13. Ueber die Grundhypothesen der kinetischen Gastheorie; von Zemplén Gyöző.

Die kinetische Theorie der Gase wurde bis jetzt immer auf Grund einer Annahme behandelt, welche vom Gesichtspunkte der Mathematik folgendermaassen formulirt werden kann:

Es sind vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung zwei voneinander völlig unabhängige Erscheinungen, dass in demselben Augenblicke die Massenmittelpunkte zweier beliebigen Molekeln gewisse Geschwindigkeitscomponenten besitzen.

Die Wichtigkeit dieser Grundannahme ist besonders in Boltzmann's Gastheorie ausführlich besprochen.¹⁾ Von einem Aggregat von Moleculen, welches einer mit dieser wesentlich identischen Annahme entspricht, sagt Boltzmann, sein Zustand sei *molecular ungeordnet*.

Der erste Versuch, die Gastheorie von dieser Grundhypothese zu befreien, stammt von S. H. Burbury, der in seinem, gegen das Ende des vorigen Jahres erschienenen Buche seine diesbezüglichen Untersuchungen der Oeffentlichkeit übergab.²⁾ In diesem Werke will Burbury auch die Notwendigkeit der Begründung einer neuen Gastheorie beweisen, indem er uns zeigt, dass die bisherige Behandlung der Gastheorie innere Widersprüche aufweist. Burbury bezeichnet nämlich eine mit der oben angeführten Grundhypothese wesentlich übereinstimmende Annahme als „Annahme A“³⁾ und sucht zu beweisen, dass ein der Annahme A entsprechender Zustand mit der Zeit nicht bestehen kann, weil die daraus gezogenen Schlüsse auf Widersprüche führen.

In dem Folgenden versuche ich zu zeigen, dass die von Burbury aus der Annahme A abgeleiteten Widersprüche nur scheinbar sind, sodass, obgleich die Begründung einer neuen

1) L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie 1. p. 20—23.

2) S. H. Burbury, A treatise on the kinetic theory of gases. 1899. Cambridge, University press.

3) l. c. p. 9.

Gastheorie völlig erlaubt ist, die Notwendigkeit einer solchen nicht vorliegt, weil die alte, nach den Ergebnissen der bisherigen Forschungen, sich ohne Widersprüche aufbauen lässt, und auch mit der Erfahrung ziemlich befriedigend übereinstimmt.

Um dies auszuführen, muss ich einige von Burbury in die Gastheorie eingeführten, sehr nützlichen Neuerungen etwas näher besprechen; diese Neuerungen beziehen sich auf die Definition der Dichte und der Strömungsgeschwindigkeit in einem Aggregat von Moleculen, also in einem der kinetischen Theorie entsprechenden Gase.

Die Dichte σ in einem Punkte x, y, z eines Körpers zur Zeit t wird allgemein folgendermaassen definiert:

$$(1) \quad \sigma = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta\omega},$$

wo $\Delta\omega$ ein den Punkt x, y, z enthaltendes Volumen, Δm die zur Zeit t im Volumen $\Delta\omega$ vorhandene Masse des Körpers bedeutet.

Wenn wir diese Definition ohne besondere Annahmen auf einen aus discreten Teilchen bestehenden Körper anwenden, dann liefert uns σ die *Dichte der Materie* der Moleculé im Punkte x, y, z zur Zeit t , giebt aber keinen Aufschluss über die räumliche Verteilung der Moleculé in der *Umgebung* des Punktes x, y, z , was wir eben in der Gastheorie mit der Einführung der Dichte erreichen wollen. Darum wurde bis jetzt angenommen, dass ein unendlich kleiner Raum noch unendlich viele Moleculé enthält.¹⁾ Streng genommen widerspricht diese Annahme der aus verschiedenen Gründen wahrscheinlichen Anschauung, welche auch als ein Ergebnis der Gastheorie erscheint, dass die Moleculé endliche Dimensionen besitzen. Burbury hält daher eine neue Definition der Dichte, bez. der zur Zeit t im Punkte x, y, z auf die Volumeneinheit entfallenden Zahl N der Moleculé für notwendig und setzt:

$$(2) \quad N(x, y, z, t) = \sum_r \varphi \left\{ ((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2)^{1/2} \right\},$$

wo φ eine solche Function von

$$r = ((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2)^{1/2}$$

ist, welche folgenden Bedingungen genügt:

1) z. B. L. Boltzmann, l. c. p. 46, 100.

I. $\varphi(r) = 1$, falls $r \leq a$, wo a eine constante Grösse bedeutet, z. B. den Radius einer Kugel, welche im Mittel ein Molecül enthält.

II. $\varphi(r)$ ist eine immer positive, continuirliche Function von r und $d\varphi/dr < 0$ falls $r > 0$.

III. $\int_a^\infty r^2 \varphi(r) dr$ ist eine endliche und bestimmte Zahl.

In der Formel (2) sind x', y', z' die Coordinaten des Massenmittelpunktes eines Molecüles und die Summation $\sum$ ist nach x', y', z' auf alle Molecüle des Gases ausgedehnt.¹⁾

Auf ganz ähnlichen Betrachtungen beruht in Burbury's Werk²⁾ folgende Definition der Strömungsgeschwindigkeitscomponenten ξ, η, ζ im Punkte x, y, z zur Zeit t .

$$(3) \quad \xi = \frac{\sum \varphi(r) \alpha'}{\sum \varphi(r)}, \quad \eta = \frac{\sum \varphi(r) \beta'}{\sum \varphi(r)}, \quad \zeta = \frac{\sum \varphi(r) \gamma'}{\sum \varphi(r)},$$

wo α', β', γ' die Geschwindigkeitscomponenten zur Zeit t jenes Molecüls bedeuten, dessen Massenmittelpunkt in demselben Augenblicke sich im Punkte x', y', z' befindet.³⁾

Derselbe Einwand, welchen Burbury gegen die bisherige Definition der Dichte und Strömungsgeschwindigkeit erhebt, gilt auch gegen die bisherige Definition der Maxwell'schen Function

$$f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t) d\alpha d\beta d\gamma,$$

welche die Verteilung der Geschwindigkeiten im Punkte x, y, z zur Zeit t bestimmt, $f d\alpha d\beta d\gamma$ ist ja die im Punkte x, y, z auf die Volumeneinheit entfallende Zahl jener Molecüle, deren Geschwindigkeitscomponente zur Zeit t zwischen den Grenzen:

$$(4) \quad \alpha \text{ und } \alpha + d\alpha, \quad \beta \text{ und } \beta + d\beta, \quad \gamma \text{ und } \gamma + d\gamma$$

liegen. Ebenso wie $m \sum \varphi(r)$, falls das Gas aus Molecülen der gleichen Masse m besteht, die Dichte des Gases im Punkte x, y, z zur Zeit t darstellt, können wir sagen, $f d\alpha d\beta d\gamma$ sei die Dichte derjenigen Molecüle im Punkte x, y, z zur Zeit t ,

1) S. H. Burbury, l. c. p. 5 und 56; die Bezeichnungen sind verändert.

2) l. c. p. 5, 6, 56, 122.

3) Unter der Geschwindigkeit eines Molecüles soll fortan die Geschwindigkeit ihres Massenmittelpunktes verstanden werden.

deren Geschwindigkeitscomponenten zur Zeit t zwischen den Grenzen (4) liegen. Es wird daher eine consequente Weiterführung der Burbury'schen Definition der Dichte und Strömungsgeschwindigkeit sein, wenn wir die Funktion $f d\alpha d\beta d\gamma$ folgendermaassen definiren:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t) d\alpha d\beta d\gamma = \\ & = \sum_{\alpha\beta\gamma} \varphi \left\{ ((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2)^{1/2} \right\} \end{aligned} \right.$$

wo $\sum_{\alpha\beta\gamma}$ eine Summation bedeutet, welche nach x_1, y_1, z_1 auf alle Molecüle ausgedehnt ist, deren Geschwindigkeitscomponenten zur Zeit t zwischen den Grenzen (4) liegen.

Nach diesen Bemerkungen gehen wir zur Prüfung der Burbury'schen Widersprüche über.

Erster Widerspruch.¹⁾

Burbury nimmt an, die Bewegung der Molecüle sei stationär und erhält für diesen Fall aus dem Clausius'schen Virialsatze folgende Gleichung:

$$(IV) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum m \left\{ \sum \left(\frac{dx dx'}{dt dt} + \frac{dy dy'}{dt dt} + \frac{dz dz'}{dt dt} \right) \right\} + \\ & + \sum X \left\{ \sum (x' - x) \varphi(r) \right\} + \sum Y \left\{ \sum (y' - y) \varphi(r) \right\} + \\ & + \sum Z \left\{ \sum (z' - z) \varphi(r) \right\} \\ & + \sum m \left\{ \sum r \frac{d\varphi}{dr} \left(\lambda \frac{dx}{dt} + \mu \frac{dy}{dt} + \nu \frac{dz}{dt} \right) \right. \\ & \quad \left. \left(\lambda \frac{dx'}{dt} + \mu \frac{dy'}{dt} + \nu \frac{dz'}{dt} \right) \right\} = 0. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Hier sind X, Y, Z die Componenten sämtlicher (äusserer und intramolecularer) Kräfte, welche auf die in x, y, z vorhandene Masseneinheit ausgeübt werden,

$$\lambda = \frac{x' - x}{r}, \quad \mu = \frac{y' - y}{r}, \quad \nu = \frac{z' - z}{r},$$

und die $\sum$ Summation ist nach x, y, z , auf alle Molecüle des Gases ausgedehnt.

1) l. c. Capitel IV.

2) l. c. p. 49, Gleichung (IV).

Die Gültigkeit dieser Gleichung ist an die bei ihrer Ableitung gemachten Annahmen gebunden, dass die Molecüle im Raume so zerstreut sind, dass keine aus dem Punkte x, y, z ausgehende Richtung vor einer anderen ausgezeichnet ist, was auf p. 48 in Burbury's Werk in folgenden Gleichungen ausgedrückt ist.

Im Mittel („on average“) ist:

$$\lambda \mu = \mu \nu = \nu \lambda = 0 \quad \text{und} \quad \lambda^2 = \mu^2 = \nu^2 = \frac{1}{3}.$$

Burbury behauptet nun, dass bei der Annahme A

$$\frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{dz'}{dt} = 0$$

und auch

$$\left(\lambda \frac{dx}{dt} + \mu \frac{dy}{dt} + \nu \frac{dz}{dt} \right) \left(\lambda \frac{dx'}{dt} + \mu \frac{dy'}{dt} + \nu \frac{dz'}{dt} \right) = 0,$$

beweist dann für den Fall, dass X, Y, Z nur vom Molecularsystem selbst stammen, also äussere Kräfte nicht vorhanden sind, dass dennoch das Glied:

$$B = \sum \{ X \sum (x' - x) \varphi + Y \sum (y' - y) \varphi + Z \sum (z' - z) \varphi \}$$

nur negativ sein kann.

Es kann aber gezeigt werden, dass bei denselben Voraussetzungen $B = 0$ ist.

Wenn wir nämlich den ganzen Raum in Kugelschalen vom Radius r , von der Stärke dr , mit dem Centrum in x, y, z verteilen, dann ist, falls $R(r)$ die von dem Molecül in x', y', z' auf das in x, y, z ausgeübte Kraft bedeutet und $\sum_r$ eine auf alle Molecüle der Kugelschale ausgedehnte Summation ist:

$$(6) \quad X = - \sum_{r=0 \dots \infty} (R(r) \sum_r \lambda) \quad \text{und} \quad \sum_r (x' - x) \varphi(r) = \sum_{r=0 \dots \infty} (r \varphi(r) \sum_r \lambda).$$

Wenn aber, wie dies bei der Ableitung der Formel (IV) vorausgesetzt wurde, keine Richtung vor einer anderen ausgezeichnet ist, also wenn die Molecüle im Raume, wie Burbury sagt „at haphazard“ zerstreut sind, dann ist

$$\sum_r \lambda = 0,$$

aus (6) daher $X = 0$, $\sum_r (x' - x) \varphi(r) = 0$ bei allen Werten von x, y, z und so auch

$$B = 0.$$

Burbury erhält für B ein von Null verschiedenes Resultat, weil er sich bei der Berechnung von B des, den Voraussetzungen nicht entsprechenden Gleichnisses

$$(\sum_r \lambda)^2 = \sum_r (\lambda^2)$$

bedient.

Zweiter Widerspruch.¹⁾

Burbury macht folgende Annahmen:

1. Der Zustand des Gases entspricht der Annahme A ,
2. die Bewegung der Molecüle ist eine stationäre Bewegung und berechnet den nach der Zeit genommenen Differentialquotienten folgender Grösse:

$$M = \iiint \left(\alpha^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + \gamma^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \beta \gamma \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \gamma \alpha \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + \alpha \beta \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right) dx dy dz.$$

α, β, γ sind die Geschwindigkeitscomponenten eines Molecüles, dessen Massenmittelpunkt sich zur Zeit t im Punkte x, y, z befindet, $\alpha, \beta, \gamma, \partial \xi / \partial x, \partial \eta / \partial y$ etc. sind als Functionen von x, y, z zu betrachten und die Integration ist auf den ganzen gaserfüllten Raum ausgedehnt; falls im Volumenelemente $dx dy dz$ zur Zeit t der Massenmittelpunkt keines Molecüles vorhanden ist, sind die betreffenden Componenten

$$\alpha(x, y, z, t) = \beta(x, y, z, t) = \gamma(x, y, z, t) = 0.$$

dM/dt ist in Burbury's Werk für den Fall vollständig berechnet, dass die Molecüle gleiche elastische Kugeln vom Radius $c/2$, von der Masse m sind. Burbury erhält²⁾:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} = 2\pi c^3 \iiint & \left\{ \frac{\rho}{2h} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \right. \right. \\ & + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \\ & \left. \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dx dy dz. \end{aligned}$$

1) l. c. Capitel V und VI.

2) l. c. p. 77 D. und p. 157.

Burbury glaubt daraus schliessen zu dürfen, weil hier ρ (die Dichte), h (eine der absoluten Temperatur invers proportionale Grösse) und c positiv sind, dass dM/dt selbst auch positiv ist, die Annahme A ist daher mit unserer Voraussetzung (2) in Widerspruch.

In dem Folgenden liefere ich den Beweis, dass, obwohl dM/dt als Summe lauter mit Quadraten multiplicirten positiven Zahlen nicht negativ sein kann, dennoch gleich Null ist, weil, falls der Zustand des Gases der Annahme A entspricht und die Bewegung eine stationäre ist, die Grössen:

$$(7) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

bei allen Werten von x, y, z verschwinden.

Ich beweise zuerst einen Hülfsatz, welcher aus den oben gegebenen Definitionen der Grössen ξ, η, ζ folgt.

Ich definiere den Mittelwert einer Function der Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ auf die übliche Weise: Mittelwert der Grösse Q im Punkte x, y, z zur Zeit t

$$(8) \quad = Q(x, y, z, t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\alpha, \beta, \gamma) f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t) d\alpha d\beta d\gamma}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t) d\alpha d\beta d\gamma}$$

und beweise, dass

$$(9) \quad \xi = \bar{\alpha}, \quad \eta = \bar{\beta}, \quad \zeta = \bar{\gamma}.$$

Diese Gleichungen wären nicht zu beweisen, wenn ξ, η, ζ die gewöhnlich gebräuchlichen Strömungsgeschwindigkeitscomponenten wären; in diesem Falle sind aber ξ, η, ζ die nach Burbury unter (3) neu definirten Grössen, die Gleichungen (9) harren daher eines Beweises.

Es genügt aber, um diesen Beweis zu liefern, die in den Formeln (2), (3) und (5) auftretenden Summationen durch Integrationen zu ersetzen.

Es sei $mg(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t) d\alpha d\beta d\gamma$ die im gewöhnlichen Sinne genommene Dichte der Materie jener Molecüle im Punkte x, y, z zur Zeit t , deren Geschwindigkeitscomponenten zur Zeit t zwischen den Grenzen (4) liegen, sodass die Dichte der Materie der Molecüle

$$\sigma(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} m g(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t) d\alpha d\beta d\gamma$$

und daher

$$(10) \left\{ \begin{aligned} N(x, y, z, t) &= \sum_i \varphi(x', y', z') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t) \\ &\quad \varphi(x + a, y + b, z + c) d\alpha d\beta d\gamma da db dc, \end{aligned} \right.$$

wo

$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c,$$

ebenso ist:

$$(11) \left\{ \begin{aligned} N\xi &= \sum_i \alpha' \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha g(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t) \\ &\quad \varphi(x + a, y + b, z + c) d\alpha d\beta d\gamma da db dc \end{aligned} \right.$$

und

$$(12) \left\{ \begin{aligned} f d\alpha d\beta d\gamma &= \sum_{\alpha\beta\gamma} \varphi(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t) \\ &\quad \varphi(x + a, y + b, z + c) d\alpha d\beta d\gamma) da db dc, \end{aligned} \right.$$

aus (10) und (12) folgt aber, dass

$$\sum_i \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t) d\alpha d\beta d\gamma,$$

ebenso aus (11) und (12):

$$\sum_i \alpha \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t) d\alpha d\beta d\gamma,$$

sodass wirklich:

$$\xi = \frac{\sum_i \alpha \varphi}{\sum_i \varphi} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t) d\alpha d\beta d\gamma}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t) d\alpha d\beta d\gamma} = \bar{\alpha}, \quad \eta = \bar{\beta}, \quad \zeta = \bar{\gamma}.$$

Damit ist aber die Behandlung der Grössen ξ , η , ζ der alten Gastheorie übergeben. Mit Hülfe des H -Theorems bewies Boltzmann¹⁾, dass die *notwendige und hinreichende* Bedingung dafür, dass die Bewegung der Moleculen eine

1) L. Boltzmann, Gastheorie I. p. 124–133. 1897.

stationäre sei, falls der Zustand der Annahme A entspricht (molecular-ungeordnet ist), folgende ist:

$$(13) \quad f = f_0 e^{-h((\alpha - u)^2 + (\beta - v)^2 + (\gamma - w)^2)},$$

wo f_0 , h , u , v , w so zu wählende Functionen der Coordinaten x , y , z sind, dass die Differentialgleichung

$$(14) \quad \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} + X' \frac{\partial f}{\partial \alpha} + Y' \frac{\partial f}{\partial \beta} + Z' \frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0$$

bei allen Werten von x , y , z und α , β , γ erfüllt sei.

X' , Y' , Z' sind hier die auf die im Punkte x , y , z vorhandene Masseneinheit wirkenden äusseren Kräfte.

Nun folgt gleich durch Integration¹⁾ aus (13), dass $u = \alpha$, also

$$(15) \quad u = \xi, \quad v = \eta, \quad w = \zeta.$$

Der übrige Teil meines Beweises stützt sich nun ganz auf eine Abhandlung Boltzmann's.²⁾

Wir schreiben die Function f in folgender Form:

$$(16) \quad f = e^{-h(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - k\alpha - l\beta - m\gamma + n},$$

wo wegen (15)

$$(17) \quad k = -2h\xi, \quad l = -2h\eta, \quad m = -2h\zeta$$

und

$$n = \ln f_0 - h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

Falls f der Differentialgleichung (14) genügt, genügt ihr auch

$$\psi = \ln f = -h(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - k\alpha - l\beta - m\gamma + n,$$

daher muss folgende Gleichung bei den Werten x , y , z und α , β , γ bestehen:

$$\begin{aligned} & -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \left(\alpha \frac{\partial h}{\partial x} + \beta \frac{\partial h}{\partial y} + \gamma \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \alpha^2 \frac{\partial k}{\partial x} - \beta^2 \frac{\partial l}{\partial y} - \gamma^2 \frac{\partial m}{\partial z} \\ & - \beta \gamma \left(\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} \right) - \gamma \alpha \left(\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial z} \right) - \alpha \beta \left(\frac{\partial k}{\partial y} + \frac{\partial l}{\partial x} \right) \\ & + \left(\frac{\partial n}{\partial x} - 2hX' \right) \alpha + \left(\frac{\partial n}{\partial y} - 2hY' \right) \beta + \left(\frac{\partial n}{\partial z} - 2hZ' \right) \gamma \\ & - kX' - lY' - mZ' = 0. \end{aligned}$$

1) L. Boltzmann, l. c. p. 133.

2) L. Boltzmann, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 76. Abt. II. p. 526—532.

Hieraus folgt aber:

$$(18) \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial z} = 0,$$

$$(19) \quad \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial l}{\partial y} = \frac{\partial m}{\partial z} = 0,$$

$$(20) \quad \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial k}{\partial y} + \frac{\partial l}{\partial x} = 0,$$

(19) und (20) sind wegen (18) und (17) mit folgenden Gleichungen identisch:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0,$$

dM/dt ist daher in vollständigem Zusammenhange mit unseren Voraussetzungen gleich Null.

Man sieht also, dass Burbury's Resultate so interpretirt werden können, dass die ältere Gastheorie keine Widersprüche aufweist.

Besonders wichtig erscheint für Burbury's neue Gastheorie die Widerlegung dieses zweiten Widerspruches, weil er seine neue Theorie eben in der Weise aufbaut, dass dieser Widerspruch nicht mehr vorhanden ist.

Budapest, Mai 1900.

(Eingegangen 14. Mai 1900.)