

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXX.

I. *Ueber die Schwingungen fallender Tropfen;
von Philipp Lenard.*

(Hierzu Taf. III Fig. 1—3b.)

1. Im Folgenden ist versucht, aus den ellipsoidischen Schwingungen frei fallender Tropfen, durch welche Savart¹⁾ zuerst die Bäuche und Knoten der zerfallenen Wasserstrahlen erklärte, die Magnus stroboskopisch beobachtete²⁾ und Lord Rayleigh³⁾ berechnete, die Oberflächenspannungen zu finden.

Die Veranlassung zu dieser Arbeit gab mir eine Aufforderung des Hrn. Geheimrath v. Helmholtz, die Oberflächenspannungen von Flüssigkeiten auf eine neue Art zu messen, und ich verfiel auf jene Schwingungen, weil man erwarten konnte, die zwei Hauptschwierigkeiten solcher Messungen, die uns Prof. Quincke in einer langen Reihe von Untersuchungen über Capillarscheinungen⁴⁾ kennen gelehrt hatte, zu umgehen: einmal den Randwinkel, dessen Abhängigkeit von ausserordentlich dünnen, variablen Schichten an den Oberflächen der festen Körper ihn bei nicht vollständig benetzenden Flüssigkeiten so unbeständig macht, und zweitens die Abnahme der Spannung der Oberflächen in der Zeit zwischen Bildung und Messung derselben. Ein Randwinkel kommt in der That bei den Schwingungen dieser frei fallen-

1) Savart, Ann. de chim. et de phys. **53**. p. 337. 1833.

2) Magnus, Pogg. Ann. **95**. p. 1. 1855 u. **106**. p. 1. 1859.

3) Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. **29**. p. 71. 1879.

4) Quincke, Pogg. Ann. **105**. p. 1. 1858; **134**. p. 156. 1868; **135**. p. 621. 1868; **137**. p. 402. 1869; **138**. p. 141. 1869; **139**. p. 1. 1870; **160**. p. 337 u. 560. 1877. Wied. Ann. **2**. p. 145. 1877. (Das Verständniß dieser Untersuchungen ergibt sich nur im Zusammenhange aller.)

den Tropfen gar nicht in Betracht, und ihre immer frisch sich bildende Oberfläche kann nach einer beliebig feststellbaren kurzen Zeit beobachtet werden, was ein besonderer Vorzug dieser Art der Beobachtung ist und sie insbesondere bei Flüssigkeiten, deren Spannung sich stark ändert, interessant macht; aber es ist eigenthümlich, dass die Veränderlichkeit bei dieser Bewegungserscheinung von Oberflächen sehr stark hervortritt, sodass sich in dieser Beziehung meine Erwartung nicht ganz bestätigt hat. Umsoweniger darf ich es hier unerwähnt lassen, dass Prof. Eötvös durch Einschmelzen in Glaskugeln, aus denen die Luft durch Kochen ausgetrieben wurde, die Spannung des Wassers ganz constant erhalten hat. Seine Untersuchung¹⁾, welche vor nicht langer Zeit erst in diesen Annalen im Auszuge erschien, war mir vordem leider unbekannt.

2. Sei die Form eines freien Tropfens zu irgend einer Zeit t gegeben als Rotationsfläche durch den Meridianschnitt, dessen Radiusvector r als Function des Polarwinkels Θ entwickelt sei nach Kugelfunctionen $P_n(\cos \Theta)$:

$$r = a_0 + a_1 P_1(\cos \Theta) + a_2 P_2(\cos \Theta) + \dots + a_n P_n(\cos \Theta) + \dots,$$

und angenommen, dass sämtliche Grössen $a_1, a_2 \dots a_n, \dots$, welche die Amplituden bestimmen und Functionen der Zeit sind, gegen a_0 verschwindend klein bleiben, so findet Lord Rayleigh in der schon citirten Untersuchung:

die potentielle Energie der Oberfläche

$$P = 2\pi\alpha \sum (n-1)(n+2)(2n+1)^{-1} a_n^2 \text{ und}$$

die kinetische Energie der Massentheile

$$K = 2\pi\sigma a^3 \sum (2n+1)^{-1} n^{-1} \left(\frac{da_n}{dt}\right)^2,$$

worin α die Spannung längs eines Streifens der Oberfläche von der Breite Eins, a den Radius einer Kugel, die das Volumen des Tropfens hat, und σ seine Dichte bedeutet. Daraus folgt: 1. Da keine Producte verschiedener a_n und da_n/dt in P und K vorkommen, dass die Schwingungen, die den einzelnen

1) Eötvös, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*. 3. p. 55. *Wied. Ann.* 27. p. 448. 1886.

Kugelfunctionen entsprechen, unabhängig voneinander geschehen; ähnlich also den Partialschwingungen einer Saite nach einzelnen trigonometrischen Functionen; 2. nachdem $a_n = \cos(2\pi(t/T) + \varepsilon)$ gesetzt ist, aus dem Princip der Erhaltung der Energie

$$\frac{dP}{dt} + \frac{dK}{dt} = 0,$$

die Periode der Schwingungen nach n -ten Kugelfunctionen:

$$(1) \quad T_n = \sqrt{\frac{3\pi}{n(n-1)(n+2)} \cdot \frac{p}{g \cdot \alpha}};$$

p ist das Tropfengewicht, g die Beschleunigung.

$n = 1$ gibt keine Bewegung; $r = a_0 + a_1 P_1(\cos \Theta) = a_0 + a_1 \cos \Theta$ bestimmt eine Kugel.

$n = 2$ liefert die langsamsten Schwingungen, sie sind ellipsoidisch, denn $r = a_0 + a_2 P_2(\cos \Theta) = a_0 + a_2 (\frac{3}{2} \cos^2 \Theta - \frac{1}{2})$ ist sehr nahe die Gleichung einer Ellipse. Lord Rayleigh hat die Dauer dieser Schwingungen an den Tropfen eines Wasserstrahls in einem Versuch gemessen; dieselbe Zeit aus dem Tropfengewicht und der Oberflächenspannung $\alpha = 8,1 \text{ mg/mm}$ berechnet ergab ihm einen etwas abweichenden Werth; Lord Rayleigh schreibt diese Abweichung der übergrossen Amplitude zu.

$n = 3, 4, \dots$ entsprechen raschere Schwingungen, höhere Partialschwingungen zur ellipsoidischen, die aber unharmonisch sind, denn sie stehen in keinem rationalen Verhältniss der Dauer mit ihr. Die Formen, welche der Tropfen bei $n = 3$ durchläuft, sind durch $r = a_0 + a_3 (\frac{5}{2} \cos^3 \Theta - \frac{3}{2} \cos \Theta)$ gegeben, Fig. 1 stellt sie aus der einen Hälfte der Schwingung dar, eine halbe Schwingungsdauer später, nachdem die Gleichgewichtskugel durchlaufen, ist nur Oben und Unten vertauscht, also die Zeichnung verkehrt zu betrachten.

3. Die Objecte meiner Beobachtungen bilden nicht Tropfen eines Strahls, sondern solche, die von einer verticalen Röhre mit kreisförmiger Mündung einzeln abfallen. Dieselben erfordern weniger Flüssigkeit, schwingen in weit kleineren Amplituden als jene, und es lässt sich auch ihr Gewicht mit Leichtigkeit genau bestimmen.

Es ist nöthig, dass wir zuerst untersuchen, welchen Anstoss zu Schwingungen die Tropfen beim Abfall erhalten, und welche der Partialschwingungen dadurch zu Stande kommen; ich beschreibe in diesem Abschnitt die zur Beantwortung dieser Fragen angewandten Apparate.

Das beste Mittel zur Beobachtung ist der electrische Funke; vom hellen Hintergrund eines zwischen Funken und Tropfen gestellten durchscheinenden Schirms heben sich die schwarzen Contouren der Tropfen aufs schärfste ab. Stellt man den Interruptor einer Inductionsrolle so ein, dass er soviel Stromunterbrechungen in der Zeiteinheit gibt, als Tropfen abfallen, oder etwas mehr oder weniger, so beleuchten die Funken immer dieselbe, oder kurz vorübergehende oder einander nachfolgende Phasen der Erscheinung, sodass das Auge den Eindruck hat, als ob der Tropfen vor dem Schirm schwebend bliebe oder sich langsam aufwärts oder abwärts bewegte, und man die Veränderungen seiner Form leicht verfolgen kann. Ein merkwürdiger Anblick ist es, zu sehen, wie der Tropfen, sich aufwärts bewegend, alle Formen langsam rückwärts durchläuft, wie sich ihm von der Röhre der Flüssigkeitsfaden entgegenstreckt, ihn wieder aufnimmt, und er an der Röhre hängen bleibt. Das Auge erträgt bei solchem continuirlichen Verlauf der Erscheinung leicht weit grössere Zeitintervalle von einem Funken oder Tropfen bis zum nächsten als die Dauer eines Lichtdruckes währt, $\frac{1}{8}$ Secunde, ohne den dunklen Zwischenraum zu verspüren, wenn die Aufmerksamkeit nicht besonders auf ihn gerichtet ist.

In grösserer Tiefe unter der Röhre reicht dieses Beobachtungsmittel nicht mehr aus, da ist die Fallgeschwindigkeit schon so gross, dass die kleinste Unregelmässigkeit im Unterbrecher, verursacht durch das frühere oder spätere Abreissen des Quecksilberfadens, den selbst ein Platinstift immer nach sich zieht¹⁾, schon ein bedeutendes scheinbares Hüpfen des Tropfens verursacht, was die Wahrnehmung der Formen sehr erschwert und das Auge angreift. Deswegen habe ich noch eine andere Einrichtung angewandt, die Tropfen zu be-

1) Merkwürdiger Weise zieht der Platinstift nur dann das Quecksilber nach sich, wenn Strom durchgeht.

leuchten, welche auch zugleich beweisen wird, dass die eben erwähnte Unregelmässigkeit nicht an dem Abfall der Tropfen selber, der mit grosser Regelmässigkeit bei einem Tropfen genau wie beim nächsten vor sich geht, sondern nur vom Quecksilberunterbrecher herrührt. Es wurde nämlich durch die fallenden Tropfen selbst der primäre Strom des Inductoriums unterbrochen und durch den Funken des Inductionsstromes der nächste, höhere, nachfolgende Tropfen beleuchtet. Der kleine Apparat, der hierzu in den primären Stromkreis eingeschaltet wurde, bestand aus einem ca. 20 cm langen federnden horizontalen Stahlstreifen, am einen Ende befestigt, am anderen Ende eine Korkplatte tragend, auf die die Tropfen auffallen; nahe diesem Ende mit der Korkplatte ist an den Stahlstreifen noch ein aufwärts gerichteter, etwa 1 mm dicker, flach endender Platinstift gelöthet, den er gegen eine amalgamirte Kupferplatte drückt. Stahlstreifen und Kupferplatte sind an der unteren Fläche einer Holzleiste befestigt; durch den Streifen und Stift tritt der Strom ein, durch die Kupferplatte aus. Jeder auffallende Tropfen gibt der Feder einen Stoss nach abwärts, entfernt so auf einen Augenblick den Platinstift von der amalgamirten Platte und lässt damit einen Funken im secundären Stromkreis entstehen.

Durch diese Funken beleuchtet, erscheint jeder Tropfen an der Stelle und in der Form des vorhergehenden, und man hat es so durch Höher- und Tieferstellen des Unterbrechers in der Gewalt, jede beliebige Phase zur Beobachtung festzuhalten.

Gebraucht man die Vorsicht, die Kupferplatte nicht mit zu viel Quecksilber zu bedecken und die Unterbrechungsstelle zur Vermeidung von Erhitzung durch den Extrastromfunken unter Wasser zu bringen, so kann man den Tropfen ganz gut an das Fadenkreuz eines Fernrohres bringen, um durch die Constanz seiner Höhe alle Einflüsse zu untersuchen, welche die Tropfenbildung unregelmässig machen können.

Es zeigt sich, dass bei Anwendung des gleich zu beschreibenden Ausflussrohres, wenn man mit der Tropfengrösse über ein gewisses Maass nicht hinausgeht und Erschütterungen vermeidet, nur kleine Schwankungen der Höhe

stattfinden, während die Formen völlig beständig wiederkehren. Die Empfindlichkeit steigert sich natürlich mit der Tiefe, in der man beobachtet, sodass man mehr als 1 m unter dem Aufflussrohre Schwankungen von mehreren Millimetern kaum vermeiden kann. Zu grosse Tropfen, Wassertropfen von einem Rohr mit sechs und mehr Millimetern Durchmesser, lassen zu heftige Schwingungen beim Abreissen in dem nachströmenden Flüssigkeitstheil zurück, welche dann auf das frühere oder spätere Abreissen des nächsten Tropfens von Einfluss sind. Ueberhaupt hat sich ergeben, dass grosse Tropfen auch aus vielen anderen Gründen zu genauen Messungen ungeeignet sind.

Damit die Tropfen genaue Rotationskörper mit vertical bleibenden Axen werden, ist es nöthig, dass nicht nur die Ausflussöffnung ein horizontaler Kreis sei, sondern auch die Röhre, deren Mündung sie bildet, die Flüssigkeit in genau verticaler Richtung zufließen lasse. Um ein geeignetes Ausflussrohr zu erhalten, zog ich ein Glasrohr, das kreisförmigen Querschnitt und überall gleich dicke Wand hatte, so aus, dass es sehr dünnwandig und von dem verlangten Durchmesser wurde, und schnitt es an der regelmässigsten Stelle entzwei. Der entstandene Querschnitt steht nicht genau genug senkrecht auf der Röhrenaxe und ist überhaupt nicht eben. Um beides zugleich einfacher und sicherer als durch Abschleifen zu erreichen und auch vollständige Benetzung zu sichern, beschnitt ich ein Stück feines ungeleimtes Seidenpapier mit scharfem Messer und Lineal geradlinig und wickelte es um das Röhrenende so in einigen Windungen herum, dass es die Röhre etwas verlängerte, und eine Windung die andere genau deckte; darauf wurde das Papier am oberen Theile festgebunden. Die so erhaltene Röhre, *p*, Fig. 2 auch Fig. 3, braucht nur mit Hülfe eines Bleiloths, indem man dabei hauptsächlich auf ihren unteren Theil achtet, senkrecht gestellt zu werden, damit alle Bedingungen zur verlangten Regelmässigkeit erfüllt sind.

Um die Geschwindigkeit des Zufusses zu reguliren, lässt man die Flüssigkeit am besten eine enge Röhre passiren, *r* in Fig. 2 und 3, in der man einen Glasfaden von passender

Dicke verschieben kann. Je nachdem man den Zufluss langsamer oder schneller wünscht, verändert man den Reibungswiderstand der Flüssigkeit durch Hinein- oder Herauschieben des Glasfadens. Ein Hahn würde zu plötzlich abschliessen; Kautschuk mit Quetschhahn gibt der elastischen Nachwirkung wegen einen immerfort veränderlichen Zufluss, was sich sehr auffallend bemerkbar macht, wenn man mit der Funkenbeleuchtung durch den Neef'schen Hammer oder einer constant rotirenden stroboskopischen Scheibe beobachtet; nimmt der Zufluss dabei ab, so steigt der beleuchtete Tropfen, im entgegengesetzten Falle sinkt er.

Zwischen diesem engen Theil mit dem Glasfaden und der Mündung war das Rohr noch etwas erweitert, damit die Flüssigkeit von etwaigen Wirbelbewegungen zur Ruhe kommen könne, bevor sie den Tropfen bildet; ich habe aber keinen Unterschied gefunden, wenn ich diese Erweiterung wegliess.

Aus der beigegebenen Zeichnung ist das übrige am Ausflussapparat von selbst verständlich; Fig. 2.

4. Welches die Phasen sind, die die Tropfen durchlaufen, kann ich am besten an der Hand von Abbildungen der merkwürdigsten derselben erläutern, die ich mit dem beschriebenen Ausflussapparat und Stromunterbrecher in der photographischen Camera erhielt, (Fig. 3^b). Es sind etwas vergrösserte Bilder; zur Orientirung diene die Länge 1 cm. Betrachten wir zuerst die Reihe I, in der das Ausflussrohr mit photographirt ist; seine Mündung hat sich in den Bildern (mit Ausnahme eines) nicht markirt, weil der Wasserkörper das Licht durch Brechung ebenso von der Camera abhielt, wie der Papierstutzen durch seine Undurchsichtigkeit, ihre Höhe ist daher durch eine Linie markirt; sie ist in der ganzen Reihe dieselbe. Das erste Bild gibt den Moment der Abtrennung; der recht genau ellipsoidische Tropfen hängt eben noch an einem Wassergebilde, das einer nach abwärts gekehrten Bleistiftspitze nicht unähnlich ist. Eine ähnliche Zeichnung gibt Magnus in seinen hydraulischen Untersuchungen¹⁾; er be-

1) a. a. O., 106.

obachtete nach der unvollkommeneren Methode der stroboskopischen Scheiben. Wie man sieht, würde diese Anfangsform rein ellipsoidische Schwingungen geben, wenn nicht die oberen Theile des Tropfens durch die Zusammenziehung der Oberfläche ähnlich wie beim Zerfall unstabiler Flüssigkeitscylinder, eben aus dem Ligament herausgetrieben, in heftiger Bewegung nach abwärts begriffen wären. Dies hat denselben Erfolg, als ob die Anfangsform bei ruhenden Theilchen eine ganz andere als ein Ellipsoid gewesen wäre, etwa ein solches mit einer Ausbuchtung am oberen Theile. Die Wirkung zeigt sich schon im nächsten Moment (0,001 Sec. später); da ist der Tropfen oben ganz abgeflacht, bei Beobachtung schief von oben scheint er sogar eine Vertiefung zu haben. Das herabhängende Ligament wird durch die Oberflächenspannung zugleich nach oben gezogen und wellenförmig in kleinere Tropfen abgetheilt, die aber in diesem Falle sich noch zu einem zusammenziehen, der seine Wurfbewegung nach aufwärts (bis Bild 8), dann nach abwärts fortsetzt; er kann sogar mit dem nachströmenden Wassertheil zusammenstossen, was hier nicht geschieht, aber bei Flüssigkeitsstrahlen die Regel und, wie Lord Rayleigh gezeigt hat, die Ursache ihres Zersprühens ist. Der grosse Tropfen flacht sich von oben immer mehr ab, während der untere Theil in den vier oder fünf ersten Bildern fast ganz unverändert bleibt; es durchläuft der ringförmige Wasserberg, der die Ränder der ersten Abplattung bildet, von oben nach unten den ganzen Tropfen, bis er unten zusammenschlägt, und zugleich das Ganze wieder ein langgestrecktes Ellipsoid wird. Natürlich ist dies keine durch die Erdanziehung, sondern durch die Oberflächenspannung bewegte Welle, wie die feinen Kräuselungen von Wasserflächen. Inzwischen erscheinen am unteren Theil noch merkwürdige Ausbuchtungen (Bild 6 und 7), aber trotz dieser complicirten Formen erkennt man im ganzen die ellipsoidische als Hauptschwingung, überdeckt von einer grossen Anzahl von Partialschwingungen.

Es ist bemerkenswerth und für die späteren Messungen wichtig, dass sich fast ganz genau dieselben Formen bis ins

einzelnte bei den Tropfen jeder Grösse aller Flüssigkeiten, die ich untersuchte, wiederholen, und dass also alles, was durch die Form der Tropfen bedingt ist und in einem Falle gefunden wurde, für alle Fälle gilt. Nur ein Unterschied besteht, im Ligament nämlich, dessen Länge und damit auch die Grösse und Anzahl der secundären Tröpfchen mit der Tropfengrösse und der inneren Reibung der Flüssigkeit zunimmt. Bei Leinöl wird der Faden, bei derselben Ausflussröhre wie die der Bilder, bis 8 cm lang, bevor die Abtrennung stattfindet, er zerfällt in eine grosse Anzahl von Tröpfchen, die dem Haupttropfen in einem Schwarme nachfolgen. Auch die Tropfen, in welche Wasserstrahlen zerfallen, haben jene merkwürdigen und complicirten Formen, sogar in höherem Grade, wie ich dies nach der Methode Lord Rayleigh's mit der electricisch unterbrechenden Stimmgabel beobachtete.

In II sind Tropfen aus einer Tiefe von 16 bis 21 cm unter der Mündung des Rohres zusammengestellt, in III 67 bis 85 cm tiefe, und zwar nicht wie die in I dem Raume nach, sondern der Zeit nach geordnet. Der verticale Abstand zweier Tropfen misst also die Zeit zwischen ihnen, wobei zu II zu bemerken ist, dass die Tropfen nur deswegen in zwei Reihen auseinander gerückt wurden, damit sich nicht einzelne deckten. Auf den ersten Blick erkennt man an diesen Formen neben der ellipsoidischen Schwingung die Partialschwingung der dritten Kugelfunction, alle die übrigen schnelleren Partialschwingungen sind durch die innere Reibung schon verschwunden, und auch die Amplitude der einen, übrig gebliebenen, langsamsten Oberschwingung nimmt von II bis zu III ersichtlich ab, und es bleibt hier die ellipsoide Schwingung fast rein zurück.

Die beiden Scalen rechts und links von den Tropfen, welche die einzelnen Viertel der ellipsoidischen und der höheren Partialschwingung angeben, sind mit Hülfe eines verticalen Centimetermaassstabes, der mit den Tropfen zugleich photographirt (aber nicht mit copirt) wurde, erhalten. Es konnte aus jeder Platte die Höhe des Schwerpunktes des Tropfens entnommen und aus den Höhen mittelst später noch zu gebender Formeln die Zeiten berechnet werden. Die

Höhen derjenigen drei Kugeln, deren Orte sich am genauesten feststellen liessen, und aus denen die Dauer der ellipsoidischen Schwingung abgeleitet werden kann, waren:

		Höhe
		em
Kugel nach $\frac{1}{4}$ Schwingung		0,35
„ „ 4,5 „	$\left\{ \begin{array}{l} \text{vorhergehendes Ellipsoid .} \\ \text{nachfolgendes „} \\ \text{Kugel interpolirt . . .} \end{array} \right.$	19,33
		19,75
		19,52
„ „ 10 „		79,56
Dauer der ellipsoidischen Schwingung 0,03751 Sec.		

Wie man sieht, sind die ellipsoidischen Schwingungen von dem ersten flachsten Ellipsoid an gezählt, und es liegt die lange Ellipsoidform, von der man ausgehen müsste, um die wirklich eintretenden ellipsoidischen Schwingungen zu erhalten, noch oberhalb des sich eben abtrennenden Ellipsoides, welches zugleich eine Gleichgewichtsform für die Partialschwingung ist, und daraus folgt eben, dass die Theile dieses Ellipsoides in solcher Bewegung sind, als ob sie schon etwa $\frac{1}{8}$ ellipsoidische und $\frac{1}{4}$ Partialschwingung gemacht hätten (abgesehen von den höheren Partialschwingungen).

Die Dauer der Partialschwingung fand ich, indem ich die einmal nach den Zeiten geordneten Tropfen II und III in eine Reihe in gehöriger Entfernung untereinander stellte und dann auf einem Papierstreifen eine Längeneintheilung so aufzutragen suchte, dass sie, an die Tropfenreihe angelegt, ein überall möglichst genaues Zusammentreffen der Theilstriche mit den einzelnen Viertelpartialschwingungen ergab. Die erhaltene Scala ist auch die in den Copien enthaltene: die Uebertragung derselben nach I hinauf geschah durch Rechnung. Das Verhältniss der Schwingungsdauern nach zweiter und dritter Kugelfunction findet sich nun als Längenverhältniss der beiden Scaleneinheiten zu 1,918, während die Theorie:

$$\frac{\sqrt{3(3-1)(3+2)}}{\sqrt{2(2-1)(2+2)}} = 1,9365\dots$$

gibt; die Uebereinstimmung ist befriedigend. Die Dauer der Partialschwingungen selber ist demnach 0,01956 Sec.

Ueber die Herstellung der Photographien ist kurz Fol-

gendes zu sagen: Der Ausflussapparat war nahe der Decke des Raumes aufgestellt, der Unterbrechungsapparat konnte in beliebige Höhe gestellt werden, je nach der Tropfenform, auf die es ankam. In der Richtung des Lichtstrahls befanden sich nacheinander: Der Funkenentlader, dicht dahinter zwei Convexlinsen, um das Licht zu sammeln, dann der beleuchtete Tropfen, neben ihm der Maassstab, endlich die Camera. Die beiden Linsen zusammen mit dem Objectiv des Apparates entwarfen auf die photographische Platte, die auf Tropfen und Maassstab eingestellt ist, einen Zerstreungskreis des Funkens, der als heller Hintergrund dient. Ein Funke des grossen Ruhmkorff-Inductors des Heidelberger physikalischen Instituts (er enthält etwa 30 km secundären Draht und war verbunden mit 3 Bunsen'schen Elementen und einer Leydener Flasche von etwa 23 dm² äusserer Belegung) genügte bei den empfindlichen Trockenplatten zu einer Aufnahme.

5. Ich komme nun dazu, anzugeben, wie die Versuche zur Messung der Schwingungsdauern und Tropfengewichte angestellt wurden.

Die Schwingungsdauer wurde als Fallraum gemessen. Da jedoch die Amplitude der Schwingungen hier nur klein ist, musste ich darauf verzichten, die Höhenunterschiede von Knoten oder Bäuchen unmittelbar zu messen. Auch stroboskopische oder Funkenbeobachtung gibt keine genaueren Resultate und ist zeitraubender, als die Anwendung der bekannten Lichtflecke, die man an den Dachtropfen oder den Tropfen der Sträucher, wenn es regnet, bemerkt.

Der Weg eines Lichtstrahls von aussen durch eine Kugel hindurch ist, wie leicht einzusehen, symmetrisch zu einer Ebene, die man senkrecht auf seinen in der Kugel befindlichen Theil durch den Kugelmittelpunkt legt. Daraus folgt, dass ein von aussen in eine Kugel gekommener Lichtstrahl nie eine totale Reflexion erleiden kann, denn sollte er das, so müsste der Winkel, unter dem er austritt $\cong 90^\circ$ werden; der Symmetrie wegen aber würde es dann auch der Einfallswinkel beim Eintritt in die Kugel, das heisst, der Strahl könnte nicht von aussen in die Kugel gekommen sein. Jede

Abweichung des lichtbrechenden Körpers von der Symmetrie zu jener Ebene gibt die Möglichkeit einer totalen Reflexion; lassen wir die Kugel in ein Ellipsoid sich verwandeln, dann werden Strahlen so eintreten können, dass sie an der hinteren Fläche total reflectirt werden.

Man kann dies leicht auch durch einen Versuch zeigen. An dünne Glasröhren blies ich vor der Lampe eine Kugel, ein langaxiges und ein kurzaxiges Rotationsellipsoid von einigen Centimetern Durchmesser und füllte alle drei mit Anisöl, dessen Brechungsquotient dem des Glases nahe kommt, sodass nur die äussere Begrenzung des ganzen Körpers gegen Luft in Betracht kommt. Man bemerkt an allen diesen drei Körpern folgende Bilder eines leuchtenden Objectes, z. B. einer Kerzenflamme in dunklem Zimmer in etwa 1 dm Entfernung:

1. Vom durchgehenden, zweimal gebrochenen Licht ein verkleinertes, verkehrtes, reelles Bild; wie das einer Convexlinse.

2. Ein an der ersten Fläche reflectirtes, verkleinertes, aufrechtes, virtuelles Bild; wie das eines Convexspiegels.

3. An der Rückseite reflectirt ein verkleinertes, verkehrtes Bild; es ist auch reell, liegt aber nahe der Hinterwand des Körpers und hat natürlich farbige Ränder. Es gibt eine Stelle des Glaskörpers, die, mit feuchtem Finger berührt, das Bild verblassen macht zum Beweis, dass es einmal reflectirt ist.

4. Ein zweimal reflectirtes, schwaches, aufrechtes Bild; es ist schwer zu sehen und interessirt uns weiter nicht.

Von Interesse für unseren jetzigen Zweck ist das Bild 3. Am Fenster eines hellen Zimmers ist die Hinterseite des flachen Ellipsoids ganz bedeckt von diesem Bild. Wenn man nun in geeigneter Richtung beobachtet, bemerkt man, dass ein sichelförmiger Theil des Bildes eine bedeutende Helligkeit hat. Aus dem grösseren, dunkleren Theil in den glänzenden setzen sich ungestört alle Linien des Bildes in ihrer verzerrten Weise fort. Dieser glänzende Theil ist total reflectirt; er ist auch in dem langaxigen Ellipsoide sichtbar, jedoch bei anderer Beobachtungsrichtung, in der Kugel niemals. Dass die Reflexion im glänzenden Stück total ist,

beweist man leicht durch folgenden Versuch. Man hält das Ellipsoid so, dass der fragliche Theil des Bildes sich unten befindet, und nähert dann von unten her ein Schälchen mit Wasser oder Alkohol oder irgend einem dichteren Medium als Luft. Im Momente des Eintauchens verschwindet aller Unterschied zwischen dem hellen und dunkleren Teile des Bildes, beide werden gleich hell, dunkler aber als zuvor, ohne dass natürlich an den Linien des Bildes etwas sich änderte.

Unter genau denselben Umständen, unter denen das flache Glasellipsoid total reflectirte Bilder gibt, beobachtet man in den Höhen, in welchen sich in einer Reihe von herabfallenden Tropfen flache Ellipsoidformen befinden, sehr helle, vertical langgestreckte Lichtflecke von den Formen, wie sie Fig. 4, darstellt und zwar *A* die obersten drei oder vier, *B* die folgenden zwei oder drei und *C* alle tieferen. Hält man das flache Glasellipsoid mit verticaler Axe neben einen hellen Lichtfleck der Tropfen und beobachtet nach verschiedenen Richtungen, so verschwindet und erscheint er zugleich mit dem totalen Reflex im Glasellipsoid.

Hieraus ist klar, dass die hellen Lichtflecke der Tropfen aneinander gereihte, umgekehrte, in einem Theil total reflectirte Bilder des Stückes Himmelsgewölbe, dass das Fenster abgrenzt, sind, entworfen von den flachen Ellipsoiden und begrenzt nach oben und unten durch die Kugelformen der Tropfen, und dass also ihr Ort wesentlich zusammenhängt mit den ellipsoidischen Schwingungen und zu deren Verfolgung dienen kann.

Rein ellipsoidisch 'schwingen nun die frei abfallenden Tropfen nicht, und es ist kein Zweifel, dass auch die Partialschwingungen in dritten Kugelfunctionen auf die totalen Reflexe Einfluss haben werden. Das Aussehen der Reflexe *B* lässt dies erkennen; ihre Unterbrechung in zwei Theile kommt daher, dass sich über das flachste Ellipsoid das den hellsten Punkt geben würde (ich habe immer nur die Reflexe der flachen Ellipsoide benutzt), in der vierten, fünften, sechsten Schwingung gerade die grösste Amplitude der Partialschwingung lagert, wie die photographischen Aufnahmen ersichtlich machen, und die untere Hälfte des Tropfens, an der eben

die totale Reflexion stattfinden sollte, dergestalt verändert, dass hier die Helligkeit nach dem flachsten Ellipsoid hin gerade ab-, statt zunimmt: der dunkle Zwischenraum fällt nahe dem flachsten Ellipsoid. Dieser Einfluss der Partial-schwingungen wäre für die Messungen sehr störend.

Es gelingt aber, die ellipsoidischen Schwingungen beinahe vollständig rein und daher die totalen Reflexe alle in der zur Messung geeigneten Form *C* zu erhalten, wenn man in die Axe der Ausflussröhre ein dünnes, nach unten sehr spitz zulaufendes Holzstäbchen einsetzt, siehe Fig. 3 *h*, an dem die Tropfen, nachdem sie gebildet, heruntergleiten müssen. Die Bewegung der Flüssigkeit aus dem Ligament hinaus nach abwärts, welche ja die einzige Ursache der Partial-schwingung ist, wird durch die Reibung am Stäbchen fast ganz aufgehoben, und die Funkenbeobachtung zeigt, dass der Tropfen, sobald er das Stäbchen verlassen hat, gleich beinahe rein ellipsoidisch schwingt, nur die Reflexe 3, 4 und 5 fallen etwas unterhalb der flachsten Ellipsoide, wenn die Tropfen nicht sehr klein sind. Es ist aber nöthig, dass das Stäbchen sehr spitz ende, geradlinig sei und genau in der Rohraxe stehe.

Sehr geeignet hierzu sind im Apparat Fig. 3, Grannen von reifer Gerste (die ich nacheinander in Aether, Alkohol, Wasser gewaschen habe); *r* und *ff* sind in Fig. 3 wie 4 das enge Rohr und der Glasfaden zur Regelung des Zuflusses, ebenso ist *p* der Papierstutzen, in den das Rohr endet. *g* ist ein dünnes Glasröhrchen, welches unten innerhalb *p* endigt, und in das die Granne *h h* mit gelinder Reibung eingeschoben ist. Dieses Röhrchen *g* wird durch ein im Mittelpunkt durchbohrtes gleichseitiges Dreieck von Platin, *Pt*, und einen Tropfen Schwefel, *S*, der den oberen Ansatz der Röhre ausfüllt, festgehalten. Während der Schwefel ange-tropft wird, ist die Granne und der Papierstutzen noch nicht vorhanden, und das Röhrchen *g* durch ein centrisch gebohrtes Stück Messing (Uhrmacherfutter), welches den Zwischenraum zwischen ihm und dem äusseren Rohr bei *p* ausfüllt, fixirt. Das Messingfutter wird nach dem Erstarren des Schwefels herausgezogen.¹⁾

1) Dieser Apparat wurde nur zu den in Tab. IV und VI enthaltenen

Das Stäbchen hatte auch noch den Nutzen, dass es gestattete, die Amplitude auch der ellipsoidischen Schwingungen abzuändern, indem man es verschieden weit aus der Röhre vorstehen liess, um den Einfluss dieser Abänderung auf die Schwingungsdauer zu untersuchen.

Es wurden aber auch Messungen ohne dieses Stäbchen gemacht und dazu mit den tiefen Reflexen der Form *C* auch der alleroberste benutzt, den ich der Symmetrie halber immer als 0. bezeichnen werde, und dessen hellster und breitester Punkt mit der flachsten Form des Tropfens zusammenfällt; dieser Reflex ist auch so klein, die Fallbewegung hier noch so langsam, dass ein kleiner Irrthum in der Phase nur einen sehr kleinen Fehler der abgelesenen Höhe bewirken würde. Dabei habe ich in Anbetracht dessen, dass die Tropfen nur im ganzen grossen Ellipsoide sind, dafür Sorge getragen, dass möglichst viele Punkte der Oberfläche zum reflectirten Bilde beitragen, dass also die Tropfen ein möglichst grosses Bild des Fensters geben (denn es wird der starken sphärischen Aberration wegen jeder Punkt des Bildes von anderen Oberflächenelementen entworfen, wie Beobachtung am Glasellipsoid lehrt), d. h. ich habe den Apparat nahe dem Fenster aufgestellt. Die Beleuchtung kommt dann schief von oben; und um die Reflexe recht ausgeprägt zu sehen, muss man sie auch schief von oben betrachten, und zwar so, dass, wenn man die Tropfen vor sich hat, das Fenster zur Rechten oder Linken sich befindet.

Abgelesen wurde immer die Höhe des hellsten Punktes, oder, was bei den Reflexen *C* dasselbe ist, der Mitte, an einem in Millimeter getheilten Spiegelglasstreifen *mm* (Fig. 2), der in 1 bis 2 cm Entfernung vor dem Weg der Tropfen vertical aufgestellt war. Ein Streifen schwarzer Tapete hinter dem Tropfen gab einen passenden Hintergrund; in der Figur ist er weggelassen. Der kleine halbbelegte Spiegel *s* war vor dem Glasmaassstab auf und ab schiebbar so, dass seine in passende Neigung zum Horizont gestellte Ebene dabei sich

Versuchen benutzt, die übrigen sind mit einem ähnlichen ausgeführt, der aber statt der Granne ein Holzstäbchen und statt des Schwefels eine Kautschukdichtung enthielt.

selbst parallel blieb. Er diente dazu, die Visirrichtung zur Vermeidung einer Parallaxe zu fixiren, indem man den Lichtstreifen, dessen Höhe abgelesen werden sollte, durch das Spiegelbild der Pupille im kleinen Spiegel halbiren liess; der Theilstrich des Maassstabes, der dann durch den Mittelpunkt des Pupillenbildes ging, war der gesuchte. Obwohl jede Lichterscheinung nur einen Augenblick dauert, ist diese Einstellung durch die regelmässige Wiederkehr des Lichtes gut möglich.

Was endlich das Wägen der Tropfen betrifft, so wurde es in weithalsigen Wägegläschen ausgeführt, wie man sie in der chemischen Analyse anwendet, in welchen die Tropfen, gewöhnlich 100, aufgefangen waren. Um Spritzverlust zu vermeiden, war in jedes Wagegläschen ein Glimmerblatt schief hineingestellt, auf das die Tropfen zunächst fielen.

Die Constanz des Tropfengewichtes kann aus Folgendem beurtheilt werden:

Tropfengewicht aus 50 Tropfen	0,05224 g
unmittelbar nachher nochmals bestimmt	0,05226 „
30 Min. später, als das Niveau um 18 mm gesunken war	0,05198 „
als das frühere Niveau durch Nachgiessen hergestellt war	0,05228 „

Es wurde daher das Tropfengewicht bei den meisten Versuchen nur einmal bestimmt. Die Gewichte der secundären Tröpfchen, welche auch mit gewogen wurden, betrug bei den angewandten Röhrendurchmessern kaum Zehntel-milligramme, es konnte also von ihnen ganz abgesehen werden.

Bevor ich zu den Resultaten selbst komme, muss ich noch eine Untersuchung über den Luftwiderstand einfügen, welche nicht nur der Fallgesetze halber, sondern auch wegen einer denkbaren Einwirkung der Luft auf die bewegten Tropfen selber für unseren Gegenstand wichtig ist.

6. Newton fand die negative Beschleunigung, die ein gasförmig oder tropfbar flüssiges Medium auf eine bewegte starre Kugel ausübt¹⁾:

1) Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Liber II, Sectio 2 u. 7; auch Gehler's Wörterb. d. Phys., Art. Widerstand, p. 1735 u. 1743.

$$f = \frac{3}{8} \frac{\rho \cdot v^2}{D \cdot r},$$

wenn v die Geschwindigkeit, r der Radius, D die Dichte der Kugel, ρ die des widerstehenden Mediums ist. Sonach ist die Differentialgleichung der verticalen Fallbewegung einer festen Kugel durch ein solches Medium:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{g}{K^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2,$$

wo $g/K^2 = \frac{3}{8}(\rho/Dr)$, und ihre Integration liefert, wie bekannt:

$$x = \frac{K^2}{g} \log \left(c_1 e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}} \right) + c_2.$$

c_1 und c_2 sind Constanten der Integration.

Es kam darauf an, zu untersuchen, ob dies auch die Fallgesetze eines Flüssigkeitstropfens durch Luft sind, und besonders, ob durch mehr oder minder rasches Aufeinanderfolgen von Tropfen der Luftwiderstand nicht etwa durch Strömungen beeinflusst wird.

Dieses habe ich in folgender Weise bewerkstelligt. Der schon mehrfach gebrauchte Stromunterbrecher wurde etwa 3 m unter dem Ausflussapparat aufgestellt; er beleuchtet, wenn die Tropfen rasch genug nacheinander auf ihn fallen, jeden einzelnen Tropfen an mehreren Punkten seiner Bahn, und zwar, wie schon bekannt, alle an denselben Punkten. Wenn man also im dunklen Raume mit dem Funkenentlader und einem matten Schirm in der Hand vom Unterbrecher bis zum Ausflussrohr aufsteigt, findet man eine Reihe scheinbar schwebender Tropfen, deren Höhen man an einem verticalen, in Centimeter getheilten Maassstab ablesen kann. Schwankten dabei auch in den grösseren Tiefen die beleuchteten Tropfen ziemlich auf und ab, so konnte man doch nach einer kleinen Weile ihren mittleren Ort ausfindig machen. Zugleich wurde mit Hülfe eines Secundenchronoskops die Zeit gemessen, während welcher eine gezählte Anzahl Funken erschien; diese Zeit, dividirt durch die Anzahl, gibt die Zeit von einem Funken bis zum nächsten, also die Zeitintervalle T , in denen die notirten Höhenintervalle x durchfallen sind. Um diese Zeitintervalle beständig

gleich zu erhalten, hatte bei diesen Versuchen der Ausflussapparat eine Mariotte'sche Flasche. Endlich wurde noch das Gewicht der Tropfen bestimmt, um den Radius r der Kugel zu kennen, die ihre mittlere Form ist.

Ist dieses alles gefunden, so kann man $g/K^2 = \gamma \cdot (\rho/Dr)$ setzen und γ berechnen, um zu erkennen, ob es constant, und wie gross es ist, wie das Folgende zeigt:

Bezeichnen x_1, x_2, x_3 die Höhen dreier aufeinander folgender beleuchteter Tropfen von einem beliebigen Anfangspunkte aus gemessen, T das gemessene Zeitintervall, so ist, wenn man die Zeit von dem Moment aus zählt, in welchem der Tropfen x_1 passirt:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{K^2}{g} \log (c_1 + 1) + c_2, \\ x_2 &= \frac{K^2}{g} \log (c_1 e^{\frac{gT}{K}} + e^{-\frac{gT}{K}}) + c_2, \\ x_3 &= \frac{K^2}{g} \log (c_1 e^{2\frac{gT}{K}} + e^{-2\frac{gT}{K}}) + c_2; \\ x_2 - x_1 &= \Delta_1 = \frac{K^2}{g} \log \frac{c_1 e^{\frac{gT}{K}} + e^{-\frac{gT}{K}}}{c_1 + 1}, \\ x_3 - x_2 &= \Delta_2 = \frac{K^2}{g} \log \frac{c_1 e^{2\frac{gT}{K}} + e^{-2\frac{gT}{K}}}{c_1 e^{\frac{gT}{K}} + e^{-\frac{gT}{K}}}. \end{aligned}$$

Aus der ersten der beiden Gleichungen, in denen Δ_1 und Δ_2 abkürzende Bezeichnungen für die Wege sind, ist:

$$c_1 = \frac{e^{-\frac{gT}{K}} - e^{\frac{g}{K^2} \Delta_1}}{e^{\frac{g}{K^2} \Delta_2} - e^{\frac{gT}{K}}}.$$

Substituirt man dies in die zweite, ersetzt auch in dieser den Logarithmus durch die Exponentialfunction und schafft die Nenner weg, so erhält man eine Gleichung, die, durch $e^{\frac{g}{K^2} \Delta_2} (e^{\frac{gT}{K}} - e^{-\frac{gT}{K}})$ dividirt, ist:

$$(2) \quad 0 = e^{\frac{g}{K^2} \Delta_2} + e^{-\Delta_1 \frac{g}{K^2}} - (e^{\frac{gT}{K}} + e^{-\frac{gT}{K}}).$$

In dieser Gleichung ist nichts mehr unbekannt als K , welches das gesuchte γ enthält. Um sie mit beliebiger Annäherung auflösen zu können, entwickelt man die Exponentialfunctionen in die Taylor'schen Reihen:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Man übersieht sogleich, dass aus den zwei Reihen der Klammer die Glieder mit ungeraden Potenzen von K wegfallen, und dass die zwei anderen Reihen überhaupt nur gerade K -Potenzen enthalten, dass also das Resultat auch nur gerade Potenzen enthalten wird; es lautet, mit g/K^2 dividirt:

$$0 = \sum_1^{\infty} n \frac{g^n}{K^{2n}} \left(\frac{A_2^n + (-A_1)^n}{n!} - 2 \frac{g^n T^{2n}}{(2n)!} \right).$$

Die Reihe ist convergent, da sie die Summe von vier convergenten Reihen ist. Für die Werthe, die die vorkommenden Grössen bei den Versuchen haben, ist das vierte Glied dieser Reihe schon so klein, dass es bei der Berechnung der meisten Versuche ganz wegleiben konnte. Wurde dem von K freien Gliede als kleine Correction m beigefügt, so blieb also zur Bestimmung von γ die Gleichung:

$$(3) \quad \left\{ \left(\gamma \frac{g}{Dr} \right)^2 \left(\frac{A_2^3 - A_1^3}{6} - \frac{g^3 T^6}{360} \right) + \gamma \frac{g}{Dr} \left(\frac{A_2^2 + A_1^2}{2} - \frac{g^2 T^4}{12} \right) \right. \\ \left. = g T^2 - (A_2 - A_1) - m, \right.$$

worin $Dr = \sqrt[3]{(3/4\pi)pD^2}$ ist, wenn p das Tropfengewicht ist, g , welches in der Breite und Meereshöhe von Heidelberg 9,8093 m/sec² beträgt, ist noch um den Luftauftrieb zu vermindern.

Die erhaltenen Werthe von γ , sowie die Versuchsdaten selbst, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle I.

Vers.- Nr.	p g	T sec	x cm	ber. aus γ
Wassertropfen.				
1	0,063 315	0,1531	1 17,12	1, 3, 5 0,1507
			2 33,65	
			3 72,78	2, 3, 4 0,169
			4 132,78	
			5 212,18	3, 4, 5 0,147
u. 304,85				
2	0,045 223	0,1895	1 17,16	1, 2, 3 0,128
			2 43,59	
			3 103,76	2, 3, 4 0,167
			4 193,75	
			u. 305,15	
3	0,059 740	0,2490	1 17,40	1, 2, 3 0,120
			2 59,42	
			3 158,78	
4	0,029 15	0,3787	1 21,7	1, 2, u. 0,153
			2 107,6	
			u. 305,4	
5	0,030 27	0,381	1 21,00	1, 2, u. 0,148
			2 105,77	
			u. 305,10	
6	0,107 99	0,1775	1 26,40	2, 3, 4 0,169
			2 57,03	
			3 115,38	1, 3, u. 0,112
			4 200,90	
			u. 305,12	
Alkoholtropfen.				
7	0,019 27	0,20163	1 17,01	2, 3, 4 0,1891
			2 42,99	
			3 103,43	1, 3, u. 0,184
			4 194,18	
			u. 305,32	
Quecksilbertropfen.				
8	0,088 72	0,20750	2 29,57	2, 3, 4 0,324
			3 89,75	
			4 191,28	

Es war durch Vorversuche festgestellt, dass die Messlatte, die in weniger als 2 cm Entfernung neben den Tropfen aufgestellt war, den Luftwiderstand nicht modificirte.

Die Zahlen T und x sind fast sämmtlich Mittelwerthe; zum Beleg hierfür, sowie für die Art der Beobachtungen

gebe ich die Zahlen von Versuch 1 in der folgenden Tabelle vollständig.

Tabelle II.

Versuch 1. Höhen der oberen Tropfenränder.

x	abgel. vor der Best. von T			nach der Best. von T			Mittel
1	17,3	17,1	17,1	17,1	17,0	17,1	17,12 cm
2	34,5	33,7	33,5	33,5	33,3	33,4	33,65 "
3	73,9	73,4	72,3	72,3	72,2	72,6	72,78 "
4	133,6	133,2	132,7	132,6	132,4	132,2	132,78 "
5	212,5	212,6	211,9	212,3	212,0	211,8	212,18 "
u.	304,85						304,85 "

Zeitbestimmung: 400 Tropfen fielen in 1 Min. 1,4 Sec., 1 Min. 0,8 Sec.
1 Min. 1,5 Sec.; Mittel 400 T = 1 Min. 1,23 Sec.

Tropfengewicht: 200 Tropfen mit Wägegl. 26,384 g

leeres Wägegl. 13,721 "

$200 p = 12,663$ g

x bezeichnet die Höhe der Fläche der Korkplatte am Unterbrecher, wo sich zur Zeit eines Funkens auch ein Tropfen befindet, welche daher auch mit zur Berechnung von γ verwendet werden kann; jedoch nicht ohne Correction, wovon man sich überzeugt, wenn man das Licht des Funkens auf den Unterbrecher selbst fallen lässt, wobei man den eben aufgefallenen Tropfen schon in einen Kreis kleiner Tröpfchen zerstoßen sieht: es war also Zeit vergangen zwischen dem Auf-
fallen des Tropfens und dem Erscheinen des Funkens. Es ergibt sich aus dem Vers. 1, wenn man mit dem Mittelwerthe 0,1560 der drei schon erhaltenen γ , den zu $x_4 - x_2 = A_1$ gehörigen Weg A_2 aus Gleichung 2) berechnet, dass während des Zeitverlustes im Unterbrecher der Tropfen noch um 2,7 cm weiter hätte fallen können. Diese 2,7 cm wurden bei Vers. 6, dessen Tropfen mit denen des Vers. 1 ungefähr die gleiche Masse haben, bei der Berechnung zu dem angegebenen x_u hinzuaddirt, ebenso bei den leichteren Tropfen von Versuch 4, 5 und 7 5,1 cm, abgeleitet aus Versuch 2.

Man sieht aus den gefundenen Werthen von γ :

1. dass $f = \text{const. } \rho v^2 / Dr$ die Abhängigkeit des Luftwiderstandes vom Radius r der Tropfen innerhalb der untersuchten Grenzen richtig darstellt, denn vergleicht man die

aus Versuch 1, 2 und 6, in denen T nahe dasselbe, p jedoch sehr verschieden war, erhaltenen γ , so findet man Uebereinstimmung, soweit die Genauigkeit der Versuche geht.

2. Die Zeit T , nach welcher die Tropfen einander folgen, ändert den Luftwiderstand nicht, wie man durch Vergleichen der in dieser Beziehung extremen Versuche 4, 5 und 1, 6 findet.

3. Der Luftwiderstand der Tropfen, dessen Constante im Mittel aus den mit Wasser und Alkohol (spec. Gewicht 0,8105) erhaltenen Werthen = 0,153 ist, ist geringer als der fester Kugeln: er ist von Newton aus Fallversuchen in Luft und Wasser zu $\frac{2}{3} = 0,375$, von Borda¹⁾ auf ähnliche Weise zu $\frac{9}{40} = 0,225$, von Hutton²⁾ an abgeschossenen Kugeln (von 1 Zoll Durchmesser) zu $\frac{3}{16} = 0,188$ gefunden. Nur Quecksilber ergab einen grösseren Werth der Constanten γ .

Die Ursache des kleinen Widerstandes gegen die Tropfen kann an der Nachgiebigkeit der Flüssigkeit gegen den Druck der strömenden Luft, also an kleinen Deformationen der Tropfen liegen gerade dort, wo der Luftwiderstand am stärksten angreift.

Obgleich die photographischen Aufnahmen sowie die Beobachtung der Tropfen bis zu 3 m Tiefe nichts hiervon zu erkennen geben, zeigte sich in der That bei Regentropfen, die ich bei Gelegenheit eines ausgiebigen nächtlichen Niederschlages durch den electricischen Funken auf einen matten Schirm projecirte, dass sie zumeist flach mit einer Zuspitzung nach unten waren, ähnlich dem Tropfen der nach der siebenten Partialschwingung abgebildet ist, während kein einziger gefunden werden konnte, der eine Spitze nach oben gehabt hätte, wie dies hätte der Fall sein müssen, wenn von Partialschwingungen die Rede sein könnte; vielmehr stimmen die Formen der Regentropfen ganz mit denen überein die J. J. Thomson³⁾ von Tropfen beschreibt, die in Flüssigkeiten gefallen sind, und sich in Wirbelringe zu verwandeln beginnen. Es ist also kein Zweifel darüber, dass die Luft

1) Borda, s. Gehler's Wörterb. d. Phys., Art. Widerstand, p. 1751.

2) Hutton, Trans. Roy. Soc. Edinb. 2.

3) J. J. Thomson, Proc. Roy. Soc. 39, p. 417. 1885.

in den Tropfen Wirbelbewegungen erregen kann, indem sie die äussere Fläche im Vorbeiströmen mit sich reisst. Dabei hat sie nicht nur die innere Flüssigkeitsreibung zu überwinden, sondern, insbesondere bei Wasser, auch Arbeit deshalb zu leisten, weil unten neue Oberfläche gebildet wird, während oben zwar gleich viel, aber ältere, also, wie sich noch zeigen wird und auch schon bekannt ist, bei Wasser schwächer gespannte Oberfläche verschwindet. Daher kommt es auch, dass sich solche Wirbelbewegungen in Wasser weit schwerer bilden als in Alkohol, wie folgender Versuch zeigt. Ein kleines Bechergläschen war bis oben voll mit Wasser gefüllt, in dem *Lycopodium suspendirt* ist, um die Strömungen verfolgen zu können, die ein breiter, ziemlich starker Luftstrom, schief über die Oberfläche geblasen, erzeugte. Es bilden sich nur kreisende Bewegungen in horizontalen Bahnen aus, wobei die Theilchen der Oberfläche also immer in derselben bleiben. An den Stellen, wo der Luftstrom am stärksten angreift, folgen sie ihm, wo er schwächer ist, kehren sie beiderseits wieder zurück. Dasselbe ergab mit Gewalt aus der Wasserleitung geströmtes Wasser, dessen Bewegungen man durch die unzähligen Luftblasen, durch die es wolkig getrübt erscheint, verfolgen kann. Derselbe Versuch mit Alkohol ergibt, dass die mit dem Luftstrom nach einer Richtung bewegten Oberflächentheile untertauchen und im Inneren der Flüssigkeit zurückkehren, also in verticalen Bahnen kreisen. Nur bei Alkohol bildeten sich also unter den Umständen dieses Versuches Bewegungen, die den oben erwähnten Wirbeln entsprechen und in Tropfen stattfinden können. Davon noch bei den Messungen mit Alkoholtropfen.

7. Die folgende Tabelle enthält Versuche mit Wassertropfen, die hauptsächlich angestellt wurden, um zu sehen, welchen Einfluss die Amplitude auf die Schwingungsdauer hat, und wie sich die Oberflächenspannung mit der Zeit ändert.

Der verschiedenen Länge des Stäbchens in Columne 1 entsprechen die Amplituden der Columne 2, diese sind angegeben durch das Verhältniss der grössten Dehnung der Hauptaxe der Gleichgewichtskugel zur Hauptaxe (oder Durch-

messer) selber, und zwar sind es mittlere Amplituden, denn dieselben nehmen von oben nach unten ab, wovon noch im Abschnitt 8 die Rede sein wird. Ihre Grösse wurde auf folgende Art gefunden. Es war eine Tafel entworfen, welche neben der numerischen Angabe verschiedener Amplituden ($\frac{1}{30}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{4}$ etc) die Zeichnung zweier Ellipsen enthielt, der Meridianschnitte nämlich eines Tropfens in den zwei äussersten Elongationen der angeschriebenen Amplitude. Hatten sich nun durch Verfolgung des Tropfens nach der im Anfang des Abschnittes 3 angegebenen Art das äusserste flache und gedehnte Ellipsoid dem Gedächtniss eingepägt, so konnte man es in der Zeichnung aufsuchen (dieselbe nöthigenfalls durch eine vergrössernde oder verkleinernde Linse betrachtend) und die Amplitudenangabe entnehmen. Die Beobachtung wurde wiederholt — wobei natürlich die vorhergehenden Bilder dem Gedächtniss schon entschwunden sein müssen — und das Mittel der Resultate genommen.

Tabelle III. Wasser.

Beschaffenheit d. Röhre	Ampl.	Temp.	Zeitintervall zweier Tropfen	ρ	Höhen der totalen Reflexe					α	
					Refl.	Höhe	Refl.	Höhe	Refl.		Höhe
Apparat mit Stäbchen.											
Stäbchen vorsteh. um mm		°C.	sec	g	cm		cm		cm	$\frac{mg}{mm}$	
21,6	$\frac{1}{30}$	15,7	0,273	0,05646	0	141,755	7	105,263	14	28,290	7,533
21,7	$\frac{1}{15}$	14,3	0,455	0,05015	0	141,255	8	101,131	16	13,743	7,415
25,6	$\frac{1}{10}$	15,8	0,500	0,06131	0	190,63	7	152,66	14	69,92	7,404
29,6	$\frac{1}{6}$	16,7	0,349	0,05947	0	141,475	7	103,309	14	22,479	7,525
—	$\frac{1}{4}$	15,9	0,517	0,05953	0	141,310	7	103,801	14	22,854	7,402
30,3	$\frac{1}{3}$	16,0	0,353	0,05757	0	141,200	7	104,908	14	26,743	7,437
Apparat ohne Stäbchen.											
Glasrohr		16,7	0,199	0,03686	0	165,605	8	141,877	16	83,987	7,756
„		15,0	0,341	0,03505	0	165,060	9	136,242	18	64,944	7,905
Papierstutz	$\frac{1}{8}$	—	0,379	0,08615		(Photograph. Abbildungen)				7,367	
„		17,2	0,448	0,06014	0	159,665	7	129,860	14	54,703	7,284
„		15,5	0,451	0,03607	0	157,815	9	130,139	18	57,251	7,187
„	$\frac{1}{8}$	15,8	0,674	0,03632	0	157,820	9	130,116	18	57,406	7,271
„		16,6	0,909	0,05420	0	196,24	8	162,35	16	75,90	7,331
„		18,9	1	0,03576	0	194,62	8	172,23	16	114,23	7,283
Glasrohr		16,5	1,05	0,03327	0	164,930	10	134,428	20	53,346	7,269
							11	128,552	22	30,624	7,141

Die Temperatur ist im Wasserbehälter zur selben Zeit gemessen, als die Tropfen behufs Wägung aufgefangen wurden. Columne 5 enthält das Gewicht eines Tropfens p .

Col. 4 gibt die Zeit, welche ein Tropfen brauchte, um sich zu bilden, also ein Maass für das Alter seiner Oberfläche.

Die Höhen der Reflexe sind sämmtlich Mittelwerthe aus Ablesungen, die symmetrisch zur Gewichtsbestimmung vor und nach derselben vertheilt waren. Von den tiefsten Reflexen sind die meisten Ablesungen gemacht worden.

α , die Oberflächenspannung ist nach Gl. (1) ($n = 2$):

$$\alpha = \frac{3}{8} \pi \cdot \frac{p}{g T^2},$$

berechnet. Wurden die Reflexe $0, n, 2n$ beobachtet, so ist in dieser Gleichung die Schwingungsdauer $T = n T_n$, wenn T_n die Zeit ist, während welcher der Tropfen von einem zum anderen der beobachteten Reflexe fällt, und diese Zeit kann aus Gl. (3) gefunden werden, in welcher A_1 und A_2 die Höhenunterschiede des $0.$ und $n.$ und $2n.$ Reflexes sind. γ ist $= 0,153$. Diese Gl. (3) kann man aber für diese Berechnung noch vereinfachen, indem bei den geringen Fallhöhen, die hier in Betracht kommen, ohne die kleinste Einbusse an Genauigkeit $m = 0$, $g^3 T^6 / 360 = 0$ gesetzt werden kann; ferner ist auch $g^2 T^4 / 12$ gegen $(A_2^2 + A_1^2) / 2$ so klein, dass man es dem angenäherten Werth $(A_2 - A_1)^2 / 12$ gleich setzen kann und für die Schwingungsdauer die Gleichung:

$$g T_n^2 = A_2 - A_1 + \frac{\gamma \rho}{D \cdot r} \left(\frac{A_2^2 + A_1^2}{2} - \frac{(A_2 - A_1)^2}{12} \right) + \left(\frac{\gamma \rho}{Dr} \right)^2 \frac{A_2^3 - A_1^3}{6}$$

erhält. Wie man sieht, braucht man, um α zu berechnen, g gar nicht zu kennen und auch das spec. Gew. der untersuchten Flüssigkeit ist nur zur Correction wegen des Luftwiderstandes in Dr nöthig.

Die erhaltenen Werthe von α wurden noch mit Hülfe der Brunner'schen Formel:

$$\alpha_t = \alpha_0 (1 - 0,001 866 t)$$

auf 16° reducirt, aber dies ist zum Theil überflüssig, weil bei diesen Versuchen die Temperatur der Oberfläche wegen der Verdampfung beim Fall doch um eine unbekannte An-

zahl Grade erniedrigt wurde. Ich habe deswegen noch in Tab. IV einige Versuche mitgetheilt, bei welchen dieser Umstand wegfällt.

Vergleicht man die in den mit verschiedenen Amplituden unter sonst nahe gleichen Umständen angestellten ersten sechs Versuchen der Tab. III erhaltenen α und bemerkt dazu, dass auch ohne Stäbchen die Amplitude nur $\frac{1}{6}$ beträgt, so sieht man, dass die Amplituden, in denen diese von Röhren einzeln abfallenden Tropfen schwingen, als verschwindend klein zu betrachten sind; ihre Grösse ist für die Schwingungsdauer bei der hier erreichten Genauigkeit gleichgültig und wurde daher in den weiteren Versuchen nicht mehr gemessen.

Die übrigen Versuche mit dem Apparat ohne Stäbchen sind nach der Ausflussgeschwindigkeit, die eine sehr verschiedene ist, geordnet, um die schon erwähnte Veränderlichkeit von α mit der Zeit hervortreten zu lassen. Der aufsteigenden Reihe der Zeiten in Col. 4 entspricht die ziemlich regelmässig absteigende Reihe der α in der letzten Columne, und diese Reihe wird auch dadurch nicht gestört, dass einige der Versuche mit einer Glasröhre angestellt sind, die statt des Papierstutzens ein senkrecht zur Axe abgeschliffenes Ende hatte. Sie war mit conc. Salpetersäure, Wasser und Alkohol gewaschen, während die Röhren mit Papierstutzen unter Wasser gereinigt wurden. Auch die sechs ersten, mit dem Stäbchen erhaltenen Werthe passen in diese absteigende Reihe der α .

In Tab. IV sind die Versuchsergebnisse an möglichst rasch sich bildenden Wassertropfen zusammengestellt, die durch ein Rohr fielen, in dem die Luft durch Befeuchten der Wände mit Wasserdampf gesättigt war. So war die Abkühlung der Oberfläche durch Verdampfung vermieden. Das 26 mm weite Rohr war sehr gleichmässig cylindrisch, sodass der Maassstab ausserhalb desselben aufgestellt werden konnte. Er bestand bei diesen Versuchen eigentlich nur aus einem Papierstreifen, der an die Röhre befestigt war, und auf welchem längs der Kante eines Schiebers mit dem Spiegel, Bleistiftmarken gezogen wurden. Dazu war auf den halbbe-

legten Spiegel eine horizontale Linie geritzt, welche beim Einstellen den betreffenden Reflex und das Pupillenbild halbirte. Die Abstände der Bleistiftmarken von der obersten sind, im Mittel, die in der Tabelle angegebenen Höhen. Die so erreichte Genauigkeit genügt vollkommen, da immer nur grosse Distanzen zu messen sind, denn die oberen Reflexe sind, wie schon oben erwähnt, unbrauchbar, weil sie nicht genau mit den flachsten Ellipsoiden zusammenfallen.

Tabelle IV.

Wassertropfen in gesättigtem Dampf.

Apparat mit Stäbchen.

Temp.	Zeitinter- vall zweier Tropfen	p	Höhen der Reflexe						α 16° C.
			Ref.	Höhe	Ref.	Höhe	Ref.	Höhe	
°C.	sec	g		cm		cm		cm	mg/mm
19,8	0,172	0,04888	0	0	6	23,52	12	74,44	7,286
					7	30,06	14	97,36	7,212
					8	37,21	16	122,76	7,168
14,9	0,231	0,06271	0	0	6	29,93	12	95,29	7,112
					7	38,38	14	124,90	7,022
16,9	0,240	0,06315	0	0	6	30,45	12	95,52	7,348
					7	38,61	14	125,28	7,120
17,3	0,240	0,06334	0	0	6	30,79	12	96,70	7,255
					7	39,45	14	126,65	7,172

Die Temperaturen sind wieder im Wasserbehälter gemessen; Wasser- und Lufttemperatur waren immer nahe gleich. α ist nach der oben angegebenen Formel auf 16° reducirt.

Die tieferen Reflexe haben kleinere Oberflächenspannungen ergeben, was ganz mit der oben besprochenen Abnahme der Spannung mit der Zeit übereinstimmt. Der Ausflussapparat war vor jedem der vier Versuche längere Zeit heissen Wasserdämpfen ausgesetzt.

Man könnte denken, dass diese Abnahme herrührt von dem langsamen Verschwinden der Abkühlung, welche mit der Bildung von Oberfläche verbunden ist, aber das ist nicht der Fall, denn diese Abkühlung ist sehr gering, sie besteht

bei Wasser, wie Sir W. Thomson aus dem Kreisproceſſe an einer Seifenblase gefolgert hat¹⁾, in der Entziehung einer Wärmemenge, die äquivalent ist etwa der halben Arbeit bei Bildung der Oberfläche, also in 1 qmm Oberfläche $(7,3 \cdot 10^{-9}) / (2 \cdot 426) = 0,0086 \cdot 10^{-9}$ Calorien, und würde diese Wärmemenge einzig nur einer Oberflächenschicht von 0,00005 mm Dicke (Radius der Wirkungssphäre) entzogen, so entstände eine Abkühlung um $0,0086 \cdot 10^{-9} / 0,00005 \cdot 10^{-6} = 0,17$ °C., welche die Oberflächenspannung nur um $0,0024 \frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ vergrößert, aber selbst eine stärkere Abkühlung einer so dünnen Schicht wäre durch Wärmeleitung in kaum messbarer Zeit schon verschwunden.

Vielmehr ist die Ursache der Abnahme der Oberflächenspannung wahrscheinlich auch hier in Verunreinigung der Oberfläche mit fremden Substanzen, die sich mit ihrer geringen Oberflächenspannung auf dem Wasser ausbreiten, zu suchen. Dafür sprechen folgende Versuche mit Seifenlösung. Die Tabelle ist ganz wie die vorige angeordnet.

Tabelle V.

Seifenlösung.

Apparat ohne Stäbchen, abgeschliffenes Glasrohr.

Temp.	Zeitinter- vall zweier Tropfen	ρ	Höhen der Reflexe						α 16° C.
			Refl.	Höhe	Refl.	Höhe	Refl.	Höhe	
° C.	sec	g		cm		cm		cm	mg/mm
15,4	0,254	0,02385	0	181,660	6	164,305	12	117,967	3,357
15,4	0,435	0,01812	0	181,875	7	162,527	14	112,510	3,244
15,5	1,111	0,01358	0	182,370	7	166,673	14	126,584	3,073

Diese Lösung, wovon 1 l nur 1 g Marseillerseife enthält, hat beinahe sämtliche physikalische Eigenschaften des Wassers unverändert bis auf eine gewisse Zähigkeit und kleine Spannung in der Oberfläche. Der kleineren Oberflächenspannung entsprechend gibt es weniger Substanzen, die sich auf Seifenlösung ausbreiten und deren Oberfläche verunreinigen können, als auf Wasser, was die gefundene geringere Veränderlichkeit von α bei dieser Lösung erklären

1) W. Thomson, Proc. Roy. Soc. 9. p. 255. 1858.

kann. Die in der Tabelle enthaltenen Werthe sind der Abkühlung durch Verdampfung wegen zu gross; nach Sondhauss' Methode des Abreissens eines Ringes fand ich $\alpha = 2,684 \text{ mg/mm}$, doch kam es hier auf absolute Bestimmung nicht an.

Alkohol, mit noch kleinerer Constante, ergab keine Aenderung der Oberflächenspannung mit der Zeit, wie der Vergleich der zwei Versuche mit den Zeitintervallen 0,32 und 1,23 Sec. in der folgenden Tabelle zeigt. Die einzelnen Columnen haben dieselbe Bedeutung wie in den vorigen Tabellen; die Constanten sind mit Hülfe der Formel $\alpha_t = \alpha_0 (1 - 0,00339 t)$ auf 16°C. bezogen.

Tabelle VI.

Alkoholtropfen in gesättigtem Dampf.

Spec. Gew. des Alkohols bei 19°C. $0,819 \text{ g/cm}^3$.

Temp.	Zeitintervall zweier Tropfen	p	Höhen der Reflexe						α 16°C.
			Refl.	Höhe	Refl.	Höhe	Refl.	Höhe	
Apparat ohne Stäbchen.									
$^\circ \text{C.}$	sec	g		cm	cm	cm	cm	mg/mm	
16,5	0,322	0,006 484	0	0	5	5,94	10	18,51	2,480
					6	7,46	12	25,68	2,481
					7	9,80	14	34,05	2,495
					8	12,36	16	43,34	2,500
					9	15,22	18	53,53	2,523
				10	18,51	20	65,00	2,537	
Apparat mit Stäbchen.									
11,4	1,23	0,01310	0	0	5	13,66	10	42,05	2,462
					6	18,21	12	56,38	2,580

Hier tritt aber ein anderer Umstand auf, der die Zunahme der α nach unten bewirkt, und da die Oberflächenspannung des Alkohols mit der Zeit nicht zunimmt, kann diese Vergrößerung nur eine scheinbare sein. Wahrscheinlich werden die Schwingungen der Alkoholtropfen durch Wirbelbewegungen gestört, von denen schon p. 231 gezeigt ist, dass sie in Alkohol viel leichter entstehen, als in Wasser. Da sich nicht feststellen lässt, inwieweit solche Bewegungen schon die oberen Reflexe beeinflussen, kann man auf die mit

Alkohol erhaltenen Werthe kein Gewicht legen. Es ist auch auffallend, dass bei Alkohol die totalen Reflexe schon in einer Tiefe von 1 m schwer zu sehen sind, während sie an Wassertropfen vom Dache eines stockhohen Hauses noch sehr auffallend hell sind. Versuche mit Alkohol in freier Luft ergaben ein kaum grösseres α , was ich mir dadurch erkläre, dass durch die Wirbelbewegungen Oberfläche und Inneres der Tropfen immerfort ausgetauscht und so eine Abkühlung der Oberfläche durch Verdampfung vermieden wurde.

Zwei mit Quecksilber angestellte Versuche ergaben folgende Resultate:

Tabelle VII.

Quecksilber.

Apparat ohne Stäbchen; abgeschliffenes Glasrohr.

Temp.	Zeitintervall zweier Tropfen	Anzahl der Schwing.	T	p	α
°C.	sec		sec	g	$\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$
17,8	0,39489	20	0,019 745	0,15164	46,72
18,3	0,40648	20 + $\frac{2}{3}$	0,019 590	0,15169	47,48
Mittel					47,10,
					$\alpha^2 = 6,948 \text{ qmm}$

Der Apparat zu diesen Versuchen war ganz der zur Untersuchung des Luftwiderstandes angewandte, nur fehlte die Messlatte, und statt der Höhen der durch die Funken beleuchteten Tropfen wurde ihre Form beobachtet. Dabei war der Zufluss des Quecksilbers so regulirt, dass der oberste und zweite Tropfen eine bestimmte Phase der Schwingung hatte — so waren im ersten Versuch beide Tropfen kugelförmig, im zweiten der obere ein Ellipsoid im Maximum der Dehnung, der untere eine Kugel —, wieviel ganze Schwingungen sich zwischen diesen beiden Phasen befanden, konnte man an den periodischen Lichterscheinungen abzählen, die bei beliebiger Beleuchtung der Tropfen sichtbar sind. Es waren in beiden Versuchen 20. Die Zeit zwischen zwei Tropfen wurde hier sehr genau dadurch bestimmt, dass der

Tropfenunterbrecher ausser dem primären Strom des Funkeninductors auch noch den Strom eines Zeitregistrirapparates öffnete oder eigentlich mittelst Relais schloss. So konnte man dieses Zeitintervall vom Papierstreifen des Registrirapparates nach den Secundenpunkten genau bestimmen. Mit der Anzahl der Schwingungen dividirt, gibt es die Schwingungsdauer T , aus welcher mittelst des Tropfengewichtes p α berechnet wird. Der Luftwiderstand kommt bei dieser Versuchsanordnung gar nicht in Betracht. Das Quecksilber war in der Art gereinigt, wie es Professor Quincke zu seinen Versuchen über die Ausbreitung ausführte¹⁾, in dasselbe tauchte ein Platindraht, der etwa während des Versuchs entstandene Electricität zur Erde ableiten konnte.

8. In diesem Abschnitt habe ich nur noch zurückzukommen auf zwei Umstände: die innere Reibung und die Electricität, von denen zu zeigen ist, dass sie keinen Einfluss auf die mitgetheilten Resultate hatten.

Die innere Reibung der Flüssigkeit dämpft die Schwingungen der Tropfen und ändert so die Amplitude sowohl als auch die Schwingungsdauer. Man kann aus der Aenderung der ersteren die der letzteren berechnen.

Haben die Schwingungen das logarithmische Decrement λ , so sind die Amplituden durch:

$$a_2 = A e^{-\lambda \frac{t}{T}} \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} \right)$$

dargestellt, und es ist daher ($n = 2$) die potentielle Energie der Oberflächen:

$$P = \frac{8}{5} \pi \alpha A^2 e^{-2\lambda \frac{t}{T}} \cos^2 \left(2 \pi \frac{t}{T} \right),$$

die kinetische der Massentheile:

$$K = \frac{1}{5} \pi \sigma a^3 \frac{A^2}{T^2} e^{-2\lambda \frac{t}{T}} \left[2 \pi \sin \left(2 \pi \frac{t}{T} \right) + \lambda \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} \right) \right]^2.$$

K wird ein Minimum, $k = 0$, zur Zeit $t_0 = T/2 \pi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \lambda/2 \pi$ einer Lösung der Gleichung:

1) Quincke, Pogg. Ann. **139**. p. 66. 1870.

$$2\pi \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + \lambda \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = 0.$$

Der höchste Werth von K , bestimmt durch $\partial k / \partial t = 0$, tritt ein, wenn $t = T/4, 3T/4, \dots$. Es ist also, da:

$$\cos^2\left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2\pi}\right) = \frac{4\pi^2}{4\pi^2 + \lambda^2}$$

$$\begin{aligned} \text{zur Zeit } t=t_0 \quad P_0 &= \frac{8}{5} \pi \alpha A^2 e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2\pi}} \cdot \frac{4\pi^2}{4\pi^2 + \lambda^2}, \quad K=0 \\ \text{,, } \quad t = \frac{T}{4} \quad P_{1/4} &= 0, \quad K_{1/4} = \frac{4}{5} \pi^3 \sigma \alpha^3 \frac{A^2}{T^2} e^{-} \\ \text{,, } \quad t = t_0 + nT \quad P_n &= \frac{8}{5} \pi \alpha A^2 e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2\pi} - n\lambda} \cdot \frac{4\pi^2}{4\pi^2 + \lambda^2}, \quad K=0. \end{aligned}$$

Die Energiemenge, welche während den Schwingungen durch die Reibung in Wärme überging, ist daher:

$$P_0 + K_0 - P_n - K_n = \frac{8}{5} \pi \alpha A^2 e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2\pi}} \cdot \frac{4\pi^2}{4\pi^2 + \lambda^2} \left(1 - e^{-2n\lambda}\right).$$

Erwägt man nun, dass schon während einer Viertelschwingung die Massentheile des Tropfens alle Geschwindigkeiten, von denen ja die Reibung abhängt, durchlaufen, dass also die Energieverluste der Viertelschwingungen demselben Gesetze folgen, wie die der ganzen Schwingungen, so hat man die im Zeitraum $(T/4) - t_0$ verwandelte Energiemenge, indem man $n = (T/4 - t_0)/T$ setzt:

$$w = \frac{8}{5} \pi \alpha A^2 e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2\pi}} \cdot \frac{4\pi^2}{4\pi^2 + \lambda^2} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2\pi}}\right).$$

Nun ist dem Princip der Erhaltung der Energie zufolge:

$$P_0 + K_0 = P_{1/4} + K_{1/4} + w$$

und daraus, indem alle Exponentialgrößen wegfallen:

$$(I) \quad T^2 = \frac{8}{5} \pi \frac{p}{\alpha g} \cdot \frac{4\pi^2 + \lambda^2}{4\pi^2},$$

wo wieder p das Tropfengewicht, $\frac{4}{3} a^3 \pi \sigma g$, bezeichnet. $(4\pi^2 + \lambda^2)/4\pi^2$ ist der Factor, der durch die Reibung hinzukam.

Die folgende Tabelle enthält Beobachtungen über das

logarithmische Decrement λ , die beweisen, dass der Factor, der die Ueberschrift der letzten Columne bildet, so nahe = 1 ist, dass es ganz weggelassen werden konnte. Bei zähen Flüssigkeiten ist dies bei weitem nicht der Fall. Leinöl gibt, obwohl dessen Dichte und Oberflächenspannung von der des Alkohols nicht viel verschieden ist, innerhalb der Höhe eines Meters nur einen einzigen Reflex, so sehr werden die Schwingungen hier durch die innere Reibung verlangsamt.

Tabelle VIII.

Flüssigkeit	p	Amplituden	λ	$\frac{4\pi^2 + \lambda^2}{4\pi^2}$	
Wasser	0,05	1. Schwingung	0,190	0,0185	—
		11. „	0,158		
„	0,06	1. „	0,200	0,0268	—
		11. „	0,153		
„	0,04	1. „	0,173	0,0216	—
		16. „	0,125		
„ (Photogr. Abb.)	0,09	1. „	0,20	0,0391	—
		10. „	0,14		
Seifenlösung	0,023	1. „	0,192	0,0659	—
		12. „	0,093		
„	0,018	1. „	0,215	0,0574	—
		13. „	0,108		
Alkohol	0,0066	1. „	0,187	0,0772	1,000 151
		12. „	0,080		
„	0,004	1. „	0,150	0,0592	—
		11. „	0,083		
Quecksilber	0,15	1. „	0,18	0,0203	—
		21. „	0,12		

λ ist nach seiner Definitionsgleichung:

$$e^{\lambda^2} = \sqrt{\frac{n_2 - n_1}{\text{Amplitude d. } n_1 \text{ten Schwingung}}}{\text{Amplitude d. } n_2 \text{ten Schwingung}}$$

berechnet, aus welcher ersichtlich, dass es gleichgültig ist, ob die Amplituden als absolute Längen oder im Verhältnisse zu einer constanten Länge gemessen sind. Der Werth der letzten Columne ist nur für das grösste λ berechnet, für die übrigen wäre er noch näher 1.

Im Verlauf dieser Untersuchungen ist die Electricität oft benutzt worden, um die Formen der Tropfen zu studiren. Es ist aber bekannt, dass Electricität die Oberflächenspannung verringert. Nähert man dem Ausflussapparat einen electricischen Körper oder ladet ihn statt durch Vertheilung durch Berührung, so fallen die Tropfen viel schneller nacheinander, also kleiner ab. Dabei fällt es auf, dass alle totalen Reflexe ihre Orte beibehalten, solange das Abtropfen nicht durch allzu hohe Spannungen unregelmässig wird, dass also die Schwingungsdauer der Tropfen sich nicht ändert. Ganz dieselbe Unveränderlichkeit der Schwingungsdauer wird beobachtet, wenn man im Ausflussapparat zwischen dem engen Rohr, das die Ausflussgeschwindigkeit regulirt, und der Mündung des Rohres eine horizontale Metallröhre einschaltet und diese mit einer Flamme langsam erhitzt: wenn die Tropfen schon dampfen und sich bedeutend verkleinert haben, sind die totalen Reflexe noch immer an ihren Stellen geblieben. Diese Erscheinungen sind ein schöner experimenteller Beweis dafür, dass die Tropfengewichte eines und desselben Ausflussrohres proportional α sind¹⁾, denn wenn die Schwingungsdauer:

$$T = \sqrt{\frac{3}{8} \pi \frac{p}{g \alpha}},$$

unverändert bleibt, während α (durch Electricität oder Wärme) verändert wird, muss sich p proportional mit α ändern; alle übrigen Grössen sind ja Constanten. Es ist noch zu beweisen, dass die Beleuchtungsfunken des Inductors die Oberflächenspannung nicht geändert haben; dies kann durch folgenden Versuch geschehen:

Tropfengew. ohne electr. Einfluss (aus 50 Tropfen) 0,05316 g,
 Tropfengew., wenn die Funken, etwas unterhalb der
 Rohrmündung, 10 cm von den Tropfen ent-
 fernt, überspringen 0,05321 g,
 woraus zu sehen ist, dass das Tropfengewicht, also auch die
 Oberflächenspannung unverändert blieb.

1) vgl. Quincke, Pogg. Ann. 135. p. 626. 1868.

Zum Schluss bleibt mir nur noch die Erfüllung der angenehmen Pflicht übrig, meinen verehrten Lehrern, Geheimrath H. von Helmholtz und Professor G. Quincke meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen für die Theilnahme und Unterstützung, welche sie mir bei meiner Arbeit zu Theil werden liessen.

Heidelberg, Juni 1886.

II. Ueber die Bestimmung der specifischen Gewichte einiger Gemische von Aethylalkohol und Kohlensäure; von Ad. Blümcke.

(Aus dem physikal. Laborat. der techn. Hochschule in München.)

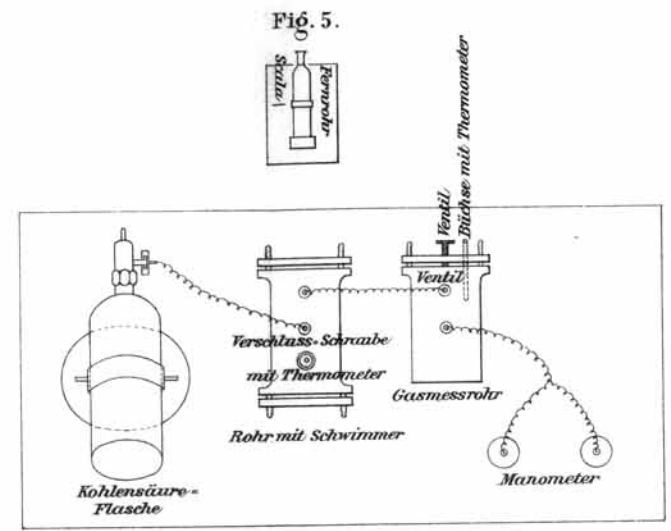
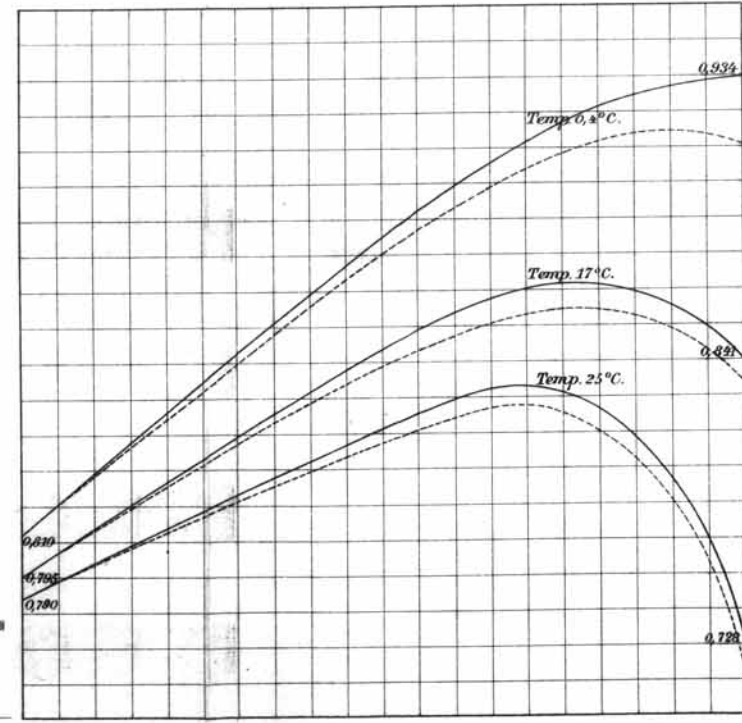
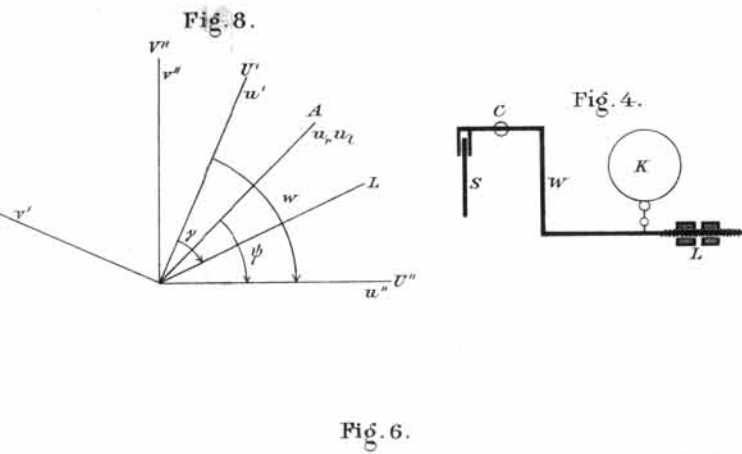
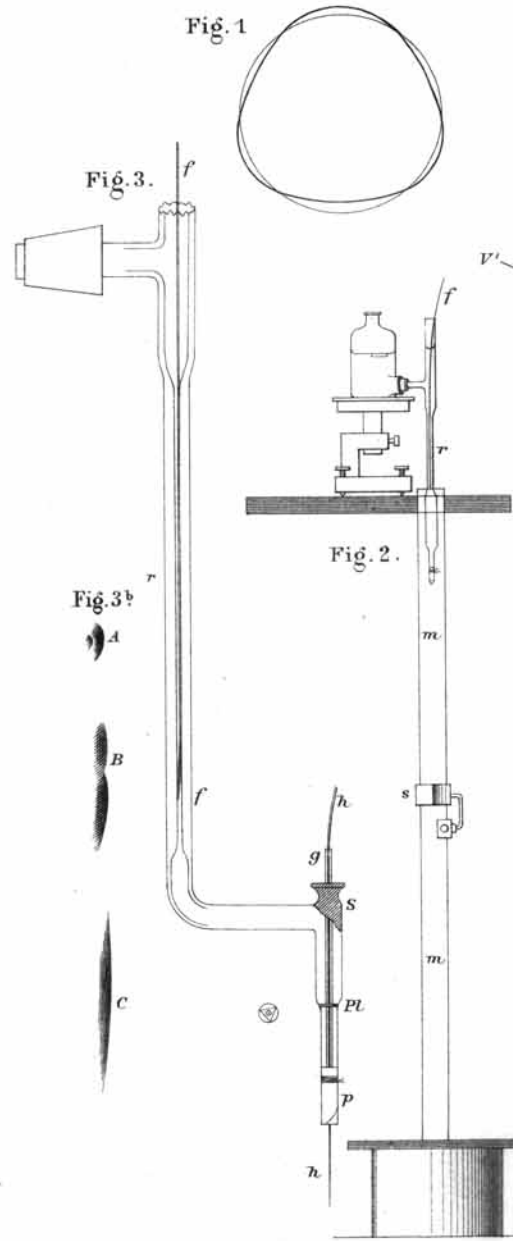
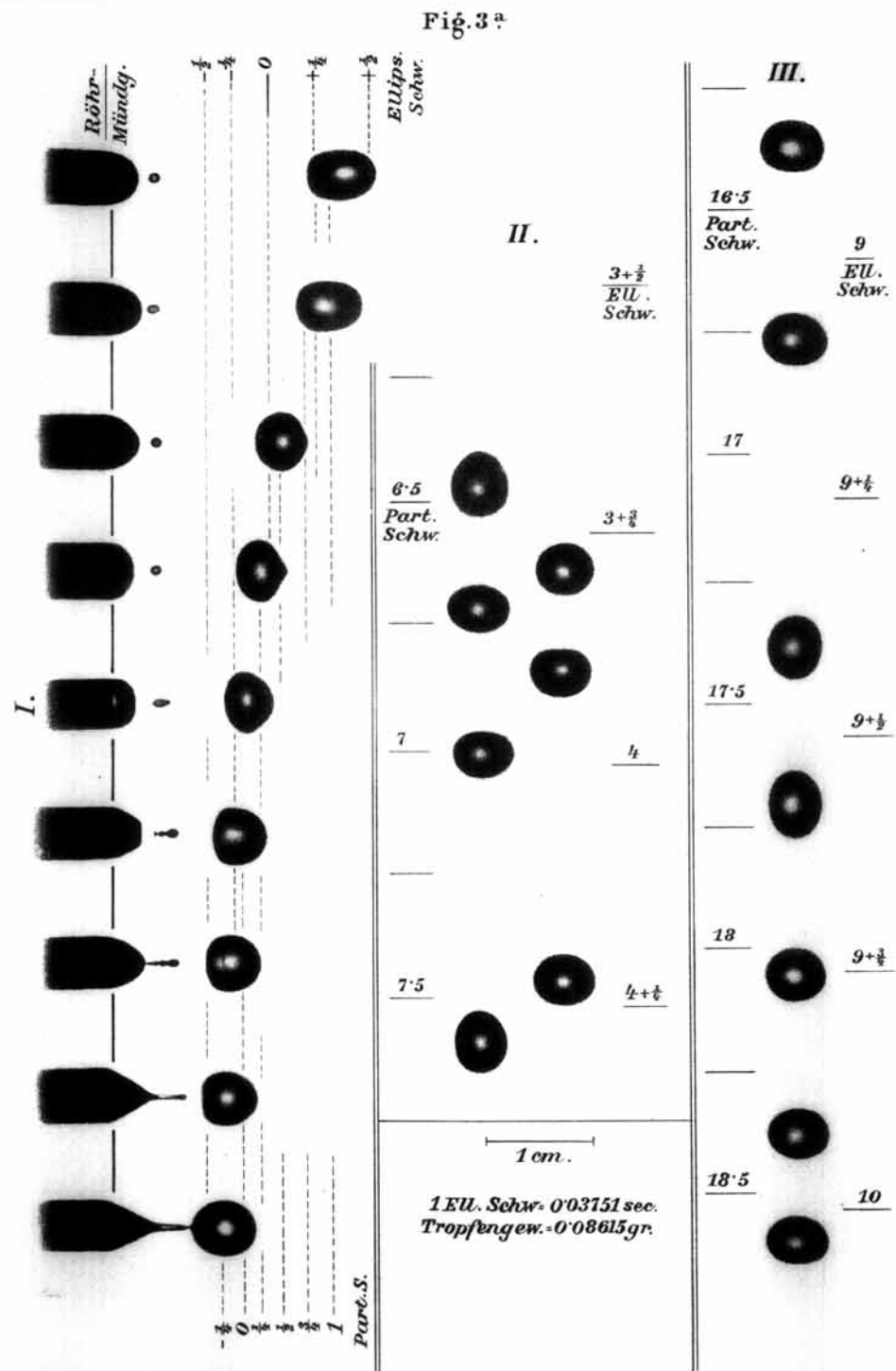
(Hierzu Taf. III Fig. 4–7.)

Vor einiger Zeit veröffentlichte ich ein auf einer einfachen Verwendung des archimedischen Princips beruhendes Verfahren zur Bestimmung des spec. Gewichts von Flüssigkeiten, welche nur unter hohen Drucken bestehen können.¹⁾

In der vorliegenden Arbeit habe ich dasselbe auf Gemische von Aethylalkohol und Kohlensäure angewendet.

Die einzelnen Theile der Versuchsvorrichtung erlitten einige geringfügige Aenderungen: Der Schwimmer erhielt das aus der Abbildung ersichtliche Aussehen. Fig. 4. Der zweifach gebogene Neusilberdraht *W*, welcher um eine Axe bei *C* drehbar war, trug auf der einen Seite den von drei Federn gehaltenen Spiegel *S*, auf der anderen die an einem dünnen Drahte befestigte gläserne Hohl-Kugel *K* und das verschraubbare, mit einer Gegenmutter feststellbare Laufgewicht *L*, durch dessen passende Stellung dem Schwimmer jede erwünschte Anfangsstellung gegeben werden kann. Die Aichung des Schwimmers geschah mit Hülfe von Wasser-Alkoholmischungen von bekannter Dichte bei den Temperaturen, welche bei den Kohlensäuremischungen in Anwendung kamen. Die specifischen Gewichte dieser Vergleichsflüssigkeiten wurden bei der Zimmertemperatur be-

1) A. Blümcke, Wied. Ann. 23. p. 404. 1884.



Lenard Fig. 1-3^b Blümcke Fig. 4-7. Hecht Fig. 8.