12. *Elektromagnetische Grundgleichungen in bivektorieller Behandlung;*
von Ludwig Silberstein.

Unter einem *Bivektor* verstehe ich, nach dem Vorgange von R. W. Hamilton[1]), die komplexe Zusammenfassung zweier gewöhnlicher Vektoren R_1, R_2 zu

(1) $$\varrho = R_1 + i R_2\,, \quad \text{wo} \quad i = \sqrt{-1}\,.$$

Sonst werde ich mich aber nicht der ursprünglichen, aus dem Quaternionenkalkül fließenden Hamiltonschen Behandlung der Vektoren, sondern dem Heavisideschen Schema der vektoriellen Algebra und Analysis[2]) anschließen, welches bekanntlich den Bedürfnissen des Physikers besonders gut angepaßt ist und welches sich überdies in letzterer Zeit auch auf dem Kontinente einer fortwährend wachsenden Verbreitung erfreut.

Was die gewöhnlichen Vektoren anbelangt, so werde ich mich der Heavisideschen Bezeichnungsweise bedienen, also das skalare Produkt zweier Vektoren A, B einfach mit AB, ihr Vektorprodukt aber mit VAB bezeichnen, und sonst auch Symbole wie *curl*, *div*, ∇ und ∇^2 in üblicher Weise anwenden.

Was aber die *Bivektoren* anbelangt, so werden uns hier, in rein theoretischer Hinsicht, nur einige wenige Bemerkungen nötig sein.

Zur Unterscheidung von gewöhnlichen Vektoren (oder gar Skalaren) werde ich die Bivektoren durchweg mit *griechischen* Buchstaben bezeichnen. Unter Zugrundelegung der Form (1) werde ich R_1 den *ersten*, R_2 aber den *zweiten Bestandteil* des Bivektors ϱ nennen.

Zwei Bivektoren sind dann und nur dann einander gleich, wenn ihre Bestandteile paarweise untereinander gleich sind, d. h. $\varrho = \varrho'$ bedeutet soviel wie $R_1 = R_1'$, $R_2 = R_2'$ und umgekehrt.

1) Vgl. seine „Elements of Quaternions“.

2) O. Heaviside, Electromagnetic Theory 1. Chapt. III.

Da ein jeder Bivektor im Grunde genommen nichts anderes ist als eine Summe von gewöhnlichen Vektoren mit gewöhnlichen *skalaren* (wenn auch teilweise imaginären) Koeffizienten, so leuchtet es ohne weiteres ein, daß sämtliche fundamentale Operationen der Vektorenalgebra und -analysis sofort auf die Bivektoren übertragen werden können. So bedarf z. B. die Summe $\varrho + \sigma = R_1 + S_1 + i(R_2 + S_2)$ oder die Differenz $\varrho - \sigma$ zweier Bivektoren durchaus keiner Erläuterung; auch sind die Eigenschaften $\varrho + \sigma = \sigma + \varrho$, $\varrho + (\sigma + \tau) = (\varrho + \sigma) + \tau$ etc. ohne weiteres klar. Das skalare Produkt zweier Bivektoren ϱ, σ kann, im Sinne der obigen Bemerkung, sofort zu

$$(2) \quad \varrho\,\sigma = (R_1 + i R_2)(S_1 + i S_2) = R_1 S_1 - R_2 S_2 + i(R_1 S_2 + R_2 S_1)$$

entwickelt werden, und es ist auch $\varrho\,\sigma = \sigma\,\varrho$, sowie $\varrho(\sigma + \tau) = \varrho\,\sigma + \varrho\,\tau$, wie für gewöhnliche Vektoren. Ähnlich hat man auch für das Vektorprodukt zweier Bivektoren:

$$(3) \quad V\varrho\,\sigma = VR_1 S_1 - VR_2 S_2 + i(VR_1 S_2 + VR_2 S_1),$$

und da $VS_1 R_1 = - VR_1 S_1$ etc., so ist auch $V\sigma\,\varrho = - V\varrho\,\sigma$; es erhellt ferner, daß $V\varrho(\sigma + \tau) = V\varrho\,\sigma + V\varrho\,\tau$, wie für gewöhnliche Vektoren; endlich bemerke man, daß $\varrho\,\sigma$ ein (zwar komplexer) *Skalar*, wie etwa $R_1 S_1$, während $V\varrho\,\sigma$, ebenso wie ϱ oder σ selbst, ein *Bivektor* ist. Die Bildung und Untersuchung von $\tau\,V\varrho\,\sigma$, $V\tau\,V\varrho\,\sigma$ und dergl. überlasse ich dem Leser.

Was differentielle Operationen anbelangt, daß also z. B.

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\partial R_1}{\partial t} + i\frac{\partial R_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\varrho + \sigma) = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\,\sigma) = \varrho\,\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma\,\frac{\partial \varrho}{\partial t} \text{ etc.},$$

$$\operatorname{div}(\varrho + \sigma) = \operatorname{div}\varrho + \operatorname{div}\sigma, \quad \operatorname{curl}(\varrho + \sigma) = \operatorname{curl}\varrho + \operatorname{curl}\sigma, \ldots$$

ist, bedarf wohl auch kaum einer Erläuterung.

Ich werde also hier nur noch zwei Begriffe definieren und einige ihrer Eigenschaften angeben, welche uns für die elektromagnetischen Anwendungen von Nutzen sein werden:

1. Ist $\varrho = R_1 + i R_2$ und $\varrho' = R_1 - i R_2$, so nenne ich ϱ und ϱ' zueinander *konjugierte* Bivektoren; ich werde solche Gebilde immer mit demselben Buchstaben, *ohne* und *mit Akzent* bezeichnen.

2. Stehen die Bestandteile R_1, R_2 eines Bivektors ϱ aufeinander *senkrecht*, d. h. ist $R_1 R_2 = 0$, so nenne ich ϱ einen *orthogonalen* Bivektor, und sind noch im besonderen seine Bestandteile *Einheitsvektoren*, d. h. $R_1^2 = R_2^2 = 1$, so nenne ich ihn einen *fundamentalen.*

Nach diesen Definitionen findet man sofort, wegen (2) bez. (3), für jedes Paar *konjugierter Bivektoren*

(4) $$\varrho\,\varrho' = R_1^2 + R_2^2\,,$$

(5) $$V\varrho\,\varrho' = 2\,i\,V R_2 R_1\,,$$

ferner für einen beliebigen *orthogonalen* Bivektor $\omega = O_1 + i\,O_2$ $(O_1 O_2 = 0)$:

(6) $$\omega\,\omega \quad \text{oder} \quad \omega^2 = O_1^2 - O_2^2\,,$$

übrigens für *jeden* Bivektor:

$V\varrho\,\varrho = i\,V R_1 R_2 + i\,V R_2 R_1 = 0$ (wie für gewöhnliche Vektoren)

und schließlich für einen *fundamentalen* Bivektor $\varphi = a + i\,b$ $(a\,b = 0$, wo a, b *Einheitsvektoren* sind: $a^2 = b^2 = 1)$:

(7) $$\varphi^2 = 0\,.$$

Ist ein Bivektor orthogonal oder gar fundamental, so besitzt offenbar der zu ihm konjugierte Bivektor die nämliche Eigenschaft.

Wählt man noch einen dritten zur Ebene des φ normalen Einheitsvektor c, und zwar so, daß $V a\,b = c$ ist, daß also a, b, c ein rechtshändiges System bilden, so hat man $V\varphi\,c = -\,b + i\,a$, oder

(8) $$V\varphi\,c = i\,\varphi\,,$$

was man leicht in Worte kleiden kann.

Nach diesen knappen Bemerkungen allgemeinen Charakters zu den angesagten elektromagnetischen Anwendungen übergehend, bezeichne ich die elektrische Kraft, als gewöhnlichen Vektor, mit E_1 und die magnetische Kraft, als ebensolchen Vektor, mit E_2, setze

(9) $$E_1 + i\,E_2 = \eta$$

und nenne η den *elektromagnetischen Bivektor* des Feldes. Aus Gründen, die alsbald einleuchten werden, beschränke ich mich hier auf die Betrachtung des *leeren Raumes.* (Man könnte übrigens auch von irgend einem isotropen Dielektrikum mit gleicher Dielektrizitätskonstanten und Permeabilität sprechen; dies würde aber nur eine rein formale Verallgemeinerung bedeuten.)

Setzt man noch, der kürzeren Schreibweise wegen, die „kritische Geschwindigkeit“ = 1, und bezeichnet mit t die Zeit, so lauten die Maxwellschen Differentialgleichungen in gewöhnlicher vektorieller Form:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial t} &= \operatorname{curl} E_2, \quad \frac{\partial E_2}{\partial t} = -\operatorname{curl} E_1, \\ \operatorname{div} E_1 &= 0, \quad \operatorname{div} E_2 = 0. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Multipliziert man nun die zweite dieser Gleichungen mit i und addiert sie zur ersten, so erhält man nach (9)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \operatorname{curl}(E_2 - i E_1);$$

es ist aber $E_2 - i E_1 = -i(E_1 + i E_2) = -i\eta$; man erhält also das bemerkenswerte Resultat

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -i \operatorname{curl} \eta, \tag{I}$$

d. h. anstatt der beiden Hauptgleichungen [1]) des Feldes mit gemischt auftretenden elektrischen und magnetischen Vektoren *nur eine Gleichung mit einer einzigen unbekannten Veränderlichen, nämlich dem elektromagnetischen Bivektor* η, und zwar ist diese Differentialgleichung, ebenso wie eine jede der ursprünglichen, von der *ersten Ordnung* in bezug auf die Zeit.

Ebenso können wir mit der 3. und 4. Gleichung (10) verfahren und also die beiden solenoidalen Nebenbedingungen in *eine einzige solenoidale Nebenbedingung* für den elektromagnetischen Bivektor zusammenziehen:

$$\operatorname{div} \eta = 0. \tag{II}$$

Die Gleichungen (I), (II) vertreten vollständig die vier Gleichungen (10).

Es sei ferner η' der (zu η) *konjugierte elektromagnetische Bivektor*, d. h.

$$\eta' = E_1 - i E_2; \tag{11}$$

1) So nenne ich nämlich die beiden *ersten* Gleichungen (10), während ich die beiden letzten als *solenoidale Nebenbedingungen* bezeichne.

man erhält dann, auf ganz ähnlichem Wege wie oben, anstatt der beiden Maxwellschen Hauptgleichungen wiederum eine einzige bivektorielle Differentialgleichung, und zwar:

$$\text{(I')} \qquad \frac{\partial \eta'}{\partial t} = i \,.\, \operatorname{curl} \eta'$$

und übrigens auch eine einzige Nebenbedingung:

$$\text{(II')} \qquad \operatorname{div} \eta' = 0 \,.$$

Diese Gleichungen (I'), (II') sagen natürlich ganz dasselbe aus wie (I), (II); in ihrer *Zusammenstellung* sind aber *beide* Paare nicht ohne Interesse. (Man bemerke übrigens, daß $\frac{1}{2}(\eta + \eta') = E_1$, $\frac{1}{2\,i}(\eta - \eta') = E_2$ ist.) Jedenfalls aber *genügt* zur vollständigen Behandlung der in Frage stehenden Erscheinungen ein *einziger* Bivektor (mag es η oder η' sein), den man im ganzen Laufe einer diesbezüglichen Rechnung, prinzipiell genommen, nicht etwa in den elektrischen und den magnetischen Vektor zu zersplittern braucht. Dieser Umstand scheint mir auch den passendsten formalen Ausdruck für den physischen Tatbestand zu bilden: denn in jedem zeitlich veränderlichen Felde gesellen sich die elektrischen und magnetischen Kräfte unzertrennlich aneinander.

Das Nächstliegende wäre die Frage nach der *elektromagnetischen Energie* des Feldes. Bezeichnet man ihre räumliche *Dichte* mit e, d. h. setzt man

$$(12) \qquad e = \tfrac{1}{2}(E_1^2 + E_2^2)\,,$$ [1]

so kann man e in einfachster Weise durch das konjugierte elektromagnetische Paar η, η' ausdrücken; nach dem Muster der Formel (4) für solche Bivektoren erhält man nämlich unmittelbar:

$$\text{(III)} \qquad e = \tfrac{1}{2}\,\eta\,\eta'\,,$$

oder in Worten: *die Dichte der Feldenergie ist gleich dem halben skalaren Produkte der gegenseitig konjugierten elektromagnetischen Bivektoren.*

---

1) Bei der Wahl der von Heaviside sogenannten „rationalen Einheiten“ fällt der übliche, aber beschwerliche Faktor $1/4\,\pi$ weg; dieselbe Bemerkung gilt auch für den weiter unten folgenden Ausdruck des Energieflusses.

Um ferner den elektromagnetischen *Energiefluß F*, welcher (als gewöhnlicher Vektor) durch die Forderung

$$\frac{\partial e}{\partial t} = - \operatorname{div} F \tag{13}$$

definiert ist, zu erhalten, multiplizieren wir die Gleichung (I), skalar mit η', die Gleichung (I') ebenso mit η und addieren die Resultate; in dieser Weise folgt

$$\eta' \frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{\partial \eta'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \eta \eta' = i(\eta \operatorname{curl} \eta' - \eta' \operatorname{curl} \eta).$$

Es gilt nun für gewöhnliche Vektoren die bekannte Formel

$$\operatorname{div} V A B = B \operatorname{curl} A - A \operatorname{curl} B,$$

und diese läßt sich ohne weiteres auf Bivektoren ausdehnen, d. h. man hat auch

$$\operatorname{div} V \varrho \sigma = \sigma \operatorname{curl} \varrho - \varrho \operatorname{curl} \sigma,$$

was man übrigens sofort nach (3) verifizieren kann. Auf unseren Fall angewandt, gibt dies die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta \eta') = - i \operatorname{div} V \eta \eta',$$

also nach (III) und (13), abgesehen von einem additiven rein solenoidalen Vektor:

$$F = \frac{i}{2} V \eta \eta', \tag{IV}$$

oder in Worten: *der Energiefluß oder der „Poyntingsche Vektor" ist gleich $\frac{1}{2} i$ mal dem Vektorprodukte der gegenseitig konjugierten elektromagnetischen Bivektoren.*

Man kann sich auch unmittelbar, nach Gleichung (5), überzeugen, daß (IV) mit dem üblichen Ausdruck des Energieflusses, nämlich mit $F = - V E_2 E_1 = + V E_1 E_2$, identisch ist.

Den Vergleich von (IV) mit (III) und die Einkleidung ihrer naheliegenden Zusammenstellung in Worte überlasse ich dem Leser.

Ist der elektromagnetische Bivektor für $t = 0$, also etwa $\eta = \eta_0$, für den ganzen Raum gegeben, so ist hierdurch auf Grund der Differentialgleichung (I) der ganze Verlauf der elektromagnetischen Erscheinungen, wenigstens innerhalb einer Kontinuitätsepoche, gegeben. Die Durchführung des Integrationsprozesses in gegebenen speziellen Fällen gehört nicht zu dem

Thema dieser Abhandlung. Ich will also hier nur bemerken, daß man die symbolische Lösung von (I) ohne weiteres hinschreiben kann; man hat nämlich, indem man mit $\{\}$ einen zusammengesetzten Operator bezeichnet, und unter e die Basis der natürlichen Logarithmen versteht:

$$\text{(V)} \qquad \eta_t = \{e^{-i\,t\,.\,\mathrm{curl}}\}\,\eta_0 = \{\cos(t\,.\,\mathrm{curl}) - i\sin(t\,.\,\mathrm{curl})\}\,\eta_0\,,$$

was genau übereinstimmt mit den „symbolischen Integralen", die in einer früheren Abhandlung[1]) auf einem viel umständlicheren Wege aus den beiden gewöhnlichen vektoriellen Gleichungen erhalten wurden. (Die Bedingung (II) braucht nicht besonders berücksichtigt zu werden, denn wegen $\mathrm{div}\,\mathrm{curl}^n = 0$ $(n = 1, 2, 3\ldots)$ folgt aus (V) $\mathrm{div}\,\eta_t = \mathrm{div}\,\eta_0$; ist also nur das anfängliche Feld gemäß (II) vorgeschrieben, so bleibt auch für alle Zeiten $\mathrm{div}\,\eta_t = 0$; dies folgt übrigens ebenso einfach aus der Gleichung (I) selbst.) Den Nachdruck möchte ich übrigens nicht etwa auf (V), sondern vielmehr auf die Gleichungen (I) bis (IV) legen.

Reine elektromagnetische Wellen. — Wellen, die so benannt wurden, können als dadurch charakterisiert angesehen werden, daß die elektrische Kraft auf der magnetischen überall und immer *senkrecht* steht und daß in jedem Raumteil die eine Hälfte der Energie elektrisch, die andere magnetisch ist, d. h. also, daß (für das Vakuum) die Beziehungen $E_1^2 = E_2^2$ und $E_1\,E_2 = 0$ bestehen. Nach der in der Einleitung gegebenen Definition und nach Gleichung (7) kann man dies kurz fassen, indem man sagt:

Für *reine* Wellen unterscheidet sich η von einem *fundamentalen* Bivektor nur durch einen reellen skalaren Faktor s:

$$\text{(14)} \qquad \eta = s\,\varphi,$$

so daß also $\eta^2 = 0$ ist.

Daraus folgt auch $\eta\,(\partial\,\eta/\partial\,t) = 0$, oder nach (I) $\eta\,\mathrm{curl}\,\eta = 0$.

Für den konjugierten elektromagnetischen Bivektor hat man in diesem Falle ebenfalls $\eta' = s\,\varphi'$, wo φ' zu φ konjugiert ist. Nach (8) und (14) hat man:

$$\text{(15)} \qquad V\eta\,c = i\,\eta = i\,s\,.\,\varphi,$$

während für η'

$$\text{(15')} \qquad V\eta'\,c = -\,i\,\eta' = -\,i\,s\,.\,\varphi'$$

1) L. Silberstein, Ann. d. Phys. 6. p. 373 ff. 1901.

ist, da die beiden Bestandteile von φ' $(a, -b)$ mit c ein *links*händiges System bilden.

Zum Schluß will ich nur noch den Spezialfall *ebener* Wellen behandeln. In diesem Falle ist der fundamentale Bivektor φ, welcher zugleich die Wellenebene angibt, in Zeit und Raum konstant und nur der skalare Faktor s ist veränderlich. Man hat also $\partial\eta/\partial t = \varphi\,.\,\partial s/\partial t$, also nach (I):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \varphi \frac{\partial s}{\partial t} = -\,i\,\mathrm{curl}\,(s\,\varphi)\,.$$

Bezeichnet man die in Richtung der Wellennormale c skalar gemessenen Längen mit z, so ist, wegen $\partial/\partial x = 0$, $\partial/\partial y = 0$, der Hamiltonsche Operator ∇ gleich $c(\partial/\partial z)$; da nun ganz allgemein $\mathrm{curl} = V\nabla$ ist, so hat man

$$-\,\mathrm{curl}\,(s\,\varphi) = -\,V c \frac{\partial (s\,\varphi)}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x} V \varphi\, c = \frac{\partial}{\partial x} V \eta\, c = i \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

[nach (15)], also:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{16}$$

woraus als allgemeinstes Integral folgt

$$\eta = f(z - t), \tag{17}$$

wo f eine beliebige Funktion des Argumentes $z - t$ bedeutet; *die Welle oder — wie man auch sagen könnte — der elektromagnetische Bivektor* η pflanzt sich also in der Richtung c mit der Geschwindigkeit 1, d. h. mit der kritischen Geschwindigkeit fort. Wie man sich durch einen flüchtigen Vergleich von (15') mit (15), (I') mit (I) überzeugen kann, würde sich der *konjugierte* Bivektor η' in *gerade entgegengesetzter* Richtung fortpflanzen, wie es bekanntlich der Fall ist.

Warschau, im Dezember 1906.

(Eingegangen 3. Januar 1907.)