

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 3.

1. Zur *Elektronentheorie der Metalle*; von *P. Drude*.

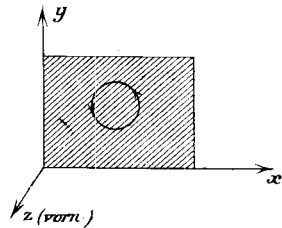
II. Teil.

Galvanomagnetische und thermomagnetische Effecte.

1. Die Ausgangsgleichungen.

Ich knüpfe an an die Vorstellungen, Resultate und Bezeichnungen des ersten Theiles meiner Arbeit.¹⁾ Hinweise auf diese Arbeit werden im Folgenden mit I, p . . . bezeichnet werden.

Es sei eine rechtwinklige Metallplatte in ein homogenes Magnetfeld der Stärke \mathfrak{S} (nach absolutem C.G.S.-Maass) gebracht, und zwar liege sie senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien. Die eine Seite des Metallrechtecks liege parallel zur x -Axe, die zweite parallel zur y -Axe, die magnetischen Kraftlinien parallel zur z -Axe, und zwar möge der positive Sinn dieser Axenrichtungen wie in nebenstehender Figur gewählt werden. In der Figur ist der Rotationsinn der das Magnetfeld ersetzenden Ampère'schen Ströme angegeben.



Wenn ein elektrischer Strom der Stromdichte $j^2)$ parallel zur x -Axe in der Metallplatte eingeleitet wird, so müssen zunächst durch das Magnetfeld die nach der positiven x -Axe strömenden positiven Elektronen nach unten, d. h. nach der negativen y -Axe abgelenkt werden. Wir wollen nun aber annehmen, dass von den Querseiten der Metallplatte kein Strom abgenommen werden soll; dann können auch die positiven

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 1. p. 566. 1900.

2) Es sollen alle elektrischen Grössen nach absolutem elektrostatischem Maass gemessen werden.

Elektronen nicht dauernd nach unten strömen, sondern sie laden nur beim Einleiten des Stromes j den unteren Rand der Platte zu positivem Potential bis zu der Stärke, dass dessen Einfluss die ablenkende Kraft des Magnetfeldes gerade compensirt, sodass die Elektronen einfach parallel zur x -Axe dauernd strömen. Durch das positive Potential des unteren Plattenrandes entsteht im Innern der Metallplatte eine positive elektrische (Transversal-)Kraft Y , sodass auf ein Elektron der Ladung e_1 die Kraft $e_1 Y$ nach der y -Axe wirkt. Direct durch das Magnetfeld entsteht infolge des Strömens der positiven Elektronen eine nach der negativen y -Axe gerichtete elektrische Kraft, welche auf ein Elektron der Ladung e_1 die Kraft äussert:

$$(1) \quad K' = -\frac{e_1}{c} \mathfrak{S} \frac{d\xi_1}{dt}.$$

Hierin bezeichnet $d\xi_1/dt$ die Strömungsgeschwindigkeit der Elektronen der Ladung e_1 , c das Verhältniss des elektrostatischen zum elektromagnetischen Maasssystem.¹⁾

Wenn nun eine Kraft K auf die Elektronen der Gattung 1 wirkt, deren Anzahl im cm^3 mit \mathfrak{N}_1 bezeichnet sei, so strömen in Richtung der Kraft (y -Axe) in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit die Anzahl

$$(2) \quad \mathfrak{A} = K v_1 \mathfrak{N}_1$$

hindurch (nach I, p. 576). In unserem Falle ist

$$(3) \quad K = e_1 Y + K' = e_1 \left(Y - \frac{\mathfrak{S}}{c} \frac{d\xi_1}{dt} \right).$$

Hiermit haben wir aber noch nicht alle Ursachen erschöpft, welche eine Querströmung von Elektronen in der Metallplatte veranlassen würden. Durch das anfängliche Abdrängen der positiven Kerne des Stromes j nach unten wird ein Concentrationsgefälle der Kerne in der Querrichtung (nach der y -Axe) veranlasst. Daher bildet sich [nach I, p. 579 und 576, Formeln (25) und (14)] ein Diffusionsstrom

$$(4) \quad \mathfrak{A}' = \frac{4}{3} \alpha T v_1 \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial y}$$

nach der negativen y -Axe, falls $\partial \mathfrak{N}_1 / \partial y$ positiv ist.

1) Betreffs der ausführlicheren Ableitung des Wertes K' vgl. z. B. mein Buch: Lehrbuch der Optik p. 399. — Riecke (Wied. Ann. 66. p. 560. 1898) führt diesen Wert von K' als Annahme in seine Theorie ein.

Da nun im stationären Zustande keine Querströmung irgend einer Elektronengattung eintreten kann, so muss sein $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$, d. h. wir erhalten aus (2), (3) und (4) die Gleichung:

$$(5) \quad e_1 \left(Y - \frac{\mathfrak{S}}{c} \frac{d \xi_1}{d t} \right) = \frac{4}{3} \alpha T \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial y}.$$

Nach der x -Axe strömt wegen Vorhandenseins einer elektrischen Kraft X die Kernzahl (pro Zeiteinheit durch ein cm^2):

$$e_1 v_1 \mathfrak{N}_1 X.$$

Wenn nun auch ein Konzentrationsgefälle der Kerne nach der x -Axe besteht, so würde der Diffusionsstrom

$$\frac{4}{3} \alpha T v_1 \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial x}$$

nach der negativen x -Axe bestehen. Da nun die Anzahl von Kernen der Gattung 1, welche in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit fließen, gleich $\mathfrak{N}_1 (d \xi_1 / d t)$ zu setzen ist, so folgt

$$\mathfrak{N}_1 \frac{d \xi_1}{d t} = e_1 v_1 \mathfrak{N}_1 X - \frac{4}{3} \alpha T v_1 \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial x},$$

oder

$$(6) \quad \frac{d \xi_1}{d t} = v_1 \left(e_1 X - \frac{4}{3} \alpha T \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial x} \right).$$

Die Kernzahl \mathfrak{N}_1 im Metall ist nun eine Function der Temperatur. Konzentrationsgefälle der Kerne nach irgend einer Richtung bedingt also notwendig ein Temperaturgefälle nach dieser Richtung und umgekehrt. Um dies deutlich zum Ausdruck zu bringen, schreiben wir:

$$(7) \quad \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial x} = \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{d T} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial y} = \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{d T} \cdot \frac{\partial T}{\partial y};$$

hierin bezeichnet dann $\partial T / \partial x$ bez. $\partial T / \partial y$ das Temperaturgefälle nach der x - bez. y -Axe.

Dieselben Betrachtungen gelten für irgend eine andere Gattung von Elektronen, denn für jede einzelne Gattung von Elektronen kann im stationären Zustande, wenn ein elektrischer Strom oder ein Wärmestrom dauernd nach der x -Richtung fließt, kein Querstrom (nach der y -Richtung) vorhanden sein, wenn der Platte kein Transversalstrom entnommen wird.

Wir gewinnen daher aus (5), (6) und (7) für zwei Gattungen von Elektronen der Ladungen e_1 und e_2 die Ausgangsgleichungen:

$$(8) \quad \frac{4 \alpha T}{3} \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = e_1 \left(Y - \frac{\mathfrak{S}}{c} \frac{d \xi_1}{dt} \right),$$

$$(9) \quad \frac{4 \alpha T}{3} \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = e_2 \left(Y - \frac{\mathfrak{S}}{c} \frac{d \xi_2}{dt} \right),$$

$$(10) \quad \frac{d \xi_1}{dt} = v_1 \left(e_1 X - \frac{4 \alpha T}{3} \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right),$$

$$(11) \quad \frac{d \xi_2}{dt} = v_2 \left(e_2 X - \frac{4 \alpha T}{3} \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right),$$

$$(12) \quad j = e_1 \mathfrak{N}_1 \frac{d \xi_1}{dt} + e_2 \mathfrak{N}_2 \frac{d \xi_2}{dt}.$$

In diesen Gleichungen bezeichnet X die gesamte, im Magnetfeld bestehende elektrische Kraft nach der x -Axe. Sie kann (durch Vorhandensein eines Longitudinaleffectes) verschieden sein von der äusseren elektrischen Kraft, welche zum Einleiten des Stromes j zwischen den beiden Verticalseiten des Metallrechtecks angelegt wurde.

In den Gleichungen sind

$$e_1, e_2, v_1, v_2, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \quad \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT}, \quad \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT}$$

constante Eigenschaften des Metalles. Aus den Gleichungen können bei gegebenem

$$j \text{ und } \frac{\partial T}{\partial x}$$

die fünf Grössen:

$$\frac{d \xi_1}{dt}, \quad \frac{d \xi_2}{dt}, \quad X, \quad Y, \quad \frac{\partial T}{\partial y}$$

berechnet werden. Auf die beiden letzteren Grössen kommt es besonders an, da sie die Bedeutung *des elektrischen und thermischen Transversaleffectes* haben.

2. Die galvanomagnetischen Transversaleffecte.

Wir specialisiren die Ausgangsgleichungen zunächst für den Fall:

$$j \text{ gegeben, } \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

d. h. für den Fall eines elektrischen Stromes in der Platte, ohne dass in gleicher Richtung ein Temperaturgefälle besteht.

Experimentell wird dieser Fall nicht genau realisiert sein, falls man lediglich einen Strom durch die Verticalseiten des Rechtecks durchsendet. Denn wenn auch ursprünglich kein Temperaturgefälle $\partial T/\partial x$ besteht, so wird dies doch principiell, wie in § 4 näher besprochen wird, durch die eintretenden Transversaleffekte herbeigeführt. Diesen longitudinalen galvanomagnetischen Temperatureffect hat Nernst¹⁾ in der That an einem Wismutstäbchen constatirt, er war aber, selbst bei grosser Feldstärke, ausserordentlich schwach. Nun ergibt sich auch theoretisch (vgl. § 4), dass alle Longitudinaleffekte proportional dem Quadrate der Feldstärke zunehmen müssen und in schwachen Feldern, bei welchen wohl schon Transversaleffekte bemerkbar sind, verschwinden. Bei anderen Metallen, als allein Wismut, sind überhaupt keine Longitudinaleffekte beobachtet worden. Wir wollen daher an unserer Annahme festhalten, dass $(\partial T/\partial x) = 0$ ist, falls man lediglich einen Strom j durchleitet, eine Annahme, die auch für Wismut als erfüllt anzusehen ist, wenn das Magnetfeld nicht zu stark gewählt wird.

Durch Elimination von $\partial T/\partial y$ gewinnt man aus (8) und (9):

$$(13) \quad \begin{cases} Y \left(e_1 \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} - e_2 \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} \right) = \frac{\mathfrak{H}}{c} \left(e_1 \frac{d \xi_1}{dt} \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} \right. \\ \left. - e_2 \frac{d \xi_2}{dt} \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} \right), \end{cases}$$

während aus (10) und (11) entsteht für $(\partial T/\partial x) = 0$:

$$(14) \quad \frac{d \xi_1}{dt} = e_1 v_1 X, \quad \frac{d \xi_2}{dt} = e_2 v_2 X.$$

Daher wird (13):

$$(15) \quad \begin{cases} Y \left(e_1 \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} - e_2 \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} \right) = \frac{\mathfrak{H}}{c} X \left(e_1^2 v_1 \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} \right. \\ \left. - e_2^2 v_2 \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} \right). \end{cases}$$

Nun ist aber nach (12) und (14):

$$(16) \quad \begin{cases} j = (e_1^2 \mathfrak{N}_1 v_1 + e_2^2 \mathfrak{N}_2 v_2) X = \sigma X, \\ \text{wobei} \\ \sigma = e_1^2 \mathfrak{N}_1 v_1 + e_2^2 \mathfrak{N}_2 v_2 \end{cases}$$

1) W. Nernst, Wied. Ann. 31. p. 784. 1887.

die (elektrostatisch gemessene) Leitfähigkeit des Metalles bedeutet. Wir wollen nun (vgl. I, p. 577)

$$(17) \quad e_1 = +e, \quad e_2 = -e$$

setzen, und erhalten dann aus (15):

$$(18) \quad Y \cdot \frac{d \log (\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2)}{dT} = \mathfrak{S} \cdot \frac{j}{\sigma} \cdot \frac{e}{c} \left(v_1 \frac{d \log \mathfrak{R}_2}{dT} - v_2 \frac{d \log \mathfrak{R}_1}{dT} \right).$$

Diese Gleichung für den Halleffect Y stimmt mit der experimentell gefundenen Gleichung

$$(18') \quad Y_m = R \cdot j_m \cdot \mathfrak{S}$$

formal überein, die Indices m an Y und j bezeichnen, dass diese Grössen nach absolutem, elektromagnetischem Maass gemessen sind. R bedeutet den sogenannten Rotationscoefficienten des betreffenden Metalles. R wird positiv genannt, wenn die Niveaulinien des Stromes j durch das Magnetfeld im Sinne der das Magnetfeld ersetzenden (Ampère'schen) Ströme gedreht werden (falls man einen Transversalstrom abnimmt), d. h. bei unserer Lage des Coordinatensystems (vgl. p. 369) würde bei positivem R ein Transversalstrom, den man von der Platte durch seitliche Drähte abnehmen würde, vom unteren Rand der Platte durch die Drähte zum oberen Plattenrand fließen. In der Platte selbst wird also die positive Electricität nach unten gedrängt. Wenn man daher keinen Transversalstrom abnimmt, so muss durch die elektrostatische Ladung des unteren Plattenrandes eine positive elektrische Kraft Y in der Platte entstehen. Gleichung (18') ist also auch hinsichtlich des Vorzeichens richtig.

Da

$$j : j_m = c, \quad Y : Y_m = \frac{1}{c}$$

ist, so ergibt der Vergleich von (18') mit (18):

$$(19) \quad R = \frac{ec}{\sigma} \cdot \frac{v_1 \frac{d \log \mathfrak{R}_2}{dT} - v_2 \frac{d \log \mathfrak{R}_1}{dT}}{\frac{d \log (\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2)}{dT}}.$$

Um auch den transversalen Temperatureffect zu berechnen, addiren wir die Gleichungen (8) und (9), woraus entsteht unter Rücksicht auf (17):

$$\frac{4 \alpha T}{3 e} \left(\frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} + \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} \right) \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\mathfrak{S}}{c} \left(\frac{d \xi_2}{dt} - \frac{d \xi_1}{dt} \right),$$

d. h. nach (14):

$$\frac{4 \alpha T}{3 e} \cdot \frac{d \log (\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2)}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\mathfrak{S}}{c} e X (v_1 + v_2);$$

oder unter Rücksicht auf (16):

$$(20) \quad \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{d \log (\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2)}{dT} = - \frac{3 e}{4 \alpha T} \cdot \mathfrak{S} \cdot \frac{j}{\sigma} \cdot \frac{e}{c} (v_1 + v_2).$$

Da $d \log (\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2) / d T$ eine universelle, positive Temperaturfunction ist (nach I, p. 582), so hat also *der transversale Temperatureffect bei allen Metallen dasselbe Vorzeichen* (während der Halleffect verschiedene Vorzeichen haben kann). Nach (20) muss bei positivem j und \mathfrak{S} der untere Plattenrand wärmer sein, als der obere. Dieses Vorzeichen entspricht der von v. Ettingshausen¹⁾ gefundenen Regel, dass man, falls man *aussen* um die Platte herumgeht²⁾, von der Eintrittsstelle des Stromes j in die Platte zur erwärmten Querseite im Sinne der das Magnetfeld ersetzenden Ampère'schen Ströme gelangt. Diese Regel fand v. Ettingshausen ausser am Wismut auch am Tellur und Antimon, ferner v. Ettingshausen und Nernst³⁾ an Zinn-Wismutlegirungen bestätigt. — Auch die Riecke'sche Theorie⁴⁾ ergibt dasselbe Vorzeichen der galvanomagnetischen Temperaturdifferenz, während allerdings die Bedeutung der in den Riecke'schen Formeln auftretenden Grössen von der hier gegebenen Theorie erheblich abweicht.

3. Die thermomagnetischen Transversaleffecte.

Wenn ein Temperaturgefälle nach der x -Axe künstlich in der Metallplatte aufrecht erhalten wird, ohne dass man einen elektrischen Strom hindurchsendet, so ist zu setzen:

$$j = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \text{ gegeben.}$$

1) A. v. Ettingshausen, Wied. Ann. **31**, p. 739. 1887.

2) Diesen Zusatz muss man der grösseren Deutlichkeit halber machen. Dass dieses thatsächlich der Sinn der v. Ettingshausen'schen Regel ist, ergibt sich aus seinen ausführlich l. c. angegebenen Beobachtungen.

3) A. v. Ettingshausen u. W. Nernst, Wied. Ann. **33**, p. 481. 1888.

4) E. Riecke, Wied. Ann. **66**, p. 563. 1898.

In diesem Falle gewinnen wir aus (10), (11) und (12):

$$(e_1^2 \mathfrak{N}_1 v_1 + e_2^2 \mathfrak{N}_2 v_2) X = \frac{4 \alpha T}{3} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \left(e_1 v_1 \frac{d \mathfrak{N}_1}{dT} + e_2 v_2 \frac{d \mathfrak{N}_2}{dT} \right),$$

d. h. dieselbe Gleichung, wie sie auch in I, p. 581, Formel (31) für irgend ein Metall aufgestellt ist, in welchem ein Wärmestrom, aber kein elektrischer Strom fließt.

Daher folgt nach (10) und (11):

$$\frac{d \xi_1}{dt} = \frac{4 \alpha T}{3} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot v_1 \cdot e_2 v_2 \mathfrak{N}_2 \frac{e_1 \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} - e_2 \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT}}{e_1^2 \mathfrak{N}_1 v_1 + e_2^2 \mathfrak{N}_2 v_2},$$

$$\frac{d \xi_2}{dt} = \frac{4 \alpha T}{3} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot v_2 \cdot e_1 v_1 \mathfrak{N}_1 \frac{e_2 \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} - e_1 \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT}}{e_1^2 \mathfrak{N}_1 v_1 + e_2^2 \mathfrak{N}_2 v_2}.$$

Setzt man diese Werte in (13) ein und berücksichtigt (17), so folgt der thermomagnetische transversale elektrische Effect Y aus:

$$(21) \quad Y = - \mathfrak{S} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{4 \alpha T}{3} \cdot \frac{e^2}{c \sigma} v_1 v_2 \left(\mathfrak{N}_1 \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} + \mathfrak{N}_2 \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} \right).$$

Die thermomagnetische transversale Temperaturdifferenz folgt aus (8) und (9), wenn man diese Gleichungen bez. mit \mathfrak{N}_1 und \mathfrak{N}_2 multiplicirt und addirt, da $j = 0$ ist, zu:

$$\frac{4 \alpha T}{3} \frac{\partial T}{\partial y} \left(\mathfrak{N}_1 \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} + \mathfrak{N}_2 \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} \right) = e (\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2) Y.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit (21), so folgt:

$$(22) \quad \frac{\partial T}{\partial y} = - \mathfrak{S} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{e^3}{c \sigma} v_1 v_2 (\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2).$$

Nach v. Etingshausen und Nernst¹⁾ wird der elektrische Effect Y dargestellt durch

$$(21) \quad Y_m = Q \cdot \mathfrak{S} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Q ist positiv, wenn man von der Eintrittsstelle des Wärmestromes zur Eintrittsstelle des erzeugten elektrischen Querstromes (wenn man einen solchen durch seitlich angelötete Drähte abnehmen würde) in die Platte durch eine Bewegung²⁾ im Sinne der das Magnetfeld ersetzenden Ampère'schen Ströme

1) A. v. Etingshausen u. W. Nernst, Wied. Ann. 29. p. 343. 1886; W. Nernst, Wied. Ann. 31. p. 760. 1887.

2) Im Aussenraum der Metallplatte; vgl. Anm. 2 auf p. 375.

gelangt. Bei dem von uns angenommenen positiven Sinne der Coordinatenaxen und des Magnetfeldes müsste nämlich bei positivem Q und positivem $\partial T/\partial x$ und ξ der Querstrom in den oberen Plattenrand eintreten. Die positive Elektrizität wird also in der Platte nach dem unteren Rand getrieben, und wenn man keinen Querstrom abnimmt, so muss der untere Plattenrand zu positivem Potential geladen werden, d. h. es muss eine positive elektrische Transversalkraft Y entstehen. Dies entspricht dem Vorzeichen in Formel (21'). Da nun $Y:Y_m = 1/c$, so ergibt der Vergleich von (21) und (21')

$$(23) \quad Q = -\frac{4\alpha T}{3} \frac{e^2}{\sigma} v_1 v_2 \left(\mathfrak{R}_1 \frac{d \log \mathfrak{R}_1}{dT} + \mathfrak{R}_2 \frac{d \log \mathfrak{R}_2}{dT} \right).$$

Dieser thermomagnetische elektrische Effect Q kann nach dieser Formel sowohl positiv, wie negativ sein, während er nach der Riecke'schen Theorie¹⁾ nur einerlei Vorzeichen hat. Thatsächlich werden verschiedene Vorzeichen beobachtet.²⁾

4. Die longitudinalen Effecte.

Wie in § 2 abgeleitet wurde, wird bei positivem j und ξ der untere Plattenrand wärmer, als der obere. Es besteht daher in der Querrichtung (y -Axe) eine Energieströmung, ohne dass eine Elektronenströmung nach dieser Richtung eintritt. Der Vorgang ist so zu denken, dass von dem unteren Rand der Platte nach dem oberen (wegen der stets bestehenden unregelmässigen Bewegung der Elektronen, gerade wie in der kinetischen Gastheorie) gleich viel Elektronen nach dem oberen Rand der Platte strömen, wie umgekehrt, dass aber die nach oben strömenden Elektronen wegen der höheren Temperatur der unteren Seite der Platte im Durchschnitt grössere Geschwindigkeiten haben, als die von oben nach unten strömenden Elektronen. Erstere Elektronen werden nun, wenn sie positiv geladen sind, durch das Magnetfeld nach rechts abgedrängt, dagegen die von oben nach unten fliegenden posi-

1) E. Riecke, Wied. Ann. **66**. p. 565. 1898.

2) Vgl. hierüber auch E. v. Everdingen, Communic. from the Phys. Lab. of Leiden Nr. 42. p. 16. 1898.

tiven Elektronen etwas weniger (wegen ihrer geringeren Geschwindigkeit) nach links, sodass in Summe eine Anhäufung von positiven Elektronen nach der rechten Seite der Platte zu entstehen wird, und zwar muss dieser Effect proportional zu \mathfrak{S}^2 sein, weil die transversale Temperaturdifferenz proportional zu \mathfrak{S} ist. Die Anhäufung von positiven Elektronen auf der rechten Seite der Platte (und die gleichzeitig eintretende Anhäufung von negativen Elektronen auf der linken Seite der Platte) muss aber eine dem Strom j entgegenwirkende elektromotorische Kraft erzeugen, was auch als scheinbare Widerstandsvermehrung des Metalles gedeutet werden kann, welche proportional zu \mathfrak{S}^2 sein muss. Hand in Hand mit diesem elektrischen Longitudinaleffect muss ein thermischer Longitudinaleffect stehen (vgl. § 2), da durch Concentrationsänderungen der Elektronen stets ein Temperaturgefälle erzeugt wird. In den Formeln (8) bis (12) würden diese Longitudinaleffecte dadurch berücksichtigt werden, dass man, wenn j gegeben ist, nicht, wie wir es oben § 2 gethan haben, $\partial T/\partial x=0$ setzt. Man müsste also, um die Longitudinaleffecte zu berücksichtigen, nach dieser Vorstellung aus gegebenem j das $\partial T/\partial x$ berechnen. Dagegen ist der elektrische Longitudinaleffect in den Schlussformeln, welche die Transversaleffecte als Function von j enthalten, eliminirt, da X , welches die Summe der äusseren, den Strom j zunächst einleitenden elektrischen Kraft und der inneren durch das Magnetfeld und j entstehenden elektrischen Kraft ist, eliminirt ist.

Jedenfalls ergibt sich, dass die Longitudinaleffecte mit \mathfrak{S}^2 proportional sind, mit dem Vorzeichen der Feldstärke \mathfrak{S} sich nicht umkehren, und bei genügend schwachen Feldern ignorirt werden können, obwohl die Transversaleffecte beobachtbar sein können.

5. Numerische Verwertung der Beobachtungen.

Bei den besprochenen Erscheinungen treten sechs unbekannte, für das Metall charakteristische Temperaturfunctionen auf, nämlich

$$\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, v_1, v_2, \frac{d \mathfrak{N}_1}{dT}, \frac{d \mathfrak{N}_2}{dT}.$$

Wir wollen diese sechs Unbekannten durch andere Bezeichnungen ersetzen, nämlich durch:

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{d T} = x_1, & \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{d T} = x_2, & e v_1 = y_1, & e v_2 = y_2, \\ e^2 \mathfrak{N}_1 v_1 = \sigma_1, & e^2 \mathfrak{N}_2 v_2 = \sigma_2. \end{cases}$$

σ_1 und σ_2 bedeuten die elektrischen Leitfähigkeiten der positiven und negativen Elektronen nach elektrostatischem Maasse [vgl. I, p. 582, Formel (37)]. Ferner sei zur Abkürzung gesetzt:

$$(25) \quad \frac{4}{3} \left(\frac{\alpha}{e} \right) T = p.$$

Man kann den Wert der universellen Constanten α/e in folgender Weise nach einem Verfahren von Reinganum¹⁾ bestimmen, welches besser ist, als das früher von mir eingeschlagene (I, p. 577). Nach I, p. 572 ist

$$(26) \quad \alpha T = \frac{1}{2} m u^2,$$

wobei m scheinbare Masse eines Elektrones, u seine mittlere Translationsgeschwindigkeit bedeutet. Es kann aber, nach der Voraussetzung meiner Theorie, m und u sich auch auf ein Gasmolecül beziehen. Bei 18° C., d. h. $T = 291$, ist nun für Wasserstoff nach der kinetischen Gastheorie

$$u^2 = 3,605 \cdot 10^{10},$$

ferner ergibt sich aus der Elektrolyse für ein zweiatomiges Wasserstoffmolecül:

$$\frac{2e}{m} = 2,896 \cdot 10^{14};$$

setzt man diese Werte in (26) ein, so folgt:

$$(27) \quad \frac{\alpha T}{e} = 1,242 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{\alpha}{e} = 4,27 \cdot 10^{-7}$$

(anstatt $\alpha/e = 4,42 \cdot 10^{-7}$, welches ich in I, p. 577 berechnet habe).

Daher ist bei 18° C.:

$$(28) \quad p = 1,656 \cdot 10^{-4}.$$

1) M. Reinganum, Ann. d. Phys. 2. p. 398. 1900.

Unter Benutzung der Bezeichnungen (24) und (25) wird nun nach (19) der Rotationscoefficient R des Halleffectes:

$$(29) \quad R = \frac{e}{\sigma} \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_1 + x_2},$$

ferner der thermomagnetische Coefficient Q nach (23):

$$(30) \quad Q = -\frac{\rho}{\sigma} (\sigma_1 x_1 y_2 + \sigma_2 x_2 y_1).$$

Führt man ferner für den galvanomagnetischen Temperatureffect einen Coefficienten P ein nach der Gleichung:

$$(31) \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\mathfrak{S} \cdot j_m \cdot P,$$

so ergibt der Vergleich mit Formel (20):

$$(32) \quad P = \frac{1}{\rho \sigma} \cdot \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}.$$

Führt man schliesslich für den thermomagnetischen Temperatureffect einen Coefficienten S ein nach der Gleichung:

$$(33) \quad \frac{\partial T}{\partial y} = + \mathfrak{S} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot S,$$

so ergibt der Vergleich mit (22):

$$(34) \quad S = \frac{1}{e \sigma} (\sigma_2 y_1 - \sigma_1 y_2).$$

Ferner besteht noch die Relation:

$$(35) \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma.$$

Zur Berechnung der sechs Unbekannten aus Beobachtungen wären nun aber erst fünf Gleichungen aufgestellt, nämlich (29), (30), (32), (34) und (35). Als sechste Gleichung kann man zweckmässig die Abweichung des Metalles vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz heranziehen. Nach I, p. 582, Formel (38) ist das Verhältniss der Wärmleitfähigkeit k zur elektrischen Leitfähigkeit σ :

$$(36) \quad \frac{k}{\sigma} = \frac{4}{3} \left(\frac{\alpha}{e} \right)^2 T \left\{ 1 + 2 T \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2} (x_1 + x_2) \right\}.$$

Setzen wir:

$$(37) \quad W = 2 T \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2} \cdot (x_1 + x_2),$$

so giebt diese Grösse W die Abweichung des Metalles vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz an, und nach (36) und (37)

kann sie in folgender Weise berechnet werden, wenn $k:\sigma$ beobachtet wird. Es ist:

$$(38) \quad 1 + W = \frac{k/\sigma}{0,71} 10^{10},$$

falls k/σ auf 18° C. bezogen wird.

Aus (32) und (37) folgt durch Elimination von $x_1 + x_2$:

$$(39) \quad y_1 + y_2 = P p \sigma \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma_1 \sigma_2},$$

daher gewinnt man aus (34) und (39):

$$(40) \quad \begin{cases} y_1 = S c + P p \sigma \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_2}, \\ y_2 = - S c + P p \sigma \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_1}. \end{cases}$$

Aus (29) und (37) folgt nun:

$$(41) \quad y_1 x_2 - y_2 x_1 = \frac{R \sigma}{c} \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma_1 \sigma_2};$$

combinirt man diese Gleichung mit (30), so folgt:

$$(42) \quad \begin{cases} y_1 x_2 = \frac{R \sigma}{c} \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_2} - \frac{Q}{p}, \\ y_2 x_1 = - \frac{R \sigma}{c} \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_1} - \frac{Q}{p}. \end{cases}$$

Durch Division dieser Gleichungen durch die Gleichungen (40) folgt:

$$(43) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\frac{R \sigma}{c} \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_1} + \frac{Q}{p}}{S c - P p \sigma \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_1}}, \\ x_2 = \frac{\frac{R \sigma}{c} \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_2} - \frac{Q}{p}}{S c + P p \sigma \cdot \frac{W}{2 T} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_2}}. \end{cases}$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen folgt, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$(44) \quad \frac{R \sigma}{c} \cdot \frac{W}{2 T} = \alpha, \quad \frac{Q}{p} = \beta, \quad P p \sigma \cdot \frac{W}{2 T} = \gamma, \quad S c = \delta,$$

$$(45) \quad x_1 + x_2 = \frac{(\alpha \delta + \beta \gamma) \frac{\sigma^2}{\sigma_1 \sigma_2}}{\delta^2 - \gamma^2 \frac{\sigma^2}{\sigma_1 \sigma_2} + \delta \gamma \left(\frac{\sigma}{\sigma_2} - \frac{\sigma}{\sigma_1} \right)}.$$

Eliminiert man nun durch (37) $x_1 + x_2$, so entsteht:

$$(46) \quad \frac{W}{2T} = \frac{\alpha \delta + \beta \gamma}{\delta^2 - \gamma^2 \frac{\sigma^2}{\sigma_1 \sigma_2} + \delta \gamma \left(\frac{\sigma}{\sigma_2} - \frac{\sigma}{\sigma_1} \right)}.$$

Setzt man daher schliesslich noch:

$$(47) \quad \frac{W}{2T} \cdot \frac{1}{\alpha \delta + \beta \gamma} = \varepsilon, \quad \frac{\sigma_1}{\sigma} = \eta, \quad \frac{\sigma_2}{\sigma} = 1 - \eta,$$

so folgt für η die quadratische Gleichung:

$$(48) \quad \eta^2(1 - \varepsilon \delta^2) + \eta[\varepsilon \delta(\delta + 2\gamma) - 1] - \varepsilon \gamma(\gamma + \delta) = 0.$$

Hat man diese Gleichung für η aufgelöst, so ergeben sich nach (40) und (43) die charakteristischen Eigenschaften des Metalles durch die Formeln:

$$(49) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\alpha + \beta \eta}{-\gamma + \delta \eta}, & x_2 = \frac{\alpha - \beta(1 - \eta)}{\gamma + \delta(1 - \eta)}, \\ y_1 = \delta + \frac{\gamma}{1 - \eta}, & y_2 = -\delta + \frac{\gamma}{\eta}. \end{cases}$$

Da die Gleichung (48) quadratisch in η ist, *so folgen, falls beide Wurzeln η positiv und kleiner als 1 ausfallen, zwei mögliche Lösungssysteme für die sechs Beobachtungen: P, Q, R, S, W, σ . Dies ist nun thatsächlich der Fall.* Welche Lösung die richtige ist, kann man mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit aus dem Thomseffect des Metalles beurteilen. Nach I, p. 586 ist nämlich die in der Zeiteinheit entwickelte, nach mechanischem Maass gemessene Thomsonwärme q zwischen zwei Querschnitten eines Leiters, deren Temperaturdifferenz dT beträgt, falls ein Strom der Stärke i (elektrostatisch gemessen) im Sinne des Temperaturgefälles fliesst:

$$(50) \quad q = p \cdot i dT \left\{ \frac{\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2}{\sigma} + \frac{3}{4T} \frac{d}{dT} \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} T \right] \right\}.$$

Einen genaueren Aufschluss über diese Thomsonwärme auf Grund der berechneten Werte $x_1, x_2, \sigma_1, \sigma_2$ könnte man nun allerdings nur geben, wenn man auch den Temperaturcoefficienten

$$-\frac{d}{dT} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} \right)$$

kennt, d. h. wenn man auch die Temperaturcoefficienten der sechs Grössen P, Q, R, S, W, σ beobachtet. Da indes wahr-

scheinlich bei allen Metallen die Leitfähigkeit der einen Elektronengattung die der anderen sehr übertrifft¹⁾, so ist annähernd

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} = \pm 1,$$

und man kann durch Vernachlässigung dieses Temperaturcoefficienten annähernd setzen (vgl. I, p. 587):

$$(51) \quad q = p \cdot i d T \left\{ \frac{\sigma_1}{\sigma} x_1 - \frac{\sigma_2}{\sigma} x_2 + \frac{3}{4 T} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} \right\}.$$

Da nun für die beiden möglichen Lösungen von x_1 , x_2 , σ_1 , σ_2 der Thomseffect verschieden ausfällt, bei Wismut z. B. sogar dem Vorzeichen nach, so kann man durch Vergleich mit der Beobachtung über Q die richtige Lösung erkennen.

Um zu zuverlässigen Schlüssen zu gelangen, müssten an demselben Metallstück sämtliche sechs Grössen P , Q , R , S , W , σ und womöglich (zur Prüfung der Theorie) auch der Thomson-effect q beobachtet werden. Leider liegen derartige Beobachtungen nicht vor, v. Ettingshausen und Nernst²⁾ haben P , Q , R , σ , v. Everdingen³⁾ hat P , Q , R , S , σ an derselben Wismutplatte bestimmt.

Wir wollen zunächst erstere Beobachtungen benutzen, und zwar die für das schwächste Magnetfeld ($\xi = 2800$) erhaltenen Zahlen, um die Störung durch Longitudinaleffekte möglichst zu vermeiden. Da v. Ettingshausen und Nernst bei einem Strom der elektromagnetisch gemessenen Dichte $j_m = 2,72$ und im Magnetfeld $\xi = 2800$ eine Temperaturdifferenz von $0,962^\circ$ an einer 2,2 cm breiten Platte beobachtet haben, so ist

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -0,437$$

und nach (31):

$$P = +0,574 \cdot 10^{-4}.$$

1) Vor allem gilt dies bei denjenigen reinen Metallen, welche das Wiedemann-Franz'sche Gesetz befolgen, für welche also W sehr klein ist.

2) A. v. Ettingshausen u. W. Nernst, Wied. Ann. **33**. p. 474. 1888.

3) E. van Everdingen, Communic. from the Physic. Laborat. of Leiden Nr. 42. 1898.

Ferner ergab sich:

$$R^1) = -9,3, \quad Q = -0,216, \quad \sigma_m = 4,8 \cdot 10^{-6},$$

d. h.

$$\sigma = c^2 \cdot \sigma_m = 43,2 \cdot 10^{14}.$$

Den Wert von S entnehme ich einer früheren Beobachtung von v. Etingshausen²⁾, nach der für $\xi = 9500$ bei einer 2,2 cm breiten Platte eine transversale Temperaturdifferenz von $\frac{1}{8}^\circ$ beobachtet wurde, während die longitudinale Temperaturdifferenz der (wahrscheinlich) 4,8 cm langen Platte etwa 80° betrug. Es ist also bei $\partial T / \partial x = 16,7$ und $\xi = 9500$:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -0,0568.^3)$$

Daraus ergibt sich nach (33):

$$S = -3,6 \cdot 10^{-7}.$$

Schliesslich entnehme ich die Grösse W , welche die Abweichung des Wismuts vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz ergibt, einer Beobachtung von Jaeger und Diesselhorst⁴⁾, derzufolge bei 18°C . ist $k/\sigma \cdot 10^{10} = 1,068$ (vgl. I, p. 578). Daher folgt aus (38):

$$W = 0,505.$$

Die Benutzung dieses Zahlwertes für W bewirkt eventuell eine erhebliche Unsicherheit in den Resultaten, da bisher nicht bekannt ist, ob in verschiedenen Wismutproben W stark variiert, oder nicht. Ich will hier die Berechnung aber angeben, um die zu erwartenden Grössenordnungen für η , x_1 , x_2 , y_1 , y_2 mitzuteilen, und um zu zeigen, dass man nach der hier dargestellten Theorie zu keinen Unmöglichkeiten, d. h. Widersprüchen kommt.

1) Graphisch interpolirt für $\xi = 2800$.

2) A. v. Etingshausen, Wied. Ann. **33**. p. 136. 1888. Ich vermute, dass diese Beobachtungen sich auf dieselbe Wismutplatte beziehen, wie die später gemeinsam mit Nernst ausgeführten Beobachtungen, aus denen die Werte P , Q , R entnommen sind.

3) Das Vorzeichen ergibt sich nach der von v. Etingshausen l. c. p. 136 gegebenen Regel.

4) W. Jaeger u. H. Diesselhorst, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin **38**. 1899.

Die quadratische Gleichung (48) ergibt für η die beiden Wurzeln

$$\eta = 0,0234, \quad \eta = 0,960.$$

Da beide kleiner als 1 sind, und da auch für beide Wurzeln y_1 und y_2 positiv ausfällt, so giebt es also thatsächlich zwei verschiedene Lösungssysteme für die benutzten Werte P, Q, R, S, W . Da aber das der zweiten Wurzel $\eta = 0,960$ entsprechende Lösungssystem eine sehr grosse positive Thomsonwärme nach (51) ergibt, während bei reinem Wismut die Thomsonwärme negativ ist, so ist die Lösung $\eta = 0,0234$ zu benutzen.

Den wesentlichen Anteil an der Leitfähigkeit des Wismuts besitzen also die negativ geladenen Elektronen.

Mit $\eta = 0,0234$ berechnet sich nun nach (49):

$$\begin{aligned} x_1 &= + 3,30 \cdot 10^{-2}, & x_2 &= + 0,521 \cdot 10^{-2}, \\ y_1 &= + 2,54 \cdot 10^4, & y_2 &= + 153 \cdot 10^4. \end{aligned}$$

(Rückwärts berechnet sich mit diesen Constanten

$$\begin{aligned} P &= + 0,571 \cdot 10^{-4}, & Q &= - 0,209, & R &= - 9,15, \\ S &= - 0,367 \cdot 10^{-6}, & W &= + 0,51.) \end{aligned}$$

Nach (51) wird die Thomsonwärme

$$q = - p \cdot i d T \cdot 0,66 \cdot 10^{-2}.$$

Falls die Stromstärke $i_m = 1$ nach elektromagnetischem Maasse fliesst, d. h. falls $i = 3 \cdot 10^{10}$ ist, und $d T = 1$ ist, so wird daher mit Benutzung von (28):

$$q = - 1,66 \cdot 3 \cdot 0,66 \cdot 10^4 = - 3,29 \cdot 10^4 \text{ Erg},$$

oder

$$q = - 7,85 \cdot 10^{-4} \text{ g-Cal.},$$

während beobachtet ist¹⁾

$$q = - 0,1 \cdot 10^{-4} \text{ g-Cal.}$$

Die berechnete Thomsonwärme ist also dem absoluten Werte nach viel zu gross, nämlich im Verhältnis 78,5:1. Es

1) Entnommen E. Riecke, *Experimentalphysik* 2. p. 325.
Annalen der Physik. IV. Folge. 3. 25

ist aber zu berücksichtigen, dass 1. die Formel (51) nicht streng ist (vgl. oben p. 382) und 2. dass durch geringe Verkleinerung des Beobachtungsergebnisses für Q (thermomagnetischer elektrischer Effect) sofort ein viel kleinerer Wert für die Thomsonwärme berechnet wird. Nimmt man z. B. für Q den Wert $Q = -0,132$, wie er bei einer früheren Beobachtung (andere Wismutplatte) von Nernst¹⁾ gefunden wurde, während man an den Werten für P, R, S, W, σ festhält, so würde folgen:

$$\begin{aligned} q &= 0,049, & x_1 &= 3,36 \cdot 10^{-2}, & x_2 &= -1,55 \cdot 10^{-2}, \\ & & y_1 &= 2,65 \cdot 10^4, & y_2 &= 73,6 \cdot 10^4, \\ q \text{ (für } i_m = 1) &= +16,7 \cdot 10^{-4} \text{ g-Cal.} \end{aligned}$$

q variirt also sehr stark je nach der Annahme von Q , und für einen zwischen $-0,21$ und $-0,13$ liegenden Wert von Q würde sich die Thomsonwärme berechnen lassen zu einem der Beobachtung entsprechenden negativen Werte. Das starke Schwanken des berechneten Thomsons effectes je nach der Annahme über die beobachteten Grössen P, Q, R, S, W, σ erklärt sich dadurch, dass die einzelnen Glieder der Klammer der rechten Seite von (51) verschiedene Vorzeichen haben. Das erste Glied ist für Wismut jedenfalls positiv, das letzte jedenfalls negativ, das mittlere Glied, welches x_2 enthält, fällt aber je nach der Wahl der Beobachtungsergebnisse positiv oder negativ aus und kann dadurch das Vorzeichen von q direct beeinflussen. Die einzelnen Terme der Klammer in (51) sind von der Grössenordnung 10^{-2} , wenn diese eine algebraische Summe der Grösse $0,84 \cdot 10^{-4}$ ergeben sollen, wie es der Beobachtung über q entsprechen würde, so müssen sich also die einzelnen Terme in (51) nahezu aufheben. Hierdurch erklärt es sich vielleicht auch, dass der Thomsons effect durch die Reinheit und den Zustand des Metalles ausserordentlich stark beeinflusst zu werden scheint (wie schon das Schwanken der Zahlen verschiedener Beobachter beweist); der Wert von x_1 und x_2 kann nämlich dadurch jedenfalls stark beeinflusst werden, wie schon die Verschiedenheit des Halleffectes in verschiedenen Wismutsorten beweist, und folglich wird auch q stark schwanken, eventuell sogar im Vorzeichen.

1) W. Nernst, Wied. Ann. **31**. p. 775. 1887.

Bei den angestellten Berechnungen ist aber auch der Wert von S sehr unsicher. Nimmt man ihn, wie es Everdingen (l. c.) gethan hat¹⁾, zu $S = -0,6 \cdot 10^{-6}$ an, anstatt zu $S = -0,367 \cdot 10^{-6}$ und legt man sonst die v. Eittingshausen-Nernst'schen Zahlen $P = +0,574 \cdot 10^{-4}$, $Q = -0,216$, $R = -9,3$, $\sigma_m = 4,8 \cdot 10^{-6}$, $W = 0,505$ zu Grunde, so ergeben sich folgende beide Lösungssysteme:

$$\text{I. } \eta = 0,023,$$

$$x_1 = +3,29 \cdot 10^{-2}, \quad x_2 = +0,725 \cdot 10^{-2},$$

$$y_1 = +1,83 \cdot 10^4, \quad y_2 = +156 \cdot 10^4,$$

$$\text{oder II. } \eta = 0,933,$$

$$x_1 = +4,50 \cdot 10^{-2}, \quad x_2 = -3,09 \cdot 10^{-2},$$

$$y_1 = +51,2 \cdot 10^4, \quad y_2 = +5,61 \cdot 10^4.$$

Ersteres Lösungssystem ergibt eine negative Thomsonwärme von zu grossem absolutem Werte, nämlich es ist für I:

$$x_1 \frac{\sigma_1}{\sigma} - x_2 \frac{\sigma_2}{\sigma} + \frac{3}{4T} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} = -0,88 \cdot 10^{-2},$$

während es nach dem auf p. 385 angeführten beobachteten Werte des Thomseffectes sein sollte $-0,84 \cdot 10^{-4}$. Das Lösungssystem II ergibt aber eine viel zu grosse positive Thomsonwärme. Nämlich es ist für II:

$$x_1 \frac{\sigma_1}{\sigma} - x_2 \frac{\sigma_2}{\sigma} + \frac{3}{4T} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} = +4,63 \cdot 10^{-2}.$$

Das Lösungssystem I ist also das wahrscheinlichere. Es unterscheidet sich nicht wesentlich von dem auf p. 385 gegebenen Lösungssystem.

Wenn $S = 0$ wäre, d. h. wenn keine thermomagnetische Temperaturdifferenz bestände, so würde sich bei Annahme der oben benutzten v. Eittingshausen-Nernst'schen Resultate ergeben:

$$\eta = 0,0243, \quad x_1 = +3,33 \cdot 10^{-2}, \quad x_2 = +0,34 \cdot 10^{-2},$$

$$y_1 = 3,64 \cdot 10^4, \quad y_2 = 149 \cdot 10^4.$$

1) Die Bezeichnung d bei Everdingen deckt sich mit unserer Bezeichnung S .

Schliesslich hat Everdingen (l. c.) folgende Zahlen beobachtet (die Buchstaben A, B, C, D decken sich mit seiner Bezeichnung a, b, c, d):

$$A = P \cdot \sigma_m = +1,05 \cdot 10^{-10}, \quad B = R \cdot \sigma_m = -8,83 \cdot 10^{-5},$$

$$C = -Q = 0,00456, \quad D = S = -1,63 \cdot 10^{-6},$$

woraus folgt: $\sigma_m = 8,6 \cdot 10^{-6}$,

$$P = +1,22 \cdot 10^{-5}, \quad R = -10,3$$

und mit Annahme von $W = 0,5$:

$$\eta = 0,0039.$$

Dabei würde sich ein sehr grosser Wert von $x_1 + x_2$ ergeben, den ich aber für unwahrscheinlich halte aus folgendem Grunde: Wenn meine Theorie richtig ist, so muss $x_1 + x_2$ eine bei allen Metallen gleiche Function der Temperatur sein. Nun ergibt sich nach I, p. 600 aus der Combination des Peltiereffectes, des Thomsoneffectes und des thermoelektrischen Verhaltens:

$$T(x_1 + x_2) = \varphi(T) \cong 1,73,$$

d. h.

$$x_1 + x_2 < 0,6 \cdot 10^{-2}.$$

Ich glaube daher, dass das Magnetfeld bei den Versuchen von Everdingen schon zu stark war (es war $\mathfrak{H} = 6100$), um die Longitudinaleffecte, welche bei Wismut besonders stark auftreten, vernachlässigen zu können.

Nach der Bedeutung von $\sigma_1, \sigma_2, y_1, y_2$ nach (24) würde sein:

$$e \mathfrak{N}_1 = \frac{\sigma_1}{y_1}, \quad e \mathfrak{N}_2 = \frac{\sigma_2}{y_2}.$$

Legt man das auf p. 385 berechnete Wertsystem zu Grunde, nach welchem ist

$$y_1 = 2,54 \cdot 10^4, \quad y_2 = 153 \cdot 10^4,$$

$$\sigma_1 = \eta \cdot \sigma = 1,05 \cdot 10^{14}, \quad \sigma_2 = 42,1 \cdot 10^{14},$$

und nimmt man den aus den J. J. Thomson'schen Versuchen 1) folgenden Wert $e = 6 \cdot 10^{-10}$ an, so würden sich die im cm^3 bei 18°C . enthaltenen Elektronenzahlen ergeben zu:

$$\mathfrak{N}_1 = 0,69 \cdot 10^{19}, \quad \mathfrak{N}_2 = 0,46 \cdot 10^{19},$$

d. h. von derselben Grössenordnung, wie die im cm^3 Gas bei 1 Atm. Druck enthaltenen Molecülzahlen.

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) 46. p. 528. 1898.

6. Weitere Prüfung der Theorie.

Eine Prüfung der Theorie ergibt sich namentlich dann, wenn man an verschiedenen Metallen die vier galvano- und thermomagnetischen Transversaleffecte¹⁾, die elektrische und thermische Leitfähigkeit bestimmt. Dann muss sich nämlich nach der Theorie (vgl. Teil I) sofort das gegenseitige elektrische Verhalten der Metalle, d. h. der Peltiereffect und ihr thermoelektrisches Verhalten, quantitativ ergeben. Die Beobachtung des Thomsoneffectes in den Metallen ist mindestens wegen des Vorzeichens wichtig, wegen der oben p. 386 besprochenen Verhältnisse wird sich aber der Thomsoneffect aus den galvano- und thermomagnetischen Effecten wegen des grossen Einflusses von Beobachtungsfehlern nicht gut quantitativ genau berechnen lassen. Der umgekehrte Weg, aus dem Thomsoneffect, den vier galvano- und thermomagnetischen Effecten und der elektrischen Leitfähigkeit die thermische Leitfähigkeit, d. h. auch die Abweichung vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz (die Grösse W) zu bestimmen, würde jedenfalls vorzuziehen sein. Die Lösung dieses Weges ist nach den Gleichungen (37), (43) und (51) sofort ersichtlich, da dies, falls q aus der Beobachtung entnommen wird, vier Gleichungen sind zur Berechnung der Unbekannten W , η , x_1 und x_2 . Dieser Weg wurde aber hier nicht betreten, weil die Thomsonwärme notwendig an demselben Wismutstück beobachtet werden müsste, für welches auch die thermo- und galvanomagnetischen Effecte beobachtet werden. Ausserdem kennt man nicht den Einfluss des in (51) vernachlässigten Temperaturcoefficienten

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} \right),$$

1) Es ist zu berücksichtigen, dass in der Theorie vorausgesetzt wurde, dass kein Transversalstrom der Platte entnommen wird. Die elektrischen Transversaleffecte müssten also entweder dadurch gemessen werden, dass man durch Gegenschaltung einer elektromotorischen Kraft in dem durch die Hallelektroden gebildeten Drahtkreise den Transversalstrom auf Null bringt, oder man muss mindestens bei der Messung dieses Transversalstromes ein Galvanometer von sehr grossem Widerstand benutzen.

welcher erst durch Beobachtung der Abhängigkeit der vier galvano- bez. thermomagnetischen Transversaleffecte von der Temperatur ermittelt werden kann. Nur das eine möchte ich hier bemerken, dass man schon aus der Grössenordnung des Thomseffectes beim Wismut sowie aus W und den beiden thermomagnetischen Effecten Q und S auf den Wert von η annähernd schliessen kann. Es ist nämlich nach (51) und dem beobachteten Werte für den Thomseffect q :

$$(52) \quad \begin{cases} \frac{\sigma_1}{\sigma} x_1 - \frac{\sigma_2}{\sigma} x_2 + \frac{3}{4T} \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} = x_1 - (x_1 + x_2) \frac{\sigma_2}{\sigma} \\ \quad \quad \quad + \frac{3}{4T} \left(2 \frac{\sigma_1}{\sigma} - 1 \right) = 0,84 \cdot 10^{-4}. \end{cases}$$

Nun ist nach (49), da η klein ist und α und γ von etwa derselben Grösse, wie β und δ sind, annähernd

$$x_1 = -\frac{\alpha}{\gamma} = +3,24 \cdot 10^{-2},$$

wenn die auf p. 384 angegebenen Beobachtungsergebnisse benutzt werden. Ferner ist

$$\frac{3}{4T} \left(2 \frac{\sigma_1}{\sigma} - 1 \right) = \frac{3}{4T} (2\eta - 1)$$

annähernd (wenn man $\eta = 0$ setzt) gleich $-0,26 \cdot 10^{-2}$. Damit nun in (52) auf der linken Seite der Gleichung überhaupt die Grössenordnung der rechten Seite, nämlich 10^{-4} , erhalten wird, muss annähernd sein:

$$(x_1 + x_2) \frac{\sigma_2}{\sigma} = x_1 - \frac{3}{4T} = +3 \cdot 10^{-2}.$$

Nun ist aber nach (37):

$$(x_1 + x_2) \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2} = \frac{W}{2T} = 0,86 \cdot 10^{-3}.$$

Daher folgt durch Division dieser beiden letzten Gleichungen:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = \eta = 2,86 \cdot 10^{-2} = 0,029.$$

Aus der Grössenordnung des Thomseffectes folgt also annähernd dasselbe Verhältnis η der Leitfähigkeit der positiven Elektronengattung zur Gesamtleitfähigkeit, wie aus den vier beobachteten thermo- und galvanomagnetischen Transversaleffecten.

Eine Prüfung der Theorie ergibt sich vor allem auch dadurch, dass $x_1 + x_2$ bei allen Metallen derselbe Zahlwert bei derselben Temperatur sein müsste. Aus den hier und im I. Teil (p. 600) gemachten Berechnungen lässt sich hierüber nichts Zuverlässiges weder im bestätigenden noch im widersprechenden Sinne sagen, da die zur Berechnung herangezogenen Beobachtungen sich auf ganz verschiedene Metallproben beziehen, und es ist bekannt, wie sehr der Thomsoneffect, der Peltiereffect, das thermoelektrische Verhalten, die galvano- und thermomagnetischen Effecte und die elektrische sowie thermische Leitfähigkeit in Metallen verschiedener Herkunft und Bearbeitung schwanken.

v. Ettingshausen und Nernst¹⁾ haben die Vermutung ausgesprochen, dass der Halleffect mit der thermoelektrischen Stellung des Metalles in einer nahen Beziehung stehen dürfte. In der That ist es auffallend, dass gerade die Metalle (Wismut und Antimon), welche die grössten Differenzen in ihren Hall'schen Rotationscoefficienten R besitzen, auch am stärksten thermoelektrisch gegeneinander wirksam sind.

In der folgenden Tabelle sind die Metalle in der Reihenfolge des Coefficienten R , wie er durch v. Ettingshausen und Nernst gemessen wurde, angeführt, ferner ist R , sowie das Product $\sigma' R$ angegeben, wobei σ' die relative elektrische Leitfähigkeit bei 0° C. in Bezug auf Quecksilber bedeutet (nach den Tabellen von Landolt und Börnstein), sowie schliesslich die thermoelektrische Spannungsreihe nach Matthiesen²⁾ angegeben. Es handelt sich nur um angenäherte Werte von R und σ' . Auch die Stellung der Metalle in der thermoelektrischen Reihe ist keine scharf präcisirte, da sie durch Reinheit und Bearbeitung der Metalle beeinflusst wird, aber angenähert giebt die thermoelektrische Reihe ein richtiges Bild, da die secundären Einflüsse den Ort eines Metalles in der thermoelektrischen Reihe nur innerhalb gewisser Grenzen verändern.

1) A. v. Ettingshausen u. W. Nernst, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **94**, p. 560. 1886.

2) Matthiesen, Pogg. Ann. **103**, p. 412. 1858.

| Metall | Reihe des Halleffectes | | $R \sigma'$ | Thermo- elektrische Reihe |
|-----------|------------------------|-----------|-------------|---------------------------------|
| | R | σ' | | |
| Wismut | -9 | 0,8 | -7,2 | Wismut |
| Nickel | -0,024 | 7,4 | -0,18 | Kobalt |
| Natrium | -0,0025 | 18,3 | -0,043 | Nickel |
| Palladium | -0,0012 | 6,9 | -0,008 | Palladium |
| Magnesium | -0,0009 | 23 | -0,021 | Natrium |
| Silber | -0,0008 | 60 | -0,048 | Aluminium |
| Gold | -0,0007 | 44 | -0,031 | Magnesium |
| Kupfer | -0,0005 | 56 | -0,028 | Blei |
| Aluminium | -0,0004 | 31 | -0,012 | Zinn |
| Platin | -0,0002 | 6,1 | -0,0015 | Kupfer |
| Zinn | -0,00004 | 8,5 | -0,0003 | Platin |
| Blei | +0,00009 | 4,9 | +0,0004 | Gold |
| Zink | +0,0004 | 16,5 | +0,007 | Silber |
| Cadmium | +0,0006 | 14 | +0,008 | Zink |
| Kobalt | +0,0046 | 9,7 | +0,045 | Cadmium |
| Eisen | +0,0113 | 8 | +0,09 | Eisen |
| Antimon | +0,192 | 2,0 | +0,38 | Antimon |
| Tellur | +530 | 0,00044 | +0,23 | Tellur |

Die Endglieder der thermoelektrischen Reihe und der Reihe des Halleffectes, wie Wismut, Nickel, Natrium, Palladium, Magnesium, Zink, Cadmium, Eisen, Antimon, Tellur stimmen überein, eine eclatante Ausnahme dagegen bildet Kobalt, und ebenfalls ist bei den Mittelgliedern beider Reihen kein paralleler Gang zu constatiren. Auch fand Nernst¹⁾ an Zinn-Wismutlegirungen die thermoelektrische Stellung nicht genau dem Halleffect entsprechend, aber allerdings wiederum angenähert. Aber man kann wohl behaupten, dass, abgesehen vom Kobalt, die Stellung eines Metalles im grossen und ganzen, d. h. ob es am oberen Ende, am unteren Ende, oder in der Mitte steht, für die thermoelektrische Reihe und für die Reihe des Halleffectes dieselbe ist. Auch wenn man die Metalle nach dem Werte von $R \sigma'$ ordnet, so wird, abgesehen vom Palladium, die roh betrachtete Stellung des einen Metalles — ob am Ende oben, unten, oder in der Mitte — nicht geändert.

1) W. Nernst, Wied. Ann. 33. p. 484. 1888.

Wie stellt sich nun die hier gegebene Theorie zu dieser auffallenden Thatsache? Nach I, p. 596, Formel (73) hängt die thermoelektrische Stellung zweier Metalle a und b wesentlich von dem Werte ab:

$$\log \frac{\mathfrak{R}_1^a}{\mathfrak{R}_1^b} = - \log \frac{\mathfrak{R}_2^a}{\mathfrak{R}_2^b},$$

da nach der in I, p. 599 gegebenen Tabelle der zu diesem Logarithmus noch hinzutretende Term φ (a b) wesentlich kleiner ist und das Vorzeichen der thermoelektrischen Kraft nicht beeinflusst.

Nun ist nach (24):

$$\frac{\mathfrak{R}_1^a}{\mathfrak{R}_1^b} = \left(\frac{\sigma_1}{y_1} \right)^a : \left(\frac{\sigma_1}{y_1} \right)^b.$$

Ferner ist nach (24):

$$R \sigma = c \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_1 + x_2}.$$

Nach der Theorie ist nun $x_1 + x_2$ eine universelle Function der Temperatur. Ob nun eine grosse negative Hallconstante, oder ein grosses negatives Product $R \sigma$ durch einen grossen positiven Betrag von

$$y_2 x_1 = e v_2 \frac{d \log \mathfrak{R}_1}{dT}$$

herbeigeführt wird, oder durch einen grossen negativen Betrag von $y_1 x_2$, oder durch beides, lässt sich allgemein vom Standpunkt der Theorie aus nicht beantworten¹⁾ und da ausserdem ein allgemeiner Zusammenhang zwischen σ_1 , σ_2 , x_1 , x_2 theoretisch nicht besteht, so lässt sich also auch nach dieser

1) Der verschiedene Halleffect an verschiedenen Wismutplatten wird vermutlich wesentlich durch Verschiedenheit der Grösse

$$x_1 = \frac{d \log \mathfrak{R}_1}{dT}$$

herbeigeführt. Es beobachtete nämlich v. Ettingshausen (Wied. Ann. 31. p. 744. 1887), dass bei zwei Wismutplatten, in welchen der Halleffect im Verhältnis 1 : 1,6 stand, die galvanomagnetischen Temperaturdifferenzen (bezogen auf gleiche Stromdichte) nur wenig verschieden waren. Nach Formel (32) ist also zu schliessen, dass $y_1 + y_2$ in beiden Platten nahe denselben Wert hatten.

Theorie ein directer Zusammenhang zwischen der Hallconstante R und der thermoelektrischen Stellung des Metalles nicht voraussagen. Die Prüfung der Theorie kann nur darin gefunden werden, dass man auch beim Antimon z. B. aus den galvano- und thermomagnetischen Effecten die Constanten σ_1 und y_1 berechnet, da sich dann die thermoelektrische Kraft gegen Wismut berechnen lässt.

Noch auf einen anderen merkwürdigen Umstand macht Nernst¹⁾ aufmerksam. Es gehen nämlich die absoluten Werte der Grössen R und Q/K , wo K das auf Grammcalthorien berechnete Wärmeleitungsvermögen ist, einander annähernd parallel und sind von gleicher Grössenordnung, ein Resultat, welches um so auffallender ist, als die Vorzeichen beider Terme regellos gegenseitig wechseln. Beim Anblick der Formeln (29) und (30) der p. 380 liegt es nahe, zu vermuten, dass R und Q nur durch je einen Term des zweigliedrigen Ausdruckes wesentlich beeinflusst werden, d. h. dass von den Producten $y_1 x_2$ und $y_2 x_1$ das eine viel grösser als das andere ist. Ist z. B. $y_1 x_2 > y_2 x_1$, so wird annähernd

$$R = \frac{c}{\sigma} \frac{y_1 x_2}{x_1 + x_2}, \quad Q = -p \frac{\sigma_2}{\sigma} y_1 x_2,$$

und da, falls die Abweichung vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz vernachlässigt wird, nach (36) und (25):

$$k = \sigma \cdot \frac{\alpha}{e} p \quad \text{und} \quad K = k : 419 \cdot 10^{-5}$$

ist, so folgt:

$$\frac{Q}{K} = - \frac{419 \cdot 10^5}{\alpha/e} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma^2} \cdot y_1 x_2,$$

d. h.

$$(I) \quad R : \frac{Q}{K} = - \frac{\alpha}{e} \cdot \frac{c}{(x_1 + x_2) \cdot 419 \cdot 10^5} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_2}.$$

Wenn aber $y_2 x_1 > y_1 x_2$, so folgt:

$$(II) \quad R : \frac{Q}{K} = + \frac{\alpha}{e} \cdot \frac{c}{(x_1 + x_2) \cdot 419 \cdot 10^5} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_1}.$$

Wenn nun im Falle (I) die negative Elektronengattung den wesentlichen Anteil an der elektrischen Leitfähigkeit des

1) W. Nernst, Wied. Ann. 31. p. 775. 1887.

Metalles besitzt, sodass $\sigma : \sigma_2$ nahezu gleich 1 ist, im Falle (II) aber die positive Elektronengattung wesentlich zur Leitfähigkeit beiträgt, sodass $\sigma : \sigma_1$ nahe gleich 1, so wäre thatsächlich ein universelles Verhältnis der absoluten Werte von R und $Q : K$ zu erwarten, dessen Vorzeichen aber schwanken könnte.

Nach den berechneten Lösungen der Grössen x_1, x_2, y_1, y_2 bei Wismut tritt nun thatsächlich der Fall (II) ein, d. h. es ist $y_2 x_1$ viel grösser, als $y_1 x_2$. Nämlich nach der auf p. 385 berechneten Lösung ist $y_2 x_1 = 500 \cdot 10^2$, $y_1 x_2 = 1,3 \cdot 10^2$, und thatsächlich tritt auch ein positiver Wert des Verhältnisses $R : Q/K$ ein, aber bei Wismut ist $\sigma : \sigma_1$ nicht annähernd gleich 1, sondern $\sigma : \sigma_1$ ist gleich $1 : 0,0234$. Dadurch wird unser Schluss auf ein von der Theorie vorauszusehendes universelles Verhältnis von $R : Q/K$ hinfällig. — Man könnte ja nun vermuten, dass die oben auf p. 385 berechnete zweite Lösung $\eta = 0,96$, die wir wegen des damit erhaltenen positiven Thomsons effectes ausgeschlossen haben, trotzdem die richtige Lösung wäre; denn dann wäre $\sigma : \sigma_1$ nahezu gleich 1. Dem widerspricht aber, dass dann nach (II) der Zahlenwert der universellen Function $x_1 + x_2$ viel zu klein ausfallen würde. Setzt man nämlich die linke Seite der Gleichung (II) gleich 1, was annähernd der Fall ist, und setzt man für α/e den Wert $4,27 \cdot 10^{-7}$ nach (27), so würde aus (II) folgen

$$x_1 + x_2 = 3 \cdot 10^{-4},$$

was sicherlich zu klein ist. Denn nach (37) könnte dann die Abweichung W vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz, welche ein Maximum ist, falls $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma$ ist, höchstens den Wert haben:

$$W = \frac{T}{2} (x_1 + x_2) = 0,044,$$

während es viel Metalle giebt, für welche W grösser ist, z. B. bei Wismut ist $W = 0,5$.

Die von Nernst gefundene Regel über den parallelen Gang von R und $Q : K$ lässt sich also von der Theorie nicht voraussagen, man könnte nur umgekehrt daraus gewisse Schlüsse auf ein universelles Verhältnis von $\sigma : \sigma_2$, bez. $\sigma : \sigma_1$ ziehen, die aber zunächst sehr zweifelhaft sind, solange man nicht auch bei anderen Metallen als Wismut gefunden hat, dass von

den beiden Termen $y_2 x_1$ und $y_1 x_2$, der eine viel grösser ist, als der andere.

7. Die Theorie von Moreau.

Nach der Theorie von Moreau¹⁾ hängt der Hall'sche Rotationscoefficient R mit dem Eттingshausen-Nernst'schen thermomagnetischen elektrischen Coefficienten Q durch die Gleichung zusammen:

$$(53) \quad Q = - R \rho' \sigma_m,$$

wobei ρ' zu der specifischen Wärme der Elektrizität in dem betreffenden Metall proportional ist²⁾ und σ_m seine elektrische Leitfähigkeit bedeutet³⁾ (nach elektromagnetischem Maass).

Der Grundgedanke zur Ableitung der Relation (53) ist bei Moreau folgender: Durch ein Temperaturgefälle nach der x -Axe, welches beim thermomagnetischen Phänomen aufrecht erhalten wird, entsteht eine bestimmte elektrische Kraft X_m in der Metallplatte nach der Gleichung:

$$(54) \quad X_m = - \rho' \frac{\partial T}{\partial x}.$$

(Der Index m deutet immer das elektromagnetische Maasssystem an.) Das negative Vorzeichen muss in (54) eingeführt werden, weil die Thomsonwärme positiv gerechnet wird, wenn durch einen Strom im Sinne des Temperaturgefälles Wärmeentwicklung eintritt. Bei positivem ρ' und negativem $\partial T / \partial x$ (Temperaturgefälle nach der x -Axe) muss also X_m positiv sein. Andererseits treibt beim galvanomagnetischen Phänomen den Strom der Dichte j_m eine gewisse elektrische Kraft X_m nach der Gleichung:

$$(55) \quad j_m = \sigma_m X_m'.$$

1) G. Moreau, Compt. rend. **103**. p. 122. 1900.

2) Genauer definiert ist ρ' aus Gleichung (54).

3) Q ist identisch mit der Moreau'schen Bezeichnung $-K$, R mit dem Moreau'schen c , unser ρ' mit dem Moreau'schen σ , unser σ_m mit dem Moreau'schen $1/\rho$.

Wenn nun angenommen wird, dass der elektrische Transversaleffect beim thermo- und galvanomagnetischen Phänomen der gleiche ist, wenn dieselbe elektrische Kraft besteht, d. h. falls $X_m = X'_m$ ist, so folgt die Moreau'sche Relation (53). Dann aus (21') und (54) folgt beim thermomagnetischen Effect:

$$Y_m = - Q \cdot \mathfrak{S} \cdot \frac{X_m}{q'}$$

aus (18') und (55) folgt beim galvanomagnetischen Effect:

$$Y'_m = R \cdot \sigma_m \cdot X'_m \mathfrak{S}.$$

Wenn also $Y_m = Y'_m$, falls $X_m = X'_m$ ist, so folgt die Moreau'sche Relation (53).

Es ist nun aber durchaus nicht selbstverständlich, dass im galvano- und thermomagnetischen Phänomen dieselbe elektrische Transversalkraft besteht, falls dieselbe elektrische Longitudinalkraft X herrscht. Denn die Bewegung der Elektronen ist in beiden Fällen, wo einerseits ein elektrischer Strom ohne Wärmestrom und andererseits ein Wärmestrom ohne elektrischen Strom besteht, durchaus verschieden. Nach der hier dargelegten Theorie trifft nun auch in der That die theoretische Voraussetzung von Moreau nicht zu. Man erkennt das am einfachsten, wenn man im galvano- und thermomagnetischen Phänomen Y als Function der elektrischen Kraft X ausdrückt.

Für das galvanomagnetische Phänomen liefert Gleichung (18):

$$(56) \quad Y = \mathfrak{S} \cdot X \cdot \frac{e}{c} \frac{v_1 \frac{d \log \mathfrak{R}_2}{dT} - v_2 \frac{d \log \mathfrak{R}_1}{dT}}{\frac{d \log (\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2)}{dT}}$$

während für das thermomagnetische Phänomen die Gleichung (21) liefert, wenn man die im Eingang des § 3 abgeleitete Gleichung benutzt:

$$(57) \quad \frac{4 \alpha T}{3} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = X \frac{\sigma}{e \left(v_1 \frac{d \mathfrak{R}_1}{dT} - v_2 \frac{d \mathfrak{R}_2}{dT} \right)}$$

$$Y = - \mathfrak{S} \cdot X \cdot \frac{e}{c} v_1 v_2 \frac{\frac{d \mathfrak{R}_1}{dT} + \frac{d \mathfrak{R}_2}{dT}}{v_1 \frac{d \mathfrak{R}_1}{dT} - v_2 \frac{d \mathfrak{R}_2}{dT}}$$

Die Moreau'sche Voraussetzung würde durch die hier gegebene Theorie bestätigt werden, falls die Factoren von X in beiden Gleichungen (56) und (57) dieselben wären. Das sind sie nun aber durchaus nicht.

Nun tritt allerdings für die Moreau'sche Theorie noch eine Complication hinzu. Moreau nimmt an, dass die Thomsonwärme lediglich infolge der durch das Temperaturgefälle bewirkten Potentialdifferenz entsteht, während nach meiner Theorie (I, p. 585) bei der Thomsonwärme noch ein Anteil hinzutritt, weil in das Volumenelement Elektronen von höherer Temperatur durch den elektrischen Strom hineintransportirt werden, während Elektronen von kälterer Temperatur fortgeführt werden. Das Verhältnis beider Anteile der Thomsonwärme ist [nach I, p. 586, Formel (44)]:

$$\frac{4}{3} T \left(\frac{\sigma_1}{\sigma} \frac{d \log \mathfrak{N}_1}{dT} - \frac{\sigma_2}{\sigma} \frac{d \log \mathfrak{N}_2}{dT} \right) : \frac{d}{dT} \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} T \right],$$

oder näherungsweise (vgl. oben p. 383):

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} x_1 - \frac{\sigma_2}{\sigma} x_2 : \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma}.$$

Für Wismut ist nun aber durchaus nicht dieses Verhältnis gross gegen 1, — im Gegenteil müssen aus dem oben p. 386 angeführten Grunde nach dieser Theorie beide Anteile der Thomsonwärme von nahe derselben Grösse sein, sodass man nicht den einen Anteil gegen den anderen vernachlässigen kann.

Die numerischen Bestätigungen, welche Moreau für sein Gesetz gegeben hat, sind ja zwar zunächst überraschend. Da aber Moreau die Zahlen aus Beobachtungen entnommen hat, welche sich auf ganz verschiedene Metallproben beziehen, so ist nach meiner Meinung auf die von Moreau angegebene numerische Bestätigung seines Gesetzes vorläufig nicht sehr viel Gewicht zu legen. Denn schon allein die Thomsonwärme wird von den verschiedenen Beobachtern ganz verschieden angegeben, Moreau benutzt z. B. für Wismut eine Zahl der Thomsonwärme, welche $4\frac{1}{2}$ mal so gross ist, als die hier von

mir benutzte Zahl, welche ich dem Riecke'schen Lehrbuch entnommen habe.¹⁾

Ausserdem hat Moreau selbst eine Ausnahme von seinem Gesetz bei Nickel constatirt.

8. Schlussbemerkungen.

Zum Schluss möchte ich hier noch einmal hervorheben, dass es sehr wünschenswert ist, für verschiedene Metalle sowohl die vier transversalen galvano- und thermomagnetischen Effecte²⁾, sowie die thermische und elektrische Leitfähigkeit und die Thomsonwärme an denselben Materialstücken zu beobachten. Man könnte dann das gegenseitige elektrische Verhalten der Metalle (Thermoelektricität, Peltiereffect, Contactpotentialdifferenz) nach den gegebenen Formeln voraussagen, und so die Theorie prüfen. Sie ist, abgesehen hinsichtlich der Longitudinaleffecte, auch hinsichtlich vieler anderen Details der Beobachtungen sicherlich erweiterungsbedürftig, vor allem wenn es sich um die exacte Abhängigkeit der Erscheinungen von der Feldstärke handelt. Wie nämlich v. Ettingshausen und Nernst³⁾ gefunden haben, wechselt das Vorzeichen vom Halleffect bei Zinn-Wismutlegirungen, indem es in schwachen Magnetfeldern negativ, in starken positiv ist. Auch beim reinen Wismut nähert sich der negative Wert von R bei wachsender Feldstärke der Null. Mir scheint zur Erklärung dieser Erscheinungen berücksichtigt werden zu müssen, dass Wismut merklich stark diamagnetisch ist, und dass daher die Elektronen, anstatt in gerader Bahn nach der kinetischen Vorstellung hin und her zu fliegen, in gekrümmten Bahnen hin und her fliegen, deren Krümmung um so stärker ist, je kräftiger das Magnetfeld ist. Daher werden die Beweglichkeiten v_1 und v_2 Functionen des Magnetfeldes ξ sein, und dass dann eventuell

1) Riecke benutzt relative Messungen und die absolute von Le Roux (Ann. de chim. et de phys. (4) 10. p. 201. 1867) und H. Haga (Wied. Ann. 28. p. 179. 1886).

2) Wobei möglichst wenig Transversalstrom der Platte zu entnehmen ist (vgl. oben p. 389).

3) A. v. Ettingshausen u. W. Nernst, Wied. Ann. 33. p. 478 1888.

sogar ein Vorzeichenwechsel der Hallconstante R bei wachsendem \mathfrak{H} eintreten kann, ist nach den gegebenen Formeln verständlich.¹⁾ — Ausserdem ist zu berücksichtigen, dass Wismut merklich krystallinisch ist, aber von dieser Complication kann man wohl bei gegossenen oder elektrolytisch hergestellten Platten am ehesten noch absehen.

Mir liegt aber zunächst daran, die Theorie mit den einfachsten Annahmen soweit zu führen, dass das Experiment mit Prüfungen einsetzen kann und andererseits gewisse Anregungen zum Experimentiren zu geben. So würde es z. B. nach der hier gegebenen Theorie interessant sein, schon allein die galvanomagnetischen Temperaturdifferenzen in verschiedenen Metallen miteinander zu vergleichen, da nach Formel (20) auf p. 375 diese sich wie die Summe der Beweglichkeiten beider Elektronengattungen verhalten müssen. — Ob es nötig sein wird, mehr als zwei Gattungen leitender Elektronen, z. B. in nicht reinen Metallen, anzunehmen, kann auch nur das Experiment entscheiden; jedenfalls meine ich, dass man zunächst es versuchen muss, mit Annahme nur zweier Gattungen die That-sachen darzustellen.

Vor allem interessirt nun auch die Anwendung der Elektronentheorie auf die optischen Eigenschaften der Metalle.²⁾ Wie ich schon l. c. erwähnte, kommt man nicht zur Darstellung der optischen Eigenschaften von Gold und Kupfer mit der Annahme von leitenden Elektronen allein aus. Mein Standpunkt hat sich gegenüber dem von mir in dem damaligen citirten Aufsatz eingenommen insofern verändert, als ich jetzt meine, dass man im allgemeinen niemals die Annahme von leitenden Elektronen allein machen kann, sondern dass auch stets isolirende Elektronen zu berücksichtigen sind. Denn da nach meiner Theorie $\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2$ eine universelle Function der Temperatur ist, so kann im allgemeinen nicht $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2$ sein. Dann muss es aber isolirende Elektronen geben, da die Summe der elektrischen Ladungen im Volumenelement verschwinden

1) Auch die complicirte Abhängigkeit des thermomagnetischen Effectes Q von der Feldstärke \mathfrak{H} (vgl. A. v. Everdingen, l. c. und E. Yumaguchi, Ann. d. Phys. 1. p. 214. 1900) werden so vielleicht erklärbar.

2) Vgl. P. Drude, Physik. Zeitschr. 1. p. 161. 1900.

muss. Wenn es keine isolirende Elektronen gäbe, d. h. wenn $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2$ wäre, so müsste überdies nach Formel (22) auf p. 376 die thermomagnetische transversale Temperaturdifferenz verschwinden. Da dies im allgemeinen nicht eintritt, so sind also auch aus diesem Grunde isolirende Elektronen zur Erklärung der optischen Eigenschaften der Metalle mit zu berücksichtigen.

Der consequente Weg würde nun sein, dass man aus den elektrischen und thermischen Eigenschaften eines Metalles in und ausserhalb eines Magnetfeldes zunächst die Constanten der Leitungselektronen berechnet, um dann mit ihrer Hülfe aus den optischen Eigenschaften des Metalles die Constanten der isolirenden, d. h. an bestimmte Orte gebundene Elektronen zu berechnen. Es wird aber wegen der Schwierigkeit der Beobachtungen sehr lange dauern, bis dass dieser Weg mit Sicherheit eingeschlagen werden kann.

Gewisse Schlüsse allgemeiner Natur lassen sich aber aus den optischen Eigenschaften der Metalle vom Standpunkt der Elektronentheorie aus ziehen, ohne die Constanten der Leitungselektronen kennen zu müssen. Dies gedenke ich in einem nachfolgenden III. Teil genauer darzulegen.

Nachtrag zu dem I. Teil meiner Elektronentheorie der Metalle.

Einige Fachgenossen haben mich freundlichst darauf aufmerksam gemacht, dass die im § 3 des I. Teiles p. 573 angestellte Berechnung der Wärmeleitfähigkeit des Metalles auf einer Voraussetzung beruhe, welche wahrscheinlich nicht erfüllt ist, nämlich dass die Kernzahl (pro cm^3) von der Temperatur unabhängig sei. Ich möchte jetzt, da ich vermute, dass sich mancher Leser an der Voraussetzung jenes Paragraphen stösst, hervorheben, dass ich diese Voraussetzung selbst später in § 6 fallen lasse und die dort abgeleitete Formel (34) für die Wärmeleitfähigkeit immer anzunehmen ist, da ja nach meiner Theorie $\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2$ eine universelle Temperaturfunction ist, für die jedenfalls $d(\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2)/dT$ von Null verschieden ist. Dass trotzdem bei vielen Metallen das Wiedemann-Franz'sche Gesetz nahezu gilt, was ich als strenggültig nur unter der Voraus-

setzung des § 3 abgeleitet habe, liegt nach der Theorie (vgl. I, p. 583) daran, dass bei den meisten Metallen die eine Elektronengattung einen viel grösseren Anteil an der elektrischen Leitfähigkeit hat, als die andere. — In welcher Weise nun aber \mathfrak{R}_1 oder \mathfrak{R}_2 mit der Temperatur variirt, kann man jedenfalls aus Analogie mit den normalen Gasen nicht berechnen, da diese Analogie hier aufhören wird, indem wir bei den Elektronen der Metalle das Dissociationsgesetz finden (vgl. I, p. 591).

(Eingegangen 9. September 1900.)
