

## 4. Versuch.

$n$	+112	-113	+114	-113	+114	-114	+114
$\alpha$	+72,1	-73,0	+76,3	-74,2	+75,2	-75,5	+76,2
$\alpha/n$	0,644	0,646	0,669	0,656	0,660	0,662	0,668

Zwischen dem 2. und 3. Versuche wurde der Apparat auseinander genommen und gereinigt. Ich glaube nicht, dass diese Versuche irgend einen Unterschied in der Wirkung der + und - Umdrehung erkennen lassen. Bildet man für jeden Versuch die Mittel aus den bei + Drehung erhaltenen  $\alpha/n$  und ebenso aus den bei - Drehung erhaltenen, so zeigt sich zwischen den beiden die denkbar beste Uebereinstimmung.

1. Versuch.	2. Versuch.	3. Versuch.	4. Versuch.
+ $\alpha/n = 0,593$	+ $\alpha/n = 0,607$	+ $\alpha/n = 0,651$	+ $\alpha/n = 0,660$
- $\alpha/n = 0,593$	- $\alpha/n = 0,605$	- $\alpha/n = 0,654$	- $\alpha/n = 0,655$

Giessen, October 1889.

V. *Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper; von W. Voigt.*

Die merkwürdige Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Medien, welche Poisson theoretisch abgeleitet hat, indem er die elastischen Körper aus discreten Molecülen bestehend annahm, ist vielfach mit dem Experiment verglichen worden und in der Mehrzahl der Fälle der Wirklichkeit nicht entsprechend gefunden; ja, beachtet man, dass die wenigen Körper, für welche sie durch die Beobachtung annähernd bestätigt ist, ausnahmslos nicht darauf geprüft sind, ob sie die Voraussetzung der Theorie erfüllen und wirklich isotrop sind, so wird man sagen müssen, dass die Poisson'sche Relation für keinen Körper mit Sicherheit erwiesen, für einige aber mit Sicherheit widerlegt ist.

Das analoge Resultat, welches sich aus meinen Untersuchungen der Elasticität krystallinischer Körper für diese

ergeben hat, drängt mit Nothwendigkeit dazu, die Molecüle der Krystalle als mit einer gewissen Polarität behaftet und demnach aufeinander mit Kräften wirkend zu denken, welche nicht Functionen nur der gegenseitigen Entfernung, sondern auch der Richtung ihrer Verbindungslinie gegen gewisse in den Molecülen feste Richtungen sind.

Es liegt nahe, dieselbe Annahme auf isotrope Medien zu übertragen; aber man erkennt leicht, dass dieselbe nicht im Stande ist, den Widerspruch zwischen Theorie und Beobachtung zu heben, falls man, wie gebräuchlich, in isotropen Körpern die Molecüle in allen möglichen gegenseitigen Orientirungen befindlich annimmt, sodass keine Richtung und Lage vor der anderen bevorzugt ist. Denn bei der Berechnung der Componentensummen, welche in der Elasticitätstheorie vorgenommen wird, verschwindet dann jeder Einfluss der Polarität auf das Resultat, und es ergibt sich wiederum die Poisson'sche Relation zwischen den Elasticitätsconstanten.

Nun zeigt aber eine überaus grosse Anzahl sogenannter isotroper Körper eine Structur, welche mit der oben auseinandergesetzten Annahme nicht übereinstimmt und daher geeignet scheint, die Erklärung der Beobachtung zu liefern.

Alle Metalle, alle dichten Gesteine bestehen aus mehr oder weniger kleinen Krystallindividuen, welche in den verschiedensten Orientirungen aneinandergefügt sind, und wir haben, nachdem selbst an Glas Spuren krystallinischer Structur nachgewiesen sind, alle Ursache, dieselbe als die Regel anzusehen.

Dies ist in der That auch einleuchtend. Denn da wir kein Mittel haben, auf einzelne Molecüle direct einzuwirken, so ist es plausibel und entspricht der directen Beobachtung, dass jede sogenannte Störung der Krystallisation z. B. durch Umrühren der Mutterlauge, erst wirksam wird auf krystallinische Theilchen, zu denen sich bereits eine sehr grosse Anzahl von Molecülen zusammengefunden hat.

Körper, welche aus kleinen, in allen möglichen Orientirungen zusammengefügt Krystallfragmenten bestehen, wollen wir weiterhin als quasi-isotrope bezeichnen. Sind

die krystallinischen Individuen gross gegen die Wirkungssphäre der Molecularkräfte — und dies ist stets der Fall, wenn unsere optischen Hilfsmittel die Krystallindividuen noch sichtbar machen, — aber klein gegen die gesammte Ausdehnung des Körpers, und sind ihre Zwischenräume klein gegen die Wirkungssphäre der Molecularkräfte, so lassen sich die Elasticitätsconstanten des aus ihnen gebildeten quasi-isotropen Körpers aus denjenigen des homogenen Krystalles berechnen. <sup>1)</sup>

Die elastischen Drucke gegen ein Flächenelement sind nämlich nach der molecularen Theorie defnirt durch die Summen der Componenten, welche alle auf der einen Seite der Fläche liegenden Molecüle auf die an der anderen befindlichen ausüben. Liegen nun in einem dichten Körper dem Flächenelement Krystallfragmente in allen möglichen Orientirungen an, so müssen in ihm die Druckcomponenten durch die Mittelwerthe derjenigen gegeben sein, die für den regelmässigen Krystall aus derselben Substanz bei allen möglichen Orientirungen des Flächenelementes gegen den Krystall stattfinden. Führt man die Berechnung aus, so erhält man die gewöhnlichen Formen der Druckcomponenten in isotropen Körpern, aber ihre Coëfficienten, d. h. die Elasticitätsconstanten des isotropen Körpers, sind durch die Elasticitätsconstanten des Krystalles gleicher Substanz ausgedrückt.

Die Berechnung knüpfen wir am bequemsten an das Potential  $F$  der elastischen Kräfte an, welches für ein Hauptaxensystem  $X, Y, Z$  defnirt sein mag durch:

$$(1) \quad -X_x = \frac{\partial F}{\partial x_x}, \quad -X_y = -Y_x = \frac{\partial F}{\partial x_y} \text{ u. s. f.}$$

und eine homogene Function zweiten Grades der sechs Deformationsgrössen  $x_x, y_y, \dots$  ist, welche im allgemeinsten Falle eines triklinen Krystalles 21 unabhängige Constanten, die Hauptelasticitätsconstanten des Krystalles, enthält.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$x_x = x_1, \quad y_y = x_2, \quad z_z = x_3, \quad y_z = x_4, \quad z_x = x_5, \quad x_y = x_6.$$

1) Die folgende Berechnung habe ich ähnlich bereits in dem 34. Bande der Abhandlungen der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen von 1887 p. 48 u. f. mitgetheilt.

so können wir schreiben:

$$(2) \quad 2 F = \sum_m \sum_n c_{mn} x_m x_n,$$

die Summen von 1 bis 6 genommen.

Nun sei ein zweites Coordinatensystem  $\Xi, \text{H}, \text{Z}$  in seiner Lage gegen  $X, Y, Z$  gegeben durch die Beziehungen:

$$(3) \quad \begin{aligned} x &= \xi \alpha_1 + \eta \beta_1 + \zeta \gamma_1, & \xi &= x \alpha_1 + y \alpha_2 + z \alpha_3, \\ y &= \xi \alpha_2 + \eta \beta_2 + \zeta \gamma_2, & \eta &= x \beta_1 + y \beta_2 + z \beta_3, \\ z &= \xi \alpha_3 + \eta \beta_3 + \zeta \gamma_3, & \zeta &= x \gamma_1 + y \gamma_2 + z \gamma_3, \end{aligned}$$

und es seien die auf dasselbe bezogenen Deformationsgrößen abgekürzt wie folgt:

$$\xi \xi = \xi_1, \quad \eta \eta = \xi_2, \quad \zeta \zeta = \xi_3, \quad \eta \zeta = \xi_4, \quad \zeta \xi = \xi_5, \quad \xi \eta = \xi_6;$$

dann muss sich in denselben schreiben:

$$(4) \quad 2 F = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \gamma_{\mu\nu} \xi_{\mu} \xi_{\nu},$$

die Summe ebenfalls von 1 bis 6 genommen. Darin sind die  $\gamma_{\mu\nu}$  die „abgeleiteten Elasticitätsconstanten“ der Substanz für das System  $\Xi, \text{H}, \text{Z}$ .

Die Form (4) des Potentials muss mittelst der Gleichungen (3) aus (2) hervorgehen. Aus (3) erhalten wir zunächst:

$$(5) \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= \alpha_1^2 \xi_1 + \beta_1^2 \xi_2 + \gamma_1^2 \xi_3 + \beta_1 \gamma_1 \xi_4 + \gamma_1 \alpha_1 \xi_5 + \alpha_1 \beta_1 \xi_6 = \sum_{\nu} \delta_{1\nu} \xi_{\nu}, \\ x_2 &= \alpha_2^2 \xi_1 + \beta_2^2 \xi_2 + \gamma_2^2 \xi_3 + \beta_2 \gamma_2 \xi_4 + \gamma_2 \alpha_2 \xi_5 + \alpha_2 \beta_2 \xi_6 = \sum_{\nu} \delta_{2\nu} \xi_{\nu}, \\ x_3 &= \alpha_3^2 \xi_1 + \beta_3^2 \xi_2 + \gamma_3^2 \xi_3 + \beta_3 \gamma_3 \xi_4 + \gamma_3 \alpha_3 \xi_5 + \alpha_3 \beta_3 \xi_6 = \sum_{\nu} \delta_{3\nu} \xi_{\nu}, \\ x_4 &= 2\alpha_2 \alpha_3 \xi_1 + 2\beta_2 \beta_3 \xi_2 + 2\gamma_2 \gamma_3 \xi_3 + (\beta_2 \gamma_3 + \gamma_2 \beta_3) \xi_4 \\ &\quad + (\gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3) \xi_5 + (\alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3) \xi_6 \quad \left. \right\} = \sum_{\nu} \delta_{4\nu} \xi_{\nu}, \\ x_5 &= 2\alpha_3 \alpha_1 \xi_1 + 2\beta_3 \beta_1 \xi_2 + 2\gamma_3 \gamma_1 \xi_3 + (\beta_3 \gamma_1 + \gamma_3 \beta_1) \xi_4 \\ &\quad + (\gamma_3 \alpha_1 + \alpha_3 \gamma_1) \xi_5 + (\alpha_3 \beta_1 + \beta_3 \alpha_1) \xi_6 \quad \left. \right\} = \sum_{\nu} \delta_{5\nu} \xi_{\nu}, \\ x_6 &= 2\alpha_1 \alpha_2 \xi_1 + 2\beta_1 \beta_2 \xi_2 + 2\gamma_1 \gamma_2 \xi_3 + (\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2) \xi_4 \\ &\quad + (\gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2) \xi_5 + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) \xi_6 \quad \left. \right\} = \sum_{\nu} \delta_{6\nu} \xi_{\nu}, \end{aligned}$$

Diese Formeln fassen wir kurz zusammen in:

$$x_n = \sum_{\nu} \delta_{n\nu} \xi_{\nu}.$$

Setzen wir diese Relation in (2) ein, so findet sich:

$$\begin{aligned} 2F &= \sum_m \sum_n c_{mn} \sum_\nu \xi_\nu \sum_\mu \delta_{m\mu} \xi_\mu \\ &= \sum_\mu \sum_\nu \gamma_{\mu\nu}^c \sum_m \sum_n c_{mn} \delta_{m\mu} \delta_{n\nu}, \end{aligned}$$

woraus die Vergleichung mit (4) folgt:

$$(6) \quad \gamma_{\mu\nu} = \sum_m \sum_n c_{mn} \delta_{m\mu} \delta_{n\nu}.$$

Die  $\gamma_{\mu\nu}$  sind von der Lage des Coordinatensystems  $\Xi, H, Z$  abhängig; bilden wir für ein jedes  $\gamma_{\mu\nu}$  den Mittelwerth, der ( $\gamma_{\mu\nu}$ ) heissen mag, für alle möglichen Lagen des  $\Xi, H, Z$ -Systems, so stellen diese nach dem oben Gesagten diejenigen Coefficienten dar, mit welchen multiplicirt die Producte  $\xi_\mu \xi_\nu$  oder  $x_\mu x_\nu$  in der Form des Potentials ( $F$ ) für quasi-isotrope Medien auftreten.

Nach Symmetrieverhältnissen können in ( $F$ ) nur die Coefficienten von  $\xi_1^2 \dots, \xi_6^2$  und von  $2\xi_2 \xi_3, 2\xi_3 \xi_1, 2\xi_1 \xi_2$  von Null verschieden sein, und müssen zwischen diesen die Beziehungen gelten:

$$(7) \quad (\gamma_{11}) = (\gamma_{22}) = (\gamma_{33}) = A, \quad (\gamma_{23}) = (\gamma_{31}) = (\gamma_{12}) = B, \\ (\gamma_{44}) = (\gamma_{55}) = (\gamma_{66}) = C,$$

in denen  $A, B, C$  neue Bezeichnungen für die Elasticitätsconstanten des quasi-isotropen Mediums sind.

Die Aufgabe der Bestimmung aller ( $\gamma_{\mu\nu}$ ) reducirt sich so auf die Berechnung von nur drei der Vorstehenden; wir beginnen mit ( $\gamma_{11}$ ).

Nach (4) und (5) erhält man zunächst:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = & c_{11} \alpha_1^4 + 2c_{12} \alpha_1^2 \alpha_2^2 + 2c_{13} \alpha_1^2 \alpha_3^2 + 2c_{14} \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 + 2c_{15} \alpha_1^2 \alpha_3 \alpha_1 + 2c_{16} \alpha_1^2 \alpha_1 \alpha_2 \\ & + 2c_{22} \alpha_2^4 + 2c_{23} \alpha_2^2 \alpha_3^2 + 2c_{24} \alpha_2^2 \alpha_2 \alpha_3 + 2c_{25} \alpha_2^2 \alpha_3 \alpha_1 + 2c_{26} \alpha_2^2 \alpha_1 \alpha_2 \\ & + c_{33} \alpha_3^4 + 2c_{31} \alpha_3^2 \alpha_2 \alpha_3 + 2c_{35} \alpha_3^2 \alpha_3 \alpha_1 + 2c_{36} \alpha_3^2 \alpha_1 \alpha_2 \\ & + 4c_{34} \alpha_2^2 \alpha_3^2 + 8c_{45} \alpha_2 \alpha_3 \alpha_3 \alpha_1 + 8c_{46} \alpha_2 \alpha_3 \alpha_1 \alpha_2 \\ & + 4c_{55} \alpha_3^2 \alpha_1^2 + 8c_{56} \alpha_3 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_2 \\ & + 4c_{66} \alpha_1^2 \alpha_2^2. \end{aligned}$$

Es ist klar, dass bei der Bildung des Mittelwerthes ( $\gamma_{11}$ ) hierin alle Glieder verschwinden müssen, die eine ungerade Potenz eines der  $\alpha_h$  enthalten; schreiben wir diese Glieder nicht aus, so ist kürzer:

$$(8) \left\{ \begin{aligned} \gamma_{11} &= (c_{11} \alpha_1^4 + c_{22} \alpha_2^4 + c_{33} \alpha_3^4) \\ &+ 2((c_{23} + 2c_{44}) \alpha_2^2 \alpha_3^2 + (c_{31} + 2c_{55}) \alpha_3^2 \alpha_1^2 + (c_{12} + 2c_{66}) \alpha_1^2 \alpha_2^2) + \dots \end{aligned} \right.$$

Deutet man in  $\gamma_{12}$  und  $\gamma_{44}$  ebenfalls die Glieder, welche beim Bilden des Mittelwerthes verschwinden, nur an, so schreiben sich diese Grössen:

$$(9) \left\{ \begin{aligned} \gamma_{12} &= (c_{11} \alpha_1^2 \beta_1^2 + c_{22} \alpha_2^2 \beta_2^2 + c_{33} \alpha_3^2 \beta_3^2) \\ &+ 4(c_{44} \alpha_2 \alpha_3 \beta_2 \beta_3 + c_{55} \alpha_3 \alpha_1 \beta_3 \beta_1 + c_{66} \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2) \\ &+ (c_{23} (\alpha_2^2 \beta_3^2 + \alpha_3^2 \beta_2^2) + c_{31} (\alpha_3^2 \beta_1^2 + \alpha_1^2 \beta_3^2) + c_{12} (\alpha_1^2 \beta_2^2 + \alpha_2^2 \beta_1^2)) + \dots \end{aligned} \right.$$

$$(10) \left\{ \begin{aligned} \gamma_{44} &= (c_{11} \beta_1^2 \gamma_1^2 + c_{22} \beta_2^2 \gamma_2^2 + c_{33} \beta_3^2 \gamma_3^2) \\ &+ (c_{44} (\beta_2 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_2)^2 + c_{55} (\beta_3 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_3)^2 + c_{66} (\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1)^2) \\ &+ 2(c_{23} \beta_2 \gamma_2 \beta_3 \gamma_3 + c_{31} \beta_3 \gamma_3 \beta_1 \gamma_1 + c_{12} \beta_1 \gamma_1 \beta_2 \gamma_2) + \dots \end{aligned} \right.$$

Die Bestimmung der drei Mittelwerthe ( $\gamma_{11}$ ), ( $\gamma_{12}$ ), ( $\gamma_{44}$ ) kommt sonach heraus auf die Berechnung der fünf durch Klammern als solche bezeichneten Mittelwerthe:

$$(\gamma_h^4), (\gamma_h^2 \gamma_k^2), (\gamma_h^2 \beta_h^2), (\gamma_h^2 \beta_k^2), (\gamma_h \beta_h \gamma_k \beta_k^3),$$

worin  $h$  und  $k$  beliebige, aber verschiedene der Zahlen 1, 2, 3, sind; denn nach Symmetrie fallen alle in ( $\gamma_{11}$ ), ( $\gamma_{12}$ ), ( $\gamma_{44}$ ) vorkommenden Glieder mit einem dieser fünf zusammen.

Wir setzen in gebräuchlicher Weise:

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 &= -\cos \varphi \cos f \cos \vartheta - \sin \varphi \sin f, \\ \beta_1 &= -\sin \varphi \cos f \cos \vartheta + \cos \varphi \sin f, \\ \gamma_1 &= +\cos f \sin \vartheta, \\ \alpha_2 &= -\cos \varphi \sin f \cos \vartheta + \sin \varphi \cos f, \\ \beta_2 &= -\sin \varphi \sin f \cos \vartheta - \cos \varphi \cos f, \\ \gamma_2 &= +\sin f \sin \vartheta, \\ \alpha_3 &= +\cos \varphi \sin \vartheta, \quad \beta_3 = +\sin \varphi \sin \vartheta, \quad \gamma_3 = +\cos \vartheta, \end{aligned} \right.$$

worin  $\vartheta$  den Winkel zwischen der  $Z$ - und  $Z$ -Axe,  $\varphi$  den Winkel zwischen der  $Z\Xi$ - und  $ZZ$ -Ebene,  $f$  den Winkel zwischen der  $ZX$ - und  $ZZ$ -Ebene bezeichnet, und berechnen speciell die fünf Mittelwerthe:

$$(\gamma_3^4), (\gamma_3^2 \gamma_3^2), (\gamma_3^2 \beta_3^2), (\gamma_2^2 \beta_3^2), (\gamma_3 \gamma_2 \beta_3 \beta_2).$$

Die ersten beiden sind von den Richtungscosinus nur der  $Z$ -Axe zu nehmen, sie finden sich also durch Summation über eine Kugelfläche und Division mit  $4\pi$ . Es wird demgemäss:

$$(12) \left\{ \begin{aligned} (\gamma_3^4) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} df \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \cos^4 \vartheta = \frac{1}{3}, \\ (\gamma_2^2 \gamma_3^2) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} df \sin^2 f \int_0^{\pi} d\vartheta \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta = \frac{1}{15}. \end{aligned} \right.$$

Für die Berechnung der übrigen drei Werthe soll der Z- und H-Axe jede mögliche Lage gegeben werden; dies geschieht, indem die H- um die Z-Axe gedreht und zugleich die Z-Axe in alle Lagen gegen das  $XYZ$ -System gebracht wird; der dabei anzubringende Nenner ist  $8\pi^3$ . Es findet sich so:

$$(13) \left\{ \begin{aligned} (\gamma_3^2 \beta_3^2) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} df \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta = \frac{1}{15} \\ (\gamma_2^2 \beta_3^2) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} df \sin^2 f \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin^3 \vartheta = \frac{2}{15} \\ (\gamma_2 \gamma_3 \beta_2 \beta_3) &= -\frac{1}{8\pi^2} \left[ \int_0^{2\pi} df \sin^2 f \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} df \sin f \cos f \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \cos \varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \right] = -\frac{1}{30}. \end{aligned} \right.$$

Mit diesen Werthen sind die  $A, B, C$  in den Formeln (7) zu berechnen.

Setzt man kurz

$$(14) \quad c_{11} + c_{22} + c_{33} = 3A, \quad c_{23} + c_{31} + c_{12} = 3B, \quad c_{44} + c_{55} + c_{66} = 3\Gamma,$$

so erhält man leicht:

$$(15) \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{1}{3}(3A + 2B + 4\Gamma), \\ B &= \frac{1}{3}(A + 4B - 2\Gamma), \\ C &= \frac{1}{3}(A - B + 3\Gamma). \end{aligned} \right.$$

Zu diesen Endformeln machen wir nun eine Reihe von Bemerkungen.

1) Welches auch immer die Werthe der  $c_{hk}$  seien, stets findet zwischen  $A, B$  und  $C$  die Beziehung statt:

$$C = \frac{A - B}{2};$$

sie ist dieselbe, welche jede — moleculare oder dynamische — Theorie für isotrope Medien ergibt, und unser Resultat ist darin mit jenen in Uebereinstimmung.

2) Für den Fall, dass die Molecüle des betrachteten Krystalls keine Polarität besitzen, finden zwischen seinen Constanten in Formel (14) die Beziehungen statt:

$$c_{14} = c_{23}, \quad c_{55} = c_{31}, \quad c_{66} = c_{12},$$

infolge dessen wird:  $B = \Gamma$ ,

und daher  $B = C$  und  $A = 3B$ .

Es wird also in diesem Falle die Poisson'sche Relation erfüllt, wenn auch der isotrope Körper aus kleinen Krystallindividuen zusammengesetzt, also wie wir sagen, quasi-isotrop ist.

3) Besitzen aber die Molecüle Polaritäten, so sind, wie ich gezeigt habe,<sup>1)</sup>  $c_{44}$  und  $c_{23}$ ,  $c_{55}$  und  $c_{31}$ ,  $c_{66}$  und  $c_{12}$  voneinander verschieden, und die Poisson'sche Relation hat keine Gültigkeit.

*Für isotrope Körper, welche aus Krystallindividuen bestehen, die gross sind gegen die Wirkungssphäre der Molecularkräfte, aber klein gegen die ganzen Körper, und deren Molecüle polare Wirkungen aufeinander ausüben, besteht kein constantes Zahlenverhältniss zwischen den beiden Elasticitätsconstanten.*

Dies Resultat scheint mir eine viel umstrittene Frage sehr einfach zu erledigen.

Es ist nicht unnütz, darauf hinzuweisen, weshalb es einen Unterschied macht, ob man die polarwirkenden Molecüle einzeln oder zu kleinen krystallinischen Individuen verbunden in den quasi-isotropen Körpern vorhanden denkt.

Im ersteren Falle kommen längs des betrachteten Flächenelementes alle möglichen gegenseitigen Lagen von Molecülen vor, infolge dessen verschwindet bei der Bildung des Mittelwerthes jeder Einfluss der Polarität und man gelangt zu den alten Poisson'schen Resultaten; im letzteren Falle kommen nur diejenigen gegenseitigen Lagen vor, welche die Molecüle innerhalb des regelmässigen Krystalles besitzen, und infolge dessen macht die Eigenschaft der Polarität sich auch noch in dem Mittelwerth geltend.

1) W. Voigt, Abh. der Gött. Ges. d. Wiss. 34. p. 29. 1887.



Das erhaltene Resultat setzt voraus, dass die Krystallindividuen in dem quasi-isotropen Körper gross sind gegen die Molecularwirkungssphäre, und repräsentiren somit den einen extremen Fall, der andere, dass sie sich auf einzelne Molecüle reduciren, ist durch die Poisson'sche Relation charakterisirt; ist die Molecularwirkungssphäre von derselben Grössenordnung mit den Krystallindividuen, so muss zwischen den Elasticitätsconstanten des betreffenden Körpers eine numerische Beziehung stattfinden, die zwischen den genannten beiden liegt.

Wir wollen die erhaltenen Resultate zunächst dazu benutzen, aus den bekannten Elasticitätsconstanten  $c_{hk}$  einiger Krystalle<sup>1)</sup> diejenigen  $A$  und  $B$  der betreffenden dichten Mineralien, sowie das Verhältniss  $\nu$  der Quercontraction zur Längsdilatation zu berechnen.

Ich beginne mit dem regulären System.

Für Flussspath ist:

$c_{11} = c_{22} = c_{33} = 16,70 \cdot 10^6$ ,  $c_{23} = c_{31} = c_{12} = 4,57 \cdot 10^6$ ,  $c_{44} = c_{55} = c_{66} = 3,45 \cdot 10^6$ ,  
hieraus folgt:

$$A = 14,61 \cdot 10^6, \quad B = 5,62 \cdot 10^6, \quad A = B \cdot 2,60, \quad \nu = 0,277.$$

Für Pyrit ist:

$c_{11} = c_{22} = c_{33} = 36,8 \cdot 10^6$ ,  $c_{23} = c_{31} = c_{12} = -4,83 \cdot 10^6$ ,  $c_{44} = c_{55} = c_{66} = 10,75 \cdot 10^6$ ,  
hieraus folgt:

$$A = 28,7 \cdot 10^6, \quad B = -0,8 \cdot 10^6, \quad A = -B \cdot 28, \quad \nu = -0,029.$$

Diese Bestimmung ist wegen des nicht genügenden Materiales, wie ich seinerzeit hervorgehoben, nicht sicher.

Für Steinsalz ist:

$c_{11} = c_{22} = c_{33} = 4,77 \cdot 10^6$ ,  $c_{23} = c_{31} = c_{12} = 1,32 \cdot 10^6$ ,  $c_{44} = c_{55} = c_{66} = 1,29 \cdot 10^6$ ,  
hieraus folgt:

$$A = 4,42 \cdot 10^6, \quad B = 1,49 \cdot 10^6, \quad A = B \cdot 2,96, \quad \nu = 0,252.$$

Der Factor von  $B$  in der letzten Formel ist sehr nahe gleich 3, weil die Relation  $c_{44} = c_{23}$  nahezu erfüllt ist.

Für Sylvin ist:

$c_{11} = c_{22} = c_{33} = 3,75 \cdot 10^6$ ,  $c_{23} = c_{31} = c_{12} = 0,198 \cdot 10^6$ ,  $c_{44} = c_{55} = c_{66} = 0,655 \cdot 10^6$ ,  
hieraus folgt:

$$A = 2,85 \cdot 10^6, \quad B = 0,65 \cdot 10^6, \quad A = B \cdot 4,38, \quad \nu = 0,186.$$

1) Die Zahlen sind entnommen meinen Arbeiten in Wied. Ann. 31. p. 474 u. 701. 1887; 34. p. 981. 1888; 35. p. 642. 1888.

Ich füge hierzu eine Bestimmung für Kupfer<sup>1)</sup>, welche allerdings einige Hypothesen benutzt; dieselbe ergab:

$c_{11} = c_{22} = c_{33} = 13,4 \cdot 10^6$ ,  $c_{23} = c_{31} = c_{12} = 6,58 \cdot 10^6$ ,  $c_{44} = c_{55} = c_{66} = 5,59 \cdot 10^6$ ,  
daraus folgt:

$$A = 15,2 \cdot 10^6, \quad B = 7,71, \quad A = B \cdot 1,97, \quad \nu = 0,336.$$

Für Beryll gilt:

$$c_{11} = c_{22} = 27,5 \cdot 10^6, \quad c_{33} = 24,1 \cdot 10^6, \quad c_{23} = c_{31} = 6,74 \cdot 10^6, \quad c_{12} = 9,80 \cdot 10^6,$$

$$c_{44} = c_{55} = 6,66 \cdot 10^6, \quad c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} = 8,85 \cdot 10^6,$$

hieraus folgt:

$$A = 24,9 \cdot 10^6, \quad B = 8,52 \cdot 10^6, \quad A = B \cdot 2,92, \quad \nu = 0,255.$$

Für Bergkrystall gilt:

$$c_{11} = c_{22} = 8,68 \cdot 10^6, \quad c_{33} = 10,75 \cdot 10^6, \quad c_{23} = c_{31} = 1,44 \cdot 10^6, \quad c_{12} = 0,71 \cdot 10^6,$$

$$c_{44} = c_{55} = 5,82 \cdot 10^6, \quad c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} = 3,99 \cdot 10^6,$$

hieraus folgt:

$$A = 10,27 \cdot 10^6, \quad B = 0,75 \cdot 10^6, \quad A = B \cdot 13,7, \quad \nu = 0,068.$$

Für Kalkspath gilt:

$$c_{11} = c_{22} = 13,97 \cdot 10^6, \quad c_{33} = 8,12 \cdot 10^6, \quad c_{23} = c_{31} = 4,60 \cdot 10^6, \quad c_{12} = 4,65 \cdot 10^6,$$

$$c_{44} = c_{55} = 3,49, \quad c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} = 4,66 \cdot 10^6,$$

hieraus folgt:

$$A = 14,16 \cdot 10^6, \quad B = 5,21 \cdot 10^6, \quad A = B \cdot 2,72, \quad \nu = 0,269.$$

Für Topas ist:

$$c_{11} = 28,70 \cdot 10^6, \quad c_{22} = 35,60 \cdot 10^6, \quad c_{33} = 30,02 \cdot 10^6,$$

$$c_{23} = 9,01 \cdot 10^6, \quad c_{31} = 8,61 \cdot 10^6, \quad c_{12} = 12,84 \cdot 10^6,$$

$$c_{44} = 11,04 \cdot 10^6, \quad c_{55} = 13,53 \cdot 10^6, \quad c_{66} = 13,36 \cdot 10^6,$$

hieraus folgt:

$$A = 33,0 \cdot 10^6, \quad B = 9,35 \cdot 10^6, \quad A = B \cdot 3,53, \quad \nu = 0,220,$$

Für Baryt ist:

$$c_{11} = 9,07 \cdot 10^6, \quad c_{22} = 8,00 \cdot 10^6, \quad c_{33} = 10,74 \cdot 10^6,$$

$$c_{23} = 2,73 \cdot 10^6, \quad c_{31} = 2,75 \cdot 10^6, \quad c_{12} = 4,68 \cdot 10^6,$$

$$c_{44} = 1,22 \cdot 10^6, \quad c_{55} = 2,93 \cdot 10^6, \quad c_{66} = 2,83 \cdot 10^6,$$

hieraus folgt:

$$A = 8,78 \cdot 10^6, \quad B = 3,63 \cdot 10^6, \quad A = B \cdot 2,42, \quad \nu = 0,292.$$

Diese Zusammenstellung gibt eine grosse Mannichfaltigkeit der Werthe für das Verhältniss  $A/B$ ; schliesst man die unsicheren Zahlen für Pyrit und Kupfer aus, so sind die

1) W. Voigt, Berl. Ber. 1884. p. 1001.

Grenzwerthe 2,4 und 13,7; für  $\nu$  ebenso 0,292 und 0,068. Die meisten liegen allerdings in der Nähe von 3,0, resp. 0,25, wie sich das dadurch erklärt, dass die Polaritäten der Moleküle im allgemeinen nicht sehr stark sein mögen. Die gefundene grosse Verschiedenheit lässt natürlich den Wunsch aufsteigen, die theoretischen Resultate mit der Beobachtung zu vergleichen; *es handelt sich hierbei darum, zu sehen, in wie weit die gemachten Voraussetzungen der Wirklichkeit entsprechen, denn nur hierüber ist eine Prüfung nothwendig, und nur hierüber kann die Beobachtung entscheiden.*

Ich habe mich seit langer Zeit bemüht, dies Ziel zu erreichen, indessen liegen hier nicht geringe Schwierigkeiten vor.

Einmal sind die zur Berechnung der  $A$  und  $B$  dienenden Werthe  $c_{hk}$  aus den durch die Beobachtungen direct gegebenen  $s_{hk}$ <sup>1)</sup> durch complicirte Rechnung erhalten und schon an sich weniger genau als jene, andererseits bestimmen sich die  $A$  und  $B$  je aus einer grossen Zahl der  $c_{hk}$  und werden deshalb noch unsicherer.

Die Hauptschwierigkeit liegt aber in dem Beobachtungsmaterial. Zur strengen Durchführung der Prüfung müsste man von einer und derselben Substanz das krystallisirte und das dichte Vorkommen in für die Beobachtung geeigneten Dimensionen haben, von gleicher chemischer Reinheit, von gleicher Dichte und vollkommen frei von Störungen und Sprüngen. Aber dies aufzufinden, ist mir trotz eifrigen Suchens für keine Substanz gelungen.

Die dichte Varietät ist in besonderer Güte bei Metallen durch vorsichtigen Guss zu erhalten; aber hier fehlt die Möglichkeit, die Elasticitätsconstanten des regelmässigen Krystalles zuverlässig zu bestimmen. Für die oben aufgeführten von mir beobachteten Krystalle fehlt es umgekehrt an vollkommen genügenden dichten Varietäten, alle mir zugänglichen Stücke sind in mehr oder weniger hohen Graden porös und von Störungen, theilweise auch von Sprüngen durchsetzt.

Diese Störungen kommen in doppelter Weise in Betracht.

1) S. die p. 581 citirten Abhandlungen.

Regelmässig vertheilte Hohlräume von der Grössenordnung der Krystallindividuen und wie diese in allen möglichen Orientirungen vorkommend, modificiren nur die absoluten Werthe der Constanten  $A$  und  $B$ , beeinflussen aber nicht ihr Verhältniss  $A/B$  oder die Zahl  $\nu$ , Sprünge oder eingeschlossene fremde Substanzen können auch diese Verhältnisse verändern; in wie bedeutendem Maasse letzteres stattfinden kann, habe ich an verschiedenen Stellen erörtert.<sup>1)</sup>

Angesichts dieser Schwierigkeiten erwartete ich von anzustellenden Beobachtungen nur eine ungefähre Bestätigung der theoretischen Resultate; indess sind die Endresultate theilweise doch günstiger, als ich erwartet hatte.

Um ein Urtheil über den Grad der Uebereinstimmung von Theorie und Beobachtung zu gestatten, vergleiche ich das Verhältniss der an den dichten, quasi-isotropen Körpern direct beobachteten Biegungs- und Drillungswiderstände  $E$  und  $T$  mit den hierfür aus den Beobachtungsergebnissen an Krystallen möglichst direct berechneten Zahlen. Hierdurch wird die gesteigerte Ungenauigkeit, welche das Rechnen mit Zahlen von begrenzter Genauigkeit mit sich bringt, vermindert und die Vergleichung an Zahlen vorgenommen, welche nahezu dieselbe Sicherheit haben, wie die elastischen Widerstände der quasi-isotropen Körper selbst. Das Verhältniss  $A/B$  oder  $\nu$  berechnet sich dagegen aus  $E$  und  $T$  so, dass seine Unsicherheit viel grösser ist, als die der letzteren Constanten.

Da nämlich

$$E/T = 2(A + 2B)/(A + B)$$

ist, so ergibt sich:

$$A/B = (4T - E)/(E - 2T),$$

und hieraus folgt, dass wenn  $E/T$  etwa gleich 2,5 und bis auf den fünfundzwanzigsten Theil genau ist,  $A/B$  gleich drei und nur bis auf den vierten Theil sicher ist.

Bei quasi-isotropen Körpern, deren Substanz regulär krystallisirt, drückt sich  $E$  und  $T$  verhältnissmässig einfach durch die direct aus den Beobachtungen an Krystallen folgenden  $s_{hk}$  aus; es findet sich nämlich hier<sup>2)</sup>:

1) W. Voigt, Wied. Ann. 31. p. 485. 1887; 35. p. 646. 1888.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 35. p. 643. 1888.

$$E = \frac{s_{44} + 3(s_{11} - s_{12})}{(s_{11} - s_{12})(s_{11} + 2s_{12}) + s_{44}(2s_{11} - s_{12})},$$

$$T = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{s_{11} - s_{12}} + \frac{3}{s_{44}} \right),$$

also: 
$$\frac{E}{T} = \frac{5s_{44}(s_{11} - s_{12})}{(s_{11} - s_{12})(s_{11} + 2s_{12}) + s_{44}(2s_{11} - s_{12})}$$

Bezeichnet man für den regelmässigen regulären Krystall den Torsionswiderstand eines rechteckigen Prismas mit  $T_w$ , wenn seine Längsaxe der Würfelnormale parallel ist, mit  $T_g$ , wenn Längsaxe und grössere Querdimension in Granatoëdernormalen fallen, so schreibt sich der obige Werth von  $T$  auch:

$$T = \frac{1}{3} (2 T_g + 3 T_w),$$

was eine einfache und anschauliche Bedeutung hat.

Beobachtungen<sup>1)</sup> habe ich angestellt an dichtem Flusspath von Stolberg am Harz, der jedenfalls die eine Bedingung sehr vollkommen erfüllt, dass seine Krystallindividuen klein gegen die Dimensionen der Stäbchen sind; dagegen zeigte er Einschlüsse und Störungen, letztere flächenhaft ausgedehnt und von gleicher Wirkung wie Sprünge, insofern längs derselben leicht der Bruch eintrat.

Fünf Stäbchen lieferten für  $E/T$  die Werthe:

$$2,47, \quad 2,44, \quad 2,43, \quad 2,46, \quad 2,41;$$

die an tadellosen Flusspathkrystallen erhaltenen Werthe  $s_{hk}$  bestimmen dasselbe Verhältniss zu:

$$2,55,$$

also erheblich grösser; benutzt man hingegen die von mir an ebenfalls etwas gestörten Krystallen erhaltenen Zahlen<sup>2)</sup>, so findet sich:

$$2,43$$

in vollständiger Uebereinstimmung mit den an dichtem Flusspath erhaltenen Zahlen. Dies rührt offenbar davon her, dass die Störungen sowohl bei krystallinischem, wie bei quasi-isotropem Flusspath den Drillungswiderstand weniger verkleinern, als den Biegungswiderstand, was auch an sich plausibel ist.

1) Eine ausführlichere Zusammenstellung der hier benutzten Beobachtungen mit anderen an dichten Mineralien zu anderen Zwecken angestellten, werde ich an einer anderen Stelle geben.

2) W. Voigt, Berl. Ber. 42. p. 1003. 1884.

Die absoluten Werthe von  $E$  und  $T$  sind, wie dies zu erwarten, etwas kleiner als berechnet; beobachtet wurde als mittlerer Werth:

$$E = 10,45 \cdot 10^6, \quad T = 4,28 \cdot 10^6,$$

berechnet aus den Zahlen für tadellosten, krystallisirten Flussspath:

$$E = 11,50 \cdot 10^6, \quad T = 4,50 \cdot 10^6,$$

für gleichfalls gestörten krystallisirten:

$$E = 10,89 \cdot 10^6, \quad T = 4,48 \cdot 10^6.$$

Eine sehr schöne Prüfung schien die Vergleichung von feinkörnigem carrarischen Marmor mit Kalkspath in Aussicht zu stellen. Indessen zeigte sich bald die Unmöglichkeit, Marmor überhaupt auf seine Elasticität hin zu untersuchen, da derselbe ganz enorme dauernde Deformationen schon bei sehr kleinen Belastungen erfährt.

Ich benutzte daher Solenhofener Lithographenschiefer, der allerdings sehr porös ist und auch nicht aus chemisch reinem kohlen sauren Kalk besteht. Zwei Stäbchen gaben die Werthe:

$$\frac{E}{T} = 2,50 \quad \text{und} \quad 2,51,$$

die Berechnung aus den  $s_{hk}$  für Kalkspath ergibt:

$$2,54;$$

nach den Umständen ist die Uebereinstimmung befriedigend.

Recht gut bewährte sich dichter Baryt von Clausthal am Harz. Es standen mir zwei Stücke zur Verfügung, ein graugrünes und ein röthlichbraunes, beide im Bruch sehr feinkörnig und, obwohl nicht ganz homogen in der Farbe, doch anscheinend wenig gestört und sprungfrei. Der graue Baryt enthielt kleine Körner einer härteren Substanz eingeschlossen, die sich auf den polirten Flächen der Stäbchen als kleine Erhöhungen geltend machten; auch der bräunliche gestattete keine ganz feine Politur, und hierin liegt neben der etwas geringeren Dichte der Hauptgrund dafür, dass die absoluten Werthe von  $E$  und  $T$  sich kleiner fanden, als sie sich aus den Zahlen für krystallisirten Baryt berechnen. Die Beobachtungen ergaben nämlich für grauen, resp. braunen Baryt  $E=5,90 \cdot 10^6$ , resp.  $5,91 \cdot 10^6$  gegen  $6,65 \cdot 10^6$ ,  $T=2,32 \cdot 10^6$ ,

resp.  $2,29 \cdot 10^6$  gegen  $2,57 \cdot 10^6$ . Das Verhältniss  $E/T$  ist von den Fehlern in der Dimensionsbestimmung fast völlig frei.

Sein berechneter Werth ist:

$$\frac{E}{T} = 2,585,$$

während die Beobachtungen an vier Stäbchen von grauem Baryt:

$$2,59, \quad 2,52, \quad 2,57, \quad 2,52,$$

an vier Stäbchen von braunem Baryt:

$$2,58, \quad 2,56, \quad 2,59, \quad 2,58$$

ergaben.

Die Uebereinstimmung entspricht hier allen Anforderungen.

Göttingen, im September 1889.

## VI. Die Frage nach der Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes; von Robert Geigel.

(Aus den Verhandlungen der physikalisch-medizinischen Gesellschaft in Würzburg für die Annalen bearbeitet vom Hrn. Verf.)

Hierzu Taf. VI Fig. 9–13.)

Dem Streite zwischen den beiden Ansichten über die Schwingungsrichtung geradlinig polarisirten Lichtes scheint in neuerer Zeit die electromagnetische Lichttheorie ein Ende machen zu wollen. F. Koláček<sup>1)</sup> sagt, dass, da für jeden polarisirten Lichtstrahl zwei zu einander senkrechte Schwingungen stattfinden, in der Polarisationsebene und senkrecht zu ihr, die eine electricischer, die andere magnetischer Natur, die Frage nach der Schwingungsrichtung polarisirten Lichtes keinen Sinn mehr besitze.

Das ist jedenfalls richtig, wenn man einen polarisirten Lichtstrahl oder polarisirtes Licht ganz absolut in Betrachtung zieht, losgelöst von Ursache und Wirkung, einfach im Aether sich fortpflanzend. Sobald ihm aber irgend ein Hemmniss in den Weg tritt, mag sich das durch Absorption,

1) F. Koláček, Wied. Ann. **34**. p. 673. 1888.