fallsebene senkrecht steht, ganz analog der hier durchgeführten, und endlich erhellt aus der Form der Fortpflanzungsgesetze, dass jede Spur einer Einwirkung verschwindet, wenn das Licht in den Magnet senkrecht zur Axe eintritt.[1])

Bonn, im November 1882.

VIII. *Zur Theorie der Lichtstrahlen; von G. Kirchhoff.*

(Aus den Berl. Ber. vom 22. Juni 1882 mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Die Schlüsse, durch welche man, hauptsächlich gestützt auf Betrachtungen von Huygens und Fresnel, die Bildung der Lichtstrahlen, ihre Reflexion und Brechung, sowie die Beugungserscheinungen zu erklären pflegt, entbehren in mehrfacher Beziehung der Strenge. Eine vollkommen befriedigende Theorie dieser Gegenstände aus den Hypothesen der Undulationstheorie zu entwickeln, scheint auch heute noch nicht möglich zu sein; doch lässt sich jenen Schlüssen eine grössere Schärfe geben. Ich erlaube mir, der Academie Auseinandersetzungen vorzulegen, welche hierauf abzielen, und deren wesentlichen Inhalt ich in meinen Universitätsvorlesungen seit einer Reihe von Jahren vorgetragen habe. Das gleiche Ziel in Bezug auf die Beugungserscheinungen ist inzwischen in einigen veröffentlichten Abhandlungen von den Herren Fröhlich[2]) und Voigt[3]) verfolgt.

§ 1. Es soll angenommen werden, dass das Licht in Transversalschwingungen des Aethers besteht, und der Aether in Bezug auf diese in dem Mittel, in dem die Lichtbewegung betrachtet wird, sich wie ein fester elastischer, isotroper

---

1) Im ersten Theile dieser Abhandlung sind die irrthümlich stehen gebliebenen Passus p. 418 Z. 17—39 und p. 419 Z. 15—21 zu streichen.

2) Fröhlich, Wied. Ann. **3.** p. 376. 1878; **6.** p. 414. 1879 u. **15.** p. 592. 1881.

3) Voigt, Wied. Ann. **3.** p. 532. 1878.

und homogener Körper verhält, auf dessen Theile keine anderen Kräfte wirken, als die durch die relativen Verrückungen hervorgerufenen. Sind u, v, w die Componenten nach den Coordinatenaxen der Verrückung eines Aethertheilchens, dessen Gleichgewichtslage die Coordinaten x, y, z hat, zur Zeit t, so genügt dann jede dieser Grössen der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi, \tag{1}$$

wo Δ die Summe der zweiten Differentialquotienten nach x, y, z, und a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes bedeutet. Doch dürfen nicht beliebige Lösungen dieser Gleichung u, v, w gleichgesetzt werden, da auch:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

sein muss. Sind U, V, W beliebige Lösungen derselben, so entspricht aber:

$$u = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \tag{2}$$

einer möglichen Lichtbewegung, und umgekehrt gibt es für jede Lichtbewegung Functionen U, V, W, die diesen Gleichungen genügen.[1]) Es soll im Folgenden unter φ eine der Grössen U, V, W oder u, v, w verstanden werden. T sei die Schwingungsdauer des als homogen vorausgesetzten Lichtes, dann ist jede dieser sechs Grössen eine lineare, homogene Function von:

$$\cos\frac{t}{T}2\pi \quad \text{und} \quad \sin\frac{t}{T}2\pi.$$

Als Maass für die Intensität des Lichtes im Punkte (x, y, z) soll das arithmetische Mittel der Werthe genommen werden, welche:

$$u^2 + v^2 + w^2$$

während der Zeit T erhält, d. h. wenn man:

$$u = \mathfrak{u}\cos\frac{t}{T}2\pi + \mathfrak{u}'\sin\frac{t}{T}2\pi, \qquad v = \mathfrak{v}\cos\frac{t}{T}2\pi + \mathfrak{v}'\sin\frac{t}{T}2\pi,$$

$$w = \mathfrak{w}\cos\frac{t}{T}2\pi + \mathfrak{w}'\sin\frac{t}{T}2\pi$$

setzt, $\quad \frac{1}{2}(\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{u}'^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{v}'^2 + \mathfrak{w}^2 + \mathfrak{w}'^2).$

1) Clebsch in Borchard's Journ. **61.** p. 195. 1862.

Ist der ganze unendliche Raum von dem betrachteten Medium erfüllt, befindet sich in demselben ein leuchtender Punkt an dem Orte des Punktes 1, dessen Coordinaten x_1, y_1, z_1 sind, und bezeichnet man durch r_1 den Abstand der Punkte (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) voneinander, durch λ die Wellenlänge des Lichtes, d. h. das Product aT, so ist die einfachste Annahme, die man über φ machen kann, und die erlaubt ist, wenn man unter φ eine der drei Grössen U, V, W versteht:

$$\varphi = \frac{1}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi. \tag{3}$$

Aus diesem Ausdruck von φ kann man einen allgemeineren, der auf denselben Fall sich bezieht, ableiten, indem man zu ihm einen constanten Factor, zu t eine additive Constante hinzufügt, nach x_1, y_1 oder z_1 einmal oder wiederholt differentiirt und die Summe so gebildeter Ausdrücke nimmt. Das Resultat dieser Operation vereinfacht sich wesentlich, wenn man die Annahme einführt, die für die Optik von fundamentaler Bedeutung ist, dass die Wellenlänge λ als unendlich klein betrachtet werden darf. Man erhält dadurch, indem man nur die Glieder höchster Ordnung berücksichtigt:

$$\varphi = \frac{D}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi + \frac{D'}{r_1} \sin\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi, \tag{4}$$

wo D und D' von $\partial r_1/\partial x_1$, $\partial r_1/\partial y_1$, $\partial r_1/\partial z_1$, oder, was dasselbe ist, von $\partial r_1/\partial x$, $\partial r_1/\partial y$, $\partial r_1/\partial z$, d. h. von der Richtung der Linie r_1 abhängen, im übrigen aber constant sind. Ausdrücke von derselben Form gelten dann nach (2) auch für u, v, w; bezeichnet man die Werthe von D und D' für den Fall, dass $\varphi = u$, $= v$ oder $= w$ gesetzt wird, durch A, A', B, B' oder C, C', lässt also diese sechs Zeichen Grössen bedeuten, die von der Richtung der Linie r_1 abhängen, im übrigen aber constant sind, so wird die Intensität des Lichtes im Punkte (x, y, z):

$$= \frac{1}{2r_1^2} (A^2 + A'^2 + B^2 + B'^2 + C^2 + C'^2).$$

Dadurch ist ausgesprochen, dass diese Intensität dem Quadrate der Entfernung vom leuchtenden Punkte umgekehrt proportional ist, dabei aber mit der Richtung der Linie r_1 in einer Weise variirt, die durch die Bewegung im leuchtenden Punkte bedingt ist.

Ein leuchtender Punkt, wie der gedachte, soll bei den folgenden Betrachtungen als Lichtquelle vorausgesetzt, und es soll untersucht werden, wie das von ihm ausgehende Licht durch einen fremdartigen Körper, der in seine Nähe gebracht ist, modificirt wird. Ein wesentliches Hülfsmittel bei dieser Untersuchung wird ein Satz darbieten, den die Anwendung des Green'schen Satzes auf Functionen, die der für φ aufgestellten Differentialgleichung genügen, ergibt, und der eine Präcisirung und eine Verallgemeinerung des sogenannten Huygens'schen Principes bildet. Hr. Helmholtz hat denselben schon in seiner „Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden"[1]) abgeleitet und seine Wichtigkeit gezeigt; es soll dieser Satz auf einem anderen Wege und in einer anderen Form in dem folgenden Paragraphen entwickelt werden.

§ 2. Sind $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ zwei Functionen von x, y, z, die mit ihren ersten Differentialquotienten nach x, y, z innerhalb eines vollständig begrenzten Raumes (der auch aus mehreren getrennten Theilen bestehen kann) eindeutig und stetig sind, ist $d\tau$ ein Element dieses Raumes, ds ein Element seiner Oberfläche (die gleichfalls aus getrennten Theilen zusammengesetzt sein kann) und N die nach dem Inneren des Raumes gerichtete Normale von ds, so ist nach dem Green'schen Satze:

$$\int ds\left(\mathfrak{U}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N} - \mathfrak{V}\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial N}\right) = \int d\tau\,(\mathfrak{V}\Delta\mathfrak{U} - \mathfrak{U}\Delta\mathfrak{V}).$$

Hier setze man $\mathfrak{U} = \varphi$ und nehme in Bezug auf $\mathfrak{V}$ zunächst an, dass es auch der Gleichung (1) genügt. Man erhält dann:

$$\int ds\left(\varphi\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N} - \mathfrak{V}\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) = \frac{1}{a^2}\int d\tau\left(\mathfrak{V}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \varphi\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial t^2}\right)$$

$$\text{oder} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\int d\tau\left(\mathfrak{V}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}\right).$$

1) Helmholtz, Borchardt's Journ. 57. p. 1. 1859.

Diese Gleichung multiplicire man mit dt und integrire zwischen zwei Werthen der Zeit, von denen der eine negativ, der andere positiv ist, und die $-t'$ und t'' genannt werden mögen. Bei einer gebräuchlichen Bezeichnungsweise ergibt sich dadurch:

$$(5) \quad \int_{-t'}^{t''} dt \int ds \left(\varphi \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N} - \mathfrak{V} \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) = \frac{1}{a^2} \left[\int d\tau \left(\mathfrak{V} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}\right)\right]_{-t'}^{t''}.$$

Nun sei: $$\mathfrak{V} = \frac{F(r_0 + at)}{r_0},$$

wo r_0 die Entfernung des Punktes (x, y, z) von einem beliebig gewählten Punkte, dem Punkte o, bedeutet und F eine Function ist, die für jeden endlichen, positiven oder negativen, Werth ihres Arguments verschwindet, nie negativ ist und der Bedingung genügt, dass:

$$(6) \quad \int F(\zeta)\, d\zeta = 1,$$

wenn die Integration von einem endlichen negativen bis zu einem endlichen positiven Werthe von ζ ausgedehnt wird.

Es sei jetzt ein vollständig begrenzter Raum gegeben, der von homogenem Aether erfüllt und frei von leuchtenden Punkten ist; s sei seine Oberfläche und ds ein Element derselben. Der Punkt o werde im Inneren des Raumes angenommen und die Gleichung (5) auf den Raum angewandt, der von jenem übrig bleibt, wenn eine unendlich kleine Kugel, deren Mittelpunkt der Punkt o ist, ausgeschlossen wird. dS sei ein Element der Oberfläche dieser Kugel. Es sei t' so gross gewählt, dass:

$$r_0 - at'$$

für den grössten Werth, den r_0 in der Fläche s, also überhaupt in dem gedachten Raume, erhält, negativ und endlich ist; unter dieser Bedingung kommen auf der rechten Seite der Gleichung (5) nur Werthe von $\mathfrak{V}$ und $\partial \mathfrak{V}/\partial t$ vor, für welche $r_0 + at$ endlich, positiv oder negativ ist, und welche daher verschwinden. Die Gleichung (5) gibt daher:

$$(7) \quad \int_{-t'}^{t''} dt \int ds \left(\varphi \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N} - \mathfrak{V} \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) + \int_{-t'}^{t''} dt \int dS \left(\varphi \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N} - \mathfrak{V} \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) = 0.$$

Das zweite von diesen beiden Integralen lässt sich ausführen. Bezeichnet man durch R den Radius der unendlich kleinen Kugel, auf die es sich bezieht, und vernachlässigt bei der Berechnung des mit dS multiplicirten Ausdrucks, was mit R^2 multiplicirt unendlich Kleines gibt, so kann man setzen:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial N} = -\frac{1}{R^2} F(at), \qquad \mathfrak{B} = 0,$$

also:

$$\int dS \left(\varphi \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial N} - \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) = -4\pi \varphi_0 F(at),$$

wo φ_0 den Werth von φ für den Punkt o bedeutet. Da ferner $F(at)$ nur für unendlich kleine Werthe von t von Null verschieden und der Gleichung (6) zufolge:

$$\int_{-t'}^{t''} dt\, F(at) = \frac{1}{a}$$

ist, so wird das zweite Glied der Gleichung (7):

$$-\frac{4\pi}{a} \varphi_0(o),$$

wo $\varphi_0(o)$ den Werth von φ_0 für $t = 0$ bezeichnet. Auch bei ihrem ersten Gliede lässt sich die Integration nach t mit Hülfe der Gleichung (6) ausführen. Zunächst hat man:

$$a \int_{-t'}^{t''} dt\, \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi}{\partial N} = a \int_{-t'}^{t''} dt \frac{F(r_0 + at)}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial N},$$

wo in $\partial \varphi / \partial N$ nach Ausführung der Differentiation:

$$t = -\frac{r_0}{a}$$

zu setzen ist. Macht man:

$$(8) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = f(t),$$

so wird dieser Ausdruck also:

$$\frac{1}{r_0} f\left(-\frac{r_0}{a}\right).$$

Ferner ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial N} = \frac{\partial \frac{F(r_0 + at)}{r_0}}{\partial N} = \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N} F(r_0 + at) + \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \frac{1}{a} \frac{\partial F(r_0 + at)}{\partial t};$$

und daher:

$$a\int_{-t'}^{t''} dt\,\varphi\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N} = \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N}\varphi\left(-\frac{r_0}{a}\right) + \frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\int_{-t'}^{t''}\varphi\frac{\partial F(r_0+at)}{\partial t}dt,$$

wo $\varphi(-r_0/a)$ den Werth von φ für $t = -r_0/a$ bedeutet. Formt man das letzte Integral durch partielle Integration um und erwägt, dass die Function F für jeden endlichen Werth ihres Arguments verschwindet, so findet man denselben Ausdruck:

$$= \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N}\varphi\left(-\frac{r_0}{a}\right) - \frac{1}{a}\frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

wo in $\partial\varphi/\partial t$ ebenfalls $t = -r_0/a$ zu setzen ist. Substituirt man diese Resultate in die Gleichung (7) und verlegt zugleich den Anfangspunkt der Zeit so, dass der bisherige Anfangspunkt der Zeitpunkt t wird, so erhält man:

$$(9)\quad 4\pi\varphi_0(t) = \int ds\left\{\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N}\varphi\left(t-\frac{r_0}{a}\right) - \frac{1}{a}\frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r_0}{a}\right)}{\partial t} - \frac{1}{r_0}f\left(t-\frac{r_0}{a}\right)\right\}.$$

Die beiden ersten Glieder des hier mit ds multiplicirten Ausdrucks lassen sich in das eine:

$$\frac{\partial}{\partial N}\frac{\varphi\left(t-\frac{r_0}{a}\right)}{r_0}$$

zusammenziehen, wo die Differentiation so auszuführen ist, dass nur r_0 als variabel angesehen wird, den Grössen, von denen $\varphi(t)$ abhängt, aber die Werthe gelassen werden, die ihnen in dem Elemente ds zukommen. Man hat hiernach:

$$(10)\qquad 4\pi\varphi_0(t) = \int ds\,\Omega, \qquad \text{wo:}$$

$$(11)\qquad \Omega = \frac{\partial}{\partial N}\frac{\varphi\left(t-\frac{r_0}{a}\right)}{r_0} - \frac{f\left(t-\frac{r_0}{a}\right)}{r_0},$$

und wo die Function f durch (8) definirt ist.

Hieraus ist zu schliessen, dass die Bewegung des Aethers in dem von der Fläche s umschlossenen Raume angesehen werden kann als hervorgebracht von einer Schicht von leuchtenden Punkten in der Fläche s, da ein jedes von den beiden

Gliedern, aus denen Ω zusammengesetzt ist, sich bezeichnen lässt als einem leuchtenden Punkte entsprechend, der am Orte von ds sich befindet.

Die folgende Betrachtung beweist, dass unter einer gewissen Bedingung, die später immer als erfüllt angenommen werden soll, die Gleichung (10) auch gilt, wenn die leuchtenden Punkte innerhalb des von der Fläche s umschlossenen Raumes liegen, und der Punkt o ausserhalb desselben sich befindet; nur muss die Normale N dann nach aussen gekehrt sein. Man wende in diesem Falle die Gleichung (10) auf den Raum an, der nach innen durch die Fläche s, nach aussen durch eine unendlich grosse Kugelfläche begrenzt ist, deren Element dS genannt werden möge. Man erhält dadurch:

$$4\pi\varphi_0(t) = \int ds\,\Omega + \int dS\,\Omega.$$

Nun nehme man an, dass bis zu einem gewissen, endlichen Werthe der Zeit überall Ruhe herrsche, sodass für unendlich grosse, negative Werthe von t überall, also auch an der unendlich grossen Kugel, $\varphi(t)$ und $f(t)$ verschwinden. Wählt man den Punkt o im Endlichen und fasst nur endliche Werthe der Zeit ins Auge, so verschwindet dann Ω für jedes Element dS, weil hier $t - r_0/a$ negativ unendlich ist; man erhält also die Gleichung (10). Die Beschränkung, dass der Punkt o im Endlichen liegen und die Zeit endlich sein soll, ist dabei nur eine scheinbare; welches die Lage des Punktes o und der Werth von t sein möge, man kann den Radius der Kugel so gross wählen. dass die angestellte Betrachtung ihre Gültigkeit behält.

Wendet man die Gleichung (10) auf zwei geschlossene Flächen an, die einen Theil gemeinsam haben und beide den Punkt o, aber nicht die leuchtenden Punkte — oder auch die leuchtenden Punkte, aber nicht den Punkt o — umschliessen, und zieht die Resultate, die man dadurch erhält. voneinander ab, so sieht man. dass das Integral $\int ds\,\Omega$, ausgedehnt über eine geschlossene Fläche, welche weder die leuchtenden Punkte noch den Punkt o umgibt, verschwindet. Es verschwindet auch für eine geschlossene Fläche, welche den Punkt o und die leuchtenden Punkte umgibt, wie man er-kennt, wenn man die Gleichung (10) für zwei geschlossene Flächen bildet, die einen gemeinsamen Theil haben, und von denen die eine den Punkt o und nicht die leuchtenden Punkte, die andere die leuchtenden Punkte und nicht den Punkt o umgibt.

Die Anwendung, die von der Gleichung (10) bei dem vorliegenden, am Ende des vorigen Paragraphen bezeichneten Problem zu machen ist, liegt auf der Hand. Man denke sich in dem homogenen Aether, der den unendlichen Raum erfüllt, einen leuchtenden Punkt 1; auf die Bewegung, die er hervorbringt, beziehe sich die Function φ^*. Wird ein fremdartiger Körper in den Raum gebracht, so wird die Bewegung geändert; es werde dadurch φ aus φ^*; es handelt sich darum, φ zu ermitteln für irgend einen Punkt o, der ausserhalb des Körpers liegt. Es sei ds ein Element der Oberfläche des Körpers, dS ein Element einer unendlich kleinen Kugelfläche, die um den leuchtenden Punkt beschrieben ist; der Gleichung (10) zufolge ist dann:

$$4\pi\varphi_0 = \int dS\,\Omega + \int ds\,\Omega.$$

Das erste dieser beiden Integrale hat einen leicht angebbaren Werth. Die Aenderung der Bewegung an dem Elemente dS, die durch die Einführung des Körpers hervorgerufen wird, ist (bei Ausschluss eines gewissen, speciellen Falles) nicht unendlich gross, und da die Kugelfläche, der dS angehört, unendlich klein ist, so ist ihr Einfluss auf den Werth des Integrals unendlich klein. Es kann in diesem also φ^* für φ gesetzt werden, wodurch dasselbe nach der Gleichung (10) $= 4\pi\varphi_0{}^*$ wird, wenn $\varphi_0{}^*$ den Werth von φ^* im Punkte o bezeichnet. Man hat daher:

$$4\pi\varphi_0 = 4\pi\varphi_0{}^* + \int ds\,\Omega. \tag{12}$$

Nach dieser Gleichung kann φ_0 allgemein berechnet werden, wenn man φ^* und für die Oberfläche des Körpers die Werthe von φ und $\partial\varphi/\partial N$ kennt.

§ 3. Für die später anzustellenden Betrachtungen ist es nöthig, den Werth zu kennen, den das Integral $\int ds\,\Omega$, ausgedehnt über eine begrenzte Fläche, unter gewissen Bedingungen hat. Dieser Werth soll jetzt abgeleitet werden. Vorausgesetzt soll dabei werden, dass die Wellenlänge unendlich klein ist, dass φ von einem leuchtenden Punkte 1 herrührt, also den in (4) angegebenen Ausdruck hat, dass für keinen endlichen Theil der Fläche s, über die das Integral auszudehnen ist, oder ihrer Grenze $r_1 + r_0$ constant, oder bis auf unendlich Kleines constant ist, und endlich, dass die gerade Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 nicht durch die Grenze der Fläche oder unendlich nahe an ihr vorbei geht. Es wird bewiesen werden, dass dann das genannte Integral vsrschwindet, falls die gerade Verbindungslinie von 1 und 0 die Fläche s nicht schneidet. Die Rechnung wird ergeben, dass, wenn ein solcher Schnitt stattfindet, das Integral $= \pm\, 4\pi\varphi_0$ ist, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Normale N in dem Schnittpunkt einen spitzen oder stumpfen Winkel mit der von 1 nach 0 gezogenen Geraden bildet; was, wenn die erste Behauptung bewiesen ist, schon aus der Gleichung (10) folgt.

Man nehme zuerst für φ den in (3) gegebenen Ausdruck an, setze also:

$$\varphi = \frac{1}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi;$$

dann wird:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial N}\frac{1}{r_0}\varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right) = &- \frac{1}{r_1 r_0^2}\frac{\partial r_0}{\partial N}\cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi\\ &- \frac{2\pi}{r_1 r_0 \lambda}\frac{\partial r_0}{\partial N}\sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi,\end{aligned}$$

ferner nach (8):

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_0} f\left(t - \frac{r_0}{a}\right) = &- \frac{1}{r_1^2 r_0}\frac{\partial r_1}{\partial N}\cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi\\ &- \frac{2\pi}{r_1 r_0 \lambda}\frac{\partial r_1}{\partial N}\sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi\end{aligned}$$

und daher nach (11):

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}\Omega = &\frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi\\ &+ \frac{2\pi}{r_1 r_0 \lambda}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi.\end{aligned}\right.$$

Um bei diesem Werthe von Ω das genannte Integral zu finden, gehe man von dem folgenden Satze aus.

Bezeichnet $F(\zeta)$ eine Function von ζ, die stetig ist in dem Intervall, in dem ζ von ζ_0 bis ζ' wächst, und δ eine Constante, so verschwindet das Integral:

$$(14) \qquad \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta)\, d\zeta,$$

wenn k unendlich gross wird.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt aus Betrachtungen, die denen ganz ähnlich sind, welche Dirichlet bei seinen Untersuchungen über die Fourier'sche Reihe in Bezug auf ein ähnliches Integral angestellt hat. Man zerlege das Integral in solche Theile, dass innerhalb eines jeden $dF/d\zeta$ weder sein Vorzeichen wechselt, noch vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt übergeht; von jedem dieser Theile (deren Anzahl als endlich vorausgesetzt wird) beweist man, dass er verschwindet, wenn k ins Unendliche wächst, indem man ihn weiter in Theile zerlegt der Art, dass alle Werthe von ζ, für welche $\sin(k\zeta + \delta) = 0$ ist, als Zwischengrenzen auftreten, und die Ungleichheiten benutzt, die für die absoluten Werthe dieser Theile sich angeben lassen.

Aus diesem Satze ergibt sich leicht der folgende.

Wenn die Function $F(\zeta)$ die Eigenschaft hat, dass ihr erster Differentialquotient in dem Intervall von $\zeta = \zeta_0$ bis $\zeta = \zeta'$ stetig ist, so wird für $k = \infty$:

$$(15) \qquad k\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta)\, d\zeta = -\left[\frac{dF}{d\zeta} \cos(k\zeta + \delta)\right]_{\zeta_0}^{\zeta'}.$$

In der That wird die linke Seite dieser Gleichung durch partielle Integration:

$$= -\left[\frac{dF}{d\zeta} \cos(k\zeta + \delta)\right]_{\zeta_0}^{\zeta'} + \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d^2F}{d\zeta^2} \cos(k\zeta + \delta)\, \delta\zeta;$$

das neue hier auftretende Integral ist aber von der Form des Integrals (14), verschwindet also, wenn k ins Unendliche wächst.

Jetzt denke man sich eine stetig gekrümmte, vollständig begrenzte Fläche s, deren Element ds sein soll, nenne r_1

und r_0 die Entfernungen dieses Elementes von zwei festen Punkten 1 und 0, setze:

$$\zeta = r_1 + r_0,$$

bezeichne durch G eine sich stetig ändernde Function des Ortes von ds, durch δ eine Constante, und untersuche den Werth, den das Integral:

$$\int G \sin(k\zeta + \delta)\, ds \tag{16}$$

annimmt, wenn k unendlich gross wird.

Zu diesem Zwecke stelle man sich die Flächen vor, deren Gleichung:

$$\zeta = \text{const.}$$

ist, also die Rotationsellipsoide, deren Brennpunkte die Punkte 1 und 0 sind, und die Schnittlinien dieser mit der Fläche s; dann setze man:

$$F(\zeta) = \pm \int G ds, \tag{17}$$

wo die Integration über den Theil der Fläche s auszudehnen ist, der zwischen den zwei Schnittlinien liegt, von denen die eine dem variabeln Werthe ζ, die andere einem beliebig gewählten, festen Werthe Z entspricht, und wo das Zeichen $+$ gelten soll, wenn $\zeta > Z$, das Zeichen $-$, wenn $\zeta < Z$ ist. Bei dieser Festsetzung ist, wenn $d\zeta$ positiv gewählt wird:

$$\frac{dF}{d\zeta} d\zeta = \int G ds, \tag{18}$$

wo die Integration über den Theil der Fläche s auszudehnen ist, der zwischen den beiden Schnittlinien liegt, welche den Werthen ζ und $\zeta + d\zeta$ entsprechen. Ist ζ_0 der kleinste, ζ' der grösste Werth von ζ in der Fläche s, so ist hiernach das Integral (16):

$$= \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta)\, d\zeta,$$

also = dem Integral (14); es verschwindet daher für $k = \infty$, falls $F(\zeta)$ in der Fläche s stetig ist, d. h. falls für keinen endlichen Theil der Fläche s ein constanter Werth von ζ stattfindet.

Es werde jetzt bei gleicher Bedeutung der Zeichen der Ausdruck:

$$(19)\qquad k\int G \sin(k\zeta + \delta)\, ds$$

ins Auge gefasst. Dieser ist:

$$= k\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta)\, d\zeta,$$

also gleich dem linken Theile der Gleichung (15). Er ist daher für $k = \infty$ auch gleich dem rechten Theile derselben, falls das durch (18) definirte $dF/d\zeta$ innerhalb der Fläche s stetig ist. Dieser Differentialquotient ist unstetig, sobald ζ für einen endlichen Theil der Grenze von s constant ist; wird dieser Fall ausgeschlossen, so kann eine Unstetigkeit nur eintreten, wenn für einen Punkt der Fläche $d\zeta$ verschwindet. Es wird besonders untersucht werden, was dann stattfindet. Sonst hat die Gleichung (15) Gültigkeit, und aus dieser folgt weiter, dass der Ausdruck (19) verschwindet. Unter den gemachten Voraussetzungen findet nämlich sowohl der grösste als der kleinste Werth von ζ in einem oder einigen Punkten der Grenze von s statt, und für einen jeden solchen Punkt ist das Integral $\int G ds$, das man berechnen muss, um nach (18) das entsprechende $dF/d\zeta$ zu ermitteln, unendlich klein von höherer Ordnung als $d\zeta$; es verschwindet also dieses $dF/d\zeta$.

Nun ist der Werth von (19) für den Fall zu suchen, dass $d\zeta$ für einen Punkt in der Fläche s verschwindet. Es geschehe das für den Punkt (x, y, z), und $g\,(x, y, z) = 0$ sei die Gleichung dieser Fläche; dann ist:

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial r_0}{\partial x} = L\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial r_0}{\partial y} = L\frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial z} + \frac{\partial r_0}{\partial z} = L\frac{\partial g}{\partial z},$$

wo L einen unbestimmten Factor bedeutet. Bezeichnen α_1, β_1, γ_1, α_0, β_0, γ_0 und α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Coordinatenaxen bilden mit der Linie, die von dem Punkte 1 nach dem Punkte (x, y, z) gezogen ist, der Linie, die von dem Punkte 0 nach dem Punkte (x, y, z) gezogen ist, und einer Normale N der Fläche s in diesem Punkte, so lassen diese Gleichungen sich schreiben:

$$(20)\qquad \alpha_1 + \alpha_0 = M\alpha, \quad \beta_1 + \beta_0 = M\beta, \quad \gamma_1 + \gamma_0 = M\gamma,$$

wo M einen neuen Factor bedeutet. Es ergibt sich aus ihnen einmal, dass die Linien r_1 und r_0 und N in einer Ebene liegen; dann folgt auch:

$$M(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1) = M(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0),$$

und diese Gleichung sagt aus, dass entweder $M = 0$, d. h. $\alpha_0 = -\alpha_1$, $\beta_0 = -\beta_1$, $\gamma_0 = -\gamma_1$ ist, also der Punkt (x, y, z) zwischen den Punkten 1 und 0, auf ihrer geraden Verbindungslinie liegt, oder die Richtungen $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ und $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ mit der Richtung von N gleiche Winkel bilden. Im zweiten Falle müssen die Linien r_1 und r_0 auf entgegengesetzten Seiten der Normale N liegen, wenn sie nicht mit dieser oder ihrer Verlängerung zusammenfallen; denn durch $\alpha_0 = \alpha_1$, $\beta_0 = \beta_1$, $\gamma_0 = \gamma_1$ werden die Gleichungen (20) nicht erfüllt, es sei denn, dass r_1 und r_0 mit N oder der Verlängerung von N zusammenfallen.

Es werde jetzt die Bedeutung der Zeichen x, y, z geändert und durch (x, y, z) ein variabler Punkt der Fläche s in Bezug auf ein Coordinatensystem bezeichnet, dessen Anfangspunkt der frühere Punkt (x, y, z) und dessen z-Axe die Normale N ist. Es sollen ferner die Dimensionen der Fläche s als unendlich klein (aber als unendlich gross gegen $1/k$) angenommen werden; es ist ausreichend, unter dieser Annahme das Integral (19) zu berechnen, da sein Werth durch Hinzufügung neuer Theile zur Fläche s nach dem, was bewiesen ist, nicht geändert wird. Die Gleichung der Fläche s ist dann:

$$z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \tag{21}$$

wo a_{11}, a_{12}, a_{22} Constanten sind, und zugleich ist:

$$ds = dx\,dy.$$

Um die Schnittlinien der Fläche s mit den Flächen $\zeta = \text{const.}$ zu finden, muss nun der Ausdruck von ζ gebildet und nach Potenzen von x und y entwickelt werden. Es seien x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Punktes 0 und:

$$\varrho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2};$$

dann ist:

$$r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

oder:

$$r_0 = \sqrt{\varrho_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0 - 2zz_0 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Bezeichnet man x und y als unendlich klein von der ersten Ordnung und entwickelt r_0 bei Benutzung von (21) bis auf Grössen der zweiten Ordnung inclusive, so ergibt sich:

$$r_0 = \varrho_0 - \frac{x x_0 + y y_0}{\varrho_0} - \frac{a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2}{\varrho_0} z_0 + \frac{x^2 + y^2}{2 \varrho_0} - \frac{(x x_0 + y y_0)^2}{2 \varrho_0^3},$$

oder, da die in (20) vorkommenden Grössen α_0, β_0, γ_0 den Gleichungen:

$$\frac{x_0}{\varrho_0} = -\alpha_0, \qquad \frac{y_0}{\varrho_0} = -\beta_0, \qquad \frac{z_0}{\varrho_9} = -\gamma_0$$

genügen,

$$r_0 = \varrho_0 + \alpha_0 x + \beta_0 y + (a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2) \gamma_0$$
$$+ \frac{1}{2 \varrho_0} \left(x^2 (1 - \alpha_0^2) - 2 x y \alpha_0 \beta_0 + y^2 (1 - \beta_0^2) \right).$$

Setzt man entsprechend:

$$\varrho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

so findet man ebenso:

$$r_1 = \varrho_1 + \alpha_1 x + \beta_1 y + (a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2) \gamma_1$$
$$+ \frac{1}{2 \varrho_1} \left(x^2 (1 - \alpha_1^2) - 2 x y \alpha_1 \beta_1 + y^2 (1 - \beta_1^2) \right).$$

Bei dem gewählten Coordinatensystem ist aber $\alpha = 0$ und $\beta = 0$, und daher nach (20):

$$\alpha_1 + \alpha_0 = 0, \qquad \beta_1 + \beta_0 = 0.$$

Man hat daher:

$$\zeta = A_0 + A_{11} x^2 + 2 A_{12} x y + A_{22} y^2, \qquad \text{wo:}$$

$$(22) \qquad \begin{cases} A_0 = \varrho_1 + \varrho_0 \\ A_{11} = a_{11} (\gamma_1 + \gamma_0) + \dfrac{1 - \alpha_1^2}{2 \varrho_1} + \dfrac{1 - \alpha_0^2}{2 \varrho_0} \\ A_{12} = a_{12} (\gamma_1 + \gamma_0) - \dfrac{\alpha_1 \beta_1}{2 \varrho_1} - \dfrac{\alpha_0 \beta_0}{2 \varrho_0} \\ A_{22} = a_{22} (\gamma_1 + \gamma_0) + \dfrac{1 - \beta_1^2}{2 \varrho_1} + \dfrac{1 - \beta_0^2}{2 \varrho_0}. \end{cases}$$

Die Schnittcurven der Flächen $\zeta = \text{const.}$ mit der Fläche s sind hiernach ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist. Ihre Gleichung, bezogen auf die Hauptaxen, sei:

$$\zeta - A_0 = \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2,$$

d. h. es seien μ_1 und μ_2 die (stets reellen) Wurzeln der quadratischen Gleichung:

(23) $$(A_{11} - \mu)(A_{22} - \mu) - A_{12}{}^2 = 0 .$$

Haben μ_1 und μ_2 gleiches Vorzeichen, so sind die Kegelschnitte Ellipsen; A_0 ist das Minimum von ζ, wenn μ_1 und μ_2 positiv sind, das Maximum, wenn diese beiden Grössen das negative Vorzeichen haben. Im ersten Falle ist die Fläche der Ellipse, die einem Werthe von ζ entspricht:

$$= \frac{\pi(\zeta - A_0)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}, \quad \text{im zweiten:} \quad = \frac{\pi(A_0 - \zeta)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}},$$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist, wie überhaupt die Wurzel aus einer positiven Grösse hier positiv verstanden werden soll. Nach der Gleichung (17) ist daher, wenn die dort mit Z bezeichnete Grösse $= A_0$ gewählt wird, für Werthe von ζ, bei denen die entsprechenden Ellipsen ganz innerhalb der Fläche s liegen, in beiden Fällen:

$$F(\zeta) = G \frac{\pi(\zeta - A_0)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}},$$

wo G sich auf den Punkt $(x = 0, y = 0)$ bezieht, also:

$$\frac{dF}{d\zeta} = G \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} .$$

Fällt kein Theil der Grenze von s mit einer der Ellipsen zusammen, so ist $dF/d\zeta$ in dieser Fläche stetig und für den zweiten Grenzwerth, den ζ hier erlangt, $= 0$. Danach ist der Ausdruck (19) für $k = \infty$, wenn μ_1 und μ_2 positiv sind:

(24) $$= G \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \cos(kA_0 + \delta),$$

und, wenn μ_1 und μ_2 negativ sind:

(25) $$= - G \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \cos(kA_0 + \delta).$$

Weniger einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn μ_1 und μ_2 entgegengesetzte Vorzeichen haben, die Kegelschnitte also Hyperbeln sind; in welchem Falle $dF/d\zeta$ bei $\zeta = A_0$ unstetig ist. Man wähle hier die Hauptaxen als Coordinatenaxen und gebe der Fläche s eine bestimmte Gestalt, nämlich die eines Rechtecks, dessen Seiten den Hauptaxen parallel sind und die Gleichungen:

$$x = \pm a, \qquad y = \pm b$$

haben. Die Ecken sollen auf den Asymptoten liegen, es soll also:

$$a\sqrt{\mu_1} = b\sqrt{-\mu_2} = c$$

sein, wo μ_1 positiv, μ_2 negativ, c positiv ist. Die reelle Hauptaxe der einem Werthe von ζ entsprechenden Hyperbel fällt dann in die x-Axe, wenn $\zeta - A_0$ positiv, in die y-Axe, wenn $\zeta - A_0$ negativ ist. Setzt man wieder die bei der Gleichung (17) definirte Grösse $Z = A_0$, so hat man daher für $\zeta > A_0$:

$$F(\zeta) = G\left\{2ab - \frac{4}{\sqrt{-\mu_2}}\int\limits_{\sqrt{\frac{\zeta - A_0}{\mu_1}}}^{a}\sqrt{\mu_1 x^2 - \zeta + A_0}\,dx\right\},$$

wo G wiederum auf den Punkt ($x = 0$, $y = 0$) sich bezieht. Daraus folgt:

$$\frac{dF}{d\zeta} = G\frac{2}{\sqrt{-\mu_2}}\int\limits_{\sqrt{\frac{\zeta - A_0}{\mu_1}}}^{a}\frac{dx}{\sqrt{\mu_1 x^2 - \zeta + A_0}},$$

oder, da:

$$\int\limits_1^z \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\frac{dF}{d\zeta} = G\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}\log\frac{c + \sqrt{c^2 - \zeta + A_0}}{\sqrt{\zeta - A_0}}.$$

Ebenso findet man für $\zeta < A_0$:

$$\frac{dF}{d\zeta} = G\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}\log\frac{c + \sqrt{c^2 + \zeta - A_0}}{\sqrt{A_0 - \zeta}}.$$

Erwägt man, dass der kleinste Werth von ζ in den Punkten ($x = 0$, $y = \pm b$) stattfindet, und $= A_0 - c^2$ ist, während der grösste in den Punkten ($x = \pm a$, $y = 0$) vorkommt und $= A_0 + c^2$ ist, so ergibt sich der Ausdruck (19):

$$= G\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}k\left\{\int\limits_{A_0 - c^2}^{A_0}\log\frac{c + \sqrt{c^2 + \zeta - A_0}}{\sqrt{A_0 - \zeta}}\sin(k\zeta + \delta)\,d\zeta\right.$$

$$\left.+\int\limits_{A_0}^{A_0 + c^2}\log\frac{c + \sqrt{c^2 - \zeta + A_0}}{\sqrt{\zeta - A_0}}\sin(k\zeta + \delta)\,d\zeta\right\}.$$

Setzt man in dem ersten dieser beiden Integrale:

$$A_0 - \zeta = \xi\,,$$

in dem zweiten: $\zeta - A_0 = \xi\,,$

so wird derselbe Ausdruck:

$$= G\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}k\int_0^{c^2}\log\frac{c+\sqrt{c^2-\xi}}{\sqrt{\xi}}\Big(\sin(k\xi+kA_0+\delta)-\sin(k\xi-kA_0-\delta)\Big)\,d\xi\,,$$

oder:

$$= G\frac{4}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}k\sin(kA_0+\delta)\int_0^{c^2}\log\frac{c+\sqrt{c^2-\xi}}{\sqrt{\xi}}\cos k\xi\,d\xi\,.$$

Nun ist aber:

$$k\int_0^{c^2}\log\frac{c+\sqrt{c^2-\xi}}{\sqrt{\xi}}\cos k\xi\,d\xi$$

$$= \left[\sin k\xi\log\frac{c+\sqrt{c^2-\xi}}{\sqrt{\xi}}\right]_{\xi=0}^{\xi=c^2} - \int_0^{c^2}\sin k\xi\frac{d}{d\xi}\log(c+\sqrt{c^2-\xi})\,d\xi$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_0^{c^2}\frac{\sin k\xi}{\xi}\,d\xi\,.$$

Das erste von diesen drei Gliedern ist für jeden Werth von k gleich Null, da der in den Klammern stehende Ausdruck sowohl für $\xi = c^2$, als für $\xi = 0$ verschwindet; das zweite ist von der Form des Ausdrucks (14) und verschwindet daher für $k = \infty$, da $\log(c+\sqrt{c^2-\xi})$ auch bei $\xi = c^2$ stetig ist, obwohl sein Differentialquotient unendlich wird; das dritte endlich ist für $k = \infty$:

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin u\,du}{u} \text{ d. h. } = \frac{\pi}{4}\,.$$

Der gesuchte Werth des Ausdrucks (19) ist daher, wenn μ_1 und μ_2 von entgegengesetztem Vorzeichen sind:

$$(26) \qquad = G\frac{\pi}{\sqrt{-\mu_1\mu}}\sin(kA_0+\delta)\,.$$

Bei der weiteren Discussion der Ausdrücke (24), (25) und (26) ist zu benutzen, dass, da μ_1 und μ_2 die Wurzeln der Gleichung (23) sind:

$$\mu_1 \mu_2 = A_{11} A_{22} - A_{12}^2 \tag{27}$$

ist, wo A_{11}, A_{12}, A_{22} die in (22) angegebenen Werthe haben.

Wie aus den Gleichungen (20) geschlossen ist, beziehen sich die nun durchgeführten Betrachtungen auf zwei Fälle; der erste von diesen ist der, dass die Fläche s von der geraden Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 geschnitten wird, der zweite der, dass es in der Fläche s einen Punkt gibt, der die Eigenschaft hat, dass die von ihm nach den Punkten 1 und 0 gezogenen Linien gleiche Winkel mit der Normale der Fläche s bilden und mit dieser in einer Ebene liegen. Der erste von diesen Fällen soll hier noch weiter untersucht werden. In ihm ist:

$$\alpha_1 + \alpha_0 = 0, \quad \beta_1 + \beta_0 = 0, \quad \gamma_1 + \gamma_0 = 0,$$

die Gleichungen (22) geben daher:

$$A_{11} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)(1 - \alpha_1^2), \qquad A_{12} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)\alpha_1 \beta_1,$$

$$A_{22} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)(1 - \beta_1^2),$$

und nach (27) ist:

$$\mu_1 \mu_2 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)^2 \gamma_1^2.$$

Die Wurzeln der Gleichung (23), μ_1 und μ_2, sind:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right) \text{ und } \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)\gamma_1^2,$$

also beide positiv; daher ist der Ausdruck (19) dem Ausdruck (24) gleichzusetzen ist; er ist also:

$$= \pm G\, 2\pi \frac{\varrho_1 \varrho_0}{\varrho_1 + \varrho_0} \frac{1}{\gamma_1} \cos\left(k(\varrho_1 + \varrho_0) + \delta\right), \tag{28}$$

wo das positive oder negative Zeichen zu wählen ist, je nachdem γ_1 positiv oder negativ ist.

Bei diesen, über den Ausdruck (19) angestellten Betrachtungen ist δ als eine Constante angenommen; sie gelten aber auch, wenn δ, wie G, sich stetig mit dem Orte von ds ändert; dann muss in den Ausdrücken (24), (25), (26) und (28) δ, sowie G, auf den Punkt ($x = 0$, $y = 0$) bezogen werden.

Man sieht das ein, wenn man erwägt, dass das Integral (19) bei variablem δ durch die Formel:

$$\sin(k\zeta + \delta) = \cos\delta \sin k\zeta + \sin\delta \cos k\zeta,$$

in die Summe zweier Integrale von gleicher Form zerlegt werden kann, in denen δ die constanten Werthe 0 und $\frac{1}{2}\pi$ hat.

Mit Hülfe der gewonnenen Resultate ist es nun leicht, die im Eingange dieses Paragraphen in Betreff des Integrals $\int ds\, \Omega$ ausgesprochene Behauptung zu beweisen.

Es habe zunächst Ω den in (13), also φ den in (3) angegebenen Werth; man setze:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = k \text{ und } -\frac{t}{T} 2\pi = \delta;$$

man sieht dann, dass der Theil des genannten Integrals, der von dem ersten Gliede von Ω herrührt. verschwindet, und dass auch der Theil desselben, den das zweite Glied von Ω ergibt, gleich Null ist. wenn es nicht in der Fläche s einen Punkt der Art gibt, dass die von ihm nach den Punkten 1 und 0 gezogenen Linien gleiche Winkel mit der Normale der Fläche bilden und mit dieser in einer Ebene liegen, und wenn die Fläche nicht von der Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 geschnitten wird. Ist die erste von diesen beiden Bedingungen nicht erfüllt, so verschwindet das betreffende Integral aber auch; um seinen Werth zu finden, hat man nämlich in dem Ausdruck (24), (25) oder (26) für G den Werth zu setzen, den:

$$(29) \qquad \frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}\right)$$

in dem bezeichneten Punkte annimmt, und dieser Werth ist gleich Null, da $\partial r_1/\partial N$ und $\partial r_0/\partial N$ die Cosinus der Winkel sind, die einander gleich sein sollen. Es verschwindet daher $\int ds\, \Omega$ nur dann nicht, wenn die Fläche s von der Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 geschnitten wird. Der Ausdruck (28) gibt in diesem Falle seinen Werth, wenn man in ihn für G den Werth setzt, den (29) in dem Schnittpunkte hat. Lässt man die Richtung von N, die in (13) vorkommt, mit der Richtung der z-Axe zusammenfallen, auf die γ_1 in (28) sich bezieht, so wird:

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} = \gamma_1, \qquad \frac{\partial r_0}{\partial N} = -\gamma_1$$

und daher der Werth von (29):

$$= \frac{2\gamma_1}{\varrho_1 \varrho_0},$$

also: $$\int ds\, \Omega = \pm \frac{4\pi}{\varrho_1 + \varrho_0} \cos\left(\frac{\varrho_1 + \varrho_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi$$

oder: $$= \pm 4\pi \varphi_0,$$

wo die positiven oder negativen Zeichen gelten, je nachdem γ_1 positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem die Normale N mit der von 1 nach 0 gezogenen Linie einen spitzen oder einen stupfen Winkel bildet.

Hiermit ist die in Rede stehende Behauptung für den Fall bewiesen, dass φ den durch die Gleichung (3) angegebenen Werth hat; sie bleibt richtig, wenn man von dieser Gleichung in der dort angegebenen Weise zu der allgemeineren Gleichung (4) übergeht.

§ 4. Um aus der Gleichung (12) Folgerungen ziehen zu können, ist es nöthig, die Werthe von φ und $\partial\varphi/\partial N$ an der Oberfläche des Körpers, den die Gleichung voraussetzt, zu untersuchen.

Fallen in einem durchsichtigen Mittel auf die Ebene, in der dasselbe an ein zweites Mittel grenzt, ebene Lichtwellen, so bilden sich reflectirte und gebrochene ebene Wellen. Dass diese entstehen und die Richtungen haben, die sie erfahrungsmässig besitzen, kann als eine Folge davon angesehen werden, dass zwischen den Verrückungen der Aethertheile an der Grenze in beiden Mitteln und deren Differentialquotienten lineare, homogene Gleichungen mit constanten Coëfficienten bestehen. Es beziehe sich φ_e auf das einfallende Licht, φ_r auf das reflectirte im Punkte (ξ, η, ζ); für das erste Mittel sei $\zeta < 0$, für das zweite $\zeta > 0$ und:

$$\varphi_e = A \cos\left(\frac{l\xi + m\eta + n\zeta}{\lambda} - \frac{t + \alpha}{T}\right) 2\pi,$$

wobei l, m, n die Cosinus der Winkel bedeuten, die die Coordinatenaxen mit der Richtung der Wellennormale des einfallenden Lichtes bilden, in der dieses fortschreitet. Es ist dann:

$$\varphi_r = c A \cos\left(\frac{l\xi + m\eta - n\zeta}{\lambda} - \frac{t + \alpha + \gamma}{T}\right) 2\pi,$$

wo c und γ Constanten sind, deren Werthe abhängen von der Bedeutung des Zeichens φ, dem Einfallswinkel, dem Polarisationszustande des einfallenden Lichtes und der Natur der beiden Mittel. Für $\zeta = 0$ hat man daher, wenn man die Zeichen $\varphi_e(t)$ und $\varphi_r(t)$ als gleichbedeutend mit φ_e und φ_r gebraucht,

$$\varphi_r(t) = c\varphi_e(t + \gamma) \qquad \text{und:}$$

$$(30) \qquad \frac{\partial \varphi_r(t)}{\partial \zeta} = -c\frac{\partial \varphi_e(t + \gamma)}{\partial \zeta},$$

von welchen Gleichungen die zweite auch geschrieben werden kann:

$$(30) \qquad \frac{\partial \varphi_r(t)}{\partial N} = -c\frac{\partial \varphi_e(t + \gamma)}{\partial N},$$

wenn N, wie früher, die nach dem Inneren des ersten Mittels gekehrte Normale der Grenze bedeutet.

Sind im einfallenden Lichte gleichzeitig Wellen von verschiedenen Richtungen vorhanden, sodass sowohl φ_e als φ_r eine Summe solcher Ausdrücke ist, wie sie eben diesen Zeichen gleichgesetzt sind, so bestehen entsprechende Gleichungen für die einzelnen Glieder dieser Summen.

Diese Sätze können eine Anwendung auf den Fall finden, auf den die Gleichung (12) sich bezieht, wenn man die Wellenlänge λ als unendlich klein voraussetzt und die Krümmung der Oberfläche des gedachten Körpers als nirgends unendlich gross annimmt.

Die Gleichung (12) stellt φ_0 (d. h. den Werth von φ für einen beliebigen Punkt 0 des betrachteten Raumes) als eine Summe von Gliedern dar, die herrühren von dem leuchtenden Punkte 1 und von leuchtenden Punkten, die in der Grenzfläche jenes Raumes liegen. Man nehme den Punkt 0 unendlich nahe an dieser Grenzfläche an, und zwar so nahe, dass sein Abstand von ihr auch gegen λ unendlich klein ist. Die Lichtwellen, die ihn treffen, können dann theils als einfallende, theils als reflectirte oder gebrochene bezeichnet werden, je nachdem sie nach der Grenze hin, oder von ihr fort sich bewegen. Die leuchtenden Punkte, von denen die ersten herrühren, sind diejenigen, die sich auf der einen, die leuchtenden Punkte, von denen die letzten herrühren, diejenigen, die auf der anderen Seite der unendlichen Ebene sich befinden, die durch den Punkt 0, dem nächsten Element der Grenzfläche parallel gelegt ist. Sind, wie angenommen werden soll, in dem zweiten Mittel einfallende Wellen nicht vorhanden, so existiren in dem ersten nur einfallende und reflectirte; es möge φ_e auf die einfallenden, φ_r auf die reflectirten Wellen, φ auf die ganze Bewegung in dem Punkte, der hier der Punkt 0 genannt ist. sich beziehen, sodass:

$$\varphi = \varphi_e + \varphi_r \text{ und } \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial N} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial N}$$

ist. Dabei gelten dann die Gleichungen (30), wenn das einfallende Licht nur aus einem Wellensysteme besteht und die entsprechenden, dort angegebenen, wenn mehr einfallende Wellensysteme zu unterscheiden sind.

Ein Fall, der besonders einfach, und für den die Vorstellung leichter ist, als für den allgemeinen, ist der, dass ein schwarzer Körper das zweite Mittel bildet, d. h. ein solcher, der Licht weder reflectirt, noch hindurchlässt. Ein Körper, in dem das Licht dieselbe Fortpflanzungsgeschwindigkeit hat, wie in der durchsichtigen Umgebung und hinreichend stark absorbirt wird, muss, der Erfahrung zufolge, diese Eigenschaft besitzen. In einem solchen Körper, wie in jedem undurchsichtigen, sind einfallende Wellen an seiner Oberfläche nicht vorhanden, wie es oben vorausgesetzt ist; überdies ist die mit c bezeichnete Grösse bei ihm immer gleich Null; die an der Oberfläche des schwarzen Körpers zu erfüllende Bedingung ist daher die, dass:

$$(31) \qquad \varphi_r = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi_r}{\partial N} = 0 \text{ ist.}$$

Wenn der bei der Gleichung (12) gedachte Körper ein schwarzer, und seine Oberfläche überall convex ist, so lassen sich hiernach die Werthe von φ und $\partial \varphi / \partial N$ für die Oberfläche mit Leichtigkeit finden. Denkt man sich eine Ebene, die, einer Tangentialebene parallel und unendlich nahe, bei dem Körper vorbeigeht, so liegt die ganze Oberfläche auf der einen Seite dieser Ebene, der Art, dass jedes Element

ds immer nur einen Beitrag zu φ_r, aber keinen zu φ_e liefern kann. Man stelle sich den Kegel vor, der seine Spitze in dem leuchtenden Punkte 1 hat und die Oberfläche berührt; die Berührungslinie desselben theilt die Oberfläche in zwei Theile, von denen der eine dem leuchtenden Punkte zugewandt, der andere von diesem abgewandt ist; für einen Punkt, der dem ersten Theile unendlich nahe ist, liefert der leuchtende Punkt 1 zu φ_e den Beitrag φ^*, für einen Punkt, der unendlich nahe an dem zweiten liegt, liefert er diesen Beitrag zu φ_r, wo φ^* wieder sich auf die Bewegung bezieht, die stattfinden würde, wenn der schwarze Körper nicht vorhanden wäre. An dem ersten Theile ist daher:

$$(32) \qquad \varphi = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial N};$$

an dem zweiten ist:

$$\varphi_e = 0, \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial N} = 0,$$

und hieraus folgt nach (31):

$$(33) \qquad \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0.$$

Bei einer beliebigen Gestalt des schwarzen Körpers genügt man der Bedingung (31), indem man für diejenigen Punkte der Oberfläche, in denen diese zum ersten mal von Geraden, die vom Punkte 1 ausgehen, getroffen wird, die Gleichungen (32), für alle anderen Punkte der Oberfläche die Gleichungen (33) festsetzt. Unter dieser Annahme folgt nämlich aus einem im § 3 bewiesenen Satze, dass das Integral $\int ds\Omega$, ausgedehnt über die ganze Oberfläche, verschwindet, wenn der Punkt 0 unendlich nahe an dem ersten Theile, und dass es $= -4\pi\varphi_0{}^*$ ist, wenn der Punkt 0 unendlich nahe an dem zweiten Theile der Oberfläche gewählt wird; woraus dann mit Hülfe von (12) die Gleichungen (31) für die ganze Oberfläche sich ergeben.

Aus dem eben angezogenen Satze folgt aber auch weiter, dass, wo auch der Punkt 0 in dem durchsichtigen Mittel angenommen wird, $\varphi_0 = \varphi_0{}^*$ ist, falls die gerade Verbindungslinie von 1 und 0 die Oberfläche des Körpers nicht trifft, und $\varphi_0 = 0$, falls diese Linie die Oberfläche zweimal oder öfter schneidet. Da man unter φ irgend eine der Verrückungen u, v, w verstehen kann, so ist hierdurch ausgesprochen, dass in dem ersten der beiden unterschiedenen Fälle die Lichtbewegung im Punkte 0 dieselbe ist, wie wenn der schwarze Körper fehlte, im zweiten aber am Orte von 0 Dunkelheit stattfindet; damit ist gesagt, dass der schwarze Körper einen Schatten wirft, dass das Licht des leuchtenden Punktes sich geradlinig fortpflanzt, in Strahlen, die als unabhängig voneinander betrachtet werden können.

§ 5. Der eben benutzte, im Anfange des § 3 ausgesprochene Satz gilt nur unter gewissen, dort angegebenen Voraussetzungen; sind diese nicht erfüllt, so sind auch die hier aus dem Satze gezogenen Folgerungen nicht richtig, es treten dann Beugungserscheinungen auf.

Man denke sich den leuchtenden Punkt 1 von einem schwarzen Schirm, in dem eine Oeffnung sich befindet, rings umgeben. Die Linie, in welcher die Oberfläche des Schirmes von einem Kegel berührt wird, der seine Spitze in dem Punkte 1 hat, heisse der Rand der Oeffnung; er theilt die Oberfläche des Schirmes in einen inneren und einen äusseren Theil. Irgend eine Fläche, die durch den Rand begrenzt ist und mit dem einen, wie mit dem anderen dieser Theile eine geschlossene Fläche bildet, die den leuchtenden Punkt umgiebt, sei die Fläche s. Liegt der Punkt 0 irgendwo ausserhalb dieser geschlossenen Flächen, so ist dann nach der Gleichung (12), nach der in Bezug auf schwarze Körper aufgestellten Hypothese, also den Gleichungen (32), (33), und nach der Gleichung (10):

$$4\pi\varphi_0 = \int ds\,\Omega, \tag{34}$$

wo bei der Bildung von Ω φ^* für φ zu setzen und die Integration über die Fläche s auszudehnen ist. Es können sich Beugungserscheinungen in der Nähe des Punktes 0 zeigen, wenn für einen endlichen Theil der Fläche s oder ihrer Grenze $r_1 + r_0$ bis auf unendlich Kleines constant ist, oder die gerade Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 unendlich nahe an der Grenze der Fläche s vorbeigeht. Bei den Erscheinungen, die Fresnel in der Axe einer kreisförmigen Oeffnung oder eines kreisförmigen Schirmes beobachtete, während ein leuchtender Punkt auf derselben Axe sich befand, waren r_1 und r_0, also auch $r_1 + r_0$ für alle Punkte der Grenze von s nahe constant; bei den nach Fresnel benannten Beugungserscheinungen, bei den Fransen nämlich, die in der Nähe der Schattengrenze eines Schirmes auftreten, geht die Verbindungslinie von 1 und 0 nahe bei der Grenze von s vorbei; bei den Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen (wenn dieselben ohne Benutzung von Linsen, also auf einer unendlich entfernten Tafel, mit Hülfe eines unendlich entfernten leuchtenden Punktes dargestellt werden) ist $r_1 + r_0$ für die ganze Oeffnung nahe constant.

Um auch für diese Fälle die Intensität des Lichtes im Punkte 0 zu finden, setze man zunächst, der Gleichung (3) entsprechend:

$$\varphi^* = \frac{1}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi. \tag{35}$$

Es erhält dann Ω den in (13) angegebenen Werth. Die beiden Glieder, aus denen derselbe zusammengesetzt ist, sind, da λ unendlich klein ist, von ungleicher Grössenordnung, es sei denn, dass:

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}$$

unendlich klein ist, welcher Fall hier nicht in Betracht gezogen zu werden braucht. Die Gleichung (34) gibt daher:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\lambda} \int \frac{ds}{r_1 r_0} \left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}\right) \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi.$$

Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, werde nun angenommen, dass die Fläche s eine ebene ist, dass ihre Dimensionen gegen r_1 und r_0 so klein sind, dass r_1 und r_0 da, wo sie ausserhalb des Sinuszeichens vorkommen, sowie ihre nach N genommenen Differentialquotienten als constant betrachtet werden können, und endlich, dass die Linien r_0 unendlich kleine Winkel mit den Verlängerungen der Linien r_1 bilden. Man hat dann:

$$\frac{\partial r_0}{\partial N} = - \frac{\partial r_1}{\partial N},$$

und
$$\varphi_0 = \frac{1}{\lambda r_1 r_0} \frac{\partial r_1}{\partial N} \int ds \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi.$$

Man verallgemeinere nun den Ausdruck von φ^* auf dem Wege, auf dem die Gleichung (4) aus der Gleichung (3) abgeleitet ist, sodass man erhält:

$$(36)\qquad \varphi^* = \frac{D}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi + \frac{D'}{r_1}\sin\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi,$$

wo D und D' von der Richtung des von dem leuchtenden Punkte 1 durch den Punkt (x, y, z) gehenden Strahles abhängen. Dabei wird dann:

$$\varphi_0 = \frac{1}{\lambda r_1 r_0}\frac{\partial r_1}{\partial N}\left\{D\int ds \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi - D'\int ds\cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi\right\},$$

wo D und D' dieselbe Bedeutung haben. Jetzt darf man unter φ irgend eine der Verrückungen u, v, w verstehen; thut man das und schreibt A und A', B und B', C und C' für D und D', je nachdem $\varphi = u, v, w$ gesetzt wird, so wird bei der in § 1 definirten Einheit für die Lichtintensität die Intensität des Lichtes in der beugenden Oeffnung:

$$= \frac{1}{2 r_1^2}(A^2 + A'^2 + B^2 + B'^2 + C^2 + C'^2).$$

Bezeichnet man diese durch J und setzt:

$$c = \int ds \cos\frac{r_1 + r_0}{\lambda}2\pi, \qquad s = \int ds\sin\frac{r_1 + r_0}{\lambda}2\pi,$$

so wird die Intensität im Punkte 0:

$$= J\frac{1}{\lambda^2 r_0^2}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N}\right)^2(c^2 + s^2),$$

welche Gleichung durch mannigfaltige Messungen als mit der Erfahrung übereinstimmend nachgewiesen ist.[1])

§ 6. Die eben abgeleitete Gleichung setzt wesentlich voraus, dass die Dimensionen der beugenden Oeffnung sehr gross gegen die Wellenlängen sind, und ihre Anwendung auf die Beugungsspectren, bei deren Herstellung oft Gitter benutzt sind, deren Spalten nur eine Breite von wenigen Wellenlängen besassen, ist nicht zu rechtfertigen.[2]) Doch haben die Messungen, denen wir die Kenntniss der Wellenlängen verdanken, gezeigt, dass diese Anwendung die Orte der Lichtmaxima mit grosser Genauigkeit richtig ergibt.

1) Vgl. Fröhlich, Wied. Ann. **6.** p. 429. 1879.

2) Vgl. Fröhlich, Wied. Ann. **6.** p. 430. 1879 und **15.** p. 592. 1882.

Diese Thatsache findet von den hier zu Grunde gelegten Hypothesen aus ihre Erklärung durch die folgenden Betrachtungen.

Man denke sich das Gitter, über dessen Beschaffenheit eine specielle Voraussetzung nicht gemacht zu werden braucht, das z. B. ein Drahtgitter oder ein Russgitter oder ein Diamantgitter sein kann, in die passende Oeffnung eines ebenen, schwarzen Schirmes, der nach allen Seiten sich in die Unendlichkeit erstreckt, eingefügt. Man verstehe unter ds ein Element der Ebene des Gitters, oder, um präciser zu reden, ein Element einer Ebene, die dem Gitter sehr nahe, auf der Seite desselben liegt, auf der der Punkt 0 sich befindet. Es gilt dann die Gleichung (9), und diese vereinfacht sich, wenn man die Annahme einführt, dass r_0 unendlich gross ist, in:

$$4\pi\varphi_0(t) = -\int \frac{ds}{r_0}\left\{ f\left(t - \frac{r_0}{a}\right) + \frac{1}{a}\frac{\partial r_0}{\partial N}\frac{\partial \varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{\partial t}\right\}.$$

Die Ebene, deren Element ds genannt ist, sei die xy-Ebene des Coordinatensystems, die x-Axe senkrecht auf den Spalten, der Anfangspunkt der Mittelpunkt des rechteckig angenommenen Gitters; ferner sei ϱ_0 die Länge der vom Anfangspunkt nach dem Punkte 0 gezogenen Linie, und es seien α_0, β_0, γ_0 die Cosinus der Winkel, welche diese mit den Coordinatenaxen bildet. Man hat dann:

$$r_0 = \varrho_0 - \alpha_0 x - \beta_0 y, \qquad \frac{\partial r_0}{\partial N} = \gamma_0 \qquad \text{und:} \qquad ds = dx\,dy.$$

Man hat ferner:

$$\varphi(t) = A\cos\frac{t}{T}2\pi + A'\sin\frac{t}{T}2\pi$$

$$f(t) = \frac{\partial\varphi(t)}{\partial N} = B\cos\frac{t}{T}2\pi + B'\sin\frac{t}{T}2\pi$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} = \frac{2\pi}{\lambda}A'\cos\frac{t}{T}2\pi - \frac{2\pi}{\lambda}A\sin\frac{t}{T}2\pi,$$

wo A, A', B, B' Function von x und y sind. Substituirt man diese Ausdrücke in die für φ_0 aufgestellte Gleichung, so erhält man bei passender Verlegung des Anfangspunktes der Zeit:

$$\varphi_0 = \iint dx\,dy \left\{ C \cos\left(\frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x + \beta_0 y}{\lambda}\right) 2\pi + C' \sin\left(\frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x + \beta_0 y}{\lambda}\right) 2\pi \right\},$$

wo C und C' umgekehrt proportional mit ϱ_0, lineare Functionen von γ_0 und — was hier hervorzuheben ist — lineare homogene Functionen von A, A', B, B' sind, deren Coëfficienten von x und y nicht abhängen. Nun sei die Lichtquelle ein leuchtender Punkt, der auf der negativen z-Axe in der Unendlichkeit liegt, $2b$ die Länge der Spalten, $2n$ ihre Anzahl und e der Abstand entsprechender Punkte zweier aufeinander folgender, also $2ne$ die Breite des Gitters. Man darf dann annehmen, dass A, A', B, B', also C und C' von y so abhängen, dass sie constant bleiben, wenn y von $-b$ bis $+b$ variirt, und verschwinden, wenn y ausserhalb dieses Intervalls liegt; von x aber so, dass sie um e periodisch sind, wenn x einen Werth zwischen $-ne$ und $+ne$ hat, und für andere Werthe von x verschwinden. Infolge hiervon wird zunächst:

$$\varphi_0 = \frac{\sin\frac{\beta_0 b}{\lambda} 2\pi}{\frac{\beta_0}{\lambda}\pi} \int_{-ne}^{ne} dx \left\{ C \cos\left(\frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x}{\lambda}\right) 2\pi + C' \sin\left(\frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x}{\lambda}\right) 2\pi \right\}.$$

Da λ als unendlich klein gegen b angesehen werden kann, so ist der vor dem Integralzeichen stehende Factor für jeden endlichen Werth von β_0 gegen b unendlich klein, während er endlich ist, wenn β_0 von der Ordnung von λ/b ist. Unter dem Integralzeichen denke man sich C und C' nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von $(x/e)2\pi$ entwickelt; es treten dann, wenn h eine ganze Zahl oder Null bedeutet, die Integrale auf:

$$\int_{-ne}^{ne} dx \cos h\frac{x}{e} 2\pi \sin \alpha_0 \frac{x}{\lambda} 2\pi \quad \text{und:} \quad \int_{-ne}^{ne} dx \sin h\frac{x}{e} 2\pi \cos \alpha_0 \frac{x}{\lambda} 2\pi,$$

die verschwinden, und die Integrale:

$$\int_{-ne}^{ne} dx \cos h\frac{x}{e} 2\pi \cos \alpha_0 \frac{x}{\lambda} 2\pi \quad \text{und:} \quad \int_{-ne}^{ne} dx \sin h\frac{x}{e} 2\pi \sin \alpha_0 \frac{x}{\lambda} 2\pi,$$

die resp.:

$$= \frac{\sin ne\, 2\pi\left(\frac{h}{e} - \frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e} - \frac{\alpha_0}{\lambda}\right)} + \frac{\sin ne\, 2\pi\left(\frac{h}{e} + \frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e} + \frac{\alpha_0}{\lambda}\right)} \quad \text{und:}$$

$$= \frac{\sin ne\, 2\pi\left(\frac{h}{e} - \frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e} - \frac{\alpha_0}{\lambda}\right)} - \frac{\sin ne\, 2\pi\left(\frac{h}{e} + \frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e} + \frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}$$

sind. Diese Ausdrücke sind im allgemeinen gegen ne unendlich klein, wenn λ als unendlich klein gegen ne bezeichnet wird; sie sind aber endlich, falls:

$$\alpha_0 \pm h \frac{\lambda}{e}$$

von der Ordnung von λ / ne ist.

Da nun unter φ irgend eine der Verrückungen u, v, w verstanden werden kann, so folgt hieraus, dass für:

$$\alpha_0 = \pm h \frac{\lambda}{e}, \qquad \beta_0 = 0$$

die Lichtintensität unendlich gross ist gegen die in allen anderen Punkten des Gesichtsfeldes stattfindende; und das ist es, was die Beobachtungen gezeigt haben.

§ 7. Nach den gemachten Auseinandersetzungen ist es leicht, auch das Gesetz der Reflexion der Lichtstrahlen abzuleiten. Dem leuchtenden Punkte 1 sei ein beliebiger Körper gegenüberstellt. Um den Fall zu vereinfachen, denke man sich aber die Oberfläche dieses mit einer schwarzen Hülle bedeckt, in der nur eine kleine Oeffnung auf der dem leuchtenden Punkte zugewandten Seite sich befindet; überdies seien die geometrischen Verhältnisse der Art, dass das reflectirte Strahlenbündel, welches erfahrungsmässig sich bildet, die Oberfläche des Körpers nicht zum zweiten mal trifft. Wiederum beziehe sich das Zeichen φ^* auf die Bewegung, die stattfinden würde, wenn der fremde Körper nicht vorhanden wäre, und es sei zunächst φ^* durch die Gleichung (35) bestimmt. Den zu erfüllenden Bedingungen genügt man dann, indem man setzt:

für den freien Theil der Oberfläche:

$$\varphi_e = \varphi^*, \qquad \frac{\partial \varphi_e}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial N},$$

also nach (30):

$$\varphi_r = \frac{c}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi, \quad \frac{\partial \varphi_r}{\partial N} = -c\frac{\partial}{\partial N}\frac{1}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi,$$

und daher: $$\varphi = \varphi^* + \frac{c}{r_1}\cos\left(\frac{c}{r_1} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial N} - c\frac{\partial}{\partial N}\frac{1}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi,$$

für die Punkte des geschwärzten Theiles der Oberfläche, in denen diese zum ersten mal von einer vom leuchtenden Punkte 1 ausgehenden Linie getroffen wird:

$$\varphi = \varphi^*, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial N};$$

für alle anderen Punkte der geschwärzten Oberfläche:

$$\varphi = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0.$$

Den Gleichungen (12) und (11) zufolge ist dann der Ueberschuss des Werthes von φ_0 über den Werth, den φ_0 haben würde, wenn die ganze Oberfläche des fremden Körpers geschwärzt wäre, die Summe der beiden Integrale:

$$-\frac{1}{4\pi}\int c\frac{ds}{r_1 r_0}\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial N} + \frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\cos\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi \quad \text{und}$$

$$(37) \qquad -\frac{1}{2\lambda}\int c\frac{ds}{r_1 r_0}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N} + \frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\sin\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi,$$

wo die Integration über den freien Theil der Oberfläche — der die Fläche s heissen möge — auszudehnen ist.[1]) Das erste von diesen beiden Integralen ist, wenn der Punkt 0 in endlichem Abstande von der Oberfläche sich befindet, da λ unendlich klein ist, gegen das zweite zu vernachlässigen, sodass der genannte Unterschied der beiden Werthe von φ_0 durch das Integral (37) dargestellt ist.

Es gilt dieses auch, wenn φ^*, statt durch die Gleichung (35), durch die Gleichung (36) gegeben ist; nur die Werthe

---

1) Es wird ohne Schwierigkeit sich nachweisen lassen, dass, wenn der Punkt 0 in oder unendlich nahe an der Oberfläche liegt, dieser Ausdruck zu den Werthen von φ und $\partial\varphi/\partial N$ zurückführt, die angenommen sind. Doch soll dieser Beweis nicht gegeben werden.

von c und γ sind dann andere. Das Integral (37) ist von der Form des Integrals (19); aus den in Bezug auf dieses angestellten Betrachtungen folgt, dass jenes im allgemeinen verschwindet. (19) verschwindet nicht, wenn die Fläche s von der Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 geschnitten wird. (37) verschwindet aber auch dann, weil dann für den Schnittpunkt:

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} + \frac{\partial r_0}{\partial N} = 0$$

ist. Es ist das Integral (37) von Null verschieden, wenn es in der Fläche s einen Punkt gibt, dessen Verbindungslinien mit den Punkten 1 und 0 gleiche Winkel mit der Normale der Fläche s bilden und mit dieser in einer Ebene liegen. Dadurch ist ausgesprochen, dass reflectirte Strahlen existiren, und welche Richtungen diese haben. Eine Störung durch Beugungserscheinungen tritt ein, wenn für einen endlichen Theil der Fläche s oder ihrer Grenze $r_1 + r_0$ bis auf unendlich Kleines constant ist, oder der Punkt 0 unendlich nahe an der Grenze des reflectirten Strahlenbündels liegt.

Aus dem eben abgeleiteten Gesetze, welches die Richtungen der reflectirten Strahlen bestimmt, lassen sich die geometrischen Eigenschaften eines Strahlenbündels, das von einem leuchtenden Punkte ausgegangen und an einer krummen Fläche reflectirt ist, entwickeln. Die im § 3 durchgeführten Rechnungen erlauben aber auch anzugeben, wie auf einem Strahle eines solchen Bündels die Intensität und die Phase von einem Punkte zum anderen variirt.

Der Theil von φ_0, der dem reflectirten Lichte entspricht, d. h. der Ausdruck (37), ist durch die Ausdrücke (24), (25) oder (26) gegeben, wenn darin:

$$G = \frac{K}{\varrho_0}$$

gesetzt wird, wo K eine von ϱ_0 unabhängige Grösse bedeutet. Daraus folgt, dass auf einem reflectirten Strahle die Intensität mit ϱ_0 so sich ändert, dass sie mit dem absoluten Werthe von:

$$\varrho_0{}^2 \mu_1 \mu_2$$

umgekehrt proportional ist. Nach (27) und (22) lässt dieser Ausdruck sich schreiben:

$$(b_{11}\varrho_0 + c_{11})(b_{22}\varrho + c_{22}) - (b_{12}\varrho_0 + c_{12})^2,$$

wo die Grössen b und c von ϱ_0 unabhängig sind, und:

$$c_{11} = \tfrac{1}{2}(1 - \alpha_0^2), \quad c_{12} = -\tfrac{1}{2}\alpha_0\beta_0, \quad c_{22} = \tfrac{1}{2}(1 - \beta_0^2)$$

ist. Sind $\varrho_0 = f_1$ und $\varrho_0 = f_2$ die (stets reellen) Wurzeln der quadratischen Gleichung, die man erhält, indem man diesen Ausdruck gleich Null setzt, so ist also die Intensität auch umgekehrt proportional mit dem absoluten Werthe von:

$$(\varrho_0 - f_1)(\varrho_0 - f_2).$$

In den Punkten $\varrho_0 = f_1$ und $\varrho_0 = f_2$ ist die Intensität unendlich; es sind das die Brennpunkte des Strahles.

In Betreff der Phase ist zu bemerken, dass diese, wie die Ausdrücke (24), (25), (26) zeigen, sich sprungweise um $\tfrac{1}{2}\pi$ ändert, wenn der Punkt 0 durch einen der Brennpunkte hindurchgeht.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass ganz ähnliche Betrachtungen, wie über die Reflexion, auch über die Brechung der Lichtstrahlen angestellt werden können.

IX. *Ueber Schallstärkemessung; von W. Wundt.*

Unter obigem Titel findet sich im vorigen Hefte dieser Annalen eine Abhandlung von K. Vierordt, in welcher neben der Mittheilung eigener neuer Versuche auch eine Besprechung von Beobachtungen enthalten ist, die von Hrn. Dr. E. Tischer in meinem Laboratorium ausgeführt und theils in dessen Dissertation, theils in den von mir herausgegebenen „Philosophischen Studien“[1]) veröffentlicht sind. Da ich eine Bekanntschaft mit diesen Arbeiten bei den Lesern der Annalen nicht voraussetzen darf, so erlaube ich mir zunächst den wesentlichen Inhalt derselben, insoweit er sich auf die vorliegende physikalische Frage bezieht, hier kurz zusammenzufassen.

1) Wundt, Phil. Stud. **1.** p. 495. 1883.