächen der Körper kontinuierlich sind, so bekommt man nach wirklicher Ausrechnung von (3) unmittelbar das auf p. 505 meiner Arbeit unter (2a) angeführte Integral. Wir sehen demnach, daß dieses Integral nur eine Abart von (1) ist. Für technische Zwecke ist das zweite Integral geeigneter, für Schwingungserscheinungen und für das folgende, wie schon oben bemerkt, das Integral (1).

Wir gehen jetzt zu einigen speziellen Anwendungen von (1) über.

§ 2. Spezialisierung des allgemeinen Falles.

Wir machen jetzt folgende Voraussetzungen:

1. Der Raum $K = \infty$ bestehe aus Luft ($\varepsilon = 1, \mu = 1, \sigma = 0$).
2. Alle im Raume K befindlichen Körper sind absolut reflektierend und unmagnetisch ($\sigma = \infty, \mu = 1$).
3. Alle Körper sind durch Zylinderflächen begrenzt, deren Erzeugende unendlich lang und parallel der Z -Achse sind.
4. Die magnetische bez. elektrische Kraft der einfallenden Welle sollen unabhängig von der z -Koordinate sein, d. h. als einfallende Welle nehmen wir eine Zylinderwelle an.
5. Die einfallende und dementsprechend auch die reflektierte Welle sollen periodisch in bezug auf die Zeit sein. Wir bezeichnen im folgenden die Periode durch T und $2\pi/T$ durch ω .

Infolge obiger Voraussetzungen erhalten wir aus (1) § 1:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}_1 + \frac{e^{i\omega t} i\omega}{4\pi c} \int_S \nabla \lg r \cdot n \mathfrak{E}' e^{-\frac{i\omega r}{c}} d\omega \\ &\quad - \frac{e^{i\omega t}}{4\pi} \int_S \nabla \frac{1}{r} \cdot n \mathfrak{E}' e^{-\frac{i\omega r}{c}} d\omega \\ &\quad + \frac{e^{i\omega t} i\omega}{4\pi} \int_S \frac{e^{-\frac{i\omega r}{c}}}{r} \mathcal{V} n \mathfrak{S}' d\omega, \end{aligned} \right.$$

wo \mathfrak{E}' und \mathfrak{S}' sich bestimmen aus:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}' e^{i\omega t}, \\ \mathfrak{S} &= \mathfrak{S}' e^{i\omega t} \end{aligned} \right.$$

und \mathfrak{S}_1 bez. \mathfrak{E}_1 die magnetische bez. elektrische Kraft der einfallenden Welle bedeuten.

Wir zerlegen jetzt alle magnetischen bez. elektrischen Kräfte in zwei Komponenten: eine parallel der Z -Achse und die andere senkrecht dazu und unterscheiden sie durch die Indizes z und m .

Beachten wir, daß $d\omega = dz ds$ ist, wo ds ein Linienelement längs der positiven Richtung (im Uhrzeigersinne, falls

wir längs der Z -Achse schauen) der Schnittkurve der XY -Ebene mit den Zylinderflächen bedeutet, und daß

$$\nabla \lg r = \frac{\mathbf{r}_0}{r}$$

und

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}_0}{r^2}$$

sind, wo \mathbf{r}_0 der Einheitsvektor längs r bedeutet, vom Aufpunkte aus gerechnet, so erhalten wir aus (1)

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}_z + \mathfrak{E}_m = \mathfrak{E}_{1z} + \frac{e^{i\omega t} i\omega}{4\pi} \int_s^{-\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{i\omega r}{c}}}{r} \mathcal{V} n \mathfrak{S}'_m ds dz \\ &+ \mathfrak{E}_{1m} + \frac{i\omega e^{i\omega t}}{4\pi c} \int_s^{-\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{r}_0 \cdot n \mathfrak{E}'_m}{r} e^{-\frac{i\omega r}{c}} ds dz \\ &+ \frac{e^{i\omega t}}{4\pi} \int_s^{-\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{r}_0 \cdot n \mathfrak{E}'_m}{r^2} e^{-\frac{i\omega r}{c}} ds dz \\ &+ \frac{e^{i\omega t} i\omega}{4\pi} \int_s^{-\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{i\omega r}{c}}}{r} \mathcal{V} n \cdot \mathfrak{S}'_z ds dz. \end{aligned} \right.$$

Wir legen jetzt den Aufpunkt in die XY -Ebene, was die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt, und bezeichnen durch R die Entfernung vom Aufpunkt bis zu einem in der XY -Ebene liegenden Element ds . Dann ist

$$r^2 = R^2 + z^2.$$

Infolge der Symmetrie um die XY -Ebene erhalten wir statt der Integrale 2 und 3 in (3) folgenden Ausdruck:

$$(4) \left\{ \begin{aligned} &\frac{2 i\omega e^{i\omega t}}{4\pi c} \int_s 0 \int_0^{\infty} \frac{\mathfrak{R}_0 \cdot R n \mathfrak{E}'_m}{r^2} e^{-\frac{i\omega r}{c}} ds dz \\ &+ \frac{2 e^{i\omega t}}{4\pi} \int_s 0 \int_0^{\infty} \frac{\mathfrak{R}_0 \cdot R n \mathfrak{E}'_m}{r^3} e^{-\frac{i\omega r}{c}} ds dz = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial R}, \end{aligned} \right.$$

wo \mathfrak{M} nichts anderes ist als:

$$(5) \quad \mathfrak{M} = \frac{2 e^{i\omega t}}{4\pi} \int_s \int_0^\infty \frac{\mathfrak{R}_0 \cdot n \mathfrak{G}'_m}{r} e^{-\frac{i\omega r}{c}} ds dz$$

und \mathfrak{R}_0 den Einheitsvektor längs R bedeutet. Bei der Differentiation von \mathfrak{M} in (4) ist \mathfrak{R}_0 und z als konstant und der Aufpunkt als beweglich angenommen.

Bezeichnen wir durch φ' die Komponente der magnetischen Kraft längs s , durch ζ' den Tensor von \mathfrak{G}'_z und durch \mathfrak{s}_0 den Einheitsvektor längs s , so ist:

$$(6) \quad \begin{cases} \nabla n \mathfrak{G}'_m = -\mathfrak{f} \cdot \varphi', \\ \nabla n \mathfrak{G}'_z = \mathfrak{s}_0 \zeta', \end{cases}$$

wobei berücksichtigt werden muß, daß n hier die innere Normale zu den Körpern darstellt.

Auf Grund von (4), (5), (6) und (4) A p. 506¹⁾ erhalten wir statt (3):

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}_z + \mathfrak{E}_m = \mathfrak{E}_{1z} + \frac{\mathfrak{f} \cdot i\omega e^{i\omega t}}{2\pi} \int_s Q_0(Rp) \varphi' ds \\ &+ \mathfrak{E}_{1m} - \frac{p e^{i\omega t}}{2\pi} \int_s n \mathfrak{G}'_m \cdot \mathfrak{R}_0 \cdot Q_1(Rp) ds \\ &- \frac{i\omega e^{i\omega t}}{2\pi} \int_s \zeta' \cdot Q_0(Rp) \mathfrak{s}_0 ds, \end{aligned} \right.$$

wo

$$p = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

ist und λ die Wellenlänge bedeutet.

Für die magnetische Kraft erhalten wir aus (7) infolge der bekannten Beziehung zwischen \mathfrak{H} und \mathfrak{E}

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{E},$$

1) Der Buchstabe A bei einem Zitat bedeutet den Hinweis auf meine frühere oben zitierte Arbeit in den Annalen.

und falls wir berücksichtigen, daß bei der Differentiation der Aufpunkt bewegt wird, folgenden Ausdruck:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{S} &= \mathfrak{S}_z + \mathfrak{S}_m = \mathfrak{S}_{1z} + \frac{e^{i\omega t} p}{2\pi} \int_s \zeta' \cdot Q_1(Rp) \mathcal{V} \mathfrak{R}_0 \mathfrak{s}_0 \cdot ds \\ &+ \mathfrak{S}_{1m} - \frac{e^{i\omega t} p}{2\pi} \int_s \varphi' \cdot Q_1(Rp) \mathcal{V} \mathfrak{R}_0 \mathfrak{t} \cdot ds. \end{aligned} \right.$$

Aus (7) und (8) folgt weiter:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_z &= \mathfrak{E}_{1z} + \frac{\mathfrak{t} i \omega e^{i\omega t}}{2\pi} \int_s Q_0(Rp) \varphi' ds, \\ \mathfrak{S}_m &= \mathfrak{S}_{1m} - \frac{p e^{i\omega t}}{2\pi} \int_s \varphi' \cdot Q_1(Rp) \mathcal{V} \mathfrak{R}_0 \mathfrak{t} \cdot ds, \end{aligned} \right.$$

und

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_m &= \mathfrak{E}_{1m} - \frac{p e^{i\omega t}}{2\pi} \int_s n \mathfrak{E}'_m \cdot \mathfrak{R}_0 \cdot Q_1(Rp) ds \\ &- \frac{i \omega e^{i\omega t}}{2\pi} \int_s \zeta' \cdot \mathfrak{s}_0 \cdot Q_0(Rp) ds, \\ \mathfrak{S}_z &= \mathfrak{S}_{1z} + \frac{p e^{i\omega t}}{2\pi} \int_s \zeta' \cdot Q_1(Rp) \mathcal{V} \mathfrak{R}_0 \mathfrak{s}_0 \cdot ds. \end{aligned} \right.$$

Der Ausdruck (9) stimmt vollständig mit dem Ausdruck (18) A p. 509 überein, welchen wir durch direkte Lösung der Maxwell'schen Gleichung für einen absolut reflektierenden Draht gefunden haben. Wir sehen aber, daß (9) und auch (10) überhaupt allgemein gültig sind für alle bei den Voraussetzungen 1 bis 5 möglichen Fälle, z. B. bei einem Gitter, Spalt, Halbebene etc.

Aus der Form von (9) und (10) sehen wir, daß diese beiden Ausdrücke zwei voneinander unabhängige Systeme darstellen und infolgedessen separat behandelt werden können. Wir benutzen dies und wollen im folgenden nur das System (9) näher untersuchen, also voraussetzen, daß

$$\mathfrak{E}_{1m} = \mathfrak{S}_{1z} = 0$$

ist.

Wir können demnach die Indexe z und m fallen lassen, da bei unserer Annahme \mathfrak{E} stets parallel zur Z -Achse ist und \mathfrak{H} senkrecht dazu.

§ 3. Reflexion an einer Ebene und Einführung weiterer Annahmen.

Wir nehmen eine absolut reflektierende unendlich große Ebene senkrecht zur XY -Ebene an unter beliebigem Winkel zur X -Achse.

Bezeichnen wir durch \mathfrak{E}_{1n} und \mathfrak{H}_{1n} die zur Ebene normalen Komponenten der elektrischen bez. magnetischen Kraft einer beliebigen einfallenden Welle in der Ebene selbst und durch \mathfrak{E}_{1t} und \mathfrak{H}_{1t} die entsprechenden tangentialen Komponenten, so erhalten wir für die reflektierten Komponenten, welche wir durch den Index 2 unterscheiden:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_{2t} = -\mathfrak{E}_{1t}, \\ \mathfrak{H}_{2n} = -\mathfrak{H}_{1n}. \end{array} \right.$$

Da aber die Ebene eine Symmetrieebene in bezug auf die Lage der Schwingungszentren, bez. Schwingungslinien wie in unserem Falle von Zylinderwellen, ist, da die reflektierenden Wellen von Schwingungszentren zu kommen scheinen, deren Lagen die Spiegelbilder der Schwingungszentren der einfallenden Wellen sind, so folgt daraus und aus (1) § 2

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_{2n} = \mathfrak{E}_{1n}, \\ \mathfrak{H}_{2t} = \mathfrak{H}_{1t}. \end{array} \right.$$

Deshalb ist die gesamte tangentielle magnetische Kraft in der Ebene selbst gleich:

$$(3) \quad \mathfrak{H}_t = \mathfrak{H}_{1t} + \mathfrak{H}_{2t} = 2\mathfrak{H}_{1t}$$

und die gesamte normale elektrische Kraft

$$(4) \quad \mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}_{1n} + \mathfrak{E}_{2n} = 2\mathfrak{E}_{1n}.$$

Wir kehren wieder zu den am Ende des vorigen Paragraphen gemachten Voraussetzungen, d. h.

$$\mathfrak{E}_{1m} = \mathfrak{H}_{1z} = 0,$$

zurück, nehmen die reflektierende Ebene senkrecht zur X -Achse an und lassen dieselbe durch den Koordinatenanfang gehen. Die

einfallende Welle sei eine plane ebene Welle, welche sich in der negativen Richtung der X -Achse bewegt.

Dann ist

$$(5) \quad \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{f} A e^{i(\omega t + p x)}$$

und

$$(6) \quad \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{j} \cdot \frac{A p}{\omega} e^{i(\omega t + p x)},$$

wo A die Amplitude der elektrischen Kraft für $x = 0$ ist.

Aus (3), (6) und (9) § 2 folgt:

$$(7) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{f} \cdot A e^{i(\omega t + p x)} + \mathfrak{f} \cdot \frac{A p i}{\pi} e^{i \omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_0(p R) dy,$$

oder wegen der Symmetrie bezüglich der ZX -Ebene:

$$(7a) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{f} \cdot A e^{i(\omega t + p x)} + \mathfrak{f} \cdot \frac{2 A p i e^{i \omega t}}{\pi} \int_0^{\infty} Q_0(p R) dy.$$

Durch direkte Lösung der Maxwell'schen Gleichungen für unseren Fall hätten wir für einen Punkt auf der positiven Seite der X -Achse:

$$(8) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{f} \cdot A e^{i(\omega t + p x)} - \mathfrak{f} \cdot A e^{i(\omega t - p x)}.$$

Durch Vergleich dieses Ausdruckes mit (7a) erhalten wir unmittelbar:

$$(9) \quad \int_0^{\infty} Q_0(p R) dy = \frac{i \pi}{2 p} \cdot e^{-i p x}.$$

Die magnetische Kraft berechnet sich aus (9) § 2 folgendermaßen. Die Summe der normalen Komponente von $\mathcal{V} \mathfrak{H}_0 \mathfrak{f}$ für zwei gleiche und entgegengesetzte y ist Null. Die entsprechende Summe der tangentialen Komponenten ist

$$- 2 \mathfrak{j} \cdot \cos(x R) = + 2 \mathfrak{j} \cdot \frac{x}{R}.$$

Demnach folgt

$$(10) \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{j} \cdot \frac{A x}{\omega} e^{i(\omega t + p x)} - \mathfrak{j} \cdot \frac{2 A p^2 e^{i \omega t}}{\pi \omega} \int_0^{\infty} \frac{Q_1(p R) x}{R} dy.$$

Andererseits erhalten wir aus (8)

$$(11) \quad \mathfrak{S} = j \cdot \frac{A x}{\omega} e^{i(\omega t + p x)} + j \cdot \frac{A p}{\omega} e^{i(\omega t - p x)}.$$

Ein Vergleich von (10) und (11) liefert uns wieder

$$(12) \quad \int_0^{\infty} \frac{x}{R} \cdot Q_1(p R) dy = -\frac{\pi}{2p} e^{-i p x_1}.$$

Wir hätten (12) direkt auch aus (9) durch Differentiation nach x erhalten können. Um eine Anwendung von (9) § 2 zu machen, schlugen wir den anderen Weg vor.

Der Ausdruck (9) zeigt wieder einmal die Richtigkeit des Integrals (9), § 2 und infolgedessen diejenige von (1) § 1, weil (9) auch direkt abgeleitet werden kann.¹⁾

Hier möge folgende wichtige Bemerkung folgen. Die linke Seite von (9) ändert sich nicht, ob wir x positiv oder negativ voraussetzen, da $R^2 = x^2 + y^2$ ist. Infolgedessen darf sich der Wert der rechten Seite von (9) auch nicht ändern; d. h. auf der rechten Seite von (9) müssen wir für x seinen absoluten Wert einsetzen, was auch durch den Index bei x hervorgehoben worden ist.

Stellen wir uns vor, daß wir statt der Ebene nur eine Halbebene hätten, die bis zur X -Achse ginge, und der Aufpunkt befände sich auf der negativen Seite der X -Achse. In diesem Falle kämen die Ausdrücke (9) § 2 in Betracht. Bei Ergänzung dieser Halbebene zu einer ganzen müßten diese Ausdrücke in (7a) und (10) übergehen und $\mathfrak{E} = \mathfrak{S} = 0$ werden. Auf Grund obiger Bemerkung erhalten wir aber tatsächlich

$$\mathfrak{E} = \bar{x} \cdot A e^{i(\omega t - p x_1)} - \bar{x} \cdot A e^{i(\omega t - p x_1)} = 0$$

und infolgedessen auch $\mathfrak{S} = 0$.

Bis jetzt haben wir noch nichts über die Größenordnung der einfallenden Wellenlänge λ angenommen. Wir wollen dies einholen und setzen voraus, daß die Querschnitte bez. die Krümmungsradien der Körper, die unter die Voraussetzungen des § 2 fallen, sehr groß sind im Vergleich zur Wellenlänge,

1) Z. B. aus dem Integral (12), p. 255 bei Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen.

und zwar wollen wir Lichtwellen als einfallende Wellen annehmen.

Auf Grund dieser Voraussetzung wollen wir zwei Annahmen machen, die uns die Lösung vereinfachen, bez. überhaupt ermöglichen, und gestatten ziemlich gute Annäherungswerte für \mathcal{E} bez. \mathcal{H} zu berechnen.

Diese Annahmen sind folgende:

1. Wir wollen die Gültigkeit von (3) nicht nur für eine Ebene, sondern für beliebige Körper annehmen, solange die Körper, wie oben bemerkt, groß im Vergleich zu λ sind.

2. Das Experiment zeigt, daß die Lichterregung auf dem schattenseitigen Teile der Oberfläche der Körper Null ist. Deshalb wollen wir in (9) § 2 die Integration nur über die belichteten Teile der Körper ausdehnen.

Aus der ersten Annahme folgt, daß dieselbe nur gültig ist, falls die Körper eine solche Form haben, daß man annehmen kann, daß die von denselben reflektierten Wellen nicht wieder zu den Körpern gelangen. Dies ist anzunehmen z. B. bei einem Draht, begrenztem Parabolspiegel etc.

Auf Grund dieser Annahmen wollen wir jetzt die Diffraktionserscheinungen an einem Draht berechnen und mit der Beobachtung vergleichen.

§ 4. Diffraction an einem Draht.

Wir wollen als Lichtquelle eine leuchtende Linie annehmen, welche sich praktisch durch einen engen leuchtenden Spalt realisieren läßt.

Als einfallende Welle nehmen wir eine Zylinderwelle an, und zwar unabhängig vom Winkel um den Spalt herum. Laut unserer Arbeit *A* erhalten wir:

$$(1) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_1 = f \cdot B e^{i(\omega t + p s - \frac{3\pi}{4})} Q_0(p r_1), \\ \psi_1 = -\frac{B p}{i \omega} e^{i(\omega t + p s - \frac{3\pi}{4})} Q_1(p r_1), \end{cases}$$

wo \mathcal{E}_1 die einfallende elektrische Kraft ist, B die reelle Amplitude, r_1 die Entfernung vom Aufpunkt bis zum Spalt, und ψ_1 die magnetische Kraft senkrecht zu r_1 und positiv

gerechnet im entgegengesetzten Sinne der Drehung des Uhrzeigers um den Spalt. Der Draht, an welchem die auffallende Welle reflektieren soll, liege parallel zum Spalt in einer Entfernung s bis zur Achse des Drahtes, welcher mit der Z -Achse zusammenfallen soll. Die X -Achse ist zum Spalt gerichtet.

Da r_1 und s groß im Vergleich zu λ sein sollen, so können wir schreiben

$$Q_0(p r_1) = i \sqrt{\frac{\pi}{2 p r_1}} e^{-i(p r_1 - \frac{\pi}{4})},$$

$$Q_1(p r_1) = -\sqrt{\frac{\pi}{2 p r_1}} e^{-i(p r_1 - \frac{\pi}{4})}$$

und infolgedessen, da $i = e^{i\pi/2}$ ist:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{f} \cdot \frac{e^{i\omega t} \cdot B}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{r_1}} e^{-i p (r_1 - s)}, \\ \psi_1 = -\frac{B p \cdot e^{i\omega t}}{2 \omega} \sqrt{\frac{\lambda}{r_1}} e^{-i p (r_1 - s)}, \end{cases}$$

für $r_1 = s$, also im Koordinatenanfang, ist

$$(3) \quad \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{f} \cdot e^{i\omega t} \cdot \frac{B}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{r_1}} = \mathfrak{f} \cdot A' e^{i\omega t}.$$

A' ist hierbei reell, weswegen wir auch in (1) die Phase $p s - 3\pi/4$ eingeführt hatten.

Infolge der Lage des Spaltes bezüglich des Drahtes wird die positive Richtung von ψ_1 am Drahte, bei der Voraussetzung, daß s groß zum Durchmesser $2g$ des Drahtes ist, mit der negativen Richtung der Y -Achse zusammenfallen und wir können deshalb für die Oberfläche des Drahtes annehmen:

$$(4) \quad \varphi' = \frac{B p}{\omega} \sqrt{\frac{\lambda}{r_1}} \cdot \cos \varphi e^{-i p (r_1 - s)},$$

wo φ den Winkel zwischen der positiven Richtung der X -Ache und dem Radius g bedeutet.

Wir nehmen jetzt die Gleichungen (9) § 2 zur Hilfe, in welchen wir wieder statt R , r , statt s , S schreiben, die Indizes z und m fortlassen und erhalten:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{f} \cdot B e^{i\omega t} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{r_1}} e^{-ip(r_1-s)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{p\lambda}{4\pi} e^{\frac{i\pi}{4}} \int_S \frac{e^{-ip(r+r_1-s)} \cos \varphi \cdot dS}{\sqrt{r \cdot r_1}} \right], \\ \mathfrak{H} &= B \cdot e^{i\omega t} \left[-V r_{10} \mathfrak{f} \cdot \frac{p}{2\omega} \sqrt{\frac{\lambda}{r_1}} e^{-ip(r_1-s)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{pe^{\frac{i\pi}{4}}}{2\omega} \int_S \frac{e^{-ip(r+r_1-s)} V r_0 \mathfrak{f}_0 \cos \varphi dS}{\sqrt{r \cdot r_1}} \right], \end{aligned} \right.$$

wo r_{10} der Einheitsvektor längs r_1 ist und r_0 derjenige längs r bedeuten. Bezeichnen wir durch R die Entfernung des Aufpunktes bis zur Achse des Drahtes und setzten R , r und r_1 groß zu g voraus, so können wir unter den Integralen in (5) statt $\sqrt{r \cdot r_1}$, $\sqrt{R s}$ schreiben und aus den Integralen herausheben. Aus demselben Grund können wir statt $V r_0 \mathfrak{f}$, $V \mathfrak{R}_0 \mathfrak{f}$ setzen und aus dem Integral herausheben. \mathfrak{R}_0 bedeutet den Einheitsvektor längs R .

Infolgedessen erhalten wir statt (5), da $dS = g d\varphi$ ist:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{f} \cdot B e^{i\omega t} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{r_1}} e^{-ip(r_1-s)} - \frac{p\lambda \cdot e^{\frac{i\pi}{4}}}{4\pi \sqrt{R s}} \cdot D \right], \\ \mathfrak{H} &= B \cdot e^{i\omega t} \left[-V r_{10} \mathfrak{f} \cdot \frac{p}{2\omega} \sqrt{\frac{\lambda}{r_1}} e^{-ip(r_1-s)} + \frac{V \mathfrak{R}_0 \mathfrak{f} \cdot p e^{\frac{i\pi}{4}}}{2\omega \sqrt{R s}} \cdot D \right] \end{aligned} \right.$$

wo

$$(7) \quad D = g \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-ip(r+r_1-s)} \cos \varphi \cdot d\varphi$$

bedeutet. Dabei sollte die Integration, laut der Annahme am Schluß des vorigen Paragraphen, nur längs des belichteten Teiles der Oberfläche des Drahtes ausgedehnt werden; da aber s groß zu g ist, so kann man mit genügender Annäherung von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$ integrieren, denn man vernachlässigt nur sehr kleine Oberflächenteile des Drahtes, bei welchen ohnehin $\cos \varphi$ annähernd Null ist.

Für die Oberfläche des Drahtes können wir mit großer Annäherung setzen:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = s + \frac{g^2}{4s} - g \cos \varphi - \frac{g^2}{4s} \cos 2\varphi \\ \text{und} \\ r = R + \frac{g^2}{4R} - g \cos(\varphi - \vartheta) - \frac{g^2}{4R} \cos 2(\varphi - \vartheta), \end{array} \right.$$

wo ϑ den Winkel zwischen der positiven Richtung der X -Achse und R bedeutet.

Wir wollen jetzt statt ϑ , $\pi - \varepsilon$ setzen und ε klein annehmen. Mit anderen Worten, wir wollen die Diffraktionserscheinungen auf der negativen Seite der X -Achse beobachten, also hinter dem Drahte im Sinne der Lichtbewegung, und zwar in kleinen Entfernungen von der X -Achse.

Setzen wir in (8) $\vartheta = \pi - \varepsilon$ und $\cos \varepsilon = \cos 2\varepsilon = 1$, so erhalten wir

$$(8a) \quad \left\{ \begin{array}{l} r + r_1 - s = R + \frac{g^2}{4} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{s} \right) - g \sin \varphi \cdot \sin \varepsilon \\ - \frac{g^2}{4} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{s} \right) \cos 2\varphi + \frac{g^2}{4R} \sin 2\varphi \cdot \sin 2\varepsilon. \end{array} \right.$$

Vernachlässigen wir endlich das letzte Glied, so können wir endgültig schreiben:

$$(9) \quad D = g \cdot e^{-ip a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{+ip g \sin \varphi \cdot \sin \varepsilon + ip b \cos 2\varphi \cdot \cos \varphi} \cdot d\varphi,$$

wo

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = R + \frac{g^2}{4} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{s} \right) \\ \text{und} \\ b = \frac{g^2}{4} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{s} \right) \end{array} \right.$$

sind.

Statt (9) können wir setzen:

$$(9a) \quad D = g \cdot e^{-ip R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{+ip g \sin \varphi \cdot \sin \varepsilon - 2ip b \sin^2 \varphi} d(\sin \varphi).$$

Dieses Integral läßt sich leicht umformen, und zwar:

$$(9b) \quad D = \frac{g\sqrt{\pi}}{2\sqrt{pb}} \cdot e^{-i(pR - b^2)} \int_n^u e^{-\frac{i\pi}{2} t^2} dt,$$

wo

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = + \sqrt{\frac{4pb}{\pi}} - l \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \\ n = - \sqrt{\frac{4pb}{\pi}} - l \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ \text{und} \\ l = \frac{pg \cdot \sin s}{2 \sqrt{2pb}} \end{array} \right.$$

sind.

Wir können aber annehmen:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} b = \frac{g^2(R+s)}{4Rs} = \frac{g^2 r_1}{4Rs} \\ \text{und} \\ \sin \varepsilon = \frac{d}{R}, \end{array} \right.$$

wo d die Entfernung des Aufpunktes von der X -Achse bedeutet. Dann folgt

$$(13) \quad D = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\lambda Rs}{r_1}} \cdot e^{-i(pR-l^2)} \int_n^u e^{-\frac{i\pi}{2}t^2} dt,$$

und

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = m - q; \quad n = -m - q, \\ m = g \sqrt{\frac{2r_1}{\lambda Rs}}; \quad q = d \sqrt{\frac{2s}{\lambda R r_1}}, \\ l^2 = \frac{\pi d^2 s}{\lambda R r_1} = \frac{q^2 \pi}{2}. \end{array} \right.$$

Sind M und N reelle Größen, so können wir statt (13) auch schreiben:

$$(15) \quad D = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\lambda Rs}{r_1}} e^{-i(pR-l^2)} (M - iN),$$

wo

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = C(m - q) + C(m + q), \\ N = S(m - q) + S(m + q) \end{array} \right.$$

sind. Dabei sind C und S nichts anderes als die bekannten Fresnelschen Integrale zwischen den Grenzen 0 bis $m - q$, bez. $m + q$.

Wir wollen noch einmal zu dem Integral (7) dieses Paragraphen zurückkehren. Setzen wir dort statt $r + r_1$, A ,

wo Δ nichts anderes ist als die sogenannte optische Weglänge, so können wir schreiben:

$$(17) \quad D = \text{proportional zu } \int_S e^{-i p \Delta} \cos(\xi S) dS,$$

da s konstant ist.

Hätten wir aber statt des Drahtes einen anderen Zylinderkörper, z. B. einen parabolischen Zylinder, so kämen wir zu demselben Ausdruck (17). Befände sich außerdem der Aufpunkt im Bildpunkt des Spaltes, so wäre $\Delta = \text{const.}$ und wir hätten dann

$$(18) \quad D = \text{proportional zu } \int_S \cos(\xi S) dS.$$

Dieses Integral hängt nur von der geometrischen Form der reflektierenden Körper und von der Lage des Spaltes zu den Körpern ab.

Aus obigen Erörterungen sieht man, wie es möglich ist, in ganz konsequenter Weise aus den allgemeinen Maxwell'schen Gleichungen zu den Begriffen der geometrischen Optik überzugehen.

Setzen wir jetzt in (6) die Werte von D und A' aus (15) und (3), so erhalten wir:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{f} \cdot A' e^{i\omega t} \left\{ e^{-i p (r_1 - s)} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\eta} (M - iN) \right\}, \\ \mathfrak{H} &= \frac{A' e^{i\omega t}}{c} \left\{ -V r_{10} \mathfrak{f} \cdot e^{-i p (r_1 - s)} + \frac{V R_0 \mathfrak{f} \cdot \sqrt{2}}{2} e^{i\eta} (M - iN) \right\} \end{aligned} \right.$$

wo

$$(20) \quad \eta = \frac{\pi}{4} - p R + l^2$$

ist.

§ 5. Berechnung des Energiestromes und der Energie.

Es seien gegeben zwei Vektoren:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}_0 e^{i(\omega t + p)} (f + ih), \\ \mathfrak{H} &= \mathfrak{H}_0 e^{i(\omega t + p)} (f_1 + ih_1), \end{aligned} \right.$$

wo f , h , \mathfrak{E}_0 und \mathfrak{H}_0 reelle Größen bedeuten.

Wir wollen jetzt das Produkt $V \mathfrak{E} \mathfrak{H}$ bez. $\mathfrak{E} \mathfrak{H}$ aus den reellen Teilen von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} und davon den Mittelwert während einer Periode bilden:

$$(2) \quad \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{V} \mathfrak{E} \mathfrak{S} \cdot dt, \quad \text{bez.} \quad \frac{1}{T} \int_0^T \mathfrak{E} \mathfrak{S} dt = \frac{1}{2} (f f_1 + h h_1).$$

Rechts muß noch der Faktor $\mathcal{V} \mathfrak{E}_0 \mathfrak{S}_0$ bez. $\mathfrak{E}_0 \mathfrak{S}_0$ eingeführt werden, je nachdem, ob das Vektorprodukt oder das skalare Produkt genommen wird. Zu demselben Ausdruck (2) kommen wir, falls wir in (1), z. B. bei \mathfrak{E} , statt i , $-i$ setzen, dann mit \mathfrak{S} multiplizieren vektoriell oder skalar, den imaginären Teil des Produktes weglassen und durch 2 dividieren.

Auf Grund des Poyntingschen Satzes und der Gleichungen (19) § 4 erhalten wir jetzt leicht den Mittelwert des Energiestromes \mathfrak{E} , welcher durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit fließt. Es ist

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} = & -\frac{A'^2}{8\pi c} \left\{ r_{10} + \frac{\Re_0}{2} (M^2 + N^2) \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{2}}{2} (\Re_0 + r_{10}) (M \cos \gamma + N \sin \gamma) \right\}, \end{aligned} \right.$$

wobei

$$(4) \quad \gamma = p(r_1 - s - R) + l^2 + \frac{\pi}{2}$$

ist.

Wir können aber setzen

$$(5) \quad r_1 - s - R = -\frac{d^2 s}{2R r_1}$$

und folglich ist laut (14) § 4

$$\gamma = \frac{\pi}{4}.$$

Da außerdem ε klein ist, so können wir $r_{10} = \Re_0 = i$ annehmen und bekommen deshalb endgültig

$$(6) \quad \mathfrak{E} = -\frac{i A'^2}{8\pi c} \left\{ 1 + \frac{(M^2 + N^2)}{2} - (M + N) \right\}.$$

Oder

$$(6a) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} = & -\frac{i A'^2}{8\pi c} \left\{ 1 + \frac{C^2(m-q) + S^2(m-q)}{2} + \frac{C^2(m+q) + S^2(m+q)}{2} \right. \\ & + C(m-q) \cdot C(m+q) + S(m-q) \cdot S(m+q) \\ & \left. - [C(m-q) + S(m-q)] - [C(m+q) + S(m+q)] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Der Differentialquotient von \mathfrak{E} nach d ist proportional zu $\sin \pi m q$. Deshalb werden unter anderem Maximas bez. Minimas von \mathfrak{E} für Werte von d vorkommen, bei welchen

$$(7) \quad q m = 0, 1, 2, 3 \dots$$

ist, wobei

$$(8) \quad qm = \frac{2gd}{\lambda R}$$

ist.

Für die geometrische Schattengrenze haben wir:

$$(9) \quad d = \frac{r_1 g}{s}$$

und folglich

$$(10) \quad m = g \sqrt{\frac{2r_1}{\lambda R s}} = q.$$

Demnach folgt für diesen Fall:

$$(11) \quad \mathfrak{E}_s = -\frac{i \cdot A'^2}{8\pi c} \left\{ 1 + \frac{C^2(2m) + S^2(2m)}{2} - [C(2m) + S(2m)] \right\}.$$

Für $d=0$, also auf der X -Achse in der Mitte des geometrischen Schattens, berechnet sich der Energiestrom, da $q=0$ ist, zu

$$(12) \quad \mathfrak{E}_0 = -\frac{i \cdot A'^2}{8\pi c} \left\{ 1 + 2[C^2(m) + S^2(m)] - 2[C(m) + S(m)] \right\},$$

und zwar wird \mathfrak{E}_0 immer ein Maximalwert sein.

Setzen wir

$$D = \alpha + i\beta,$$

wo α und β reell sind, so erhalten wir aus (6) § 4 folgenden Wert für den Energiestrom

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} = & -\frac{A'^2}{8\pi c} \left\{ r_{10} + \frac{\Re_0 \cdot r_1 \cdot (\alpha^2 + \beta^2)}{\lambda R s} \right. \\ & \left. - (\Re_0 + r_{10}) \sqrt{\frac{r_1}{\lambda R s}} \cdot (\alpha \cos \delta - \beta \sin \delta) \right\}, \end{aligned} \right.$$

wo

$$(14) \quad \delta = p(r_1 - s) + \frac{\pi}{4}$$

ist. Und dieser Wert (13) ist, wie auch (6) § 4, für beliebige Winkel δ gültig.

Wir gehen jetzt über zur Berechnung des Mittelwertes W der Energie in einem Volumenelement. Es folgt wieder aus (6) § 4 für den elektrischen Teil der Energie

$$(15) \quad W_1 = \frac{A'^2}{16\pi c^2} \left\{ 1 + \frac{r_1(\alpha^2 + \beta^2)}{\lambda R s} - 2 \sqrt{\frac{r_1}{\lambda R s}} (\alpha \cos \delta - \beta \sin \delta) \right\},$$

und für den magnetischen Teil

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} W_2 = \frac{A'^2}{16 \pi c^2} \left\{ 1 + \frac{r_1 (\alpha^2 + \beta^2)}{\lambda R s} \right. \\ \left. - \Re_0 r_{10} \cdot 2 \sqrt{\frac{r_1}{\lambda R s}} (\alpha \cos \delta - \beta \sin \delta) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Und die gesamte Energie ist

$$(17) \quad W = W_1 + W_2.$$

Vor dem Draht, also bei $\vartheta = 0$, ist $\Re_0 + r_{10} = 0$ und $\Re_0 r_{10} = -1$. In diesem Falle besteht der Energiestrom aus zwei Teilen. Der erste Teil kommt vom Spalt und der zweite vom Draht. Demnach erhalten wir, da hier $r_{10} = i$ ist,

$$(18) \quad \mathfrak{E} = - \frac{i A'^2}{8 \pi c} \left\{ 1 - \frac{r_1 (\alpha^2 + \beta^2)}{\lambda R s} \right\}$$

und

$$(19) \quad W = \frac{A'^2}{8 \pi c^2} \left\{ 1 + \frac{r_1 (\alpha^2 + \beta^2)}{\lambda R s} \right\}.$$

Hinter dem Draht, für $\varepsilon = 0$, ist $\Re_0 + r_{10} = 2$ und

$$(20) \quad \begin{aligned} W_1 &= W_2, \\ W &= 2 W_1 \end{aligned}$$

und

$$(21) \quad \mathfrak{E} = - i 2 c W_1.$$

Wir sehen, daß es nur für $\varepsilon = 0$ möglich ist, aus der Energie bez. Quadrat der elektrischen Kraft den Energiestrom zu berechnen. Identifizieren wir aber den Poyntingschen Strömungsvektor mit dem Lichtstrahl, so müssen wir immer mit dem Ausdruck (13) rechnen.

§ 6. Ausrechnung der gewonnenen Resultate.

Bei der Verwertung der gewonnenen Resultate kommt es hauptsächlich auf die Berechnung des Energiestromes \mathfrak{E} an, denn die Werte von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} an und für sich bieten wohl kaum ein Interesse. Dies ist hauptsächlich der Fall bei Lichtwellen, die wir gerade berücksichtigen.

Wir wollen also \mathfrak{E} berechnen laut (6), (6a), (11) und (12) § 5. Dabei wollen wir nur die Klammerwerte dieser Ausdrücke in Betracht ziehen, welche nichts anderes sind als die Verhältnisse der tatsächlich durchgegangenen Energie zu der-

jenigen, welche bei Abwesenheit des reflektierenden Drahtes durchgehen würde, denn diese letztere ist ja gleich

$$\frac{-r_{10} \cdot A'^2}{8 \pi e} \quad \text{bez.} \quad \frac{-i \cdot A'^2}{8 \pi e}.$$

Diese Klammernwerte wollen wir im folgenden schlechtweg Energie nennen und mit \mathfrak{E}' bezeichnen.

Zur Erleichterung der Berechnung von \mathfrak{E}' nach (6) und (6a) haben wir die Tab. I zusammengestellt. Dabei wurden die Werte der Fresnelschen Integrale weiter berechnet für die Argumente von 5,0 bis 8,5. Die ersten 50 Werte sind dem Handbuch d. Physik von Winkelmann, 2. Aufl. Bd. VI. p. 1054 entnommen.

Die vorletzte Kolumne stellt den Klammerwert von (12) § 5 dar, und die letzte denjenigen von (11) § 5. Da

$$m = g \sqrt{\frac{2 r_1}{\lambda R s}} = g \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{s} \right)}$$

ist, so vergrößert sich m bei konstantem g , λ und s , je näher wir dem Drahte kommen, dagegen verkleinert sich \mathfrak{E}'_0 ständig, wie wir aus der Tabelle ersehen. Das heißt bei konstantem g , λ und s wird das mittlere Maximum im geometrischen Schatten desto kleiner, je näher wir zum Draht kommen.

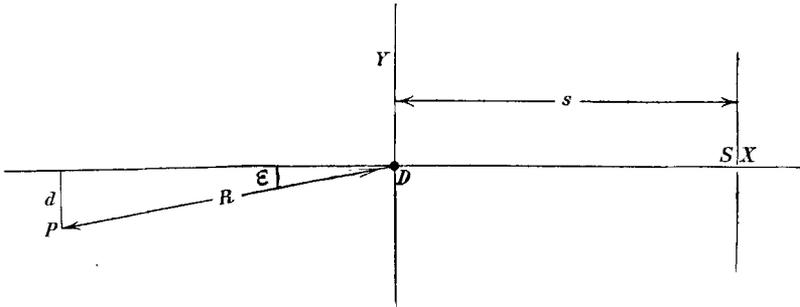


Fig. 1.

Für das Folgende sei noch auf die Fig. 1 hingewiesen, welche die Lagen des Aufpunktes P , des Spaltes S und des Drahtes D veranschaulicht. Die Figur stellt den Schnitt durch die Z -Achse dar und fällt mit der XY -Ebene zusammen.

Tabelle I.

u	$C(u)$	$\text{Log } C(u)$	$S(u)$	$\text{Log } S(u)$	$\frac{C^2(u) + S^2(u)}{2}$	$C(u) + S(u)$	\mathfrak{C}_0'	\mathfrak{C}'
0	0	$-\infty$	0	$-\infty$	0	0	1,0000	1,0000
0,1	0,0999	$\bar{2},999565$	0,0005	$\bar{4},698970$	0,0050	0,1004	0,8192	0,8159
0,2	0,1999	$\bar{1},900819$	0,0042	$\bar{3},623249$	0,0200	0,2041	0,6717	0,6487
0,3	0,2994	$\bar{1},476252$	0,0141	$\bar{2},149219$	0,0449	0,3135	0,5527	0,4833
0,4	0,3975	$\bar{1},599337$	0,0334	$\bar{2},528746$	0,0796	0,4309	0,4564	0,3201
0,5	0,4923	$\bar{1},692280$	0,0647	$\bar{2},810904$	0,1232	0,5570	0,3791	0,1820
0,6	0,5811	$\bar{1},764251$	0,1105	$\bar{1},043362$	0,1749	0,6916	0,3165	0,1114
0,7	0,6597	$\bar{1},819346$	0,1721	$\bar{1},235781$	0,2324	0,8318	0,2660	0,1454
0,8	0,7250	$\bar{1},859138$	0,2493	$\bar{1},396722$	0,2924	0,9723	0,2252	0,2667
0,9	0,7648	$\bar{1},883548$	0,3398	$\bar{1},531223$	0,3592	1,1046	0,1916	0,3710
1,0	0,7799	$\bar{1},892039$	0,4383	$\bar{1},641771$	0,4002	1,2182	0,1643	0,3465
1,1	0,7648	$\bar{1},883548$	0,5365	$\bar{1},729570$	0,4364	1,3013	0,1429	0,2144
1,2	0,7154	$\bar{1},854549$	0,6234	$\bar{1},794767$	0,4502	1,3388	0,1234	0,1713
1,3	0,6386	$\bar{1},805229$	0,6863	$\bar{1},836514$	0,4394	1,3249	0,1082	0,2380
1,4	0,5431	$\bar{1},734880$	0,7135	$\bar{1},853394$	0,4020	1,2566	0,0949	0,3269
1,5	0,4453	$\bar{1},648653$	0,6975	$\bar{1},843544$	0,3424	1,1428	0,0840	0,2046
1,6	0,3655	$\bar{1},562887$	0,6383	$\bar{1},805025$	0,2705	1,0038	0,0744	0,2251
1,7	0,2828	$\bar{1},510277$	0,5492	$\bar{1},739781$	0,2032	0,8730	0,0669	0,3203
1,8	0,2063	$\bar{1},526727$	0,4509	$\bar{1},654080$	0,1582	0,7572	0,0584	0,2138
1,9	0,1345	$\bar{1},596047$	0,3734	$\bar{1},572174$	0,1475	0,7679	0,0543	0,2466
2,0	0,4883	$\bar{1},688687$	0,3434	$\bar{1},535800$	0,1782	0,8317	0,0493	0,2937
2,1	0,5814	$\bar{1},764475$	0,3743	$\bar{1},573220$	0,2391	0,9557	0,0449	0,2004
2,2	0,6362	$\bar{1},803594$	0,4556	$\bar{1},658584$	0,3062	1,0918	0,0410	0,2023

Tabelle I (Fortsetzung).

u	$C(u)$	$\text{Log } C(u)$	$S(u)$	$\text{Log } S(u)$	$\frac{C^2(u) + S^2(u)}{2}$	$C(u) + S(u)$	\mathcal{C}_0'	\mathcal{C}'
2,3	0,6268	1,797129	0,5525	1,742382	0,3491	1,1793	0,0877	0,2107
2,4	0,5550	1,744293	0,6197	1,792181	0,3460	1,1747	0,0847	0,2869
2,5	0,4574	1,660296	0,6192	1,791831	0,2963	1,0766	0,0820	0,2206
2,6	0,3889	1,589838	0,5500	1,740363	0,2219	0,9389	0,0297	0,2840
2,7	0,3926	1,593950	0,4529	1,656002	0,1796	0,8455	0,0275	0,2161
2,8	0,4675	1,669782	0,3915	1,592782	0,1859	0,8590	0,0257	0,2908
2,9	0,5624	1,750045	0,4102	1,612996	0,2423	0,9726	0,0289	0,2185
3,0	0,6057	1,782258	0,4963	1,695744	0,3066	1,1020	0,0224	0,2782
3,1	0,5616	1,749427	0,5818	1,764774	0,3269	1,1434	0,0210	0,2476
3,2	0,4663	1,668665	0,5933	1,773274	0,2847	1,0596	0,0197	0,2282
3,3	0,4057	1,608205	0,5198	1,715418	0,2171	0,9250	0,0185	0,2851
3,4	0,4885	1,641970	0,4297	1,633165	0,1885	0,8682	0,0174	0,2377
3,5	0,5326	1,726401	0,4153	1,618362	0,2281	0,9479	0,0165	0,2284
3,6	0,5880	1,769377	0,4923	1,692230	0,2941	1,0803	0,0156	0,2780
3,7	0,5419	1,739919	0,5750	1,759668	0,3121	1,1169	0,0147	0,2628
3,8	0,4481	1,651375	0,5656	1,752509	0,2603	1,0137	0,0140	0,2236
3,9	0,4223	1,625621	0,4752	1,676876	0,2021	0,8975	0,0133	0,2363
4,0	0,4984	1,697578	0,4205	1,623766	0,2126	0,9189	0,0126	0,2708
4,1	0,5737	1,758685	0,4758	1,677424	0,2778	1,0495	0,0120	0,2759
4,2	0,5417	1,739759	0,5632	1,750663	0,3053	1,1049	0,0115	0,2531
4,3	0,4494	1,652633	0,5540	1,748510	0,2544	1,0034	0,0110	—
4,4	0,4383	1,641771	0,4623	1,664924	0,2029	0,9006	0,0105	—
4,5	0,5258	1,720821	0,4342	1,637690	0,2325	0,9600	0,0100	—

Tabelle I (Fortsetzung).

u	$C(u)$	$\text{Log } C(u)$	$S(u)$	$\text{Log } S(u)$	$\frac{C^2(u) + S^2(u)}{2}$	$C(u) + S(u)$	Φ_0'	Φ_1'
4,6	0,5672	1,753786	0,5162	1,712818	0,2941	1,0834	0,0096	—
4,7	0,4914	1,691485	0,5669	1,753506	0,2814	1,0583	91	—
4,8	0,4338	1,637290	0,4968	1,696182	0,2175	0,9306	88	—
4,9	0,5002	1,699144	0,4351	1,638589	0,2198	0,9353	84	—
5,0	0,5686	1,750971	0,4992	1,698275	0,2834	1,0638	81	—
5,1	0,4987	1,697889	0,5624	1,750045	0,2825	1,0611	78	—
5,2	0,4889	1,642366	0,4969	1,696269	0,2198	0,9358	75	—
5,3	0,5078	1,705693	0,4404	1,643847	0,2260	0,9482	72	—
5,4	0,5573	1,746089	0,5140	1,710963	0,2874	1,0713	70	—
5,5	0,4784	1,679791	0,5537	1,743275	0,2677	1,0821	67	—
5,6	0,4517	1,654850	0,4700	1,672098	0,2125	0,9217	65	—
5,7	0,5385	1,731186	0,4595	1,662286	0,2506	0,9980	64	—
5,8	0,5298	1,724112	0,5461	1,737272	0,2894	1,0759	60	—
5,9	0,4484	1,651666	0,5163	1,712902	0,2338	0,9647	58	—
6,0	0,4995	1,698585	0,4469	1,650210	0,2246	0,9464	56	—
6,1	0,5495	1,739968	0,5165	1,713070	0,2844	1,0660	54	—
6,2	0,4676	1,669875	0,5398	1,732333	0,2350	1,0074	53	—
6,3	0,4760	1,677607	0,4555	1,658488	0,2170	0,9315	51	—
6,4	0,5496	1,740047	0,4965	1,693919	0,2743	1,0461	49	—
6,5	0,4816	1,682686	0,5454	1,736715	0,2647	1,0270	48	—
6,6	0,4690	1,671173	0,4691	1,665675	0,2172	0,9821	46	—
6,7	0,5467	1,737749	0,4915	1,619524	0,2702	1,0382	45	—
6,8	0,4831	1,684087	0,5436	1,735279	0,2644	1,0267	44	—

Tabelle I (Fortsetzung).

u	$C(u)$	$\text{Log } C(u)$	$S(u)$	$\text{Log } S(u)$	$\frac{C^2(u) + S^2(u)}{2}$	$C(u) + S(u)$	Φ'_0	Φ'_n
6,9	0,4782	$\bar{1},675045$	0,4624	$\bar{1},665018$	0,2189	0,9356	0,0043	—
7,0	0,5455	$\bar{1},736795$	0,4997	$\bar{1},698709$	0,2736	1,0452	41	—
7,1	0,4783	$\bar{1},675187$	0,5360	$\bar{1},729165$	0,2657	1,0093	40	—
7,2	0,4887	$\bar{1},689042$	0,4572	$\bar{1},660106$	0,2239	0,9459	39	—
7,3	0,5393	$\bar{1},731830$	0,5199	$\bar{1},715920$	0,2806	1,0592	39	—
7,4	0,4601	$\bar{1},662852$	0,5161	$\bar{1},712734$	0,2390	0,9762	37	—
7,5	0,5160	$\bar{1},712650$	0,4607	$\bar{1},663418$	0,2393	0,9767	36	—
7,6	0,5156	$\bar{1},712313$	0,5389	$\bar{1},731508$	0,2781	1,0545	35	—
7,7	0,4628	$\bar{1},665393$	0,4820	$\bar{1},689047$	0,2232	0,9448	34	—
7,8	0,5395	$\bar{1},731991$	0,4596	$\bar{1},689841$	0,2654	1,0291	33	—
7,9	0,4760	$\bar{1},677607$	0,5323	$\bar{1},726156$	0,2550	1,0093	32	—
8,0	0,4998	$\bar{1},698796$	0,4602	$\bar{1},662947$	0,2308	0,9600	32	—
8,1	0,5228	$\bar{1},718386$	0,5320	$\bar{1},725912$	0,2781	1,0548	31	—
8,2	0,4638	$\bar{1},666331$	0,4859	$\bar{1},686547$	0,2256	0,9497	30	—
8,3	0,5378	$\bar{1},730621$	0,4932	$\bar{1},693023$	0,2662	1,0310	29	—
8,4	0,4709	$\bar{1},672929$	0,5243	$\bar{1},719580$	0,2433	0,9952	29	—
8,5	0,5142	$\bar{1},711132$	0,4653	$\bar{1},667733$	0,2405	0,9795	28	—

Anmerkung. Die Werte der Fresnelschen Integrale für die Argumente von 5,0 bis 8,5 wurden berechnet laut:

$$C(u) = 0,5 + \frac{1}{\pi u} \sin \frac{\pi}{2} u^2 - \frac{1}{\pi^2 u^3} \cos \frac{\pi}{2} u^2,$$

$$S(u) = 0,5 - \frac{1}{\pi u} \cos \frac{\pi}{2} u^2 + \frac{1}{\pi^2 u^3} \sin \frac{\pi}{2} u^2.$$

Auf Grund der Tab. I wurden die Energien berechnet für drei Fälle

(1) $m = 0,5; m = 1,5; m = 3,0,$

wobei als Argument q betrachtet wurde, denn bei gegebenem R, λ, g und s ist m konstant und \mathcal{E}' nur eine Funktion von q , bez. von d .

Die Resultate der Rechnung sind in den Tabb. II, III und IV niedergelegt.

Tabelle II.

($m = 0,5.$)

q	\mathcal{E}'	q	\mathcal{E}'	q	\mathcal{E}'	q	\mathcal{E}'
0,0	0,3791	3,0	1,1523	4,7	1,1767	6,4	1,0289
0,3	0,2816	3,1	0,8750	4,8	1,0634	6,5	0,9036
0,5	0,1820	3,2	0,7471	4,9	0,8377	6,6	1,0599
0,6	0,1628	3,3	0,8606	5,0	0,9361	6,7	0,9651
0,9	0,4162	3,4	1,0871	5,1	1,1695	6,8	0,8764
1,2	1,0863	3,5	1,1917	5,2	1,0732	6,9	1,0741
1,5	1,3455	3,6	1,0998	5,3	0,8606	7,0	1,0545
1,8	1,1547	3,7	0,9580	5,4	0,9753	7,1	0,8815
2,0	1,0693	3,8	0,9231	5,5	1,1198	7,2	1,0969
2,1	1,0641	3,9	0,9682	5,6	1,0037	7,3	1,0006
2,2	1,0087	4,0	0,9881	5,7	0,9297	7,4	0,9298
2,4	0,8101	4,1	0,9973	5,8	1,0174	7,5	1,0370
2,5	0,7483	4,2	1,0598	5,9	1,0258	7,6	0,9557
2,6	0,8340	4,3	1,0855	6,0	1,0051	7,7	0,9969
2,7	1,0561	4,4	0,9662	6,1	0,9898	7,8	1,0285
2,8	1,2793	4,5	0,8613	6,2	0,9604	7,9	0,9810
2,9	1,3313	4,6	0,9952	6,3	1,0502	8,0	0,9973

Tabelle III.

($m = 1,5.$)

q	\mathcal{E}'	q	\mathcal{E}'	q	\mathcal{E}'	q	\mathcal{E}'
0,0	0,0840	0,5	0,0598	1,0	0,0511	1,5	0,2046
0,1	0,0660	0,6	0,1099	1,1	0,1047	1,6	0,2325
0,2	0,0284	0,7	0,1081	1,2	0,1894	1,7	0,3535
0,3	0,0061	0,8	0,0790	1,3	0,2379	1,8	0,6307
0,4	0,0167	0,9	0,0356	1,4	0,2307	1,9	0,6651

Tabelle III (Fortsetzung).

q	\mathcal{E}'	q	\mathcal{E}'	q	\mathcal{E}'	q	\mathcal{E}'
2,0	0,6713	3,3	0,8657	4,6	1,0796	5,9	0,9261
2,1	0,6842	3,4	0,8401	4,7	1,0536	6,0	0,9848
2,2	0,8030	3,5	0,7838	4,8	0,9980	6,1	1,0305
2,3	1,0537	3,6	0,9158	4,9	0,8306	6,2	1,1174
2,4	1,2764	3,7	1,1764	5,0	0,9307	6,3	0,9071
2,5	1,3391	3,8	1,2446	5,1	1,1558	6,4	0,8705
2,6	1,2720	3,9	1,1091	5,2	1,0821	6,5	1,1056
2,7	1,2508	4,0	1,0468	5,3	0,9878	6,6	1,0070
2,8	1,3481	4,1	1,0174	5,4	0,9633	6,7	0,9865
2,9	1,3929	4,2	0,8582	5,5	0,8779	6,8	0,9191
3,0	1,2207	4,3	0,7969	5,6	1,0471	6,9	1,0799
3,1	0,9482	4,4	1,0200	5,7	1,1660	7,0	1,0572
3,2	0,8288	4,5	1,1627	5,8	0,9488		

Tabelle IV.

 $(m = 3,0.)$

q	\mathcal{E}'	q	\mathcal{E}'	q	\mathcal{E}'	q	\mathcal{E}'
0,0	0,0224	1,4	0,0244	2,8	0,1376	4,2	1,4324
0,1	0,0077	1,5	0,0091	2,9	0,2187	4,3	1,2845
0,2	0,0021	1,6	0,0321	3,0	0,2782	4,4	1,3034
0,3	0,0207	1,7	0,0406	3,1	0,2687	4,5	1,1967
0,4	0,0102	1,8	0,0173	3,2	0,3760	4,6	0,9427
0,5	0,0007	1,9	0,0356	3,3	0,4950	4,7	0,9400
0,6	0,0165	2,0	0,0610	3,4	0,5037	4,8	0,7795
0,7	0,0223	2,1	0,0485	3,5	0,6455	4,9	0,7756
0,8	0,0038	2,2	0,0453	3,6	0,8279	5,0	0,8786
0,9	0,0214	2,3	0,0892	3,7	0,8500	5,1	0,3150
1,0	0,0280	2,4	0,0800	3,8	0,9776	5,2	1,1574
1,1	0,0119	2,5	0,0731	3,9	1,2281	5,3	1,1540
1,2	0,0075	2,6	0,1347	4,0	1,2023	5,4	1,1875
1,3	0,0307	2,7	0,1517	4,1	1,3346	5,5	1,1106

Zur besseren Übersicht sind diese Tabellen auch graphisch dargestellt (Fig. 2).

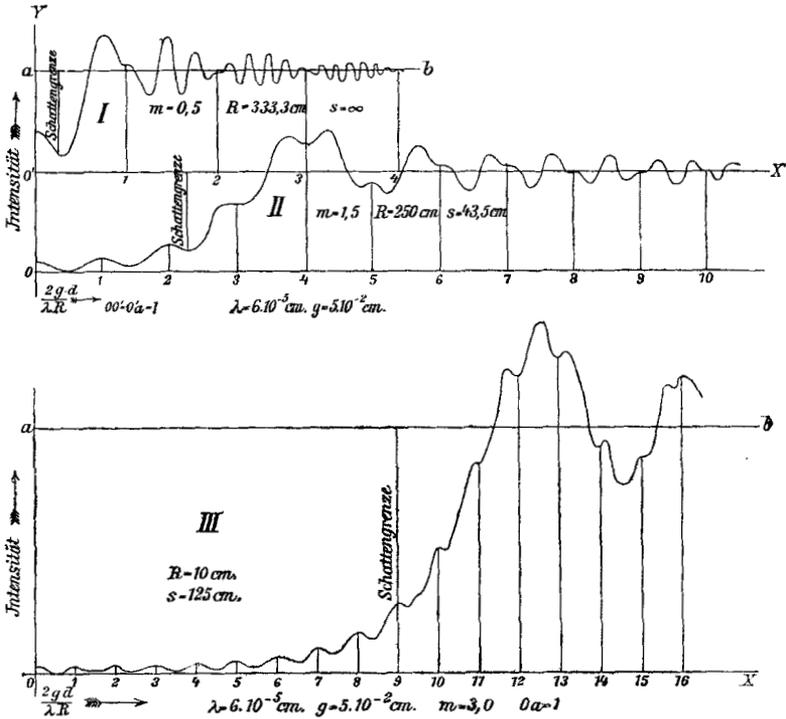


Fig. 2.

Die Maßstäbe der Kurven I und II sind gleich. Die Linie $O'X'$ dient als Abszisse für die Kurve I. Auf den Abszissen wurden die Werte von q aufgetragen und auf den Ordinaten diejenigen der Intensitäten in demselben Maßstabe. Deshalb stellen die Geraden $O'X'$ bez. ab die Intensität des einfallenden Lichtes dar, bei Abwesenheit des reflektierenden Drahtes. Die Zahlen auf den Abszissen bedeuten die Werte von $qm = \frac{2gd}{\lambda R}$. Was die Kurve III anbetrifft, so gilt das eben Gesagte auch für sie, nur daß der Maßstab der Intensität bei ihr doppelt so groß ist, als derjenige von q . Die Kurven I, II und III stellen demnach die Intensität des durchgehenden Lichtes dar bei variablem d auf der einen

Seite der X -Achse. Auf der anderen Seite wird die Verteilung der Intensität dieselbe sein, da der Vorgang um die X -Achse symmetrisch ist.

Die Tab. II, III und IV und demnach auch die entsprechenden Kurven sind gültig für beliebige R , λ , g und s , solange nur (1) erfüllt bleibt. Um bestimmte Fälle herauszugreifen, haben wir folgende Werte für diese Größen angenommen:

Nr.	m	λ	R	g	s
1	0,5	$6 \cdot 10^{-5}$ cm	333,3 cm	$5 \cdot 10^{-2}$ cm	∞
2	1,5	„	250,0 „	„	43,5 cm
3	3,0	„	10,0 „	„	125,0 „

Alle drei Fälle wurden praktisch realisiert, wobei bei Nr. 1 zwischen Spalt und Draht ein Objektiv ($F=250$ mm) eingeschaltet wurde, in dessen Brennebene sich der Spalt befand. Dadurch wurde praktisch s auf ∞ gebracht. Es wurde mit der Lupe beobachtet und auch photographische Aufnahmen gemacht, wo mit Genüge die Übereinstimmung der Theorie und Praxis bestätigt wurde.

Was Nr. 3 anbelangt, so sei nebenbei bemerkt, daß er mit dem von Verdet¹⁾ angegebenen Beispiel übereinstimmt. Nach Verdet sollen im geometrischen Schatten 17 Streifen zu erwarten sein. Die Kurve III und die Beobachtung bestätigen dies.

Betrachten wir die Kurven näher, so sehen wir, daß im geometrischen Schatten für diejenigen Werte von d , welche sich aus (7) § 5 berechnen, Maxima der Energie entsprechen, während außerhalb des geometrischen Schattens für diese Werte von d sowohl Maxima wie Minima, als auch Inflexionswerte der Energie auftreten können. Außerdem bemerkt man, daß außerhalb des Schattens die Energie ständig um den Wert 1 mit abnehmender Amplitude oszilliert.

Man kann auch die Werte von \mathcal{E}' mit Hilfe der Cornuschen Spirale graphisch ermitteln. Und zwar ist bekanntlich

1) E. Verdet, Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes 1. p. 264. Braunschweig, Vieweg & Sohn.

$M^2 + N^2$ gleich dem Quadrate der Entfernung der Punkte $u = m - g$ und $n = -m - g$ der Spirale. Was die Summe $M + N$ anbetrifft, so ist dieselbe, wie dies leicht zu beweisen ist, nichts anderes als die Projektion obiger Entfernung auf die Verbindungslinie zwischen den beiden asymptotischen Punkten der Spirale, falls man hierbei als Längeneinheit die Hälfte obiger Verbindungslinie annimmt.

Wir wollen die Anzahl der Maximas bez. der Streifen im geometrischen Schatten bestimmen. Bezeichnen wir durch ν die größte ganze Zahl, welche noch im m^2 enthalten ist¹⁾ und die Anzahl der Streifen durch w , so ist

$$(2) \quad w = 2\nu + 1,$$

was leicht aus (7) und (10) § 5 zu ersehen ist.

Zum Schluß möchten wir noch bemerken, daß die Werte von \mathfrak{C}'_0 der Tab. I, welche aus (12) § 5 berechnet sind, mit größerer Annäherung den Tatsachen entsprechen werden als die anderen Werte von \mathfrak{C}' . Denn bei \mathfrak{C}'_0 ist $d = \varepsilon = 0$ und folglich fallen die Glieder, welche von ε abhängen, in (8a) § 4 von selber weg, außerdem ist in (4) § 5

$$r_1 - s - R = 0 \quad \text{und} \quad l^2 = 0.$$

§ 7. Zusammenfassung.

Wir haben aus dem allgemeinen Integral (1) § 1 die Ausdrücke (9) und (10) § 2 abgeleitet, welche allgemein gültig sind für alle Fälle, die bei den Voraussetzungen 1 bis 5 § 2 möglich sind.

Durch eingehende Diskussion der Reflexion an einer Ebene kamen wir zu Annahmen, welche uns weitere Lösungen ermöglichten. Die Ableitung des Integrals (9) § 3 bestätigt die Richtigkeit des allgemeinen Integrals (1) § 1.

Die Resultate der Berechnung des § 6 bestätigen die Übereinstimmung der Theorie mit dem Experiment. Wie bei der Fresnelschen Theorie, so auch hier ergeben sich die Werte für d , für die Lagen der Maxima im geometrischen Schatten, gleich

$$d = \frac{\lambda R}{2g} n,$$

1) Ist m^2 selbst eine ganze Zahl, so ist in (2) statt ν , $\nu - 1$ zu setzen, wie z. B. bei Nr 3.

wo n eine ganze Zahl ist. Nur sind unsere Resultate eine konsequente Ableitung aus der Maxwellschen Theorie, was der Hauptzweck dieser Arbeit war.

Weiter ist in § 4 auf den Übergang von der Maxwellschen Theorie zu den Begriffen der geometrischen Optik hingewiesen, und zwar für allgemeinere Fälle, als derjenige der Reflexion an einem Draht.

Zum Schluß möchte ich noch der Firma E. Leitz in Wetzlar meinen besten Dank für ihr gütiges Entgegenkommen bei der Ausführung des experimentellen Teiles dieser Arbeit aussprechen.

Wetzlar, den 24. Juli 1907.

(Eingegangen 25. Juli 1907.)
