VII. *Das Telephon als optischer Apparat zur Strommessung; von Max Wien.*

Es ist schon mehrfach der Versuch gemacht worden, die Bewegungen der Telephonplatte sichtbar zu machen, besonders hat in letzter Zeit Fröhlich¹⁾ mit Hülfe eines Spiegels, der zwischen Mitte und Rand der Telephonplatte aufgeklebt wurde, die Stromcurve eines Wechselstromes, also den Verlauf der einzelnen Schwingung studirt. Dies ist im Folgenden nicht meine Absicht, sondern es ist dies ein Versuch, das Telephons zur Messung der Intensität von constanten sowohl wie von alternirenden Strömen zu benutzen.

Zu diesem Zweck wurde eine sehr empfindliche Spiegelübertragung angewandt, welche in meiner Arbeit: „Ueber die Messung der Tonstärke“²⁾ genauer beschrieben und ähnlich derjenigen ist, welche von Röntgen³⁾ für Aneroidbarometer vorgeschlagen ist. Diese letztere besteht im wesentlichen darin, dass ein in der Mitte der Aneroidbarometerkapsel angebrachter Stift auf einen zu ihm senkrechten Spiegel wirkt, der um eine Axe drehbar ist. Die Drehung des Spiegels ist proportional der Bewegung des Stiftes. Bei sehr kleinen und schnellen Bewegungen, wie die der Telephonplatte, ist die Spiegelübertragung in dieser Form nicht brauchbar, da es nicht möglich ist, den Spiegel so um eine Axe drehbar zu machen, dass er genau diesen Bewegungen folgt. Die Axe wurde daher durch ein Stück feinsten Uhrfederblechs ersetzt, das auf dem einen Ende (A) eingeklemmt war und auf dem anderen einen kleinen leichten Spiegel (S) trug. Senkrecht gegen die Feder drückt bei

Fig. 1.

1) Fröhlich, Electr. Zeitschr. 10. p. 65. 1889.

2) M. Wien, Inaug.-Diss. Berlin 1888. p. 6. Wied. Ann. 34. p. 836. 1889.

3) Röntgen, Carl's Rep. 20. p. 44. 1878. Wied. Ann. 4. p. 305. 1877. Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XLII.

B der in der Mitte der Telephonplatte angebrachte Stift. Bewegt sich derselbe, so biegt sich das Blech zwischen *A* und *B*, und der Spiegel dreht sich, wobei, wie sich theoretisch und experimentell nachweisen lässt¹⁾, diese Drehung proportional der Bewegung des Stiftes ist und $\frac{3}{2}$ mal so gross, als wenn der Spiegel bei *A* um eine Axe drehbar wäre. Die Empfindlichkeit dieser Spiegelübertragung ist offenbar abhängig von der Entfernung *AB*; ich wählte dieselbe zwischen 0,5 und 1 mm. Es lässt sich berechnen, dass bei einer Bewegung des Stiftes um 1μ , der Spiegel einen Winkel von ca. 0,002 beschreibt, während sich mit der Pogendorff'schen Methode ein 100mal kleinerer Winkel noch bequem beobachten lässt. Bei den folgenden Versuchen wandte ich jedoch nicht diese Ablesungsmethode an, sondern ich betrachtete einen beleuchteten Spalt in dem Spiegel durch ein Fernrohr mit Oculartheilung. Diese Theilung war mit einem Diamant auf 0,1 mm in Glas eingeritzt, und da das Fernrohr etwa 20 mal vergrösserte, so konnte noch bequem auf 0,1 Scalentheil abgelesen werden. 100 Scalentheile waren im Gesichtsfeld sichtbar. Die Entfernung vom Fernrohr zum Spiegel betrug ca. 70 cm, die vom Spiegel zum Spalt ca. 250 cm.

Da der Apparat nur zur Messung galvanischer Ströme dienen sollte, so brauchte auf die akustischen Eigenschaften des Telephons keine Rücksicht genommen zu werden, und ich ersetzte daher die dicke Eisenplatte durch eine dünne, gewellte Neusilbermembran, wie sie zu Aneroidbarometern gebraucht werden. In der Mitte derselben, gegenüber dem Telephonmagnet, war ein Stück weichen Eisens aufgelöthet.²⁾

Schickt man nun einen constanten Strom durch den Apparat, so ändert die Membran ihre Gleichgewichtslage, es springt daher die Lichtlinie im Gesichtsfeld mit vollkommener Dämpfung ein Stück weiter und bleibt ruhig stehen, so lange der Strom währt. Und zwar ist dieser Ausschlag proportional der Stromintensität, da wegen des starken, constanten Telephonmagnets die Bewegung der Membran dem Strom proportional ist. Um dies experimentell nachzuwei-

1) Vgl. meine Diss. p. 7 u. 8.

2) Ich gedenke in nächster Zeit eine ausführliche Beschreibung des Apparates in etwas abgeänderter Form zu geben.

sen, wurde benutzt, dass bei der Wheatstone'schen Brücke in der Nähe des Nullpunkts die Stromintensität der Widerstandsänderung, d. h. der Verschiebung des Schleifcontacts vom Nullpunkt proportional sein muss. — Der auch später immer benutzte Brückendraht hatte einen Widerstand von 1,92 Siemens bei einer Länge von 1 m. Es wurden auf beiden Seiten 10 Siemens zugeschaltet und auch die beiden anderen Widerstände zu je 11 Siemens gewählt. Ich erhielt folgende Zahlen; die erste Reihe gibt die Entfernung vom Nullpunkt in Centimetern Brückendraht an, die zweite den Ausschlag in Scalentheilen der Oculartheilung; die dritte den jedesmaligen mittleren Ausschlag für 10 cm.

cm :	-50	-40	-30	-20	-10	0	+10	+20	30	40	50
Δ :	-9,6	-7,8	-5,7	-3,8	-1,95	0	+1,9	3,9	5,7	7,6	9,6
10 cm:	1,92	1,95	1,90	1,90	1,95	0	1,90	1,95	1,90	1,90	1,92

Die Differenzen liegen innerhalb der Beobachtungsfehler. Es lässt sich hieraus zugleich die Empfindlichkeit des Apparates berechnen; es ergab sich für 10 cm = 0,019 S. Widerstandsänderung ein Scalenausschlag von 1,92. Nun war das benutzte Element ein Daniell, in jedem Zweige waren 11 Siemens Widerstand, im Brückenweig 201, demnach ergibt sich ein Scalenthail Ausschlag für ca. $5 \cdot 10^{-5}$ Ampère.

Die Einstellung auf den Strom Null geschieht, indem man das Fadenkreuz mit der Mitte des ziemlich schmalen Spaltbildes zusammenfallen lässt und nun die Widerstände so lange ändert, bis der Faden bei Stromschluss oder Wechsel nicht mehr die Mitte des Lichtstreifens verlässt. Hierbei sind noch Ströme von 10^{-6} Ampère und darunter merklich.

Damit ist jedoch noch lange nicht die Empfindlichkeit guter Galvanometer erreicht, der Vorzug des Apparates besteht darin, dass man die Stromstärke momentan ablesen kann, so dass er sich zur Beobachtung mit der Zeit veränderlicher Ströme, z. B. des Polarisationsstroms, vorzüglich eignet. Auch die Einstellung auf Null ist schnell und bequem, ich habe daher im Folgenden sämtliche Widerstandsmessungen mit diesem Apparat gemacht.

Bedeutend empfindlicher ist das „optische Telephon“, wie ich es der Kürze halber gegenüber dem Hörtelephon nennen möchte, bei der Messung von Wechselströmen.

Geht ein einfacher Sinusstrom, mit dem wir uns vorläufig nur beschäftigen wollen, durch den Apparat, so vibriert die Membran, der Spiegel dreht sich schnell hin und her, und es erscheint im Fernrohr statt einer Lichtlinie ein Lichtband, dessen Breite proportional der Amplitude des Sinusstroms ist.

Ausser von der Amplitude ist jedoch dieser Ausschlag auch noch von der Schwingungszahl des Sinusstroms abhängig, da, wie jedes Stück Metall, auch die Membran und die Feder mit dem daraufgeklebten Spiegel Eigentöne haben; je näher die Schwingungszahl des Stromwechsels einem dieser Eigentöne liegt, desto grösser wird die Bewegung des Spiegels und die Breite des Lichtbandes sein nach der Formel: $\alpha = E/(n^2 - p^2)^{1/2}$, worin n die Schwingungszahl der freien Schwingung, also des Eigentons ist, p die des erzwungenen, also des Sinusstromes.

Ist $p = 0$, d. h. lasse ich eine constante Kraft auf die Platte wirken, so ist:

$$\alpha_0 = \frac{E}{n^2}, \quad \frac{\alpha_0}{\alpha} = \frac{\frac{E}{n^2}}{\frac{E}{n^2 - p^2}} = 1 - \left(\frac{p}{n}\right)^2.$$

Wir betrachten zwei Grenzfälle: es sei n bedeutend grösser als p , was man dadurch erreichen kann, dass man die Platte dick und den Spiegel klein nimmt. Dann ist näherungsweise $\alpha = \alpha_0$, d. h. ich kann den Ausschlag durch den Sinusstrom direct mit dem durch einen constanten Strom hervorgerufenen vergleichen, also die Amplitude des Sinusstroms absolut messen. Da die in der Technik gebrauchten Wechselstrommaschinen annähernd Sinusströme und zwar von verhältnissmässig niedriger Schwingungszahl liefern, so wäre der Apparat zur Messung dieser Ströme geeignet.

In dem anderen Grenzfall, wenn $p = n$ ist, d. h. wenn der Eigenton der Membran und die Schwingungszahl des Sinusstroms übereinstimmen, wird der Ausschlag sehr gross. Dieser Fall wird uns im Folgenden ausschliesslich beschäftigen, da es auf diese Weise möglich wird, sehr schwache Wechselströme zu messen. Um besonders gute Wirkungen zu er-

1) Rayleigh, Theory of sound. 2. § 43.

zielen, müssen n und p genau übereinstimmen, und muss ich vor allem auseinandersetzen, wie dies erreicht wird.

Man beginnt damit, dass man die Dicke der Membran und das Gewicht des aufgelötheten Eisenstücks so wählt, dass ihr Grundton in dem Bereich liegt, in welchem man zu arbeiten wünscht; bei mir ca. 150 Schwingungen in der Secunde. Darauf stellt man die Feder (cf. Fig. 1) ein, deren Eigenton man dadurch ändern kann, dass man sie verlängert oder verkürzt, indem man sie bei A (Fig. 1) mehr oder weniger weit einklemmt. Das rohe Einstimmen geschah nach dem Gehör, zum feineren wandte ich eine Stimpfpfeife mit verschiebbarem Stempel an, und sah in dem Spiegel nach einer scharf begrenzten Linie, etwa einem Fensterrand, wobei eine Bewegung des Spiegels sofort merklich wird. Bei Aenderung des Pfeifentons traten zwei Maxima auf, das eine dem Eigenton der Membran, das andere dem der Feder entsprechend. Darauf wurde die Länge der Feder so lange geändert, bis beide Maxima zusammenfielen. Das nun auftretende Maximum war ein ziemlich breites, sodass der Apparat nicht allzuleicht verstimmt werden konnte.

Die höheren Eigentöne des Systems sind nur sehr wenig ausgebildet. Bei der Membran ist die Hauptmasse in dem in der Mitte aufgelötheten Eisenstück concentrirt, wo auch der Wirkungspunkt der Kraft liegt. Der grösste Theil der Feder ist durch den aufgeklebten Spiegel starr und nur ein kleiner und leichter Theil biegsam. Infolge dessen können bei beiden die höheren Eigentöne nur schwach oder gar nicht auftreten; wenigstens habe ich nie irgend einen Einfluss derselben merken können.

Schliesslich muss nun noch die Schwingungszahl des Wechselstroms mit dem Grundton der Membran in Uebereinstimmung gebracht werden. Es wurde der secundäre Strom eines Inductionsapparates benutzt, dessen primärer Strom durch eine electromagnetisch getriebene Saite unterbrochen wurde. Dieselbe arbeitet sicherer und bequemer als eine Stimmgabel und ist die Einrichtung dabei folgende. Eine Eisensaite wird unter einem Electromagnet aufgespannt; ungefähr in der Mitte derselben werden zwei Kupferdrähte (K_1 und K_2 ; s. Fig. 2) angelöthet, die in zwei Quecksilber-

näpfchen tauchen. Ein Accumulator (A_1), der Electromagnet und ein Quecksilbercontact werden in bekannter Weise zum Betriebe der Saite gebraucht. Der andere dient als Unterbrecher des primären Stromes des Inductionsapparates. Der

Fig. 2.

Vorzug der Methode ist, dass man die Tonhöhe bequem, schnell und in einem grossen Bereich ändern kann, ohne dass dabei die Saite zu schwingen aufhört. Dazu kommt ein sehr ruhiger und gleichmässiger Gang, auch wenn nur ein Daniell als treibende Kraft dient.

Der Contact zwischen der Saite und den Quecksilbernäpfchen wurde nicht durch Platindrähte, sondern durch dünne, amalgamirte Kupferdrähte bewirkt, wobei der Contact viel gleichmässiger ist, so dass das Lichtband im Fernrohr ganz ruhig steht und auch bei grossen Ausschlägen bequem auf $\frac{1}{10}$ Scalentheil abgelesen werden kann. Demnach kann mit diesem Apparat die Amplitude eines alternirenden Stroms auf mindestens 1 Proc. genau gemessen werden.

Um nun die Saite auf den Eigenton des Apparates einzustimmen, wird derselbe in den Brückenweig der Wheatstone'schen Brücke gebracht und der Schleifcontact so verschoben, dass ein passender Ausschlag entsteht. Nun wird der Ton der Saite durch Spannen so lange geändert, bis dieser Ausschlag ein Maximum erreicht.

Die ganze eben beschriebene Einstimmung der drei Töne aufeinander ist bei einiger Uebung in einer Viertelstunde leicht zu vollenden. — Der Apparat bleibt, einmal eingestellt, wochenlang brauchbar, ohne dass eine neue Einstimmung nothwendig wäre. Bei der Saite war dies öfter nothwendig, da sie vor dem Fenster stehen musste, wo sie

Temperaturveränderungen u. s. w. ausgesetzt war; im Zimmer rief ihr Ton einen kleinen Ausschlag hervor, der bei den meisten Untersuchungen störend gewirkt hätte.

Wie bei allen empfindlichen Apparaten war es nicht möglich mit Sicherheit Ausschläge auf einander zu beziehen, welche an verschiedenen Tagen beobachtet waren; jedoch ist dies im allgemeinen auch nicht nöthig. Im Folgenden habe ich nur solche Ausschläge miteinander verglichen, die durch Umschalten unmittelbar hintereinander erfolgten, wo also ein Fehler durch etwaige Aenderungen der Einstimmung absolut ausgeschlossen ist.

Es ist oben stillschweigend anstatt eines einfachen Sinusstroms der Strom eines Inductoriums eingeführt. Die Form des letzteren hängt wesentlich von dem Inductorium und der Art der Unterbrechung ab. Jedenfalls besteht er ausser dem Sinusstrom von der Periode der Unterbrechung aus einer Anzahl von Sinusströmen höherer Perioden, welche in dem System alle nebeneinander für sich bestehen und wenn man den Strom durch ein Hörtelephon schickt, als Obertöne auftreten.

Das optische Telephon nun zeigt für den Strom, auf dessen Periode es eingestimmt ist, einen mehr als 100fachen Ausschlag, wie für jeden anderen; infolge dessen kann der Ausschlag für die Sinusströme höherer Periode vernachlässigt werden, besonders wenn man ein Inductorium mit festem Eisenkern anwendet, wo die Stromcurve annähernd sinusförmig verläuft, sodass die Ströme höherer Periode verhältnissmässig schwach sind. Auf einen scharfen experimentellen Beweis dieser Eigenschaft des optischen Telephons komme ich weiter unten (p. 614) zu sprechen. Man hat dadurch den grossen Vortheil, dass man den durch eine Saitenunterbrechung gelieferten Inductionsstrom, dessen Periode constant ist und genau bestimmt werden kann, in Bezug auf den Apparat als einfachen Sinusstrom ansehen kann. Im Gegensatz hierzu muss man, wenn man mit dem Dynamometer Sinusströme studiren will, einen Sinusinductor anwenden, bei dem ein gleichmässiger Gang und eine genaue Bestimmung der Schwingungszahl nicht möglich ist.

Ferner unterscheidet sich der Apparat dadurch von dem

Dynamometer, dass der Ausschlag direct proportional der Stromamplitude ist, während dies bei dem Dynamometer nur bei der Wheatstone'schen Brücke mit Hülfe eines Kunstgriffs zu erreichen ist, indem man die feste Rolle, also einen verhältnissmässig grossen Widerstand in den Hauptzweig bringt.

Die Proportionalität zwischen Ausschlag und Stromamplitude musste experimentell bewiesen werden. Es geschah dies in derselben Weise wie oben bei constantem Strom, indem bei der Wheatstone'schen Brücke der Schleifcontact in der Nähe des Nullpunktes verschoben wurde, wobei der durch die Brücke gehende Strom dieser Verschiebung proportional ist.

Die Widerstände in den vier Zweigen waren dieselben, wie oben.

Ich erhielt folgende Tabelle, in welcher die erste Columnne die Verschiebung des Schleifcontacts vom Nullpunkt in Centimeter Brückendraht angibt, die zweite den beobachteten Ausschlag, die dritte den aus dem Mittelwerth der beobachteten berechneten Ausschlag, die vierte die Abweichungen:

cm	beob. A	ber. A	Δ
0	0	0	0
5	10,3	10,15	+0,15
10	20,2	20,3	-0,1
15	30,6	30,45	+0,15
20	40,6	40,6	$\pm 0,0$
25	50,7	50,75	+0,05
30	60,8	60,9	-0,1
35	70,9	71,05	-0,15
40	81,0	81,2	-0,20

Die Abweichungen liegen innerhalb der Beobachtungsfehler, somit ist die Proportionalität bewiesen.

Es konnte hieraus nicht in so einfacher Weise die Empfindlichkeit des Apparates bestimmt werden, wie oben bei constantem Strom. Einen angenäherten Werth erhielt ich, indem die mittlere electromotorische Kraft eines Sinusinductors, welcher ungefähr soviel Umdrehungen in der Secunde machte, wie die Schwingungszahl des optischen Telephons betrug, mittelst eines Dynamometers festgestellt wurde. Darauf wurde bei gegebenen Widerständen in der Wheatstone'schen Brücke der Ausschlag des optischen

Telephons für den Strom des Sinusinductors abgelesen. Hieraus berechnete sich, dass, um einen Ausschlag von 1 Scalentheil hervorzurufen, eine mittlere Intensität des Sinusstroms von etwa $6 \cdot 10^{-7}$ Ampère nothwendig war. Bei der Einstellung auf den Strom Null waren ca. 10^{-8} Ampère noch merklich. Die Nulleinstellung geschieht am besten, indem ein dünner Draht in dem Spalt aufgespannt wird, der ziemlich breit und nicht zu hell beleuchtet sein muss. Geht ein Strom durch den Apparat, so erscheint der Draht breiter und weniger intensiv dunkel.

Das angewandte Dynamometer bedurfte für einen Ausschlag von einem Scalentheil einer mittleren Stromintensität von ca. 10^{-8} Ampère; jedoch war auch bei der Nulleinstellung die Empfindlichkeit nicht viel grösser, da wegen der langsamen und schwierigen Ablesung die Fehlergrenze ziemlich hoch lag.

Bei der grossen Verschiedenheit dieser beiden Apparate zur Messung von Wechselströmen dient vielleicht die Genauigkeit der Nulleinstellung bei der Messung eines inductionsfreien Widerstandes am besten zum Vergleich ihrer Empfindlichkeit. Ich gebe daher für jeden Apparat zehn Einstellungen in Centimetern des Brückendrahtes, der einen Widerstand von 1,92 Siemens besass, während 100 Siemens auf beiden Seiten hinzugefügt waren; in den beiden anderen Zweigen befanden sich auch je 101 Siemens. In der Brücke war einmal die bewegliche Rolle des Dynamometers mit einem scheinbaren Widerstand von 250 S., das andere mal das Telephon mit 234 S., sodass beide Apparate sich ungefähr unter denselben Bedingungen befanden. Ich erhielt folgende Werthe:

Dynamometer		Optisches Telephon	
cm	Δ	cm	Δ
45,9	4,5	50,9	0,4
54,0	3,6	50,3	0,2
51,6	1,2	50,8	0,3
47,1	3,3	50,5	0,0
50,6	0,2	51,1	0,6
43,6	6,8	50,3	0,2
52,9	2,5	50,8	0,3
55,2	4,8	50,0	0,5
53,1	2,7	50,0	0,5
50,3	0,1	50,2	0,3
504,3	29,7	504,9	3,3

Es ergibt dies einen mittleren Fehler in der Widerstandsbestimmung beim Dynamometer von 0,11 Proc., bei dem optischen Telephon von 0,012 Proc. Wichtiger jedoch als die grössere Genauigkeit ist die grössere Bequemlichkeit und Schnelligkeit der Einstellung. Zu zehn Einstellungen mit dem optischen Telephon waren nur etwa 3—4 Minuten erforderlich.

Das Hörtelephon lässt sich nicht in dieser Weise mit den anderen Apparaten vergleichen; jedenfalls kommt man nicht über eine Genauigkeit von $\frac{1}{10}$ Proc. hinaus. Es ist übrigens bei Anwendung des Sinusinductors als Stromquelle, also für reine Sinusströme, wie schon F. Kohlrausch bemerkt, sehr unempfindlich. Die Möglichkeit einer genauen Null-einstellung bei gewöhnlichen Inductionsströmen beruht auf der Empfindlichkeit des Hörtelephons für Wechselströme sehr hoher Periode, was jedoch wieder andere Uebelstände mit sich bringt. Ich komme auf diesen Punkt weiter unten zurück.

Der Widerstand des Telephons von ca. 200 Siemens ist bei sehr grossen oder sehr kleinen Widerständen in den vier Zweigen der Brücke nicht günstig. Um dem abzuhelfen, benutzt Chaperon¹⁾ zur Messung von Flüssigkeitswiderständen bis zu 100 000 Ohm einen Transformator, dessen eine Rolle 5000 Ohm hatte. Diese war in die Brücke eingeschaltet. Die andere hatte den Widerstand des Telephons und war mit demselben verbunden. Da ich oft mit kleinen Widerständen zu thun hatte, benutzte ich das entgegengesetzte Princip, indem ich in die Brücke die primäre Rolle eines Inductoriums mit weichem Eisenkern brachte, welche etwa 1,4 S. besass. Mit dem Telephon war die secundäre von etwa 90 S. Widerstand verbunden. Bei je 1 Siemens in den vier Zweigen der Brücke erhielt ich etwa den fünf-fachen Ausschlag, wie bei directer Einschaltung.

Die Haupteigenschaften des optischen Telephons sind also noch einmal kurz zusammengefasst, folgende:

1) Dasselbe misst mit grosser Empfindlichkeit einen Sinusstrom einer bestimmten Periode, unbekümmert um andere Ströme in dem System.

1) Chaperon, Journ. de Phys. 9. p. 481. 1890.

2) Der Ausschlag ist proportional der Amplitude dieses Sinusstromes.

Anwendungen.

Geht ein Wechselstrom durch eine Wheatstone'sche Brücke und befindet sich in einem Zweige derselben eine Inductionsrolle oder eine Flüssigkeitszelle, oder ist ein Condensator nebengeschaltet, so ist es nicht möglich, durch alleinige Widerstandsänderung den Strom in dem Brückenzweig zum Verschwinden zu bringen, sondern man erhält nur ein Minimum. Und zwar fällt dieses Minimum nicht mit dem wahren Nullpunkt zusammen, d. h. mit dem Punkte des Brückendrahtes, wo $w_1 w_4 = w_2 w_3$ ist. Diese Differenz zwischen Minimum und Nullpunkt einerseits, der Vergleich der Stromamplituden im Minimum und Nullpunkt andererseits geben Werthe für die Capacität, das Selbstpotential und die Polarisation. Da sich auf diese Weise nur sehr grosse Capacitäten bestimmen lassen, so habe ich mich im Folgenden besonders mit der Selbstinduction und der Polarisation beschäftigt, mit letzterer bis jetzt nur, insofern sie bei der Messung von Flüssigkeitswiderständen in Betracht kommt.

Messung von Selbstpotentialen.

Es müssen zuerst die nothwendigen Formeln abgeleitet werden; ich gebe die ersten Gleichungen im Anschluss an Oberbeck.¹⁾ Geht ein veränderlicher Strom durch einen Leiter mit Selbstinduction, so besteht die Gleichung:

$$p \frac{\partial J}{\partial t} + wJ = E.$$

Hierin ist p das Potential des Zweiges auf sich selbst, J die Stromstärke zur Zeit t , w der Widerstand und E die electromotorische Kraft.

Dann lauten die Kirchhoff'schen Gleichungen; für jeden geschlossenen Kreis von Zweigen, in denen der Hauptzweig — der Sitz der electromotorischen Kraft — nicht vorkommt:

$$\sum \left\{ p \frac{\partial J}{\partial t} + wJ \right\} = 0$$

für jeden Verzweigungspunkt:

1) Oberbeck, Wied. Ann. 17. p. 820. 1882.

$$\sum J = 0.$$

Ist in dem Hauptzweig ein einfach periodischer Strom mit der Amplitude 1, $J = e^{int}$, so lauten die Gleichungen:

$$\sum \{K(inp + w)\} = \sum (Ka) = 0, \quad \sum K = 0,$$

$a = inp + w$ eine Grösse, welche von den Engländern Widerstandsoperator genannt wird.

Fig. 3.

K ist die Amplitude in jedem Zweige und lässt sich aus den obigen Gleichungen berechnen. Z. B. für den Brückenweig der Wheatstone'schen Brücke:

$$K = \frac{a_1 a_4 - a_2 a_3}{(a_1 + a_2)(a_3 + a_4) + w(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)}.$$

Hierin sind a_1 bis a_4 die Widerstandsoperatoren der vier Zweige der Wheatstone'schen Brücke und w der Widerstand des Brückenweiges.

K ist im allgemeinen eine complexe Zahl $= \mu + i\nu$; führt man die Rechnung durch, indem man überall für $+i -i$ setzt, so erhält man $K' = \mu - i\nu$.

Nun soll ein einfacher Sinusstrom:

$$J = \cos nt = \frac{1}{2}(e^{int} + e^{-int})$$

durch das System gehen, dann ist die Stromstärke für jeden Zweig:

$$J = \frac{1}{2}(\mu + i\nu)e^{int} + \frac{1}{2}(\mu - i\nu)e^{-int} = \mu \cos nt - \nu \sin nt \\ = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} \cos(nt - \varepsilon) = \sqrt{KK'} \cos(nt - \varepsilon).$$

Die Phasendifferenz $\varepsilon = \arctg(-\nu/\mu)$ hat Oberbeck zur Bestimmung von Selbstinductionscoefficienten benutzt. Uns interessirt im Folgenden nur die Amplitude $\alpha = \sqrt{KK'}$.

Es befinde sich nun in dem Zweige 1 der Wheatstone'schen Brücke eine Inductionsrolle, in den anderen sei die Selbstinduction zu vernachlässigen. Dann ist:

$$a_1 = w_1 + inp, \quad a_2 = w_2, \quad a_3 = w_3, \quad a_4 = w_4.$$

Demnach im Brückenweig:

$$\alpha^2 = KK' = \frac{(w_1 w_4 - w_2 w_3)^2 + n^2 p^2 w_4^2}{\{(w_1 + w_2)(w_3 + w_4) + w(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)\}^2 + n^2 p^2 (w + w_3 + w_4)^2}.$$

Es sei w_3 und w_4 , wie gewöhnlich, durch einen Schleifcontact veränderlich; der Punkt des Brückendrahtes, wo bei

constantem Strom im Brückenweig der Strom Null ist, sei „wahrer Nullpunkt“ genannt und die dazugehörigen Werthe mit w_{03} und w_{04} bezeichnet. Ferner sei δ der Widerstand des Stückes des Brückendrahtes, um welches der Schleifcontact von dem wahren Nullpunkt entfernt ist. Dann wird:

$$(1) \quad \alpha^2 = \frac{\delta^2(w_1 + w_2)^2 + n^2 p^2(w_{04} - \delta)^2}{\{w_1 + w_2\}(w_3 + w_4) + w(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)\}^2 + n^2 p^2(w + w_3 + w_4)^2}.$$

Wenn man den Schleifcontact auf dem Brückendraht verschiebt, so ändert sich nur δ ; aus diesem Grunde ist δ als neue Grösse eingeführt.

Da im Nenner nur die Summe $w_3 + w_4 = w_{03} + w_{04} =$ dem Widerstand des ganzen Brückendrahtes vorkommt, so ist der Nenner von δ unabhängig und ich bezeichne ihn mit N .¹⁾

Der Zweck der folgenden Rechnung ist, zu zeigen, an welcher Stelle des Brückendrahtes, also für welches δ ein Minimum des Ausschlages eintritt.

Da diese Rechnung sich noch ein paar mal wiederholt, will ich sie schematisch durchführen. α^2 hat die Form:

$$(2) \quad \alpha^2 = \frac{A\delta^2 - 2B\delta + C}{N}.$$

Für den wahren Nullpunkt ($\delta = 0$) wird offenbar α nicht = 0, sondern:

$$(3) \quad \alpha_0^2 = \frac{C}{N}.$$

α^2 wird ein Minimum, wenn $\partial \alpha^2 / \partial \delta = 0$, d. h.:

$$(4) \quad \delta_1 = \frac{B}{A}.$$

Dann ist die Intensität im Minimum:

$$(5) \quad \alpha_1^2 = \frac{AC - B^2}{AN}.$$

1) Es ist hier die etwas ungewöhnliche Einrichtung getroffen, dass der Schleifcontact nicht mit dem Brückenweig, sondern mit dem Hauptweig, dem Sitz der electromotorischen Kraft, verbunden ist. Wendet man die gewöhnliche Form der Brücke an, so tritt δ im Nenner der Gleichung (1) auf, ist aber von verschwindendem Einfluss auf seinen Werth, so lange δ klein gegen w , was hier im allgemeinen immer der Fall sein wird, da δ ein Stück des Brückendrahtes, also ein Bruchtheil von 1 Siemens ist, während w der scheinbare Widerstand des Telephon-
ca. 234 S. beträgt.

Bilden wir $(\alpha_0^2 - \alpha_1^2)/\alpha_1^2 = \rho^2$, so wird:

$$(6) \quad \rho = \frac{B}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

Im vorliegenden Fall — Inductionsspule im Zweige 1, Gleichung (1) — ist:

$$\delta_1 = \frac{B}{A} = \frac{n^2 p^2 w_0}{(w_1 + w_2)^2 + n^2 p^2}, \quad \rho = \frac{B}{\sqrt{AC - B^2}} = \frac{np}{w_1 + w_2}.$$

Hieraus:

$$np = (w_1 + w_2) \sqrt{\frac{\delta_1}{w_0 - \delta_1}} = (w_1 + w_2) \sqrt{\frac{\delta_1}{w_2}} \text{ und } np = (w_1 + w_2) \rho.$$

Wir haben hier zwei Gleichungen für np , sodass wir durch eine Einstellung gleichzeitig zwei voneinander unabhängige Werthe für diese Grösse erhalten, den einen durch die Bestimmung von δ_1 , den anderen durch die Bestimmung von ρ . — Der Gang des Versuchs ist im einzelnen folgender. Mittelst eines Umschalters leitet man zuerst einen constanten Strom durch das System, stellt auf den wahren Nullpunkt ein und erhält dadurch zugleich w_1 . Darauf leitet man durch Umschalten den Wechselstrom hindurch und liest den Ausschlag am Nullpunkt (α_0) ab; nun verschiebt man den Schleifcontact bis der Ausschlag ein Minimum wird und liest denselben (α_1) ab; damit erhält man:

$$\rho = \sqrt{\frac{\alpha_0^2 - \alpha_1^2}{\alpha_1^2}}$$

und den einen Werth von np . Den anderen erhält man zugleich durch δ_1 (das Stück des Brückendrahtes, um das der Schleifcontact vom Nullpunkt verschoben ist).

Im allgemeinen ist die Bestimmung von np aus der Gleichung $np = (w_1 + w_2) \rho$ vorzuziehen, da bei grösserer Selbstinduction der Ort des Minimums und damit δ_1 unsicher wird.

Um mit grösserer Sicherheit ρ bestimmen zu können, wurden zwei Schleifcontacte angewandt, der eine auf den Nullpunkt, der andere auf das Minimum eingestellt; mittelst einer Wippe konnte jeder derselben nach Belieben eingeschaltet werden. Nun konnten durch einfaches Umliegen der Wippe die Ausschläge α_0 und α_1 kurz hinter-

einander abgelesen werden, ohne dass Fehler von der Inconstanz des Wechselstroms u. s. w. zu befürchten waren. Bei einer Messung ist hierbei der Fehler etwa 1 Proc. Man kann jedoch durch Aenderung von w_3 und w_4 , welche in obigen Gleichungen nicht vorkommen, beliebig viele unabhängige Werthe für ρ erhalten; und ferner durch Aenderung

Fig. 4.

von $w_1 + w_2$ beliebig viele verschiedene ρ , die alle dasselbe np ergeben müssen; so dass man auf diese Weise np leicht bis auf $1/10$ Proc. und genauer messen kann. Die einzelne Messung ist sehr schnell gemacht, sodass ich in zwei Stunden über 30 Werthe für einen Selbstinductionscoëfficienten erhielt.

Hiermit ist np gegeben, um p selbst zu erhalten, muss $n = 2\pi/T$ bestimmt werden. Mittelst der Methode der Schwebungen fand ich $1/T = 149,8$; also $n = 941,2$.

In den wenigen Tagen, in welchen, nachdem die Methode einmal festgestellt, die hier angegebenen Selbstinductionscoëfficienten gemessen wurden, blieb die Schwingungszahl innerhalb der Fehlergrenzen constant. Es wurde dies ausser durch den Vergleich mit einer eingestimmten Stimmgabel noch durch Wiederholung der Messung von np bei einigen Rollen bewiesen, die bis auf Bruchtheile eines Procents dieselben Werthe ergab.

Zur besseren Veranschaulichung gebe ich für eine Rolle die ausführlichen Zahlen. w_1, w_2, np in Siemens, δ und w_4 in Centimeter Brückendraht, α_0, α_1 in Scalentheilen.

$w_1 + w_2$	δ	w_4	np	α_0	α_1	np	Bemerkungen
2,11	28,3	19,2	2,56	20,1	12,7	2,57	
3,11	26,1	38,5	2,56	22,8	17,6	2,57	
2,11	42,7	30,0	2,55	25,3	16,1	2,55	} 1 Siemens zu w_3 zugeschaltet.
3,11	61,8	36,5	2,57	28,1	21,3	2,59	

Mittelwerth $np = 2,565$ S., mittlerer Fehler der einzelnen Beobachtung ca. $\frac{1}{2}$ Proc. Um p in absolutem Maass zu erhalten, muss die Zahl mit $10^9 \cdot 0,943/941,2$ multiplicirt werden; es wird also $p = 2,57 \cdot 10^6$ cm.

Die secundäre Rolle eines du Bois'schen Schlittenapparates gab bei einem Widerstand von 251 S. $np = 902,5$, so dass der scheinbare Widerstand bei dieser niedrigen Schwingungszahl schon 937 S. beträgt. Eine Drahtrolle von 0,285 S. hatte einen Selbstinductionscoefficienten $np = 0,122$ S.; mit einem Kern aus dünnem Eisendraht $np = 1,103$ S.

Bei sehr kleinen Ausschlägen, also bei kleiner Selbstinduction und verhältnissmässig grossem begleitendem Widerstande, wird die Bestimmung von ρ und δ sehr ungenau; man thut dann am besten solche Selbstinductionscoefficienten direct mit anderen grösseren zu vergleichen. Dies geschieht auf folgende Weise: im Nullpunkt ist $\alpha_0 = np/N$. Demnach verhält sich, wenn sonst alles gleich bleibt und nur p im Zweige 1 geändert wird: $p:p' = \alpha_0:\alpha'_0$. Hierbei ist nur darauf zu achten, dass die Widerstände in den Zweigen 3 und 4 gross gegen np sind, damit der Nenner trotz der Aenderung von np merklich denselben Werth beibehält. Da der Voraussetzung nach np klein sein soll, ist dies leicht zu erfüllen. Auf diese Weise ermittelte ich die Aenderung der Selbstinduction einer Rolle beim allmählichen Hineinschieben eines Eisendrahtkerns. Indem auf dem Drahtkern eine Theilung angebracht und eine Tabelle dazu angefertigt wurde, erhielt ich eine Drahtrolle mit bekannter, variabler Selbstinduction, die mir später nützlich wurde. Trotz der sehr niedrigen angewandten Periode lassen sich selbst sehr kleine Selbstinductionscoefficienten in dieser Art messen, z. B. der eines ein paar Mal um eine Bleifeder gewickelten Kupferdrahtes. Auch geradlinige Eisendrähte oder dicke Kupferdrähte zeigen noch merkliche Selbstinduction und hoffe ich hierüber bei höherer Schwingungszahl bald genauere Werthe zu erhalten.

Bei Rollen mit festem Eisenkern erhielt ich ganz falsche Resultate. Es liegt dies daran, dass infolge der in der Eisenmasse selbst entstehenden Ströme der Extrastrom eine Phasenverzögerung erleidet. Oberbeck¹⁾ hat mit Hülfe des Dynamometers und des Sinusinductors diese Phasenverzögerung gemessen und zur genaueren Berechnung der inducirten magnetischen Momente benutzt.

Wenn wir die Phasenverzögerung in die obigen Formeln einführen, so muss bei einem Strom $J = e^{int}$ im Hauptzweig, in dem Ausdruck für die electromotorische Kraft des Extrastroms $p \cdot \partial J / \partial t$ statt $J = e^{int}$, $J = e^{i(n t - \psi)}$ gesetzt werden. Dann wird der Widerstandsoperator $a_1 = w + ipn \cdot e^{-i\psi}$; für den Strom e^{-int} im Hauptzweig $a_1' = w - ipn e^{+i\psi}$. Demnach ist für einen Sinusstrom die Intensität im Brücken-zweig ($K = (a_1 a_4 - a_2 a_3) / N$):

$$\alpha^2 = K K' = \frac{\{-\delta(w_1 + w_2) + ipn e^{-i\psi}(w_{04} - \delta)\} \{-\delta(w_1 + w_2) - ipn e^{+i\psi}(w_{04} - \delta)\}}{N},$$

$$\alpha^2 = \frac{\delta^2(w_1 + w_2)^2 + n^2 p^2 (w_{04} - \delta)^2 - 2np \sin \psi (w_{04} - \delta) \delta (w_1 + w_2)}{N}.$$

α^2 hat wieder die Form:

$$\frac{A \delta^2 - 2B \delta + C}{N}$$

und es folgt aus Gl. (6) p. 606):

$$\rho = \frac{B}{\sqrt{AC - B^2}} = \frac{np + (w_1 + w_2) \sin \psi}{(w_1 + w_2) \cos \psi},$$

$$np = (w_1 + w_2) (\rho \cos \psi - \sin \psi).$$

Aus zwei oder mehreren Paaren von Beobachtungen bei verschiedenem $(w_1 + w_2)$ erhält man ψ nach der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\rho(w_1 + w_2) - \rho'(w_1' + w_2')}{(w_1 + w_2) - (w_1' + w_2')}.$$

Dann bestimmt man durch Einsetzen von ψ in die Gleichung $np = (w_1 + w_2) \{\rho \cos \psi - \sin \psi\}$ aus denselben oder anderen Beobachtungen np .

Nun konnte das hier wichtige Selbstpotential eines Telephons bestimmt werden. Dasselbe besass einen Widerstand von 202,0 S. und ich fand:

$$\operatorname{tg} \psi = 0,190, \quad \psi = 10,8^\circ; \quad np = 121,0, \quad p = 1,213 \cdot 10^8 \text{ cm.}$$

1) Oberbeck, Wied. Ann. 21. p. 672. 1883.

Es ist in den meisten Fällen bequemer ψ für sich auf eine etwas andere Art zu bestimmen.

Bringt man nämlich die Inductionsrolle vorläufig ohne Eisenkern nicht in den Zweig 1, sondern in den Zweig 3 als Zuschaltung zum Brückendraht, so wird der Widerstandsoperator $a_1 = w_1$, $a_2 = w_2$, $a_3 = w_3 + inp$, $a_4 = w_4$ und:

$$\alpha^2 = \frac{\delta^2 (w_1 + w_2)^2 + n^2 p^2 w_2^2}{N}.$$

Aus $\partial \alpha^2 / \partial \delta = 0$ folgt $\delta = 0$: es fällt das Minimum mit dem wahren Nullpunkt zusammen; nebenbei bemerkt, ergibt sich hieraus die Möglichkeit den wahren Widerstand eines Leiters mit Selbstinduction durch Wechselströme zu messen.¹⁾

Wenn nun ein Eisenkern in der Rolle ist, so tritt eine Phasenverzögerung des Extrastromes auf und es wird:

$$\alpha^2 = \frac{\delta^2 (w_1 + w_2)^2 + n^2 p^2 w_2^2 - 2npw_2 (w_1 + w_2) \delta \sin \psi}{N},$$

$$\frac{\partial \alpha^2}{\partial \delta} = 2\delta (w_1 + w_2)^2 - 2npw_2 (w_1 + w_2) \sin \psi = 0,$$

$$\delta_1 = \frac{B}{A} = \frac{w_2 \cdot np \cdot \sin \psi}{w_1 + w_2}, \quad \varrho = \operatorname{tg} \psi.$$

Es fällt also hier nicht Nullpunkt und Minimum zusammen.

Daraus ergibt sich erstens ein Mittel, um das Vorhandensein einer Phasendifferenz (bei Rollen mit Drahtkern) zu erkennen, und zweitens diese Phasendifferenz genau zu messen, da sie unabhängig von den Widerständen in den vier Zweigen nur von dem Verhältniss der Ausschläge im Minimum und Nullpunkt abhängt. Durch Variiren der vier Widerstände kann man demnach beliebig viele unabhängige Werthe für ψ erhalten.

Auf diese Weise wurde für eine Rolle mit Eisenkern $\operatorname{tg} \psi = 0,465$ $\psi = 25^\circ$ bestimmt; mit einem Kern von Eisen-

1) Widerstände mit Selbstinduction lassen sich auch bei der gewöhnlichen Anordnung der Wheatstone'schen Brücke mit dem optischen oder mit dem Hörtelephon messen, wenn man einen constanten Strom durch das System schickt und den Brückenzweig durch eine Stimmgabel oder Saite unterbricht. Das Telephon kann sowohl direct, als mit Hülfe eines Inductoriums (vgl. p. 602) eingeschaltet werden. In dem wahren Nullpunkt werden Ton und Ausschlag zu Null.

draht von einem Durchmesser von 2 mm $\psi = 10,5^\circ$. Je dünner der Eisendraht und je kürzer die Rolle, desto kleiner ist ψ . Bei einer Rolle von 8 cm Länge und 3 cm Durchmesser mit einem Drahtkern von feinstem Blumendraht war keine Phasendifferenz mehr nachzuweisen.

Die eben abgeleiteten Formeln stimmen deshalb nicht ganz genau, weil der von der Rolle selbst herrührende Theil des Extrastromes ohne Phasendifferenz verläuft. Dieser Theil wird im allgemeinen nur klein sein und daher der Fehler auch nur klein, sodass für die Praxis die Formeln ausreichen dürften. Oberbeck¹⁾ trennt die beiden Theile des Extrastromes und bestimmt den von dem Magnet selbst herrührenden Theil für sich, wodurch er den inducirten Magnetismus erhält. Thun wir dies auch, so erhalten wir folgende Gleichungen. Der Werth von δ_1 bleibt ähnlich:

$$\delta_1 = \frac{M n \cdot \sin \psi \cdot w_2}{w_1 + w_2}, \quad \varrho = \frac{M \sin \psi}{p + M \cos \psi}.$$

Hierin hat M dieselbe Bedeutung, wie bei Oberbeck; mit der Stromintensität multiplicirt ist es das electromagnetische Potential des Eisenkernes in Bezug auf die Rolle und kann daher M als Maass des inducirten Magnetismus gelten. Wenn p , das Selbstpotential der Rolle ohne Eisenkern, vorher für sich bestimmt ist, kann M und ψ aus ein oder mehreren Beobachtungen mittelst obiger Gleichungen berechnet werden.

Messung von Flüssigkeitswiderständen und Polarisation bei Wechselströmen.

Geht ein Wechselstrom durch eine Flüssigkeitszelle, so entsteht infolge der Polarisation an den Electroden eine neue periodische electromotorische Kraft e . Ueber diese electromotorische Kraft macht F. Kohlrausch²⁾ die Annahme, dass sie proportional der jedesmaligen Belegung der Electroden sei, also proportional der Electricitätsmenge, welche seit dem Zeichenwechsel des primären Stromes durch die Zelle hindurchgegangen ist. Indem er nun c die Capacität der Elec-

1) Oberbeck, l. c. p. 675.

2) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 148. p. 153. 1873.

troden nennt, d. h. das Reciproke des Potentials, zu welchem sie durch die Electricitätsmenge 1 geladen werden, erhält er:

$$e = \frac{1}{c} \int J dt.$$

Für $J = \sin nt$:
$$e = -\frac{1}{nc} \cos\left(nt - \frac{\pi}{2}\right).$$

Es ist also jedem Sinusstrom, der durch eine Flüssigkeitszelle geht, ein anderer entgegengesetzt gerichtet, der mit dem ersten eine Phasendifferenz von $\frac{1}{2}\pi$ hat und dessen Amplitude umgekehrt proportional der Electrodenfläche und der Schwingungszahl ist.

Es müssen wieder die Formeln für die Wheatstone'sche Brücke abgeleitet werden: Ist im Hauptzweig $J = e^{\text{int}}$, so ist die electromotorische Kraft einer Flüssigkeitszelle, durch welche der Strom geht:

$$\frac{1}{c} \int J dt = \frac{1}{inc} e^{\text{int}}.$$

Daraus folgt der Widerstandsoperator des Zweiges 1, in welchem die Zelle sich befinden soll:

$$a_1 = w + \frac{1}{inc}, \quad a_2 = w_2, \quad a_3 = w_3, \quad a_4 = w_4.$$

Die Amplitude α im Brückenweig, wenn ein einfacher Sinusstrom durch das System hindurchgeht, ergibt sich, wie gewöhnlich mit Hülfe der Gleichung $K = (a_1 a_4 - a_2 a_3)/N$ berechnet, als:

$$\alpha^2 = \frac{\delta^2 (w_1 + w_2)^2 + \frac{(w_{04} - \delta)^2}{n^2 c^2}}{N}.$$

Der Ausdruck hat genau dieselbe Form, wie oben für eine Inductionsrolle im Zweige 1, nur dass überall für np $1/inc$ zu setzen ist. Demnach ergibt sich für den Ausschlag im Minimum:

$$\alpha^2 = \frac{w_{04}^2 (w_1 + w_2)^2}{N \{1 + n^2 c^2 (w_1 + w_2)^2\}},$$

und für die Abweichung des Nullpunktes vom Minimum:

$$\delta_1 = \frac{w_{04}}{1 + n^2 c^2 (w_1 + w_2)^2}.$$

Es folgen hieraus zwei Fehler bei der Messung von Flüssigkeitswiderständen mit Dynamometer oder Hörtelephon;

ein Einstellungsfehler, weil man auf das Minimum schlecht einstellen kann, und ein principieller Fehler δ_1 .

Da $(w_1 + w_2)$ im Nenner quadratisch vorkommt, so sind offenbar diese Fehler nur gross für Flüssigkeiten mit geringem Widerstande. F. Kohlrausch hat beide Fehler verkleinert, indem er grosse platinirte Electroden anwandte, wodurch c vergrössert wird, und indem er die Schwingungszahl möglichst hoch wählte. Zugleich hat er jedoch ein Mittel angegeben, bei Sinusströmen die Fehler a priori zu vermeiden, nämlich durch Hinzufügung einer Inductionsrolle in demselben Zweige. Es wird dann der Widerstandsoperator des Zweiges 1:

$$a_1 = w_1 + inp + \frac{1}{inc}.$$

Hieraus immer in derselben Weise berechnet:

$$\alpha^2 = \frac{\delta^2(w_1 + w_2)^2 + \left(np - \frac{1}{nc}\right)^2(w_{04} - \delta)^2}{N}.$$

Für $np = 1/nc$ fällt das zweite Glied des Zählers fort, wir erhalten $\alpha^2 = \delta^2(w_1 + w_2)^2/N$, wie wenn weder Selbstinduction, noch Polarisation in dem Zweige 1 wäre; $\alpha = 0$ für $\delta = 0$, d. h. im wahren Nullpunkt wird der Ausschlag gleich Null.

Die Erscheinung wird physikalisch durch beifolgende schon von F. Kohlrausch gegebene Zeichnung klarer; darin bedeutet — den primären Strom, ----- den Polarisationsstrom, ——— den Selbstinductionsstrom. Es ist augenscheinlich, dass die beiden letzten Ströme sich bei gleicher Amplitude aufheben müssen.

Fig. 5.

F. Kohlrausch selbst hat dieses Mittel nicht benutzt, offenbar wegen der Schwierigkeit, die Rotation des Sinus-inductors, also n , constant zu erhalten. Denn es wird $np - 1/nc$ nur für eine bestimmte Periode $n = 1/\sqrt{pc}$ ¹⁾ zu Null; für alle anderen ist $np \geq 1/nc$ und bei geringen Aenderungen der Rotationsgeschwindigkeit wird die Bestimmung des Nullpunktes mit dem Dynamometer sehr unsicher. Aus demselben Grunde kann man dasselbe Mittel beim Hörtelephon nicht anwenden, da die höheren Obertöne infolge der Selbstinduction so verstärkt werden, dass man, obgleich der Grundton verschwindet, überhaupt kein Minimum des Gesamtklanges mehr herauszu finden im Stande ist.

Hingegen reagirt das optische Telephon nur auf eine einzige Sinusschwingung, infolgedessen gelingt es leicht, den Ausschlag zu Null zu machen, wenn man in einer Inductionsrolle einen Kern aus dünnem Eisendraht verschiebt. Da auch bei starker Polarisation und demgemäss starker Selbstinduction der Ausschlag vollkommen zu Null wird, wie beim Oeffnen des Stromes, so ist dies ein scharfer Beweis dafür, dass die Ströme höherer Schwingungszahl für das optische Telephon zu vernachlässigen sind, und es merklich nur auf eine bestimmte Sinusschwingung reagirt (p. 599).

Da man sowohl den Widerstand, als auch die Selbstinduction bei der Nulleinstellung variiren muss, so ist dieselbe nur durch Näherung möglich, jedoch ist dies leicht zu machen, besonders, wenn die Polarisation nicht allzu stark ist.

Um die Genauigkeit der Messung von Flüssigkeitswiderständen mit dem Hörtelephon und dem optischen Telephon zu vergleichen, wurde mit jedem dieser Apparate für einen Flüssigkeitswiderstand 10 Einstellungen gemacht, und zwar abwechselnd je eine mit dem einen und dann mit dem anderen. Die benutzte Flüssigkeit war verdünnte Schwefelsäure bester Leitungsfähigkeit, das Widerstandsgefäss hatte die von F. Kohlrausch angegebene Form mit platinirten Electroden von ca. 500 qmm Fläche. Mittelst einer Wippe wurde bei dem optischen Telephon die compensirende Inductions-

1) Es ist dies die Zahl der electrischen Eigenschwingung des Zweiges, wenn man die Flüssigkeitszelle als wirklichen Condensator mit der Capacität c auffasst. Vgl. Mascart-Joubert, 2. p. 441.

rolle, bei dem Hörtelephon ein derselben gleicher inductionsloser Widerstand eingeschaltet. Ich erhielt folgende Einstellungen:

Hörtelephon		Optisches Telephon	
cm	Δ	cm	Δ
Brückendraht	in mm	Brückendraht	in mm
48,5	7,0	51,5	0,8
49,8	4,0	51,4	0,2
49,8	6,0	51,4	0,2
50,5	13,0	51,5	0,8
49,5	3,0	51,4	0,2
48,2	10,0	51,3	1,2
49,4	2,0	51,4	0,2
48,5	7,0	51,4	0,2
50,5	8,0	51,4	0,2
48,7	5,0	51,5	0,8
491,9	65,0	514,2	4,8

Da zu dem Brückendraht von 1,92 S. Widerstand 10 Siemens hinzugefügt waren, so ergibt sich ein mittlerer Einstellungsfehler für das optische Telephon von 0,018 Proc., für das Hörtelephon von 0,25 Proc., wobei beide Werthe durch geringe Schwankungen der Temperatur, während der 10 Minuten, die zu sämtlichen Einstellungen gebraucht wurden, etwas vergrößert sein können.

Sehr auffallend ist die Differenz zwischen dem Mittel der Einstellungen beider Apparate, welche für den Widerstand einen um über $\frac{1}{2}$ Proc. verschiedenen Werth ergeben. Und zwar ist, im Gegensatz zu den oben abgeleiteten Formeln, welche verlangen, dass die Einstellung auf das Minimum mit dem Hörtelephon einen grösseren Widerstand ergeben soll, gerade dieser der kleinere. Ich hoffe diese Differenz weiter unten genügend zu erklären. Mit dem Dynamometer erhielt ich ungefähr denselben Werth, wie mit dem optischen Telephon, jedoch war wegen der langsamen Ablesung der Einstellungsfehler etwa $\frac{1}{2}$ Proc.

Bei der Einstellung auf das Minimum (ohne Inductionsrolle) mit dem optischen Telephon erhielt ich einen um $\frac{1}{10}$ Proc. grösseren Werth für den Widerstand, wie bei der Nulleinstellung mit demselben Apparat.

Um diese Differenzen zu erklären, muss ich vor allem auf die Eigenschaften des Hörtelephons und auf die Art und Weise der Einstellung mit demselben etwas eingehen.

Der Strom eines Inductoriums lässt sich in eine Reihe

von Sinusströmen zerlegen (p. 599). Das Hörtelephon reagiert auf alle diese Schwingungen, im allgemeinen auf die höheren besser als auf die tieferen, ganz besonders stark aber auf die sehr hohen Töne, welche bei der Stromunterbrechung durch die electrischen Eigenschwingungen des Systems hervorgerufen werden. Lenard¹⁾ bezeichnet dieselben als das Telephongeräusch und taxirt ihre Schwingungszahl auf ca. 10000 in der Secunde. Man darf deshalb niemals mit einem Hörtelephon Einstellungen machen, welche von der Periode des Wechselstroms abhängig sind und vor allen Dingen nicht die Periode der Unterbrechung als die richtige ansehen. Dieser Fall tritt ein, wenn in einem Zweige der Brücke sich eine Flüssigkeitszelle befindet oder derselbe eine merkliche Capacität oder Selbstinduction hat. Was die Wirkung der Polarisation anbetrifft, so ist infolge derselben, wie oben abgeleitet, $\delta_1 = w_{01}/1 + n^2 c^2 (w_1 + w_2)^2$, also die Einstellung von n abhängig. Für jedes n entsteht ein Minimum. Diese Minima liegen alle nebeneinander auf dem Brückendraht und zwar die der höheren Töne dicht bei einander, die der tieferen in grösseren Abständen. Bei einigermaßen geschultem Ohr kann man die Aenderung der Klangfarbe um das Minimum heraushören.

Die Einstellung erfolgt im allgemeinen allein auf das Minimum des Telephongeräusches, also der ganz hohen Töne, da dieselben stärker und hervortretender sind, als die weichen, tiefen Töne. Es ist die Einstellung auch etwas von der Art und Weise der Unterbrechung abhängig, da die Form der Stromcurve, also das Verhältniss der verschiedenen Amplituden davon abhängt; jedoch ist die Aenderung der Tonhöhe der Unterbrechung ohne merklichen Einfluss.

Infolge dieser Einstellung auf ganz hohe Töne ist der durch die Polarisation verursachte Fehler verschwindend, da hierbei δ_1 mit dem Wachsen der Schwingungszahl stark abnimmt; nur dass die Einstellung wegen des verwaschenen Minimums ungenau wird.

1) Lenard, Wied. Ann. 89. p. 619. 1890. Diese Arbeit bestätigt die hier ausgesprochene Ansicht über das Bedenkliche der Widerstandsmessung mit dem Hörtelephon.

Dagegen ist Selbstinduction oder Capacität äusserst gefährlich, da hierbei δ mit dem Quadrat der Tonhöhe zunimmt. Nun ist bei der Widerstandsmessung in dem einen Zweig die Flüssigkeit, in dem anderen Drahtwiderstände. Die Flüssigkeit hat jedenfalls keine merkliche Selbstinduction, hingegen hat sie eine condensatorartige Wirkung, da mehrere verschieden leitende Schichten hintereinander vorkommen (Metall, Oberflächenschicht mit Gas, Flüssigkeit). Wie klein ihr Einfluss auch sein mag, jedenfalls hat sie die Wirkung, dass der Widerstand der Flüssigkeit, wie immer durch Condensatoren, bei Wechselströmen verkleinert erscheint.

Die Drahtwiderstände im anderen Zweige sind zwar bifilar gewickelt, dennoch ist die Selbstinduction nie ganz zu vermeiden und bei den sehr hohen Schwingungen des Hörtelephons dürfte sie jedenfalls schon von merklicher Wirkung sein. Hierzu tritt die Vergrösserung des Widerstandes von Drähten bei schnellen Wechselströmen, welche von der ungleichen Stromdichte innerhalb desselben Querschnitts des Drahtes herrührt.¹⁾

Infolge der Selbstinduction erscheinen die Drahtwiderstände zu gross. Capacität in dem einen Zweig, Selbstinduction in dem anderen bewirken also zusammen, dass die Einstellung auf das Geräuschminimum des Telephons für Flüssigkeiten einen zu kleinen Widerstand ergibt.

Wie gross dieser Fehler ist, lässt sich schwer untersuchen, weil bei irgend grösserer Polarisirung oder Selbstinduction es überhaupt nicht mehr möglich ist, ein Minimum mit dem Hörtelephon zu finden.

Indem ich nun zum optischen Telephon übergehe, bemerke ich, dass das Dynamometer mit Sinusinductor als Stromquelle dieselben Fehler hat, wie das optische Telephon, wenn man damit ohne compensirende Rolle auf das Minimum einstellt, weil beide Apparate mit Sinusströmen niedriger Periode arbeiten. Diese Einstellung auf das Minimum zeigt immer einen etwas grösseren Widerstand der Flüssigkeit an als die Nulleinstellung, wie es sich auch aus der Theorie ergibt $[\delta_1 = w_{04} / (1 + n^2 c^2 (w_1 + w_2)^2)]$. —

1) Rayleigh, Phil. Trans. 21. p. 381. 1886.

Bei Untersuchungen über Polarisation zeigte sich, dass auch die Nulleinstellung mit einem, wenn auch im allgemeinen kleinen Fehler behaftet ist.

Die Grösse der Polarisation ergibt sich bei der Nulleinstellung direct aus der Grösse der compensirenden Selbstinduction ($np = 1/nc$). Diese wiederum war, wie oben erwähnt, für jede Stellung des Drahtkernes bei der benutzten Rolle bekannt.

Besonders genau liess sich jede Aenderung der Polarisation constatiren, da man dann durch blosse Widerstandsänderung nicht mehr Null, sondern nur ein Minimum erhielt. Um den Ausschlag wieder zu Null zu machen, musste dann auch die Selbstinduction geändert werden.

Leider habe ich bis jetzt so inconstante und unübersichtliche Resultate hierüber erhalten, dass ich noch keine Zahlenangaben machen kann; ich hoffe jedoch durch etwas geänderte Versuchsanordnung und besonders durch Anwendung verschiedener Tönhöhen zu besseren Resultaten zu kommen.

Qualitativ kann ich mittheilen, dass die Polarisation nicht nur von dem Metall und der Grösse der Electroden, ihrer Oberflächenbeschaffenheit und von der chemischen Zusammensetzung des gelösten Körpers abhängt, sondern dieselbe auch mit steigender Temperatur und Concentration abnimmt und auch etwas von der Entfernung der Electroden voneinander abhängig ist.

Die Schwierigkeit dieser Untersuchung beruht besonders auf einer Fehlerquelle, die sich nur schwer vermeiden lässt. Es ist nämlich die Phasendifferenz zwischen dem primären und dem Polarisationsstrom nicht immer, wie Kohlrausch annimmt, gleich $\frac{1}{2}\pi$, sondern dieselbe ist oft geringer. Inwiefern hier die von Mengarini¹⁾ bei der Electrolyse durch Wechselstrom beobachteten Erscheinungen mitsprechen, kann ich noch nicht übersehen.

Bei der Messung von Flüssigkeitswiderständen ist diese Abweichung der Phasendifferenz von $\frac{1}{2}\pi$ deshalb wichtig, weil man trotzdem durch Hinzufügung eines geeigneten Selbstinductionscoefficienten den Ausschlag zu Null machen kann. Jedoch fällt dieser Nullpunkt nicht mit dem wahren Null-

punkt zusammen, sondern der Flüssigkeitswiderstand erscheint zu gross. Bei grossen platinirten Electroden ist die Abweichung der Phasendifferenz von $\frac{1}{2}\pi$ sehr gering, ausserdem c gross, weshalb δ bei dem oben angewandten Kohlrausch'schen Widerstandsgefäss 0,1 Proc. keinesfalls übersteigt, sodass sich hiermit mit einiger Sicherheit Flüssigkeitswiderstände messen lassen.

Um zum Schluss ein Beispiel einer exacten Widerstandsmessung zu geben; wurde die Leitungsfähigkeit verdünnter Schwefelsäure zwischen 1,200 und 1,250 spec. Gew. bestimmt, also um die beste Leitungsfähigkeit herum. Es wurden in diesem Bereiche 25 Punkte ermittelt, während Kohlrausch darin nur die Leitungsfähigkeit für 1,224 spec. Gew. = 691,4 angibt. Die Tabelle an sich hat wohl wenig Zweck, es soll damit nur die Genauigkeit der Methode dargelegt werden.

Die verschiedenen Flüssigkeiten wurden hergestellt, indem von einer Mischung von 1,250 spec. Gew. vorher berechnete Mengen mittelst Pipetten mit einer leichteren Mischung vertauscht wurden, sodass nachher die Mischung 1,248 ... 1,246 u. s. w. spec. Gew. hatte. Zur Controle wurden häufig Pyknometerwägungen gemacht.

Wegen des grossen Temperaturcoefficienten war es nothwendig, auf die Temperatur besonders Acht zu geben. Die ganze Beobachtungsreihe wurde an einem Tage gemacht, bei einer Zimmertemperatur von ca. 17,5° C., welche möglichst constant gehalten wurde. Das Widerstandsgefäss befand sich in einem Wasserbade und wurde jedesmal 10—15 Minuten darin gelassen, bevor die Widerstandsmessung vorgenommen wurde. Ein Thermometer war so in das Wasser gesenkt, dass das Quecksilbergefass sich unmittelbar neben der Widerstandsröhre befand. Durch die Freundlichkeit des Hrn. Dr. Scheel war das Thermometer in dem Kgl. Aichungsamt mit einem Wasserstoffthermometer aus dem internationalen Bureau in Paris verglichen worden. Der Temperaturcoefficient wurde für drei Flüssigkeiten von 1,200, 1,225 und 1,250

1) Mengarini, Electrolisi colle correnti alternanti. Academia dei Lincei. Roma 1890.

spec. Gew. in dem Intervall von $16 - 19^{\circ}$ C. bestimmt als 1,55, 1,64, 1,72 Proc. für 1° C.

Da die Widerstände der benutzten Rheostaten auf $\frac{1}{100}$ Proc. übereinstimmten, wurden sie als richtig angenommen und nur die Temperaturcorrection gemacht. — Die Polarisation war, wie erwähnt, sehr gering und für alle Flüssigkeiten ziemlich constant, sodass auch nur ein constanter Fehler entstehen konnte. Bei der gleich zu beschreibenden Bestimmung der absoluten Leitungsfähigkeit fiel derselbe wegen des grossen Widerstandes in den Zweigen 1 und 2 so gut wie ganz fort, sodass in der ganzen Tabelle der Fehler durch Polarisation verschwindend ist.

Die absolute Leitungsfähigkeit wurde für die am besten leitende Mischung in der Weise ermittelt, dass der Widerstand derselben in einer dünnen Glasröhre bestimmt wurde, deren Länge genau gemessen und deren Querschnitt durch Quecksilberwägungen festgestellt war. Der benutzte Maassstab wurde mit einem Normalmeter verglichen und das Quecksilber hatte ein spec. Gew. von 13,588. Der Querschnitt ergab sich aus fünf Wägungen als: $2,870 \pm 0,0015$ qmm.

An beiden Enden der Röhre wurden ähnlich wie bei Kohlrausch zwei weite Glasgefässe angebracht, in die zwei grosse, platinirte Platinelectroden eintauchten. Für eine Länge von 368,3 mm und 18° C. ergab sich ein Widerstand von 1855,6 S., also eine Leitungsfähigkeit = 691,6. Eine zweite Bestimmung mit einer Röhre von 3,72 qmm Querschnitt ergab 692,2. Hieraus das Mittel 691,9, welche Zahl bis auf 0,1 Proc. sicher ist. Hierauf reducirt, erhielt ich folgende Tabelle, in welcher die erste Columne das berechnete specifische Gewicht angibt, die zweite die Controlwägungen mit dem Pyknometer, die dritte die Temperatur, die vierte die abgelesenen Theilstriche des Brückendrahtes, die fünfte die auf 18° C. reducirten Theilstriche und die sechste die Leitungsfähigkeit. In den Zweigen 1 und 2 der Brücke befanden sich ca. 22 S. Der Brückendraht hatte 1,92 S. Widerstand und waren auf beiden Seiten je 10 S. hinzugefügt.

Leitungsfähigkeit von verdünnter Schwefelsäure
zwischen 1,200 und 1,250 spec. Gew.

Sp. Gew.	Pykn. W.	Temp.	Theilstr.	Corr. Theilstr.	Leitungs- fähigkeit
1,200	1,2003	17,32° C.	53,80	56,85	684,6
1,202	—	17,31	54,25	57,35	685,8
1,204	—	17,28	54,50	57,73	686,7
1,206	—	17,30	55,00	58,15	687,7
1,208	—	17,32	55,40	58,50	688,5
1,210	1,2102	17,39	55,95	58,76	689,1
1,212	—	17,39	56,20	59,00	689,8
1,214	—	17,37	56,35	59,25	690,4
1,216	—	17,33	56,35	59,44	690,7
1,218	—	17,30	56,35	59,57	691,0
1,220	—	17,29	56,45	59,75	691,4
1,222	—	17,26	56,40	59,85	691,7
1,224	1,2241	17,30	56,65	59,95	691,9
1,226	—	17,27	53,55	59,92	691,8
1,228	—	17,21	56,10	59,81	691,5
1,230	—	17,19	56,00	59,80	691,5
1,232	—	17,15	55,70	59,70	691,3
1,234	1,2340	17,13	55,45	59,57	691,0
1,236	—	17,14	55,25	59,35	690,5
1,238	—	17,13	55,00	59,17	690,1
1,240	—	17,24	55,40	59,02	690,0
1,242	—	17,21	55,00	58,87	689,4
1,244	1,2441	17,30	55,05	58,58	688,7
1,246	—	17,18	54,10	58,15	687,7
1,248	—	17,13	53,45	57,75	686,8
1,250	1,2498	17,11	52,95	57,32	685,8

Fig. 6.

Fig. 6 zeigt, dass die Punkte im allgemeinen der Curve sehr nahe liegen; die Abweichungen sind vermuthlich eine Folge der Temperaturschwankungen.

Phys. Inst. der Univ. Berlin, Dec. 1890.