

weder einen Polarisator oder einen Analysator einschalten. Auch kann man, wie dies einst Haidinger that, den Lichtstrahl Platten von Calcit und Quarz passiren lassen, um die verschiedenen polarisirten Stellen im Ringe durch die verschiedenen complementären Farben zu markiren. Wegen der Verkehrung der Bilder wäre § 2 zu berücksichtigen. Schliesslich soll nur erwähnt werden, dass die austretenden Strahlen genug intensiv sind, um auch dann objective Bilder zu geben, wenn sie mittelst eines Spiegels auf eine Wand projectirt werden.

Wien, Januar 1889.

**VIII. Ueber den Einfluss elastischer Deformationen,
speciell einseitigen Druckes, auf das optische
Verhalten krystallinischer Körper;
von Friedrich Pockels.**

Einleitung: Historische Uebersicht.

Die Thatsache, dass man in isotropen Körpern durch einseitigen Druck oder Zug Doppelbrechung hervorbringen kann, wurde im Anfange dieses Jahrhunderts von Brewster entdeckt. Derselbe untersuchte in einer Reihe von Arbeiten¹⁾ zunächst weiche organische Substanzen, wie Leim, Wachs, Harz, sodann Glas, Flussspath, Steinsalz und fand, dass sich diese Körper, wenn sie einseitigem Drucke ausgesetzt werden, wie negative, dagegen bei Einwirkung einseitigen Zuges wie positive optisch einaxige Krystalle verhalten, und ferner, dass der Gangunterschied der beiden Strahlen dem ausgeübten Drucke annähernd proportional ist. Während Brewster zu diesen Resultaten nur durch die Beobachtung der Interferenzfarben im polarisirten Lichte gelangte, wies Fresnel 1822 durch seinen bekannten Versuch mit Glasprismen die Doppelbrechung im comprimierten Glase direct nach.²⁾ Schon einige Jahre früher

1) Brewster, Phil. Trans. 1815 p. 60, 1816 p. 156; Trans. of the Royal Soc. of Edinb. 8. 1818. p. 369; Pogg. Ann. 19. p. 527. 1830.

2) Fresnel, Ann. de chim. et de phys. (2) 20. p. 376. 1822.

hatte Fresnel versucht, die absoluten Aenderungen der Lichtgeschwindigkeit in gebogenen Glasstreifen durch Beobachtung der Verschiebung von Beugungstreifen zu ermitteln, war aber zu keinem sicheren Resultate gelangt.¹⁾

Im Jahre 1841 legte F. Neumann der Berl. Acad. eine sehr umfangreiche Abhandlung²⁾: „Ueber die Gesetze der Doppelbrechung des Lichtes in comprimirten und ungleichförmig erwärmten unkrystallinischen Körpern“ vor, in deren ersten Theile er eine allgemeine Theorie dieser Erscheinungen aufstellte. Neumann gelangte zu folgenden Ausdrücken für die drei Hauptlichtgeschwindigkeiten in einem deformirten isotropen Körper:

$$\begin{aligned} A &= G + qx_x + py_y + pz_z, & B &= G + px_x + qy_y + pz_z, \\ C &= G + px_x + py_y + qz_z, \end{aligned}$$

worin G die Lichtgeschwindigkeit vor der Deformation, x_x, y_y, z_z die Hauptdilatationen und p, q zwei der Substanz eigenthümliche Constanten bedeuten. Aus Beobachtungen an einem gebogenen Glasstreifen berechnete Neumann die Werthe $(p - q)/G^2 = 0,126$, $p/G = -0,131$, $q/G = -0,213$, wobei die Lichtgeschwindigkeit in Luft = 1 gesetzt ist. Hiernach hätte eine durch allseitig gleichen Druck erzeugte Compression des Glases eine Abnahme des Brechungscoëfficienten zur Folge; dieses auffallende Resultat Neumann's beruht jedoch auf einer unrichtigen Berücksichtigung der Dickenänderung des Glasstreifens bei der Biegung.

Die erste Beobachtung über den Einfluss einseitigen Druckes auf die Doppelbrechung in optisch einaxigen Krystallen rührt ebenfalls von Brewster her.³⁾ Nach ihm haben Moigno und Soleil⁴⁾ über diesen Gegenstand Versuche angestellt (an Quarz, Beryll und Turmalin) und gefunden, dass optisch einaxige Krystalle durch einen senkrecht zur Axe ausgeübten Druck zwei-axig werden, und dass die Ebene der optischen Axe dann bei

1) Fresnel, Ann. de chim. et de phys. (2) 15. p. 384. 1820; Pogg. Ann. 30. p. 260. 1836.

2) Ein Auszug aus derselben findet sich in Pogg. Ann. 54. p. 449. 1841 u. Berl. Ber. 1841. Theil II. p. 1.

3) Brewster, Trans. of the Roy. Soc. of Edinb. 8. p. 281. 1818.

4) Moigno u. Soleil, Compt. rend. 30. p. 361. 1850.

positiven Krystallen parallel der Druckrichtung, bei negativen senkrecht zu derselben ist.

Dieses Verhalten stimmt überein mit den Beobachtungen Brewster's und Neumann's an isotropen Körpern, wonach letztere durch einseitigen Druck negativ einaxig werden.

Die Untersuchung der Doppelbrechung im comprimierten oder dilatirten Glase wurde von Wertheim¹⁾ wieder aufgenommen. Derselbe unterwarf Glasparallelepipeda einem gleichförmigen messbaren Drucke, indem er sie vermittelt einer einfachen Vorrichtung durch Gewichte belastete, und fand durch zahlreiche Beobachtungen bei verschiedenen Belastungen die Behauptung Brewster's, dass die Stärke der Doppelbrechung dem Drucke proportional sei, vollkommen bestätigt. Ferner constatirte er, dass der durch einseitige Dilatation hervorbrachte Gangunterschied dem durch die gleich grosse einseitige Compression erzeugten entgegengesetzt gleich, und dass der Gangunterschied der Wellenlänge umgekehrt proportional war. Wertheim dehnte seine Versuche auch auf reguläre Krystalle, nämlich auf Alaun, Steinsalz und Flussspath aus²⁾, wobei es ihm auffiel, dass die Schwingungsrichtungen in den comprimierten Krystallplatten oft bedeutend von der Druckrichtung und der zu ihr senkrechten Richtung abwichen, und dass der erzeugte Gangunterschied unter sonst ganz gleichen Umständen sehr verschieden gross war, wenn der Druck auf verschiedene Flächenpaare der Krystallparallelepipeda ausgeübt wurde. Er glaubte gefunden zu haben, dass dieses scheinbar anomale Verhalten von der Ausbildung der natürlichen Krystallflächen abhänge; würfelförmige Krystalle von Steinsalz und Flussspath zeigten dasselbe nicht. Der Charakter der durch Druck erzeugten Doppelbrechung war bei allen untersuchten Körpern derselbe wie beim Glase. Aus dem Jahre 1855 ist eine Abhandlung von Bravais³⁾ zu erwähnen, in welcher numerische Werthe des Gangunterschiedes des ordinären und extraordinären

1) Wertheim, *Compt. rend.* **32.** p. 289. 1851; *Pogg. Ann.* **86.** p. 321. 1852.

2) Wertheim, *Compt. rend.* **33.** p. 576. 1851; **35.** p. 276. 1852 u. *Pogg. Ann.* **86.** p. 321. 1852; **87.** p. 498. 1852.

3) Bravais, *Ann. de chim. et de phys.* (3) **43.** p. 147. 1855; *Pogg. Ann.* **96.** p. 395. 1855.

ren Strahles im einseitig comprimirtten Glase und Steinsalze angegeben sind.

Versuche mit einaxigen Krystallen wurden wieder von Pfaff¹⁾ angestellt, jedoch mit ziemlich rohen Hilfsmitteln; die von Moigno und Soleil aufgestellte Regel bestätigte sich bei allen von ihm untersuchten Krystallen, nämlich bei den positiven: Quarz, Zirkon, Apophyllit, und den negativen: Kalkspath, Beryll, Turmalin, Honigstein. Uebrigens untersuchte Pfaff hauptsächlich die bleibenden Veränderungen, welche die Interferenzringe im Kalkspath infolge der Bildung von Zwillinglamellen durch starken Druck erleiden. Aehnliche Beobachtungen, wie diejenigen Pfaff's, sind später von Hrn. Van der Willigen mitgetheilt worden.²⁾

Die durch einseitigen Druck erzeugte Doppelbrechung des Glases bildete nochmals den Gegenstand einer grösseren Arbeit, welche Hr. Mach 1872 veröffentlichte.³⁾ Aus den nach einer empfindlichen Beobachtungsmethode (welche auf der Verschiebung von Interferenzstreifen im Spectrum beruhte) ausgeführten Messungen desselben ergab sich im Mittel $(p - q) / G^2 = 0,134$. Hr. Mach fand ausserdem mittelst des Jamin'schen Interferentialrefractors, dass sich die Geschwindigkeit der parallel der Druckrichtung polarisirten Welle in demselben Sinne, aber doppelt so stark änderte, als diejenige der senkrecht zur Druckrichtung polarisirten Welle. Hieraus und aus obigen Werthe von $(p - q) / G^2$ berechnete Hr. Mach $p / G = - 0,132$, $q / G = - 0,216$, wobei jedoch ein Fehler vorgekommen ist.

Die Herren Mach und Merten stellten auch eine Untersuchung an: „Ueber die Aenderung der Lichtgeschwindigkeit im Quarz durch Druck“⁴⁾, welche zwar nur qualitative, aber sehr interessante Resultate ergeben hat, besonders da der senkrecht zur Axe gepresste Quarz das erste Beispiel eines optisch zwei-axigen circularpolarisirenden Krystalles darbot. Es zeigte sich

1) Pfaff, Pogg. Ann. 107. p. 393. 1859; 108. p. 598. 1859.

2) Van der Willigen, Arch. de musée de Teyler 3. p. 292. 1874.

3) Mach, Pogg. Ann. 146. p. 314. 1872; Optisch-akustische Versuche, Prag 1878.

4) Mach u. Merten, Wien. Ber. (2) 72. p. 315. 1875; Pogg. Ann. 156. p. 639. 1875.

unter Anderem, dass die Drehung der Polarisationssebene für einen Strahl, der sich im comprimierten Quarz parallel einer der optischen Axen fortpflanzt, merklich dieselbe ist, wie für einen der Hauptaxe parallelen Strahl vor der Compression. Ferner fand Hr. Mach, dass im Quarz durch einen in beliebiger Richtung ausgeübten Druck die Geschwindigkeiten der sich senkrecht zur Druckrichtung fortpflanzenden Strahlen stets verkleinert werden.

Dass man in isotropen Körpern durch Druck oder Zug auch Dichroismus erzeugen kann, wurde zuerst von Hrn. Kundt¹⁾ an Kautschuk, dann von Hrn. v. Seherr-Thoss²⁾ an auf Glas gestrichenen breiartigen Farbstoffen und, was besonders bemerkenswerth erscheint, von Hrn. v. Lasaulx³⁾ an Krystallen der Silberhaloide beobachtet.

1880 veröffentlichte Hr. Macé de Lépinay eine umfangreiche experimentelle Arbeit über die accidentelle Doppelbrechung in Glas⁴⁾, welche hauptsächlich die durch ungleichförmige Erwärmung hervorgerufenen Erscheinungen zum Gegenstande hat.

Eine Abhandlung von Hrn. Jannetaz⁵⁾, eine von Hrn. Bücking⁶⁾ und mehrere von Hrn. Klocke⁷⁾ beziehen sich auf Alaun und einige andere krystallisirte Körper, welche im natürlichen Zustande optische Anomalieen zeigen, sowie auf die künstliche Nachahmung der letzteren durch gespannte Colloide. Besonders ist noch zu erwähnen die Abhandlung von Hrn. Bücking: „Ueber den Einfluss eines messbaren Druckes auf doppeltbrechende Mineralien“.⁸⁾ Hr. Bücking unterwarf senkrecht zur optischen Axe geschnittene Platten von Quarz, Beryll, Apatit und Turmalin einem seitlichen Drucke, der durch eine

1) Kundt, Pogg. Ann. 151. p. 126. 1874.

2) v. Seherr-Thoss, Wied. Ann. 6. p. 270. 1879.

3) v. Lasaulx, Sitzungsber. der schles. Ges. f. vaterl. Cultur. 1879. p. 171.

4) Macé de Lépinay, Ann. de chim. et de phys. (5) 19. p. 5. 1880.

5) Jannetaz, Zeitschr. f. Kryst. 4. p. 421. 1880.

6) Bücking, N. Jahrb. f. Min. 1. Ref. p. 177. 1881; Ztsch. d. deutschen geolog. Ges. 32. p. 199. 1880.

7) Klocke, Ber. d. Verhandl. d. Naturf.-Ges. zu Freiburg i. B. 1881. p. 31; N. Jahrb. f. Min. 2. p. 249. 1881.

8) Bücking, Zeitschr. f. Kryst. 7. p. 555. 1883.

Schraube ausgeübt und mittelst einer Feder gemessen wurde, und beobachtete die Grösse des entstehenden optischen Axenwinkels; er wollte das Gesetz finden, nach welchem der letztere mit dem Drucke zunimmt, und hat zu diesem Zwecke die Grösse des Axenwinkels als Function des Druckes durch Curven dargestellt. Nimmt man an, dass sich die drei Hauptlichtgeschwindigkeiten proportional mit dem Drucke ändern, und dass diese Aenderungen sehr klein sind gegen die Differenz der Hauptlichtgeschwindigkeiten im undeformirten Krystall, so muss der Axenwinkel der Quadratwurzel aus dem Drucke proportional sein. Berechnet man hiernach die Beobachtungen von Hrn. Bücking, so ergibt sich eine ziemlich gute Uebereinstimmung, wenigstens beim Beryll und Apatit.

Seit dieser Arbeit Bücking's scheinen keine Untersuchungen über den Einfluss von elastischen Deformationen auf die optischen Eigenschaften krystallinischer Körper angestellt zu sein. Dagegen ist noch ganz kürzlich eine umfangreiche Abhandlung über die Doppelbrechung im comprimirtten Glase von Hrn. Kerr veröffentlicht worden¹⁾, welcher die absoluten Aenderungen der Lichtgeschwindigkeit nach einer neuen Methode bestimmt hat.

Endlich mögen hier noch diejenigen Untersuchungen erwähnt werden, welche sich auf die Aenderung der Doppelbrechung mit der Temperatur beziehen. Die ersten derartigen Beobachtungen hat Rudberg²⁾ angestellt, welcher die Aenderung der Hauptbrechungscoëfficienten von Quarz, Kalkspath und Aragonit bei Erwärmung mittelst Prismen bestimmte. Die Beobachtungen an Quarz und Kalkspath wurden später nach einer feineren Methode von Fizeau³⁾ wiederholt. Die Aenderung der Stärke der Doppelbrechung mit der Temperatur untersuchte Pfaff⁴⁾ an verschiedenen Krystallen, die Aenderung

1) Kerr, *Phil. Mag.* 26. Octoberheft. 1888. Auf die Ergebnisse der Untersuchungen Neumann's, Mach's und Kerr's über die Doppelbrechung im comprimirtten Glase werde ich in einem Anhange der nachstehenden Abhandlung etwas näher eingehen.

2) Rudberg, *Pogg. Ann.* 26. p. 291. 1832.

3) Fizeau, *Compt. rend.* 58. p. 923. 1864; *Pogg. Ann.* 119. p. 97, 111, 297. 1863; *Pogg. Ann.* 123. p. 515. 1864.

4) Pfaff, *Pogg. Ann.* 123. p. 179. 1864; *Sitzungsber. der phys.-med. Soc. zu Erlangen* 1878. p. 213.

des Axenwinkels zahlreicher zweiaxiger Krystalle bestimmte Descloiseaux.¹⁾ In neuerer Zeit ist eine sehr umfangreiche Arbeit über den Einfluss der Temperatur auf die Brechungscoefficienten von Quarz, Beryll und Flussspath von Hrn. Dufet²⁾ und eine solche über die Aenderung der Brechungscoefficienten des Quarzes von Hrn. Müller³⁾ veröffentlicht worden.

Eine Uebersicht der Litteratur, welche sich auf die künstliche Erzeugung resp. Aenderung der Doppelbrechung durch Druck und Erwärmung bezieht, findet sich in Verdet's „Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes“ (deutsche Bearbeitung von Exner) am Schlusse des Abschnittes über accidentelle Doppelbrechung (p. 332—334).

In der nachstehenden Arbeit, welche ich auf Veranlassung von Hrn. Prof. Voigt ausgeführt habe, soll zunächst im Anschluss an die von Neumann für isotrope Körper gegebene Theorie die Einwirkung einer beliebigen homogenen elastischen Deformation auf das optische Verhalten krystallinischer Körper theoretisch behandelt werden. Sodann sollen die erhaltenen Formeln speciell auf rhomboëdrische und reguläre Krystalle, auf welche ein einseitiger Druck ausgeübt wird, angewandt und mit den Resultaten von Beobachtungen verglichen werden, welche ich an Bergkrystall und Flussspath im physikalischen Institute zu Göttingen angestellt habe. Sämmtliche Hilfsmittel für die experimentelle Untersuchung wurden mir vom physikalischen Institute zur Verfügung gestellt. Das Material für die untersuchten Krystallparallelepipeda verdanke ich Hrn. Prof. Voigt; es entstammt denselben Krystallen von Quarz und Flussspath, aus welchen die von Hrn. Prof. Voigt zur Bestimmung der Elasticitätsconstanten verwendeten Stäbchen hergestellt worden sind. Dieses Material war für die vorliegende Untersuchung besonders werthvoll, weil bei derselben die genaue Kenntniss der Elasticitätsconstanten erforderlich ist.

1) Descloiseaux, Compt. rend. 62. p. 988. 1866 u. Pogg. Ann. 119. p. 481. 1863.

2) Dufet, Bull. de la soc. minér. de France 1885. 7. p. 182; 8. p. 187 u. 237.

3) Müller, Publ. des astrophysik. Observat. zu Potsdam 4. p. 151. 1885.

I. Theoretischer Theil.

1. Allgemeine Formeln.

Die Neumann'sche Theorie bedarf für krystallinische Körper deshalb einer Verallgemeinerung, weil bei diesen das optische Symmetrieaxensystem im Allgemeinen nicht, wie bei isotropen Körpern, mit dem Hauptdilationsaxensystem zusammenfallen kann, also die Lage des ersteren erst aus der gegebenen Deformation bestimmt werden muss.

Die erste Annahme, welche der Theorie zu Grunde gelegt werden soll, ist die, dass auch in einem innerhalb der Elastizitätsgrenzen deformirten krystallinischen Körper noch die Fresnel-Neumann'schen Gesetze für die Fortpflanzung des Lichtes gelten — eine Annahme, welche wohl dadurch einigermaßen berechtigt ist, dass bisher noch in keinem doppeltbrechenden Medium eine Abweichung von jenen Gesetzen nachgewiesen worden ist. Gemäss dieser Annahme gibt es nach der Deformation wieder ein Fresnel'sches Ovaloid, dessen Hauptaxen (das sind die Hauptlichtgeschwindigkeiten) mit $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ bezeichnet werden mögen; parallel diesen Hauptaxen seien die x -, y - und z -Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Der Radiusvector ρ des Ovaloids ist dann als Function seiner auf das Hauptaxensystem bezogenen Richtungs-cosinus μ, ν, π gegeben durch:

$$(1) \quad \rho^2 = \omega_x^2 \mu^2 + \omega_y^2 \nu^2 + \omega_z^2 \pi^2.$$

Diese Gleichung des Ovaloids soll nun auf dasjenige Coordinatensystem x^0, y^0, z^0 transformirt werden, welches das optische Symmetrieaxensystem im undeformirten Krystall, bei höher symmetrischen Krystallen also zugleich ein krystallographisches Symmetrieaxensystem ist. Die Bezeichnung der neuen optischen Symmetrieaxen soll stets so gewählt werden, dass bei der Deformation ein stetiger Uebergang von x^0 in x , y^0 in y , z^0 in z stattfindet. Die Richtungs-cosinus der x -, y - und z -Axe in Bezug auf das Coordinatensystem x^0, y^0, z^0 sollen in der aus nachstehender Tabelle ersichtlichen Weise bezeichnet werden:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x & y & z \\ x^0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ y^0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ z^0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{array} \right.$$

Ferner seien μ^0, ν^0, π^0 die Richtungscosinus des Radiusvectors ρ in Bezug auf das Axensystem x^0, y^0, z^0 ; dann ist

$$\begin{aligned} u &= \mu^0 \alpha_1 + \nu^0 \alpha_2 + \pi^0 \alpha_3, & v &= \mu^0 \beta_1 + \nu^0 \beta_2 + \pi^0 \beta_3, \\ & & \pi &= \mu^0 \gamma_1 + \nu^0 \gamma_2 + \pi^0 \gamma_3. \end{aligned}$$

Durch Einsetzung dieser Ausdrücke in (1) erhält man die Gleichung des neuen Ovaloids, bezogen auf das Axensystem x^0, y^0, z^0 :

$$(3) \quad \rho^2 = B_{11} \mu^0{}^2 + B_{22} \nu^0{}^2 + B_{33} \pi^0{}^2 + 2B_{23} \nu^0 \pi^0 + 2B_{31} \pi^0 \mu^0 + 2B_{12} \mu^0 \nu^0,$$

wo gesetzt ist:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_x^2 \alpha_1^2 + \omega_y^2 \beta_1^2 + \omega_z^2 \gamma_1^2 &= B_{11}, & \omega_x^2 \alpha_2 \alpha_3 + \omega_y^2 \beta_2 \beta_3 + \omega_z^2 \gamma_2 \gamma_3 &= B_{23}, \\ \omega_x^2 \alpha_2^2 + \omega_y^2 \beta_2^2 + \omega_z^2 \gamma_2^2 &= B_{22}, & \omega_x^2 \alpha_8 \alpha_1 + \omega_y^2 \beta_8 \beta_1 + \omega_z^2 \gamma_8 \gamma_1 &= B_{31}, \\ \omega_x^2 \alpha_3^2 + \omega_y^2 \beta_3^2 + \omega_z^2 \gamma_3^2 &= B_{33}, & \omega_x^2 \alpha_1 \alpha_2 + \omega_y^2 \beta_1 \beta_2 + \omega_z^2 \gamma_1 \gamma_2 &= B_{12}. \end{aligned} \right.$$

Die Grössen $B_{11}, B_{22}, B_{33}, B_{23}, B_{31}, B_{12}$ können „Bestimmungsstücke des Ovaloids“ genannt werden. Ist keine Deformation vorhanden, so wird $B_{11} = \omega_x^0{}^2, B_{22} = \omega_y^0{}^2, B_{33} = \omega_z^0{}^2, B_{23} = B_{31} = B_{12} = 0$. Die Grössen $B_{11} - \omega_x^0{}^2, \dots, B_{23}, \dots$ sind offenbar Functionen der von Kirchhoff mit $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$ bezeichneten Deformationsgrössen (Dilatationen und Winkeländerungen), durch welche ja der Zustand des deformirten Körpers völlig bestimmt ist; diese Functionen erhalten den Werth 0, wenn die Argumente = 0 werden.

Es soll nun die Annahme gemacht werden, dass man sich bei der Entwickelung dieser Functionen nach Potenzen von x_x, \dots, y_z, \dots auf die Glieder erster Ordnung beschränken kann. Dann sind $B_{11} - \omega_x^0{}^2, \dots, B_{23}, \dots$ homogene lineare Functionen der Deformationsgrössen, es ist also zu setzen:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} B_{11} - \omega_x^0{}^2 &= a_{11} x_x + a_{12} y_y + a_{13} z_z + a_{14} y_z + a_{15} z_x + a_{16} x_y, \\ B_{22} - \omega_y^0{}^2 &= a_{21} x_x + \dots + \dots + a_{24} y_z + \dots + \dots, \\ B_{33} - \omega_z^0{}^2 &= a_{31} x_x + \dots + \dots + a_{34} y_z + \dots + \dots, \\ B_{23} &= a_{41} x_x + \dots + \dots + a_{44} y_z + \dots + \dots, \\ B_{31} &= a_{51} x_x + \dots + \dots + a_{54} y_z + \dots + \dots, \\ B_{12} &= a_{61} x_x + \dots + \dots + a_{64} y_z + \dots + \dots, \end{aligned} \right.$$

wo die a_{hk} der Substanz eigenthümliche Constanten, die aber noch von der Wellenlänge abhängen können, und x_x, \dots, y_z, \dots die auf das ursprüngliche Symmetrieaxensystem x^0, y^0, z^0 bezogenen Deformationsgrössen bezeichnen. Die Grössen

$B_{11}, \dots, B_{23} \dots$ sind nun als durch die Formeln (5) gegeben zu betrachten, und die Gleichungen (4) sind zur Bestimmung der Unbekannten $\omega_x^2, \omega_y^2, \omega_z^2, \alpha_1, \dots, \gamma_3$, d. h. der Grössen und Richtungen der Haupttaxen des Ovaloids im deformirten Krystall, zu verwenden. Indem man die Gleichungen (4) der Reihe nach mit den Factoren:

$$\beta_1 \gamma_1, \beta_2 \gamma_2, \beta_3 \gamma_3, \beta_2 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_2, \beta_3 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_3, \beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1$$

multiplirt und dann addirt, und indem man ebenso mit den beiden analogen Factorensystemen verfährt, erhält man, da die linken Seiten verschwinden, die drei Gleichungen:

$$(6) \begin{cases} 0 = B_{11} \beta_1 \gamma_1 + B_{22} \beta_2 \gamma_2 + B_{33} \beta_3 \gamma_3 + B_{23} (\beta_2 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_2) + B_{31} (\beta_1 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_1) \\ \quad + B_{12} (\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1), \\ 0 = B_{11} \gamma_1 \alpha_1 + B_{22} \gamma_2 \alpha_2 + B_{33} \gamma_3 \alpha_3 + B_{23} (\gamma_2 \alpha_3 + \gamma_3 \alpha_2) + B_{31} (\gamma_1 \alpha_3 + \gamma_3 \alpha_1) \\ \quad + B_{12} (\gamma_1 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_1), \\ 0 = B_{11} \alpha_1 \beta_1 + B_{22} \alpha_2 \beta_2 + B_{33} \alpha_3 \beta_3 + B_{23} (\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) + B_{31} (\alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1) \\ \quad + B_{12} (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen sind die Richtungscosinus $\alpha_1, \dots, \gamma_3$ zu berechnen. Zu diesem Zwecke kann man die letzteren durch drei Winkel ϑ, φ, ψ in folgender Weise ausdrücken:

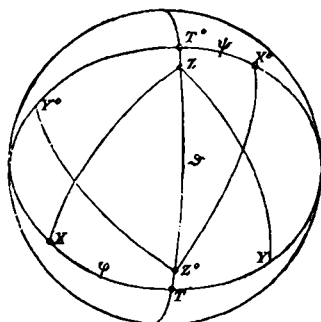
$$(7) \begin{cases} \alpha_1 = -\cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta - \sin \varphi \sin \psi, & \alpha_3 = \cos \varphi \sin \vartheta, \\ \beta_1 = -\sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta + \cos \varphi \sin \psi, & \beta_3 = \sin \varphi \sin \vartheta, \\ \gamma_1 = \cos \psi \sin \vartheta, & \gamma_3 = \cos \vartheta. \\ \alpha_2 = -\cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta + \sin \varphi \cos \psi, \\ \beta_2 = -\sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta - \cos \varphi \cos \psi, \\ \gamma_2 = \sin \psi \sin \vartheta, \end{cases}$$

Die Bedeutung der Winkel φ, ψ, ϑ ist aus der nebenstehenden Figur ersichtlich, in welcher:

$$\begin{aligned} \widehat{ZZ^0} &= \vartheta, \\ \widehat{X^0T^0} &= \psi, \\ \widehat{XT} &= \varphi \text{ ist.} \end{aligned}$$

Man kann nun aus den beiden ersten Gleichungen (6) die Gleichungen ableiten:

$$\begin{aligned} (B_{11} - B_{33}) \gamma_1 \gamma_3 - B_{23} \gamma_1 \gamma_2 + B_{31} (\gamma_3^2 - \gamma_1^2) + B_{12} \gamma_2 \gamma_3 &= 0, \\ (B_{22} - B_{33}) \gamma_2 \gamma_3 + B_{23} (\gamma_3^2 - \gamma_2^2) - B_{31} \gamma_1 \gamma_2 + B_{12} \gamma_1 \gamma_3 &= 0, \end{aligned}$$



aus welchen man, wenn ϑ nicht $= 0$ ist, durch Einführung der Ausdrücke (7) folgende cubische Gleichung für $\operatorname{tg} \psi$ erhält:

$$(8) \left\{ \begin{aligned} & \operatorname{tg}^3 \psi \{ B_{23} (B_{31}^2 - B_{12}^2) + B_{31} B_{12} (B_{22} - B_{33}) \} \\ & + \operatorname{tg}^2 \psi \{ B_{31} (B_{11} - B_{33}) (B_{22} - B_{33}) - B_{23} B_{12} (2 B_{11} - B_{22} - B_{33}) \\ & \qquad \qquad \qquad - B_{31} (2 B_{33}^2 - B_{31}^2 - B_{12}^2) \} \\ & + \operatorname{tg} \psi \{ B_{23} (B_{22} - B_{11}) (B_{11} - B_{33}) - B_{31} B_{12} (2 B_{22} - B_{11} - B_{33}) \\ & \qquad \qquad \qquad - B_{23} (2 B_{31}^2 - B_{23}^2 - B_{12}^2) \} \\ & + B_{12} B_{23} (B_{11} - B_{33}) + B_{31} (B_{23}^2 - B_{12}^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

Man erhält drei Werthe für $\operatorname{tg} \psi$, weil man die neuen Symmetrieachsen zunächst in beliebiger Reihenfolge mit x, y, z bezeichnen kann. Verfährt man aber bei der Bezeichnung nach dem oben erwähnten Principe, so ist ψ vollständig (bis auf $\pm \pi$) bestimmt. Aus dem so erhaltenen Werthe von ψ ergibt sich ϑ mittelst der Formel:

$$(9) \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{B_{31} \sin \psi - B_{23} \cos \psi}{\frac{1}{2} (B_{22} - B_{11}) \sin 2\psi + B_{12} \cos 2\psi}.$$

Schliesslich kann man aus der dritten der Gleichungen (6) folgende Gleichung für $\operatorname{tg} 2\varphi$ ableiten:

$$(10) \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\cos \vartheta \{ (B_{11} - B_{22}) \sin 2\psi - 2 B_{12} \cos 2\psi \} + 2 \sin \vartheta \{ B_{23} \cos \psi - B_{31} \sin \psi \}}{-\sin 2\vartheta \{ B_{23} \sin \psi + B_{31} \cos \psi \} + B_{12} \sin 2\psi - B_{11} \sin^2 \psi - B_{23} \cos^2 \psi + B_{33}}$$

durch welche φ bis auf $\pm \frac{1}{2} \pi$ bestimmt ist; man hat denjenigen Werth von φ zu wählen, für welchen bei verschwindender Deformation $\varphi - \psi = \pi$ wird. Die Berechnung von ψ, ϑ, φ lässt sich übrigens in vielen Fällen bedeutend vereinfachen, wie weiter unten gezeigt werden wird.

Nachdem ψ, ϑ, φ und damit $\alpha_1, \dots, \gamma_3$ gefunden sind, erhält man $\omega_x^2, \omega_y^2, \omega_z^2$, indem man die Gleichungen (4) mit dem Factorsystem

$$\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2, 2\alpha_2\alpha_3, 2\alpha_3\alpha_1, 2\alpha_1\alpha_2$$

und den beiden analogen multiplicirt und addirt. Auf diese Weise ergeben sich folgende Formeln für die Hauptlichtgeschwindigkeiten nach der Deformation:

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \omega_x^2 &= B_{11} \alpha_1^2 + B_{22} \alpha_2^2 + B_{33} \alpha_3^2 + 2 B_{23} \alpha_2 \alpha_3 + 2 B_{31} \alpha_3 \alpha_1 + 2 B_{12} \alpha_1 \alpha_2, \\ \omega_y^2 &= B_{11} \beta_1^2 + B_{22} \beta_2^2 + B_{33} \beta_3^2 + 2 B_{23} \beta_2 \beta_3 + 2 B_{31} \beta_3 \beta_1 + 2 B_{12} \beta_1 \beta_2, \\ \omega_z^2 &= B_{11} \gamma_1^2 + B_{22} \gamma_2^2 + B_{33} \gamma_3^2 + 2 B_{23} \gamma_2 \gamma_3 + 2 B_{31} \gamma_3 \gamma_1 + 2 B_{12} \gamma_1 \gamma_2. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen (6) erhält man auch, wenn man die Ovaloidgleichung (3) auf das zunächst unbekannte Coordinatensystem x, y, z transformirt und die Factoren von $2\nu\pi, 2\pi\mu, 2\mu\nu$ gleich Null setzt; die Ausdrücke (11) sind die Coëfficienten von μ^2, ν^2, π^2 in der so transformirten Ovaloidgleichung. Demnach transformiren sich die Grössen $B_{11}, \dots, B_{23}, \dots$ genau ebenso, wie die elastischen Druckkräfte X_x, \dots, Y_z, \dots .

Man kann die Richtung und Grösse der Hauptaxen des neuen Ovaloids aus dessen Gleichung:

$\varrho^2 = B_{11}\mu^0 + B_{22}\nu^0 + B_{33}\pi^0 + 2B_{23}\nu^0\pi^0 + 2B_{31}\pi^0\mu^0 + 2B_{12}\mu^0\nu^0$
auch in der Weise bestimmen, dass man die Maxima und Minima von ϱ^2 aufsucht. Dies führt zunächst auf die Gleichungen:

$$\frac{B_{11}\mu^0 + B_{12}\nu^0 + B_{31}\pi^0}{\mu^0} = \frac{B_{12}\mu^0 + B_{22}\nu^0 + B_{23}\pi^0}{\nu^0} = \frac{B_{31}\mu^0 + B_{23}\nu^0 + B_{33}\pi^0}{\pi^0} = \omega^2,$$

woraus sich nachstehende cubische Gleichung für die Quadrate der halben Hauptaxen $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ergibt:

$$(12) \quad \begin{vmatrix} B_{11} - \omega^2 & B_{12} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} - \omega^2 & B_{23} \\ B_{31} & B_{23} & B_{33} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Sind die Wurzeln derselben ($\omega_x^2, \omega_y^2, \omega_z^2$) berechnet, so hat man zur Bestimmung der Richtungscosinus $\alpha_1, \dots, \gamma_3$ drei Systeme von je drei linearen Gleichungen von der Form:

$$(13) \quad \begin{cases} B_{11}\mu^0 + B_{12}\nu^0 + B_{31}\pi^0 = \mu^0\omega^2, \\ B_{12}\mu^0 + B_{22}\nu^0 + B_{23}\pi^0 = \nu^0\omega^2, \\ B_{31}\mu^0 + B_{23}\nu^0 + B_{33}\pi^0 = \pi^0\omega^2. \end{cases}$$

Setzt man in denselben

$$\omega^2 = \omega_x^2, \quad \omega_y^2, \quad \omega_z^2,$$

so wird

$$\mu^0 = \alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1, \quad \nu^0 = \alpha_2, \quad \beta_2, \quad \gamma_2, \quad \pi^0 = \alpha_3, \quad \beta_3, \quad \gamma_3.$$

Näherungsformeln zur Bestimmung der Richtungen der optischen Symmetrieaxen in deformirten zweiaxigen Krystallen. Es ist von vornherein wahrscheinlich, dass die Grössen B_{23}, B_{31}, B_{12} immer von derselben Grössenordnung sein werden, wie $B_{11} - \omega_x^2, B_{22} - \omega_y^2, B_{33} - \omega_z^2$. Nun sind aber die Aenderungen der Lichtgeschwindigkeiten, welche man durch starken Druck hervorbringen vermag, nach allen bisherigen Erfahrungen immer noch

sehr klein gegen die Differenzen der Hauptlichtgeschwindigkeiten in doppeltbrechenden Krystallen, selbst in solchen mit sehr schwacher Doppelbrechung; daher sind auch die Grössen $B_{11} - \omega_x^{02}$, $B_{22} - \omega_y^{02}$, $B_{33} - \omega_z^{02}$, B_{23} , B_{31} , B_{12} als sehr klein gegen $\omega_x^{02} - \omega_y^{02}$, $\omega_y^{02} - \omega_z^{02}$, $\omega_z^{02} - \omega_x^{02}$ oder auch gegen $B_{11} - B_{22}$, $B_{22} - B_{33}$, $B_{33} - B_{11}$ zu betrachten. Behält man in der Gl. (8) für $\text{tg } \psi$ nur die Grössen erster Ordnung bei, so erhält man:

$$\text{tg } \psi = \frac{B_{23}}{B_{31}} \cdot \frac{B_{11} - B_{33}}{B_{22} - B_{33}} \quad \text{oder} \quad = \frac{B_{23}}{B_{31}} \cdot \frac{\omega_x^{02} - \omega_z^{02}}{\omega_y^{02} - \omega_z^{02}};$$

ferner folgt dann aus (9):

$$\text{tg } \vartheta = \sqrt{\left(\frac{B_{23}}{\omega_y^{02} - \omega_z^{02}}\right)^2 + \left(\frac{B_{31}}{\omega_x^{02} - \omega_z^{02}}\right)^2},$$

und aus (10):

$$\text{tg } 2\varphi = \text{tg} \left(2\psi - \text{arctg} \frac{2B_{12}}{B_{11} - B_{22}} \right),$$

$$\text{tg } 2(\psi - \varphi) = \frac{2B_{12}}{B_{11} - B_{22}} \quad \text{oder auch} \quad \text{tg } 2(\pi + \psi - \varphi) = \frac{2B_{12}}{B_{11} - B_{22}}.$$

Es ist $\pi + \psi - \varphi$ die Drehung um die z^0 -Axe in positivem Sinne, welche das optische Symmetriemaxensystem durch die Deformation erleidet; diese Drehung werde mit Φ_z , ebenso die Drehungen um die x^0 -, resp. y^0 -Axe mit Φ_x , resp. Φ_y bezeichnet. Dann gelten die Formeln:

$$(14) \quad \text{tg } 2\Phi_x = \frac{2B_{23}}{B_{22} - B_{33}}, \quad \text{tg } 2\Phi_y = \frac{2B_{31}}{B_{33} - B_{11}}, \quad \text{tg } 2\Phi_z = \frac{2B_{12}}{B_{11} - B_{22}},$$

und zwar streng, wenn die x^0 -, resp. die y^0 - oder die z^0 -Axe bei der Deformation eine Symmetriexaxe bleibt, dagegen in erster Näherung für alle optisch zweiaxigen Krystalle. Bei letzteren kann man auch in den Nennern ω_x^{02} , ω_y^{02} , ω_z^{02} statt B_{11} , B_{22} , B_{33} schreiben und die Bogen statt der Tangenten setzen; die Drehungswinkel sind dann also dem Drucke nahezu proportional, da ja B_{23} , B_{31} , B_{12} lineare Functionen des Druckes sind. Man erhält in dem letzteren Falle für die Richtungscosinus $\alpha_1, \dots, \gamma_3$ folgende Näherungsformeln:

$$(14') \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1, \\ \alpha_2 = -\beta_1 = \frac{B_{12}}{\omega_x^{02} - \omega_y^{02}}, \quad -\alpha_3 = \gamma_1 = \frac{B_{31}}{\omega_z^{02} - \omega_x^{02}}, \\ \beta_3 = -\gamma_2 = \frac{B_{23}}{\omega_y^{02} - \omega_z^{02}}, \end{array} \right.$$

und die Quadrate der neuen Hauptlichtgeschwindigkeiten sind bis auf Grössen zweiter Ordnung durch die Grössen B_{11} , B_{22} , B_{33} selbst gegeben.

Bei optisch einaxigen Krystallen, deren Hauptaxe die z^0 -Axe ist, sind nur die Näherungsformeln für Φ_x und Φ_y anwendbar.

Bemerkung über absorbirende Krystalle. Durch die im Vorhergehenden aufgestellten Formeln wird sich wahrscheinlich auch die Aenderung der optischen Eigenschaften absorbirender Krystalle infolge elastischer Deformation darstellen lassen. Denn Hr. Drude hat in seiner Inauguraldissertation¹⁾ gezeigt, dass sich die Gesetze für die Fortpflanzung ebener Wellen mit in der Wellenebene constanter Amplitude in absorbirenden krystallinischen Medien durch dieselben Formeln darstellen lassen, wie in durchsichtigen krystallinischen Medien, wenn man complexe Grössen einführt. Es werden dann ω_x^{02} , ω_y^{02} , ω_z^{02} complexe Grössen, ebenso alle Richtungscosinus, da das „ursprüngliche Symmetrieaxensystem“ x^0 , y^0 , z^0 und um so mehr das Coordinatensystem x , y , z (im Allgemeinen) nicht mehr reell ist. Ferner sind in dem Ansatz (5) die Constanten a_{hk} complex zu nehmen, und es werden somit auch die Grössen B_{11} , . . . B_{23} , . . . complex; die letzteren entsprechen den von Hrn. Drude mit α_{11} , . . . α_{23} , . . . bezeichneten Grössen. Bei monoklinen und triklinen Krystallen, wo das Axensystem x^0 , y^0 , z^0 nicht reell ist, werden natürlich auch die auf dasselbe bezogenen „Deformationsgrössen“ x_n , . . . y_n , . . . complex; denn dieselben sind aus den gegebenen reellen Deformationsgrössen mittelst der gewöhnlichen Transformationsformeln, in welche die von Hrn. Drude mit ϵ , η , ζ bezeichneten complexen „Richtungscosinus“ einzuführen sind, zu berechnen. Nachdem aus den Formeln (6) bis (11) oder (12) und (13) die complexen Richtungscosinus der neuen imaginären Symmetrieaxen und die neuen Grössen $\omega_x^2 = A_1$, $\omega_y^2 = A_2$, $\omega_z^2 = A_3$ berechnet sind, kann man mit Hülfe der von Hrn. Drude gegebenen Formeln (25) bis (27) für eine gegebene Richtung in deformirten Krystall die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der zu ihr senkrechten ebenen Wellen und die zugehörigen Absorptionscoefficienten bestimmen.

1) P. Drude, Wied. Ann. 32. p. 584. 1887.

Ein näheres Eingehen auf diesen Gegenstand bietet indessen wohl wenig Interesse, da noch keine anderen Beobachtungen über die Aenderung der Absorption durch Druck oder Zug vorhanden zu sein scheinen, als die in der Einleitung erwähnten von Hrn. Kundt an Kautschuk, von Hrn. v. Lasaulx an Silberhaloiden und von Hrn. v. Seherr-Thoss (sowie früher von Brewster und Haidinger) an dünnen Schichten breiartiger Farbstoffe, und da es sich in allen diesen Fällen um Deformationen handelte, auf welche die Elasticitätstheorie nicht anwendbar ist. Die Versuche, in gefärbtem Glase durch Compression Dichroismus hervorzubringen, sind bisher vergeblich gewesen. Uebrigens hat man auch zur Nachweisung geringer Aenderungen der Absorption kein annähernd so feines Hilfsmittel, wie zur Bestimmung geringer Geschwindigkeitsänderungen.

2. Reduction der Anzahl der Constanten a_{hk} für die einzelnen Krystallsysteme.

Die Ausdrücke (5) für $B_{11}, \dots B_{23}, \dots$ enthalten 36 verschiedene Constanten a_{hk} ; diese Anzahl lässt sich im Allgemeinen, d. h. für trikline Krystalle, nicht auf eine geringere reduciren; wenigstens ist es mir nicht gelungen, einen Grund aufzufinden, aus welchem sich, analog wie bei den Elasticitätsconstanten aus dem Vorhandensein eines Potentials für die elastischen Druckkräfte, die Gleichheit von a_{hk} und a_{kh} schliessen liesse.

Für die Krystallsysteme mit Symmetrieaxen ergibt sich eine Reduction der Anzahl der Constanten daraus, dass die Grössen $B_{11} - \omega_x^2, \dots B_{23}, \dots$ bezogen auf zwei gleichwerthige, durch eine Drehung von $2\pi/n$ ($n = 2, 3, 4, 6$) um eine n -zählige Symmetrieaxe in einander übergehende Coordinatensysteme, sich in gleicher Weise durch die auf dasselbe Coordinatensystem bezogenen Grössen $x_x, \dots y_x, \dots$ ausdrücken müssen.

Monoklines System. Es ist eine zweizählige Symmetrieaxe vorhanden; dieselbe werde zur x^0 -Axe gewählt. Bei einer Drehung von π um diese Axe bleiben x_x, y_y, z_x, y_z ungeändert, z_x und x_y wechseln das Vorzeichen. Ferner folgt aus den Formeln (4), dass $B_{11} - \omega_x^2, B_{22} - \omega_y^2, B_{33} - \omega_z^2$ und B_{23}

ungeändert bleiben, hingegen B_{31} und B_{12} in $-B_{31}$ und $-B_{12}$ übergehen. Hieraus ergibt sich, dass folgende Constanten des Ansatzes (5) verschwinden müssen:

$a_{15}, a_{25}, a_{35}, a_{45}, a_{16}, a_{26}, a_{36}, a_{46}, a_{51}, a_{52}, a_{53}, a_{54}, a_{61}, a_{62}, a_{63}, a_{64}$,
 sodass man erhält:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{11} - \omega_x^0{}^2 = a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_z + a_{14}y_z, \\ B_{22} - \omega_y^0{}^2 = a_{21}x_x + a_{22}y_y + a_{23}z_z + a_{24}y_z, \\ B_{33} - \omega_z^0{}^2 = a_{31}x_x + a_{32}y_y + a_{33}z_z + a_{34}y_z, \\ B_{23} = a_{41}x_x + a_{42}y_y + a_{43}z_z + a_{44}y_z, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} B_{31} = a_{55}z_x + a_{56}x_y, \\ B_{12} = a_{65}z_x + a_{66}x_y \end{array}$$

Diese Gleichungen gelten nur für eine bestimmte Farbe, da sowohl die Lage der y^0 - und z^0 -Axe, als die Constanten a_{hk} von der Wellenlänge abhängen können.

Rhombisches System. Hier sind auch die y^0 - und z^0 -Axe zweizählige Symmetrieaxen; daraus ergibt sich durch eine der obigen analoge Erwägung, dass auch noch die 8 Constanten $a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{55}, a_{65}$ verschwinden müssen, sodass folgender Ansatz mit 12 Constanten resultirt:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{11} - \omega_x^0{}^2 = a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_x, \\ B_{22} - \omega_y^0{}^2 = a_{21}x_x + a_{22}y_y + a_{23}z_x, \\ B_{33} - \omega_z^0{}^2 = a_{31}x_x + a_{32}y_y + a_{33}z_x, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} B_{23} = a_{44}y_z, \\ B_{31} = a_{55}z_x, \\ B_{12} = a_{66}x_y. \end{array}$$

Tetragonales System. Die vierzählige Symmetrieaxe sei die z^0 -Axe, zwei von den zu ersterer senkrechten zweizähligen Symmetrieaxen seien die x^0 - und y^0 -Axe. Dann gelten zunächst die Formeln (16), in denen sich aber die Zahl der verschiedenen a_{hk} mittelst der oben erwähnten Schlussweise, angewandt auf eine Drehung von $\pi/2$ um die z^0 -Axe, vermindern lässt. Es wurde schon im ersten Abschnitte erwähnt, dass sich die Grössen $B_{11}, \dots, B_{23}, \dots$ bei einer beliebigen Drehung des Coordinatensystems gerade so transformiren, wie die elastischen Druckkräfte X_x, \dots, Y_x, \dots . Im vorliegenden Falle gilt nun dasselbe für $B_{11} - \omega_x^0{}^2, B_{22} - \omega_y^0{}^2, B_{33} - \omega_z^0{}^2, B_{23}, B_{31}, B_{12}$, weil die tetragonalen Krystalle optisch einaxig sind und somit $\omega_x^0 = \omega_y^0$ ist. Da nun diese Grössen auch ebenso wie die elastischen Druckkräfte durch x_x, \dots, y_x, \dots ausgedrückt sind, so findet hier ganz dieselbe Rechnung Anwendung, welche zur Reduction der Anzahl der Elasticitätsconstanten dient und z. B.

in Neumann's Vorlesungen über Elasticitätstheorie durchgeführt. ist.¹⁾ Es ergeben sich die Relationen:

$$a_{22} = a_{11}, \quad a_{21} = a_{12}, \quad a_{23} = a_{13}, \quad a_{33} = a_{31}, \quad a_{55} = a_{44},$$

sodass für tetragonale Krystalle folgende Formeln mit 7 Constanten gelten:

$$(17) \quad \begin{cases} B_{11} - \omega_x^0{}^2 = a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_z, & B_{23} = a_{44}y_z, \\ B_{22} - \omega_x^0{}^2 = a_{12}x_x + a_{11}y_y + a_{13}z_z, & B_{31} = a_{44}z_x, \\ B_{33} - \omega_x^0{}^2 = a_{31}x_x + a_{31}y_y + a_{33}z_z, & B_{12} = a_{66}x_y. \end{cases}$$

Reguläres System. Da bei diesem die x^0 - und y^0 -Axe der z^0 -Axe gleichwerthig sind, so muss $a_{13} = a_{31} = a_{12}$, $a_{33} = a_{11}$, $a_{66} = a_{44}$ sein, folglich, da auch $\omega_x^0 = \omega_y^0 = \omega^0$ wird:

$$(18) \quad \begin{cases} B_{11} - \omega^0{}^2 = a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{12}z_z = (a_{11} - a_{12})x_x + a_{12}\Delta, \\ B_{22} - \omega^0{}^2 = a_{12}x_x + a_{11}y_y + a_{12}z_z = (a_{11} - a_{12})y_y + a_{12}\Delta, \\ B_{33} - \omega^0{}^2 = a_{12}x_x + a_{12}y_y + a_{11}z_z = (a_{11} - a_{12})z_z + a_{12}\Delta, \\ B = a_{44}y_z, \quad B_{31} = a_{44}z_x, \quad B_{12} = a_{44}x_y, \end{cases}$$

wo Δ die cubische Dilatation ($x_x + y_y + z_z$) bedeutet.

Bei unkrystallinischen Körpern müssen die Ausdrücke für $B_{11}, \dots, B_{23}, \dots$ bei irgend einer Drehung des Coordinatensystems unverändert bleiben; daraus folgt, dass die Relation:

$$a_{44} = \frac{1}{2} (a_{11} - a_{12})$$

bestehen muss. Zwischen a_{11} , a_{12} und den Neumann'schen Grössen p , q besteht der Zusammenhang:

$$a_{11} = 2\omega^0 q, \quad a_{12} = 2\omega^0 p.$$

Hexagonales System. Die z^0 -Axe sei die sechszählige Symmetrieaxe, die x^0 -Axe eine zweizählige Symmetrieaxe der einen Art, die y^0 -Axe die darauf senkrechte der anderen Art. Es gilt dann zunächst der Ansatz (16). Bei einer Drehung des Coordinatensystems von $\pi/3$ um die z^0 -Axe müssen diese Gleichungen ungeändert bleiben; es gilt hier (und beim rhomboëdrischen Systeme) dasselbe, was beim tetragonalen System gesagt wurde, und die Rechnung findet sich in § 83 der Neumann'schen Vorlesung. Es ergeben sich folgende Formeln mit 6 verschiedenen Constanten:

1) Cf. Vorlesungen über die Theorie der Elasticität von F. Neumann, herausgegeben von O. E. Meyer. § 81.

$$19) \left\{ \begin{array}{l} B_{11} - \omega_y^2 = a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_z, \\ B_{22} - \omega_x^2 = a_{12}x_x + a_{11}y_y + a_{13}z_z, \\ B_{33} - \omega_z^2 = a_{31}x_x + a_{31}y_y + a_{33}z_z, \\ B_{23} = a_{44}y_z, \quad B_{31} = a_{44}z_x, \quad B_{12} = \frac{1}{2}(a_{11} - a_{12})x_y. \end{array} \right.$$

Alle gegen die Hauptaxe gleich geneigten Richtungen sind hier gleichwerthig.

Rhomboëdrisches System. Die z^0 -Axe sei die Hauptaxe, welche eine dreizählige Symmetrieaxe ist, die x^0 -Axe eine der zweizähligen Symmetrieaxen; die y^0 -Axe ist dann keine Symmetrieaxe, man muss daher von den Formeln (15) ausgehen. Stellt man die Bedingungen dafür auf, dass bei einer Drehung von $2\pi/3$ um die z^0 -Axe die Form jener Gleichungen unverändert bleibt, so ergeben sich die Relationen¹⁾:

$$a_{22} = a_{11}, \quad a_{21} = a_{12}, \quad a_{23} = a_{13}, \quad a_{32} = a_{31}, \quad a_{44} = a_{33}, \quad a_{66} = \frac{1}{2}(a_{11} - a_{12}), \\ a_{24} = -a_{14}, \quad a_{42} = -a_{41}, \quad a_{43} = a_{34} = 0, \quad a_{50} = a_{41}, \quad a_{60} = a_{11},$$

folglich bleiben 8 verschiedene Constanten übrig, und es wird:

$$20) \left\{ \begin{array}{l} B_{11} - \omega_x^2 = a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_z + a_{14}y_z, \\ B_{22} - \omega_x^2 = a_{12}x_x + a_{11}y_y + a_{13}z_z - a_{14}y_z, \\ B_{33} - \omega_z^2 = a_{31}x_x + a_{31}y_y + a_{33}z_z, \\ B_{23} = a_{41}x_x - a_{41}y_y + a_{44}y_z, \\ B_{31} = a_{44}z_x + a_{41}x_y, \\ B_{12} = a_{14}z_x + \frac{1}{2}(a_{11} - a_{12})x_y. \end{array} \right.$$

Anmerkung. Die in den beiden vorhergehenden Abschnitten entwickelten Formeln sind auch anwendbar zur mathematischen Behandlung der Aenderung der Wärmeleitfähigkeit krystallinischer Körper durch elastische Deformationen²⁾; an Stelle von ω_x^2 , ω_y^2 , ω_z^2 treten dann die Hauptwärmeleitungscoëfficienten h_1 , h_2 , h_3 . (Man gelangt zu diesem Resultate, indem man für die Coëfficienten in der Differentialgleichung der Wärmeleitung, d. h. für die Grössen $B_{11}, \dots, B_{23}, \dots$ lineare Functionen der Deformationen x_x, \dots, y_z, \dots einführt.)

1) Vgl. F. Neumann, l. c. § 84; dort ist die y Axe eine zweizählige Symmetrieaxe.

2) Eine solche Aenderung ist von Sénarmont an Glas und Porzellan nachgewiesen worden. Ann. de chim. et de phys. (3) 23. p. 257.

3. Verschiedene Coordinatensysteme von physikalischer Bedeutung.

Wenn man in den Gleichungen (6) bis (11) oder (12) und (13) die Grössen:

$$B_{11}, B_{22}, B_{33}, B_{23}, B_{31}, B_{12}, \omega^2 \text{ (oder } \varrho^2)$$

resp. durch $(1+x_x)^2$, $(1+y_y)^2$, $(1+z_z)^2$, y_z , z_x , x_y , $(1+\lambda)^2$ ersetzt, so bestimmen jene Gleichungen die Richtungen der Hauptdilationsachsen und die Hauptdilationen λ_x , λ_y , λ_z .

Damit nun die Gleichungen (6) mit den aus ihnen durch die vorstehende Substitution erhaltenen identisch werden, müssen die Ausdrücke für $B_{11}, \dots, B_{23}, \dots$ die Form haben:

$$B_{11} = \omega^{02} + a_1 x_x + a_2 \Delta, \quad B_{22} = \omega^{02} + a_1 y_y + a_2 \Delta, \quad B_{33} = \omega^{02} + a_1 z_z + a_2 \Delta, \\ B_{23} = \frac{1}{2} a_1 y_z, \quad B_{31} = \frac{1}{2} a_1 z_x, \quad B_{12} = \frac{1}{2} a_1 x_y.$$

Hieraus folgt, dass das optische Symmetrieaxensystem nach einer beliebigen Deformation mit dem Hauptdilationsaxensystem nur bei unkrystallinischen Körpern zusammenfällt.

Ein anderes Coordinatensystem, welches physikalische Bedeutung besitzt, wird durch die Formeln (6) bestimmt, wenn man in denselben $B_{11} - \omega_x^{02}$, $B_{22} - \omega_y^{02}$, $B_{33} - \omega_z^{02}$ an Stelle von B_{11} , B_{22} , B_{33} setzt. Nimmt man nämlich an, dass durch die Deformation analoge Wechselwirkungen zwischen den ponderablen Moleculen und Aethertheilchen hervorgerufen werden, wie diejenigen, welche Hr. Voigt in seiner „Theorie des Lichtes für vollkommen durchsichtige Medien“¹⁾ als in natürlichen doppeltbrechenden Körpern wirksam annimmt, so muss es auch ein Coordinatensystem x' , y' , z' geben, in Bezug auf welches die Differentialgleichungen der Aether-schwingungen beim Vorhandensein der durch die Deformation erregten Kräfte allein die Form annehmen würden:

$$\Gamma \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = A'_{11} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + A'_{12} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + A'_{13} \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} + \frac{\partial L'}{\partial x'}, \\ \Gamma \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} = A'_{21} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + A'_{22} \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + A'_{23} \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + \frac{\partial L'}{\partial y'}, \\ \Gamma \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = A'_{31} \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + A'_{32} \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} + A'_{33} \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} + \frac{\partial L'}{\partial z'},$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 885. 1883.

d. h. eine analoge Form, wie die auf das optische Symmetrieaxensystem bezogenen Differentialgleichungen für ein natürliches doppeltbrechendes Medium. Je nachdem man die Fresnel'sche oder die Neumann'sche Annahme über die Schwingungsrichtung macht, sind die Relationen:

$$A_{12}' = A_{13}' = A_{11}'$$

oder $A_{11}' = A_{12}' + A_{13}' - A_{23}'$ und $A_{23}' = A_{32}'$

und die analogen einzuführen. In beiden Fällen findet man durch Transformation der Differentialgleichungen, dass sich die Bestimmungsstücke des Ovaloids nach der Deformation folgendermaassen darstellen:

$$B_{11} = \frac{1}{\Gamma} \{A_{23} + A_{23}'\alpha_1'^2 + A_{31}'\beta_1'^2 + A_{12}'\gamma_1'^2\},$$

.....

$$B_{23} = \frac{1}{\Gamma} \{A_{23}'\alpha_2'\alpha_3' + A_{31}'\beta_2'\beta_3' + A_{12}'\gamma_2'\gamma_3'\},$$

.....

worin $A_{23} = \Gamma \omega_x^{02} \dots$ ist und $\alpha_1', \dots \gamma_3'$ die Richtungscosinus der Axen x', y', z' in Bezug auf das Axensystem x^0, y^0, z^0 bezeichnen. Vergleicht man diese Ausdrücke mit denjenigen unter (4), so erkennt man sofort, dass für die Richtungscos. $\alpha_1', \dots \gamma_3'$ Gleichungen gelten, welche sich von den Gl. (6) nur dadurch unterscheiden, dass $B_{11} - \omega_x^{02}, B_{22} - \omega_y^{02}, B_{33} - \omega_z^{02}$ an Stelle von B_{11}, B_{22}, B_{33} stehen. Das durch diese Gleichungen, also durch:

$$(21) \quad 0 = (B_{11} - \omega_x^{02})\beta_1'\gamma_1' + (B_{22} - \omega_y^{02})\beta_2'\gamma_2' + \dots + B_{23}(\beta_2'\gamma_3' + \beta_3'\gamma_2') + \dots$$

und die zwei analogen, bestimmte Axensystem x', y', z' kann vielleicht als das „Symmetrieaxensystem für die durch die Deformation erregten Wechselwirkungen zwischen den ponderabelen Moleculen und Aethertheilchen“ bezeichnet werden.

Dasselbe fällt mit dem Hauptdilationsaxensystem nur dann zusammen, wenn die Gleichungen (5) die specielle Form haben:

$$B_{11} - \omega_x^{02} = a_1 x_x + a_2 A, \quad \dots, \quad B_{23} = \frac{a_1}{2} y_z, \quad \dots,$$

also nothwendiger Weise ebenfalls nur für unkrystallinische Körper, bei denen es zugleich mit dem Axensystem x, y, z identisch ist. (Letztere Identität ist überhaupt vorhanden, wenn $\omega_x^0 = \omega_y^0 = \omega_z^0$ ist, also auch für reguläre Krystalle.)

Damit das Axensystem x', y', z' mit dem Hauptdruckaxensystem zusammenfiele, — was indessen von vornherein unwahrscheinlich ist —, müssten die Constanten a_{hk} den Elasticitätsconstanten c_{hk} mit entsprechenden Indices proportional sein.

II. Experimenteller Theil.

1. Die Beobachtungsmethoden.

A. Compressionsapparat. Um für einige krystallinische Körper die Constanten a_{hk} zu bestimmen und die Theorie zu prüfen, wurden rechtwinklige Parallelepipeda (von 13 mm Länge und 2 bis 5 mm Breite und Dicke) aus den zu untersuchenden Substanzen vermittelt eines im Folgenden zu beschreibenden einfachen Apparates einem einseitigen Drucke unterworfen. Der Apparat bestand aus einem einarmigen Hebel aus Stahl von etwa 1 cm Breite und Dicke und 13 cm Länge, welcher um zwei in einem Messingklotze befestigte Spitzen drehbar war. Dieser Messingklotz diente in seinem horizontalen Theile als Unterlage der unter den Hebel gestellten Krystallprismen und war selbst auf einem Klotze von Eichenholz derart festgeschroben, dass das freie Ende des Hebels über den letzteren hinausragte und also durch angehängte Gewichte belastet werden konnte. Die Krystallprismen wurden unter einen der Drehaxe parallelen Einschnitt auf der Unterseite des Hebels gestellt, dessen Abstand von der Drehaxe sich zu dem Hebelarme, an welchem die Belastung wirkte, wie 29,5:120 verhielt. In den erwähnten Einschnitt wurde zunächst ein dachförmiges Stahlstück eingesetzt, unter dessen horizontale untere Fläche eine 1 bis 2 mm dicke Platte von Zinn oder bei geringen Belastungen von Blei gelegt und hierunter erst das Krystallprisma gestellt, dessen unmittelbare Unterlage ebenfalls von einer Zinn- oder Bleiplatte gebildet wurde. Durch diese Vorrichtung sollte eine möglichst gleichmässige Vertheilung des Druckes bewirkt werden; allein es liess sich doch nicht vermeiden, dass die Compression an den beiden Rändern der Krystallplatte oft erheblich verschieden war. Später wurde daher (beim Quarz) eine andere Art der Aufstellung angewendet, welche sich besser bewährte. Dieselbe bestand darin, dass auf die beiden Endflächen des Krystallprismas kleine

Stahlstücke von gleichem Querschnitte, wie das Prisma, aufgekittet wurden, von denen das eine in einer Schneide, das andere in einer Spitze endigte; letztere wurde in den Einschnitt des Hebels eingesetzt. Um die etwa vorhandenen Unebenheiten auszugleichen, waren zwischen die Endflächen des Krystallprismas und die Stahlstücke dicke Stanniolblättchen gelegt.

Da die Aufstellung der Krystallprismen aus freier Hand geschah, so war es schwierig, die Längsaxe genau vertical und die eine Seitenfläche senkrecht zu den hindurchgehenden Lichtstrahlen zu stellen. Die richtige Stellung jener Seitenfläche wurde an dem reflectirten Bilde eines in der horizontalen Sehlinie angebrachten Diaphragmas erkannt. Die geringe Neigung der Längsrichtung der Krystallprismen gegen die Verticale, welche nicht zu vermeiden war, namentlich da sie bisweilen während der Beobachtungen entstand, kann übrigens keine erheblichen Fehler zur Folge gehabt haben, da in denjenigen Fällen, wo dies zu befürchten war, besondere Maassregeln zur Aufhebung dieses Fehlers getroffen wurden. Ausserdem bestand doch immer eine gewisse Unsicherheit darüber, ob die Druckrichtung wirklich genau vertical war.

Beobachtet wurden: 1. mit Hülfe eines Babinet'schen Compensators die relative Verzögerung, welche die beiden in der Beobachtungsrichtung, d. h. horizontal und senkrecht zur Längsrichtung des Hebels, durch die Krystallprismen hindurchgehenden Strahlen bei der Compression erfuhren, 2. mittelst der Fresnel-Arago'schen, auf der Verschiebung von Beugungstreifen beruhenden Methode die absoluten Verzögerungen jener Strahlen, 3. durch Einstellung des polarisirenden und analysirenden Nicols die Lage der Schwingungsrichtungen in den comprimierten Prismen, 4. in einigen Fällen (besonders bei der senkrecht zur optischen Axe geschnittenen Quarzplatte) die Aenderungen der Interferenzcurven im convergenten polarisirten Lichte.

B. Beobachtungen der relativen Verzögerungen. Als Polarisator diente ein an der Hinterseite des Holzklotzes befestigtes, sehr grosses Nicol'sches Prisma, welches mit einem Theilkreise, an dem $6'$ abgelesen werden konnten, um eine horizontale, den einfallenden Lichtstrahlen parallele Axe dreh-

bar war; der Analysator wurde von einem kleineren, in einem an der Vorderseite des Klotzes befestigten Theilkreise drehbaren Nicol gebildet. Dieser Polarisator und Analysator wurden auch bei den Beobachtungen der Schwingungsrichtungen benutzt. Zwischen dem Polarisator und dem Hebel wurde in einem Abstände von etwa 15 cm vom Analysator auf dem Holzklotze der Compensator befestigt; letzterer war ein Babinet'scher Compensator der älteren Construction, d. h. er bestand nur aus zwei entgegengesetzt liegenden Quarzkeilen. Einer der schwarzen Streifen, welche bei gekreuzten oder parallelen Nicols im homogenen Lichte das Gesichtsfeld des in deutlicher Sehweite befindlichen Compensators durchzogen, wurde auf die Mitte eines schmalen verticalen Spaltes eingestellt, welcher von zwei vor der Oeffnung des Compensators verschiebbaren Blechen begrenzt wurde. Da die schwarzen Streifen nicht genau parallel den Spalträndern waren, so musste bei jeder Beobachtungsreihe eine bestimmte, durch einen horizontalen feinen Draht bezeichnete Stelle des Spaltes fixirt werden. Bei diesen Beobachtungen wurde, wo nichts über die Lichtsorte angegeben ist, stets Natriumlicht angewandt; dem Abstände zweier benachbarter schwarzer Streifen, also dem Gangunterschiede von einer Wellenlänge ($= 589,2 \cdot 10^{-6}$ mm), entsprachen dann 23,77 Umdrehungen der die Quarzkeile gegeneinander verschiebenden Mikrometerschraube, deren Trommel in 100 Theile getheilt war. Die Einstellung des schwarzen Streifens war, wenn derselbe völlig scharf erschien, etwa bis auf zwei Trommeltheile genau; wenn aber eine doppeltbrechende Krystallplatte vor dem Compensator stand, durch welche die Schärfe des Streifens meistens sehr beeinträchtigt wurde, so war die Genauigkeit erheblich geringer. — Die Nicols wurden so gestellt, dass ihre Polarisationsebenen gegen die Verticalebene unter $\pm 45^\circ$ geneigt und zu einander entweder senkrecht oder parallel waren. Wenn die Schwingungsrichtungen im Compensator genau mit denjenigen in dem comprimirtten Krystallprisma zusammenfallen, so ist die durch die Compression erzeugte relative Verzögerung Δ , in Theilen einer ganzen Wellenlänge ausgedrückt, d. i. die beobachtete Verschiebung des Compensatorstreifens dividirt durch den Streifenabstand, durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\Delta = D \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) - D^0 \left(\frac{1}{\lambda_1^0} - \frac{1}{\lambda_2^0} \right),$$

oder, wenn $\omega_1 + \omega_1^0 = 2\omega_1^0$; $\omega_2 + \omega_2^0 = 2\omega_2^0$ gesetzt, also $\omega_1 - \omega_1^0$ gegen ω_1^0 , $\omega_2 - \omega_2^0$ gegen ω_2^0 vernachlässigt wird:

$$(22) \quad \Delta = \frac{D^0 p}{2\lambda} \left\{ \frac{\omega_1^0{}^2 - \omega_1^2}{p v^2} n_1^0{}^3 - \frac{\omega_2^0{}^2 - \omega_2^2}{p v^2} n_2^0{}^3 \right\} + \frac{D - D^0}{\lambda} (n_1^0 - n_2^0).$$

Darin bezeichnet p den ausgeübten Druck, bezogen auf 1 qmm, v , λ die Lichtgeschwindigkeit und Wellenlänge in Luft, ω_1^0 , λ_1^0 und ω_2^0 , λ_2^0 die Geschwindigkeiten und Wellenlängen der beiden in der Beobachtungsrichtung durch das Krystallprisma hindurchgehenden Wellen vor der Compression, ω_1 , λ_1 und ω_2 , λ_2 dieselben Grössen nach der Compression, n_1^0 und n_2^0 die ursprünglichen Brechungscoefficienten jener beiden Wellen, D^0 und D die Dicke des Krystallprismas in der Beobachtungsrichtung vor resp. nach der Compression. — Wenn aber die Schwingungsrichtungen im Krystallprisma von denjenigen im Compensator um einen kleinen Winkel ε abweichen, so ist obiger Ausdruck Δ nicht direct gleich der am Compensator beobachteten Verzögerung Δ' , sondern es ist, wie die Rechnung ergibt, näherungsweise:

$$\Delta = \Delta' + \frac{2\varepsilon \sin \Delta'}{\sin 2\varphi},$$

wobei φ den Winkel zwischen der Schwingungsrichtung im Polarisator und der horizontalen Schwingungsrichtung im Compensator bedeutet. Den durch diese Abweichung der Schwingungsrichtungen entstehenden Fehler kann man nun dadurch eliminiren, dass man jede Beobachtung wiederholt, nachdem man den Polarisator und Analysator um 90° gedreht hat, und aus den beiden beobachteten Werthen von Δ' das Mittel nimmt; denn hierbei fällt das Glied $2\varepsilon \sin \Delta' / \sin 2\varphi$, welches in beiden Fällen nahezu gleichen absoluten Werth und entgegengesetztes Vorzeichen hat, fort, und man erhält also sehr annähernd den wahren Werth von Δ . — Ueber die Beobachtungen selbst ist noch Folgendes zu bemerken. Es wurde bei jedem Krystallprisma an drei Stellen (in der Mitte und in der Nähe des linken und rechten Randes) beobachtet, um die Ungleichförmigkeit der Compression möglichst zu eliminiren;¹⁾ ferner

1) Das arithmetische Mittel aus den an jenen drei Stellen beobachteten Verzögerungen ist natürlich nur dann der wahre, dem in Rechnung

wurden an jeder Stelle die Messungen bei zwei um 90° verschiedenen Stellungen der Nicols und bei zwei verschiedenen Belastungen ausgeführt, und zwar wurden vor der Compression, bei jenen zwei Belastungen und nach Entlastung je acht Einstellungen des schwarzen Streifens gemacht. Endlich wurde jede solche Beobachtungsreihe, die nahe an 200 Einstellungen erforderte, noch einmal oder mehrmals nach neuer Aufstellung des Krystallprismas wiederholt.

C. Messung der absoluten Verzögerungen. Hierbei wurde die schon mehrfach, z. B. von Neumann, benutzte, auf der Verschiebung von Beugungsstreifen beruhende Methode angewandt. Das einfallende Licht ging zunächst durch ein Spaltrohr und dann durch zwei nahezu gleich dicke Krystallplatten, welche so nebeneinander standen, dass sowohl ihre Vorder- und Hinterflächen als die Schwingungsrichtungen der hindurchgehenden Lichtwellen parallel waren; um in dieser Stellung erhalten zu werden, waren dieselben zwischen zwei durch Gummiringe zusammengehaltene Glasstreifen gelegt. Diejenige von diesen Krystallplatten, welche comprimirt werden sollte, war in der früher beschriebenen Weise aufgestellt, während die andere, welche zur Compensation des Gangunterschiedes diente, oben und unten frei war. Die beiden aus den Krystallplatten austretenden parallelen Lichtbündel fielen auf die beiden verticalen, circa 1 mm breiten Beugungsspalten; letztere waren in einem gegenseitigen Abstände von $8\frac{1}{2}$ mm in einem Stanniolschirm angebracht, welcher auf einem auf dem Holzklotz stehenden Tischchen aufgestellt war. Da bei dem beträchtlichen gegenseitigen Abstände der Spalten, welcher wegen der Aufstellung der Krystallprismen neben einander nothwendig war, die Beugungsstreifen zu gedrängt und fein geworden wären, so wurde hinter dem Beugungsschirme eine Doppelglasplatte aufgestellt, durch welche die aus den Spalten austretenden Lichtbündel einander genähert wurden. Diese Doppelplatte war von Reinfelder und Hertel in München aus einer vollkommen planparallel geschliffenen Glasplatte von

gebrachten Drucke p entsprechende, Werth, wenn der auf die Endflächen des Prismas ausgeübte Druck eine lineare Function der Coordinaten ist; meistens war letzteres annähernd der Fall.

10 mm Dicke hergestellt und bestand aus zwei unter rechtem Winkel zusammenstossenden Theilen, deren Berührungsfläche vertical und parallel den zwei einfallenden Strahlenbündeln gestellt wurde, und zwar so, dass letztere die zwei Theile der Doppelplatte in gleichen Entfernungen von der Berührungsfläche trafen. Das Tischchen, welches die Doppelplatte und den Beugungsschirm trug, war mittelst einer feinen Schraube drehbar, man konnte daher durch die bei der Drehung wie ein Jamin'scher Compensator wirkende Doppelplatte den geringen Gangunterschied, welchen die beiden Strahlenbündel nach dem Durchgang durch die Krystallplatten auch vor der Compression der einen meistens besaßen, wieder aufheben, was für die Beobachtung mit weissem Lichte durchaus nothwendig war. Nach dem Durchgang durch die Doppelglasplatte hatten die homologen Strahlen der beiden Bündel einen gegenseitigen Abstand von ca. 1,4 mm und traten so in das Beobachtungsfernrohr ein; der Winkelabstand zweier benachbarter dunkler Streifen des Diffractionsbildes musste daher für Natriumlicht $4\frac{1}{3}$ betragen. Das Fernrohr war mittelst einer Mikrometerschraube um eine verticale Axe drehbar; einem Umfange der in 100 Theile getheilten Trommel entsprach eine Drehung von circa 10'. — Um eine genügende Intensität zu erhalten, waren die Beugungsspalten über 1 mm breit gemacht, weshalb das helle Mittelbild des primären Beugungsspectrums nur zwei secundäre dunkle Streifen enthielt. Aus demselben Grunde musste mit weissem Lichte beobachtet werden, und zwar wurde eine Argandlampe benutzt. Es wurde immer einer der beiden mittelsten nahezu ganz schwarzen Streifen auf das Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohres eingestellt, und zur Ermittlung der einer Wellenlänge entsprechenden Drehung der Winkelabstand jener beiden Streifen gemessen. In Betreff der in Rechnung zu bringenden Wellenlänge herrschte daher eine gewisse Unsicherheit; es zeigte sich jedoch durch Vergleichung der absoluten Verzögerungen zweier Wellen mit deren vermittelt des Compensators gemessenen relativen Verzögerung, dass man bei der Berechnung mit genügender Genauigkeit die Wellenlänge des Natriumlichtes benutzen konnte. Der Streifenabstand war, wahrscheinlich wegen verschiedener Stellung der Doppelglasplatte, nicht constant und musste da-

her nach jeder Beobachtungsreihe neu bestimmt werden; die Messung desselben war übrigens erheblich unsicherer, als diejenige der Verschiebung der Streifen beim Comprimiren der Krystallplatten. — Da eine ganz geringe Drehung der Doppelglasplatte schon einen sehr bedeutenden Gangunterschied der beiden Strahlenbündel hervorrief, so mussten während der Beobachtungen alle Erschütterungen sorgfältig vermieden werden. Es wurde daher auch nach jeder Beobachtungsreihe durch besondere Versuche diejenige Verschiebung der Beugungsstreifen ermittelt, welche etwa infolge der mit dem Belasten und Entlasten des Hebels verbundenen Veränderung der Wirkung des Gewichtes auf den Holzklotz und auf die Stellung der Doppelplatte eintreten konnte; diese Verschiebung erwies sich jedoch immer als sehr gering. — Eine Hauptschwierigkeit bei den Messungen der absoluten Verzögerungen bestand darin, dass die gegenüberliegenden Flächen der zu untersuchenden Krystallparallelepipeda niemals vollkommen parallel waren, und dass ihre gegenseitige Neigung, die meistens einige Minuten betrug, bei keinem Paare der vorhandenen Prismen genau gleich gross war. Hierdurch wurde die Deutlichkeit der Beugungsstreifen sehr beeinträchtigt, und mit mehreren Prismen konnten überhaupt keine solchen erhalten werden.

Entsprechend den beiden sich in den Krystallprismen fortpflanzenden Wellen erhält man bei doppeltbrechenden Krystallen von vornherein, bei einfachbrechenden nach der Compression zwei senkrecht gegeneinander polarisirte Beugungsspectren. Um dieselben zu trennen oder, wenn sie nicht übereinander fielen, möglichst deutlich zu machen, wurde vor das Ocular des Fernrohres ein als Analysator dienendes Nicol'sches Prisma gestellt. Damit die Verzögerung an verschiedenen Stellen des comprimirtten Prismas gemessen werden konnte, ohne dass das Tischchen mit dem Beugungsschirme seitlich verschoben werden musste, wurde zwischen den Krystallprismen und dem Beugungsschirme eine dicke gut planparallel geschliffene Glasplatte aufgestellt, durch deren Drehung um eine verticale Axe die beiden durch die Krystallprismen hindurchgegangenen Strahlenbündel beliebig seitlich verschoben werden konnten. Bei jedem Prisma (und womöglich auf jedem Flächenpaare desselben) wurde an drei Stellen (linker Rand, Mitte, rechter Rand) beobachtet,

und zwar wurde der Hebel je fünf- bis sechsmal abwechselnd belastet und entlastet, wobei wieder jedesmal fünf Einstellungen gemacht wurden. Nachdem für eine Stelle des Prismas und für eine Stellung des Analysators diese Beobachtungsreihe vollendet war, wurde immer der Streifenabstand gemessen. Es wurde hier nur eine Belastung angewandt, da diese Beobachtungen sehr zeitraubend waren, und da auch die Proportionalität der Verzögerungen mit dem Drucke durch die Compensatorbeobachtungen hinreichend erwiesen zu sein schien.

Die Verschiebung der Beugungsstreifen bei der Compression der Krystallprismen geschah in allen Fällen in demjenigen Sinne, welcher (wie an der Richtung der durch eine Drehung der Doppelglasplatte verursachten Verschiebung erkannt wurde) einer Verzögerung entsprach. — Bezeichnet man die durch den Streifenabstand dividirte Verschiebung, welche durch den Druck p verursacht wird, mit δ , so ist

$$(23) \quad \delta = \frac{D^0 p n^0 \delta_1}{2\lambda} \cdot \frac{\omega^0 \delta_1 - \omega^2}{p v^2} + \frac{D - D^0}{\lambda} (n^0 - 1),$$

wobei die Bezeichnungen die früher erläuterten sind und auch dieselbe Vernachlässigung gemacht ist.

In denjenigen Fällen, wo ausser den absoluten Verzögerungen δ_1, δ_2 der beiden Wellen auch durch Beobachtungen mit dem Compensator die relative Verzögerung $\Delta = \delta_1 - \delta_2$ bestimmt war, wurden $(\omega_1^0 \delta_1 - \omega_1^2)/p v^2$ und $(\omega_2^0 \delta_2 - \omega_2^2)/p v^2$ aus dem auf letztere Weise gefundenen Werthe von $\delta_1 - \delta_2$ und dem Verhältniss $\delta_1 : \delta_2$ berechnet, weil dadurch die oben erwähnte zweifelhafte Verfügung über λ vermieden wird. Man erhält dann zur Berechnung von $C' = (\omega_1^0 \delta_1 - \omega_1^2)/p v^2$ und $C'' = (\omega_2^0 \delta_2 - \omega_2^2)/p v^2$ die Gleichungen:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} C' n_1^0 \delta_1 - C'' n_2^0 \delta_2 = \frac{2}{D^0 p} \{ \lambda \Delta - (D - D^0) (n_1^0 - n_2^0) \}, \\ C' n_1^0 \delta_2 - C'' n_2^0 \delta_1 = \frac{2(D - D^0)}{D^0 p} \{ \delta_1 (n_2^0 - 1) - \delta_2 (n_1^0 - 1) \}. \end{array} \right.$$

Statt $D^0 p$ kann auch P/B gesetzt werden, wo B die mittlere Breite des Krystallprismas und P der gesammte auf letzteres wirkende Druck ist; bezeichnet Q das angehängte Gewicht, so ist $P = 120/29,5 \cdot Q$.

D. Bestimmung der Schwingungsrichtungen. Bei einigen Platten musste nach der Theorie in Folge der Compres-

sion eine Drehung der Schwingungsrichtungen eintreten. Um diese zu beobachten, wurde vor und nach der Belastung der wie bei den Compensatorbeobachtungen angebrachte Polarisator so eingestellt, dass bei jeder Stellung des Analysators die Krystallplatte möglichst gleich hell erschien, wie das Gesichtsfeld neben derselben. Diese Einstellung liess sich bis auf etwa 3 genau ausführen; sie wurde bei jeder Platte unter verschiedenen Umständen, z. B. bei verschiedenen Aufstellungen der Platte, wiederholt. Es wurde dabei theils Natriumlicht, theils das weisse Licht einer Argandlampe benutzt. — Bei den Flussspathprismen wurden die Schwingungsrichtungen nach der Compression durch Einstellung des Polarisators auf grösste Dunkelheit bestimmt.

E. Beobachtung der Interferenzcurven im convergenten Lichte. Diese Beobachtungsmethode wurde hauptsächlich bei senkrecht zur optischen Axe geschnittenen Quarzplatten angewandt und diente nur zur Controlle der Compensatormessungen. Ausgeführt wurden diese Beobachtungen mit einem Nörremberg'schen Apparate, in welchem ein Ocularmikrometer zur Messung der Durchmesser der Interferenzcurven angebracht war, die Krystallplatte stand in der gewöhnlichen Weise unter dem Hebel, und es wurden die Durchmesser der zwischen gekreuzten Nicols sichtbaren schwarzen Interferenzcurven vor und nach der Compression gemessen. Dabei ist der am Ocularmikrometer abgelesene Durchmesser d proportional dem sinus des wahren, in Winkelmaass ausgedrückten Halbmessers ϑ , also $d = \rho \sin \vartheta$, wo ρ eine Constante ist, welche sich aus der Dicke und den Brechungscoëfficienten der Platte und aus den vor der Compression gemessenen Durchmessern berechnen lässt.

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

IX. Leitungsfähigkeit gelatinehaltiger Zinkvitriollösungen; von Ch. Lüdeking.¹⁾

Im Jahre 1883 hat Hr. Eilh. Wiedemann²⁾ nach Versuchen mit Lösungen von Zinksulfat in Wasser und Glycerin

1) Mitgetheilt vom Hrn. Verfasser aus den Berichten der St. Louis Academy.

2) E. Wiedemann, Wied. Ann. 20. p. 537. 1883.