

wenn obige Schlüsse von allgemeiner Geltung sind, müssen diese Körper durch rasche Diffusion wie durch grosses Leitungsvermögen ausgezeichnet sein. Auch Phosphate und Carbonate verdienen weitere Untersuchung, und ich gedenke, dieselben zum Gegenstand späterer Versuche zu machen.

Erst nach vollendetem Drucke meiner Dissertation ist eine Arbeit von Schuhmeister<sup>1)</sup> über denselben Gegenstand zu meiner Kenntniss gekommen. In einer kurzen Bemerkung am Schlusse derselben spricht der Verfasser die Ansicht aus, es bestehe ein Zusammenhang zwischen Leitungsvermögen, Reibung und Diffusion einiger Lösungen, da sich dieselben bezüglich aller drei in derselben Reihenfolge anordnen.

Tübingen, im September 1879.

**V. Ueber die Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes und der Körperdichte; von H. A. Lorentz.**

(Für die Annalen vom Hrn. Verfasser bearbeitet.)<sup>2)</sup>

§ 1. Die von Maxwell aufgestellte electromagnetische Theorie des Lichtes wurde bis jetzt nur noch auf die allgemeinen Gesetze der Lichtfortpflanzung und auf die Vorgänge bei der Reflexion und Refraction angewandt. Behufs einer weitern Vergleichung mit den Thatsachen habe ich untersucht, was sich aus derselben über den Zusammenhang zwischen den Brechungsexponenten  $n$  und der Dichte  $d$  eines Körpers ableiten lässt.

1) Schuhmeister, Untersuchungen über die Diffusion der Salzlösungen. Wien. Ber. April 1879.

2) Lorentz, Verhandelingen der Akad. v. Wet. te Amsterdam, Deel 18.

Ich bin dabei von der Vorstellung ausgegangen, dass sich zwischen den Molecülen des betrachteten Körpers der Aether befinde, und habe versuchsweise noch die Hypothese hinzugefügt, dass die Eigenschaften dieses Mediums, ausgenommen vielleicht in der unmittelbaren Nähe der Molecüle die nämlichen seien, wie im luftleeren Raum. Nimmt man dann weiter noch an, dass in jedem Molecül eines isotropen Körpers von einer electromotorischen Kraft ein derselben proportionales und gleichgerichtetes electricches Moment erregt wird und dass auch für sehr kleine Entfernungen das Coulomb'sche Gesetz gilt, so führt die Rechnung zu einer Beziehung zwischen dem specifischen Inductionsvermögen  $K$  eines nichtleitenden Körpers und seiner Dichte. Verbindet man dieses Resultat mit der von Maxwell gefundenen Gleichung  $K=n^2$ , so findet man, dass bei Aenderungen der Dichte die Grösse

$$(1) \quad \frac{n^2 - 1}{(n^2 + 2)d} = \text{Const.}$$

sein muss.

Gegen die angedeutete Ableitung dieser Formel liesse sich indess der Einwand erheben, dass bei den Rechnungen, welche zu der Gleichung  $K=n^2$  führten, das Medium als vollkommen homogen betrachtet wurde, und dass man also dieselbe nicht ohne weiteres auf einen Körper von molecularer Constitution anwenden dürfe. Ausserdem kann die benutzte Schlussweise jedenfalls nur für Strahlen mit unendlich grosser Wellenlänge gelten. Ich habe es deshalb vorgezogen, die Lichtbewegung in einem Körper wie den angenommenen direct zu behandeln und dabei sowohl die electricchen Bewegungen, welche in den Molecülen, wie diejenigen, welche im Aether ihren Sitz haben, in Betracht zu ziehen. Es schien dies auch deshalb der Mühe werth, weil auch für andere Zwecke, z. B. in der Theorie der Aberration, die gesonderte Betrachtung der genannten Bewegungen nothwendig sein wird.

§ 2. - Denken wir uns im unbegrenzten Aether eine sehr grosse Zahl von gleichen Molecülen in isotroper Anordnung zerstreut. Um jedes derselben legen wir eine

kleine Kugel  $K$ , sodass ausserhalb dieser Flächen der Aether die nämlichen Eigenschaften besitzt, wie im luftleeren Raum. Ueber den Stoff innerhalb der Kugeln nehme ich an, dass er sich, was die Wirkung nach aussen betrifft, durch ein einziges Molecül  $P$  im Mittelpunkte ersetzen lässt. In meiner ursprünglichen Abhandlung habe ich nachgewiesen, dass wirklich bei verschiedenen anderen Annahmen die nämlichen Resultate erhalten werden. So z. B. wenn man sich die Kugeln  $K$  mit einer vollkommen leitenden Materie erfüllt denkt, oder wenn in jedem Molecül einige electriche Theilchen vorausgesetzt werden, welche sich im Aether bewegen können.

Für jedes der Theilchen  $P$ , welche wir nach dem Gesagten annehmen, mögen zwischen den Componenten  $X, Y, Z$  der auf dasselbe wirkenden electromotorischen Kraft und denjenigen  $m_x, m_y, m_z$  des inducirten electricen Momentes die Beziehungen

$$(2) \quad m_x = \alpha X, \quad m_y = \alpha Y, \quad m_z = \alpha Z$$

bestehen, wo  $\alpha$  eine von der Natur der Molecüle abhängige Constante ist.

§ 3. Wenn nun in den Theilchen des Körpers electriche Bewegungen vor sich gehen, werden sich solche auch von jedem Molecül aus in den Aether ausbreiten, sodass in jedem Punkte dieses Mediums eine dielectriche Polarisation bestehen wird. Die Componenten  $\xi, \eta, \zeta$  derselben sind mit denjenigen der electromotorischen Kraft durch die Beziehungen

$$(3) \quad \xi = \epsilon_0 X, \quad \eta = \epsilon_0 Y, \quad \zeta = \epsilon_0 Z$$

verbunden ( $\epsilon_0$  Dielectricitätsconstante des Aethers). Aus diesen Grundformeln lassen sich partielle Differentialgleichungen herleiten, in welchen  $\xi, \eta, \zeta$  als Functionen von den Coordinaten  $x, y, z$  und der Zeit  $t$  enthalten sind. Wir wollen dieselben in der Gestalt, wie sie von Herrn Helmholtz<sup>1)</sup> abgeleitet wurden, zu Grunde legen. Nur

1) Helmholtz, Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität in ruhenden Leitern, Crelle's Journ. Bd. 72. Auszug in Wiedemann, Galvanismus. II. 2. Aufl. § 1256 u. ff.

werden wir zur Abkürzung die von ihm in Betracht gezogene magnetische Polarisation des Aethers, sowie die magnetischen Momente, welche in den Körpermoleculen entstehen können, vernachlässigen. Wie ich in der Originalarbeit erörtert habe, übt dies keinen Einfluss auf das Resultat aus.

§ 4. Betrachten wir nun zunächst ein einzelnes Theilchen  $P$  in der Mitte der Höhlung  $K$  (§ 2). Es bestehe in demselben in der Richtung der  $x$ -Axe ein electricisches Moment

$$(4) \quad m_x = f_1(t).$$

Vermöge desselben übt das Molecul zunächst eine electrostatische Kraft aus; ausserdem wirkt es wie ein (veränderliches) Stromelement  $\frac{dm_x}{dt}$  in der Richtung der  $x$ -Axe.<sup>1)</sup>

Unsere nächste Aufgabe besteht nun darin, von den im vorigen § erwähnten Gleichungen eine Lösung zu finden, welche die von dem genannten Momente und Stromelemente im Aether hervorgerufenen Bewegungen darzustellen vermag. Wir beachten dabei erstens, dass nach jenen Gleichungen jeder Bewegungszustand im Aether aus zwei Theilen zusammengesetzt ist, die wir als den transversalen und den longitudinalen Theil unterscheiden können, und dass wir demgemäss zwei Werthsysteme für  $\xi, \eta, \zeta$  zu finden haben. Zweitens müssen wir uns bei der Wahl derselben durch gewisse Bedingungen der Symmetrie leiten lassen, so u. a. dadurch, dass die Richtung der dielectricischen Polarisation in einem Punkte  $Q$  des Aethers mit der Richtung  $PQ$  in einer der  $x$ -Axe parallelen Ebene liegen muss.

Die transversale Bewegung im Aether genügt den Gleichungen

---

1) Besteht in einem Leiterelemente  $ds$  mit den Componenten  $dx, dy, dz$  ein Strom mit der (in electrostatischem Maass ausgedrückten) Intensität  $i$ , so nennen wir kurz  $ids$  das Stromelement,  $idx, idy, idz$  seine Componenten.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

$$\Delta \xi = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad \Delta \eta = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad \Delta \zeta = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \text{ 1),}$$

wo  $v_0$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler electrischer Schwingungen im Aether, d. h. also die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Die Lösung dieser Gleichungen, welche wir versuchen werden, den Bedingungen des Problems anzupassen, lautet folgendermassen:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = -\alpha \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left[ \frac{1}{r} f_1 \left( t - \frac{r}{v_0} \right) \right], \\ \eta = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{1}{r} f_1 \left( t - \frac{r}{v_0} \right) \right], \quad \zeta = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left[ \frac{1}{r} f_1 \left( t - \frac{r}{v_0} \right) \right]. \end{array} \right.$$

Hier bedeutet  $r$  die Entfernung von  $P$ , während  $\alpha$  ein constanter Factor ist.

Für die Longitudinalbewegung hat man:

$$\xi = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad \Delta \chi = \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2},$$

wo  $V_0$  wieder die (von  $v_0$  verschiedene) Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist. Wir wählen die Lösung:

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{1}{r} f_1 \left( t - \frac{r}{V_0} \right) \right], \quad \eta = \beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{1}{r} f_1 \left( t - \frac{r}{V_0} \right) \right], \\ \zeta = \beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left[ \frac{1}{r} f_1 \left( t - \frac{r}{V_0} \right) \right] \end{array} \right.$$

( $\beta$  constant).<sup>2)</sup>

§ 5. Wir wollen nun annehmen, erstens, dass das Theilchen  $P$  ausser dem Momente (4) dergleichen Momente  $m_y = f_2(t)$  und  $m_z = f_3(t)$  in den Richtungen der

1)  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

2) Um (A) und (B) zu finden, habe ich folgenden Satz angewandt: Von der Gleichung  $\Delta \psi = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$  ist  $\psi = \frac{1}{r} F \left( t - \frac{r}{k} \right)$  eine Lösung, und es lassen sich daraus durch Differentiation nach  $x, y, z$  beliebig viele andere Lösungen ableiten.

$y$ - und  $z$ -Axe besitzt, zweitens, dass diese Momente in ganz gleicher Weise wie  $m_x$  electriche Bewegungen im Aether erregen, drittens, dass auch zu jedem andern Molecül ähnliche Bewegungen gehören wie zu  $P$ , und zwar mögen dabei die Grössen  $\alpha$  und  $\beta$  immer die nämlichen Werthe besitzen. Wir werden dann zeigen, dass sich  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  als Functionen von Ort und Zeit, und  $\alpha$  und  $\beta$  als Constanten so bestimmen lassen, dass überall den Bedingungen (2) und (3) genügt wird.<sup>1)</sup>

§ 6. Um diesen Beweis zu liefern, habe ich zunächst die electromotorische Kraft berechnet, welche infolge des Bewegungszustandes (A) auftritt, wenn derselbe im ganzen Raum ausserhalb der Kugel  $K$  besteht.<sup>2)</sup> In einem Punkt dieses Raumes setzt sich jene Kraft aus drei Theilen zusammen. Der erste hat die Componenten  $\frac{\xi}{\epsilon_0}$ ,  $\frac{\eta}{\epsilon_0}$ ,  $\frac{\zeta}{\epsilon_0}$ . Der zweite Theil ist der electrostatischen Kraft gleich, welche von einem in  $P$  liegenden und der  $x$ -Axe parallel gerichteten electriche Momente:

$$M = \alpha \left\{ -\frac{8}{3} \pi \left( f_1 + \frac{\rho}{v_0} f_1' \right) - \frac{4}{5} \pi A^2 v_0^2 \left( 5 f_1 + 5 \frac{\rho}{v_0} f_1' + 2 \frac{\rho^2}{v_0^2} f_1'' + \frac{\rho^3}{3 v_0^3} f_1''' \right) - \frac{4}{15} \pi (1-k) A^2 v_0^2 \left( \frac{\rho^2}{v_0^2} f_1'' + \frac{\rho^3}{v_0^3} f_1''' \right) \right\}$$

herrühren würde. Hier ist  $\rho$  der Radius von  $K$ ;  $A$  und  $k$  sind die beiden in der Helmholtz'schen Inductionsformel auftretenden Constanten; die Zeichen  $f_1$ ,  $f_1'$  u. s. w.

1) Es verdient hervorgehoben zu werden, dass, wenn  $\alpha$  und  $\beta$  so bestimmt werden, (A) und (B) eigentlich nicht bloß die von  $P$  erregten Bewegungen vorstellen, sondern auch diejenigen umfassen, welche von den übrigen Theilchen ausgegangen sind und an der Oberfläche der Kugel  $K$ , welche  $P$  enthält, zurückgeworfen werden. Die weiteren Berechnungen werden eben dadurch ermöglicht, dass man diese verschiedenen Bewegungen nicht gesondert zu betrachten braucht.

2) Es muss jedoch angenommen werden, dass die Bewegungen (A) nur bis zu einer endlichen Entfernung von  $P$  bestehen, oder wenigstens bei wachsendem Abstände rasch genug schwächer werden.

sind zur Abkürzung für die Functionswerthe  $f_1\left(t - \frac{\rho}{v_0}\right)$ ,  $f_1'\left(t - \frac{\rho}{v_0}\right)$  u. s. w. geschrieben.

Der dritte Theil endlich hat den nämlichen Werth wie die von einem gleichfalls in  $P$  in der Richtung der  $x$ -Axe gelegenen Stromelemente:

$$S = -\frac{8}{3}\pi\alpha\left(f_1' + \frac{\rho}{v_0}f_1''\right)$$

ausgeübten Induction.

Befände sich also in  $P$  in der genannten Richtung ein Moment  $-M$  (das nur electrostatische Wirkung ausübte) und ein Stromelement  $-S$ , dann wäre die ganze electromotorische Kraft in einem Punkte des Aethers  $\frac{\xi}{\epsilon_0}$ ,  $\frac{\eta}{\epsilon_0}$ ,  $\frac{\zeta}{\epsilon_0}$ , sodass dann der Zustand ( $A$ ) wirklich bestehen könnte. Anders gesagt, um diese Bewegungen zu unterhalten, sind in  $P$  das Moment  $-M$  und das Stromelement  $-S$  erforderlich.

§ 7. Die Ausdrücke für diese Grössen vereinfachen sich erheblich, wenn man annimmt, dass der Radius  $\rho$  so klein ist, dass in der Zeit  $\frac{\rho}{v_0}$  sich die Functionen  $f_1(t)$ ,  $f_1'(t)$  u. s. w. nur äusserst wenig ändern. Es kann dann in einer Reihenentwicklung wie:

$$f_1\left(t - \frac{\rho}{v_0}\right) = f_1(t) - \frac{\rho}{v_0}f_1'(t) + \frac{\rho^2}{2v_0^2}f_1''(t) \dots \text{u. s. w.}$$

jedes Glied gegen das vorhergehende vernachlässigt werden. Berücksichtigt man ausserdem die Formel (4) und die Relation  $v_0^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 A^2}$ , so erhält man schliesslich:

$$-M = \alpha\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{1}{\epsilon_0}\right)m_x, \quad -S = \alpha \cdot \frac{8}{3}\pi \frac{\partial m_x}{\partial t}.$$

In gleicher Weise sind zur Unterhaltung von ( $B$ ) in

---

1) Dieselbe geht aus der von Helmholtz für  $v_0$  abgeleiteten Formel hervor, wenn man darin  $\mathcal{G}_0 = 0$  setzt.

$P$  das Moment  $\beta \left( \frac{8}{3} \pi + \frac{1}{s_0} \right) m_x$  und das Stromelement  $-\beta \cdot \frac{4}{3} \pi \frac{\partial m_x}{\partial t}$  erforderlichlich.

Für die im Mittelpunkte der Höhlung  $K$  von ( $A$ ) und ( $B$ ) hervorgerufene electromotorische Kraft (welche wieder der  $x$ -Axe parallel ist) ergibt sich endlich der Werth:

$$(\alpha + \beta) \cdot \frac{8}{3} \pi \frac{m_x}{\rho^3}.$$

§ 8. Aus dem Gefundenen geht hervor, dass, wenn von jedem Molecül (mit den drei Momenten  $m_x, m_y, m_z$ ) aus sich Bewegungen im Aether fortpflanzen, und wenn sich diese über den ganzen Raum ausserhalb der um das Molecül gelegten Kugel erstreckten, in jedem Theilchen zur Unterhaltung dieser Bewegungen ein Moment und ein Stromelement mit den Componenten:

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} (\alpha + \beta) \left( \frac{8}{3} \pi + \frac{1}{s_0} \right) m_x, (\alpha + \beta) \left( \frac{8}{3} \pi + \frac{1}{s_0} \right) m_y, \\ (\alpha + \beta) \left( \frac{8}{3} \pi + \frac{1}{s_0} \right) m_z, \end{array} \right.$$

$$(6) (2\alpha - \beta) \cdot \frac{4}{3} \pi \frac{\partial m_x}{\partial t}, (2\alpha - \beta) \cdot \frac{4}{3} \pi \frac{\partial m_y}{\partial t}, (2\alpha - \beta) \cdot \frac{4}{3} \pi \frac{\partial m_z}{\partial t}$$

erforderlich wären.

Hätten aber jene Bewegungen die soeben genannte Ausbreitung, so würde auch noch innerhalb jeder Kugel  $K$  eine dielectrische Polarisation bestehen, für welche jedes Molecül mit Ausnahme des in der Kugel selbst liegenden einen Beitrag lieferte. Es lässt sich zeigen, dass in isotropen Körpern, wenn  $\rho$  nicht zu gross ist, die erwähnte Polarisation über die ganze Kugel die nämliche Grösse und Richtung hat. Ihre Componenten seien  $\xi', \eta', \zeta'$ . Um nun die wirklich im Aether vor sich gehenden Bewegungen zu erhalten, haben wir nur nachträglich diese dielectrische Polarisation innerhalb der Kugeln fortzulassen. Die electromotorische Kraft in einem Punkte des Aethers bleibt dabei ungeändert, wenn wir zu gleicher Zeit in die Mittel-



punkte der Kugeln Momente und Stromelemente mit den Componenten:

$$(7) \quad \frac{4}{3} \pi \rho^3 \xi', \quad \frac{4}{3} \pi \rho^3 \eta', \quad \frac{4}{3} \pi \rho^3 \zeta',$$

$$(8) \quad \frac{4}{3} \pi \rho^3 \frac{\partial \xi'}{\partial t}, \quad \frac{4}{3} \pi \rho^3 \frac{\partial \eta'}{\partial t}, \quad \frac{4}{3} \pi \rho^3 \frac{\partial \zeta'}{\partial t}$$

setzen, denn diese üben die nämliche Wirkung aus wie der durch  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  vorgestellte Bewegungszustand. Addirt man also (7) und (8) zu (5) und (6), so erhält man die Momente und Stromelemente, welche den § 5 vorausgesetzten Zustand im Aether zu unterhalten vermögen. Diese Grössen müssen dann aber den Momenten  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  und den Stromelementen  $\frac{\partial m_x}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial m_y}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial m_z}{\partial t}$  gleich sein, welche wirklich in den Mittelpunkten der Kugeln  $K$  bestehen. Wir erhalten also für jedes Molecül die Gleichungen:

$$(\alpha) \quad (\alpha + \beta) \left( \frac{8}{3} \pi + \frac{1}{\epsilon_0} \right) m_x + \frac{4}{3} \pi \rho^3 \xi' = m_x \text{ u. s. w.}$$

$$(\beta) \quad (2\alpha - \beta) \cdot \frac{4}{3} \pi \frac{\partial m_x}{\partial t} + \frac{4}{3} \pi \rho^3 \frac{\partial \xi'}{\partial t} = \frac{\partial m_x}{\partial t} \text{ u. s. w.}$$

§ 9. Zu diesen Beziehungen treten noch diejenigen, welche aus den Bedingungen (2) hervorgehen. Bei dem im Anfange des § 8 vorausgesetzten Bewegungszustande besteht im Mittelpunkte  $P$  einer Kugel  $K$  erstens die electromotorische Kraft:

$$(9) \quad (\alpha + \beta) \cdot \frac{8}{3} \pi \frac{m_x}{\rho^3}, \quad (\alpha + \beta) \cdot \frac{8}{3} \pi \frac{m_y}{\rho^3}, \quad (\alpha + \beta) \cdot \frac{8}{3} \pi \frac{m_z}{\rho^3},$$

welche von denjenigen Bewegungen ausserhalb  $K$  herrührt, die zu dem Molecül  $P$  selbst gehören; zweitens die Kraft:

$$(10) \quad \frac{\xi'}{\epsilon_0}, \quad \frac{\eta'}{\epsilon_0}, \quad \frac{\zeta'}{\epsilon_0}.$$

welche von den zu den übrigen Theilchen gehörenden Bewegungen ausgeübt wird und von den Momenten und Stromelementen (5) und (6), welche denselben beigelegt wurden. Wird nun erstens die Polarisation ( $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$ ) in allen Kugeln mit Ausnahme der betrachteten durch die Momente und Stromelemente (7) und (8) ersetzt, so bleibt dabei die

electromotorische Kraft in  $P$  ungeändert, und, wenn die Bedingungen  $(\alpha)$  und  $(\beta)$  erfüllt sind, haben wir dann zu gleicher Zeit die Wirkung der übrigen Molecüle auf  $P$  gehörig in Rechnung gezogen. Um also die Grössen  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  in (2) zu finden, haben wir nur noch von der Summe von (9) und (10) die electromotorische Kraft abzuziehen, welche in  $P$  von dem Bewegungszustande  $(\xi', \eta', \zeta')$  innerhalb der Kugel  $K$  selbst hervorgerufen wird. So erhält man schliesslich aus (2):

$$(\gamma) \quad x \left[ (\alpha + \beta) \cdot \frac{8}{3} \pi \frac{m_x}{\rho^3} + \frac{\xi'}{\epsilon_0} + \frac{4}{3} \pi \xi' \right] = m_x, \text{ u. s. w.}$$

§ 10. Wir werden nun zeigen, dass den Gleichungen  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$  wirklich genügt werden kann durch eine Fortpflanzung transversaler Schwingungen. Wir verstehen darunter im allgemeinen jeden Bewegungszustand, der den Gleichungen:

$$(I) \quad \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_z}{\partial z} = 0,$$

$$(II) \quad \Delta m_x = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2}, \quad \Delta m_y = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 m_y}{\partial t^2}, \quad \Delta m_z = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 m_z}{\partial t^2}$$

genügt;  $v$  ist die vorläufig unbekannte Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Es sei:

$$m_x = f_1(x, y, z, t), \quad m_y = f_2(x, y, z, t), \quad m_z = f_3(x, y, z, t)$$

ein Werthsystem, wodurch (I) und (II) befriedigt werden, und es mögen dabei  $f_1, f_2, f_3$  stetige Functionen sein, welche entweder nur in endlicher Entfernung vom Coordinatenursprung einen von 0 verschiedenen Werth haben, oder wenigstens bei wachsender Entfernung rasch abnehmen. Um dann diese Werthe zu prüfen, haben wir für den Mittelpunkt  $P$  einer Kugel  $K$  die Grössen  $\xi', \eta', \zeta'$  zu berechnen. Wir beschränken uns dabei zunächst auf denjenigen Theil  $\xi'_1$  von  $\xi'$ , der von den transversalen Bewegungen  $(A)$  herrührt. Sind die Coordinaten von  $P$   $x', y', z'$ , diejenigen irgend eines andern Molecüls  $Q$   $x, y, z$ , ist weiter  $PQ = r$ , so liefert  $Q$  für  $\xi'_1$  den Antheil:

$$11) \left\{ \begin{aligned} \xi'_{1(q)} &= \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{r} f_1 \left( x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{r} f_2 \left( x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r} f_3 \left( x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] \right\} - \alpha \Delta' \left[ \frac{1}{r} f_1 \left( x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] \\ &\quad \left( \Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \end{aligned} \right.$$

Um hieraus  $\xi'_i$  zu erhalten, muss man über sämtliche Theilchen  $Q$  summiren.

§ 11. Wir wollen dabei noch die weitere Voraussetzung machen, dass sich  $m_x, m_y, m_z$  von Molecül zu Molecül nur sehr langsam ändern, was bei der Lichtbewegung der Fall sein wird, wenn die Wellenlänge gegen die Entfernung zweier Nachbarmolecüle sehr gross ist. Wir können dann um  $P$  als Mittelpunkt eine Kugel  $S$  legen, welche sehr viele Theilchen enthält, aber dennoch so klein ist, dass für sämtliche Molecüle innerhalb derselben  $m_x, m_y, m_z$  als gleich betrachtet werden dürfen. Wir erreichen dadurch erstens eine erhebliche Vereinfachung von (11) für die Theilchen  $Q$  innerhalb  $S$ , und es lässt sich zeigen, dass  $\sum \xi'_{1(q)}$  über diese Theilchen ausgedehnt verschwindet, sobald die Anordnung der Molecüle isotrop oder wenigstens, wie bei den Krystallen des regulären Systems, nach drei unter einander senkrechten Richtungen die nämliche ist. Zweitens lässt sich  $\sum \xi'_{1(q)}$  für die übrigen Theilchen durch ein Integral über den Raum ausserhalb  $S$  ersetzen. Ist nämlich  $p$  die Molecülzahl in der Raumeinheit, so wird

$$\xi'_i = \alpha p \frac{\partial J_1}{\partial x^i} - \alpha p J_2,$$

wenn

$$J_1 = \iiint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{r} f_1 \left( x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{r} f_2 \left( x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r} f_3 \left( x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] \right\} dx dy dz,$$

und

$$J_2 = \iiint \Delta' \left[ \frac{1}{r} f_1 \left( x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] dx dy dz$$

gesetzt wird.

§ 12. Um  $J_1$  zu finden benutzen wir folgende Betrachtung. Die Grössen  $\frac{1}{r}f_1(x, y, z, t - \frac{r}{v_0})$ ,  $\frac{1}{r}f_2$ ,  $\frac{1}{r}f_3$  enthalten  $x, y, z$  erstens gesondert, zweitens in  $r$  involviret. Bezeichnet man nun mit  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$  die wirklichen Differentialquotienten, mit  $(\frac{\partial}{\partial x}), (\frac{\partial}{\partial y}), (\frac{\partial}{\partial z})$  diejenigen, welche man erhält, wenn man  $r$  als constant betrachtet, so ist

$$J_2 = \iiint \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[ \frac{1}{r} f_1 \right] + \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{r} f_2 \right] + \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \frac{1}{r} f_3 \right] \right\} dx dy dz \\ - \iiint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{r} f_1 \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{r} f_2 \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r} f_3 \right] \right\} dx dy dz.$$

Die Function im ersten Integrale ist der Werth, den  $\frac{1}{r} \left( \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_z}{\partial z} \right)$  zur Zeit  $t - \frac{r}{v_0}$  im Punkte  $(x, y, z)$  hat, und verschwindet also nach (I). Das letzte Glied reducirt sich auf ein Integral über die Kugelfläche  $S$ , und auch  $\frac{\partial J_1}{\partial x'}$  lässt sich durch ein solches Integral darstellen. Die Ausrechnung liefert

$$\frac{\partial J_1}{\partial x'} = \frac{4}{3} \pi m_x,$$

wo  $m_x$  sich auf das Theilchen  $P$  bezieht.

§ 13. Das Integral  $J_2$  kann man in zweierlei Weise umformen. Erstens ist identisch

$$J_2 = \iiint \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} \left[ \frac{1}{r} f_1 \right] dx dy dz \\ - \iiint \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x'} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \right\} \right] \left[ \frac{1}{r} f_1 \right] dx dy dz.$$

Die letzte Grösse reducirt sich auf ein Integral über  $S$  und erhält den Werth  $-4\pi m_x$ . Die im ersten Integral vorkommende Function ist aber der Werth, den  $\frac{1}{r} \Delta m_x$  im Punkte  $(x, y, z)$  zur Zeit  $t - \frac{r}{v_0}$  annimmt. Unter Berücksichtigung von (II) wird demzufolge

$$J_2 = \frac{1}{v^2} \iiint \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{1}{r} f_1 \left( x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] dx dy dz + 4 \pi m_x.$$

Zweitens erhält man, wenn man die durch  $\mathcal{A}'$  ange- deuteten Operationen ausführt (vergl. § 4):

$$J_2 = \frac{1}{v_0^2} \iiint \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{1}{r} f_1 \left( x, y, z, t - \frac{r}{v_0} \right) \right] dx dy dz.$$

Aus den beiden gefundenen Werthen kann man das Integral eliminiren; führt man dabei für das Verhältniss  $\frac{v_0}{v}$ , d. h. also für den absoluten Brechungsexponenten des betrachteten Mediums, den Buchstaben  $n$  ein, so wird

$$J_2 = - \frac{4 \pi m_x}{n^2 - 1},$$

folglich

$$\xi_1' = \alpha p \cdot \frac{4}{3} \pi m_x - \alpha p \cdot \frac{4 \pi m_x}{n^2 - 1} = \alpha p \cdot \frac{4}{3} \pi m_x \cdot \frac{n^2 + 2}{n^2 - 1}.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich für denjenigen Theil von  $\xi'$ , der von den Bewegungen (B) herrührt, der Werth  $\beta \cdot \frac{4}{3} \pi p m_x$ . Es wird also schliesslich

$$(12) \quad \xi' = q m_x, \quad \eta' = q m_y, \quad \zeta' = q m_z, \quad q = \frac{4}{3} \pi p \left( \alpha \cdot \frac{n^2 + 2}{n^2 - 1} + \beta \right).$$

§ 14. Durch Einführung dieser Werthe zieht sich jedes der Systeme ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ) auf eine Gleichung zusammen, nämlich auf:

$$(13) \quad \begin{cases} (\alpha + \beta) \left( \frac{4}{3} \pi + \frac{1}{\epsilon_0} \right) + \frac{4}{3} \pi \rho^3 q = 1, & (2 \alpha - \beta) \cdot \frac{4}{3} \pi + \frac{4}{3} \pi \rho^3 q = 1, \\ (\alpha + \beta) \cdot \frac{4}{3} \pi + \left( \frac{4}{3} \pi + \frac{1}{\epsilon_0} \right) \rho^3 q = \frac{\rho^3}{\kappa}. \end{cases}$$

Da also zwischen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $q$  (woraus mittelst (12)  $n$  und  $v$  gefunden werden können) drei Gleichungen bestehen, ist einerseits der vorausgesetzte Bewegungszustand möglich und lassen sich andererseits alle bis jetzt unbestimmt ge- bliebenen Grössen berechnen. Es wird nämlich:

$$\alpha = \frac{4 \pi \epsilon_0 \left( 1 - \frac{\rho^3}{\kappa} \right) + 3}{12 \pi}, \quad \beta = - \frac{\alpha}{1 + 4 \pi \epsilon_0},$$

$$q = \frac{\frac{4}{3} \pi \epsilon_0^2 \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\rho^3} \right) + \frac{\epsilon_0}{\kappa}}{1 + 4 \pi \epsilon_0}.$$

Nun ist man in der electromagnetischen Lichttheorie genöthigt, für die Constante  $\epsilon_0$  einen so grossen Werth anzunehmen, dass  $\frac{1}{\epsilon_0}$  gegen die Einheit vernachlässigt werden darf.<sup>1)</sup> Es geht dann aus dem Werth von  $\beta$  zunächst hervor, dass die im Aether bestehende longitudinale Bewegung sehr viel schwächer ist als die transversale. Substituirt man weiter die gefundenen Werthe in (12), vernachlässigt man dabei  $\frac{1}{1 + 4\pi\epsilon_0}$  gegen  $\frac{n^2 + 2}{n^2 - 1}$ , setzt man im zweiten Gliede  $\frac{4\pi\epsilon_0}{1 + 4\pi\epsilon_0} = 1$ , und berücksichtigt man noch die Relation  $p = \frac{d}{m}$ , wo  $d$  die Dichte des Mediums,  $m$  die Masse eines Molecüls bedeutet, so wird

$$(III) \quad \frac{n^2 - 1}{(n^2 + 2)d} = k,$$

wenn

$$(14) \quad k = \frac{\frac{4}{3}\pi q^3}{m} \cdot \frac{(3 + 4\pi\epsilon_0) - 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{q^3}{\kappa}}{(3 + 8\pi\epsilon_0) \frac{q^3}{\kappa} - 8\pi\epsilon_0}$$

ist.

Variirt nun die Dichte des betrachteten Körpers, und bleiben dabei die Molecüle ungeändert, so bleibt auch  $k$ , also auch  $\frac{n^2 - 1}{(n^2 + 2)d}$  constant (vergl. (1)).

§ 15. Wenn man nicht, wie im Vorhergehenden, alle Molecüle als gleich betrachtet, sondern mehrere Arten derselben voraussetzt, so erhält man Formeln für den Brechungsexponenten einer Mischung. Es ergibt sich dann erstens, dass auch hier noch das Verhältniss  $\frac{n^2 - 1}{(n^2 + 2)d}$  einen constanten Werth haben muss, zweitens, dass zwischen dieser Grösse und den analogen Constanten  $\frac{n_1^2 - 1}{(n_1^2 + 2)d_1}$ ,  $\frac{n_2^2 - 1}{(n_2^2 + 2)d_2}$  u. s. w., welche sich auf die Bestandtheile der Mischung in gesondertem Zustande beziehen, die Relation:

$$(IV) \quad \frac{n^2 - 1}{(n^2 + 2)d} = a_1 \frac{n_1^2 - 1}{(n_1^2 + 2)d_1} + a_2 \frac{n_2^2 - 1}{(n_2^2 + 2)d_2} + \text{u. s. w.}$$

1) Helmholtz, a. a. O. p. 68, Anmerkung, p. 128, 129.

bestehen muss. Dabei sind  $a_1, a_2$  u. s. w. die in der Gewichtseinheit vorhandenen Mengen der Bestandtheile.

§ 16. Da nach (14) der Werth von  $k$  unabhängig von der Wellenlänge ist, sind zur Erklärung der Dispersion des Lichtes weitere Betrachtungen nothwendig. Ich habe zunächst untersucht, ob es (ähnlich wie in der Cauchy'schen Theorie) möglich ist, die Farbenzerstreuung daraus zu erklären, dass die Körper nicht aus einer homogenen Materie, sondern aus discreten Theilchen bestehen.

In der That wird die Voraussetzung des § 11, dass die electricischen Momente von Nachbarmoleculen als gleich betrachtet werden dürfen, um so weniger erfüllt sein, je kleiner die Wellenlänge  $l$  ist. Treibt man die Genauigkeit weiter, berücksichtigt man also auch die Verschiedenheit der Momente von nebeneinander liegenden Theilchen, so erhält man an den früher für  $\xi, \eta, \zeta$  gefundenen Werthen Correctionen, welche, mit diesen Werthen selbst verglichen, von der Ordnung  $\left(\frac{\delta}{l}\right)^2$  sind, wenn  $\delta$  die Entfernung der nächstliegenden Theilchen bedeutet. Es wird dann auch  $n$  von  $l$  abhängig.

Ich habe die eben erwähnten Correctionen für den Fall berechnet, dass die Molecüle eine regelmässig cubische Anordnung haben. Es ergab sich dabei allerdings eine Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Wellenlänge (in umgekehrter Richtung wie die beobachtete); nach dem zu urtheilen, was wir über die Entfernung der Molecüle wissen, scheint indess der berechnete Unterschied von  $n$  für verschiedene Wellenlängen unmerklich sein zu müssen.<sup>1)</sup>

1) Setzt man z. B. in der erhaltenen Formel für  $\delta$  den Werth, den Hr. van der Waals für die mittlere Entfernung der Molecüle eines Gases (bei 0° und 760 mm Druck) gefunden hat, 0,000 0025 mm, und nimmt man an, dass für unendlich lange Wellen der Brechungsexponent  $n_0 = 1,5$  ist, so findet man, dass der Werth von  $n$  für ultraviolette Strahlen erst in der vierten Decimale von  $n_0$  abweicht.

Es lässt sich also in dieser Weise die Dispersion nicht aus der molecularen Discontinuität erklären. Immerhin wäre dies vielleicht möglich, wenn man nicht mehr für die electricischen Kräfte in molecularen Entfernungen die nämlichen Gesetze annehmen wollte, welche für messbare Entfernungen gelten; es könnte dadurch die gegenseitige Wirkung nebeneinander liegender Theilchen und damit der Einfluss der un stetigen Raumerfüllung grösser werden.

Indess scheint mir gegen jede Erklärung der Dispersion aus der Anordnung der Molecüle der Umstand zu sprechen, dass die Krystalle des regulären Systems wenigstens mit sehr grosser Annäherung optisch isotrop sind; sobald man nämlich der molecularen Structur einen grossen Einfluss zuschreibt, wird man bei diesen Körpern nicht mehr alle Richtungen als optisch gleichwerthig betrachten dürfen.

§ 17. Diese Umstände scheinen mir darauf hinzuweisen, dass die Ursache der Farbenzerstreuung nicht in der Anordnung, sondern vielmehr in der Beschaffenheit der Molecüle gesucht werden muss. Um die Möglichkeit einer solchen Erklärung zu zeigen, wollen wir die Entstehungsweise eines electricischen Momentes etwas näher betrachten und zwar unter den möglichst einfachen Voraussetzungen.

Es mögen sich in einem Körpertheilchen mehrere mit Electricität geladene materielle Punkte befinden, von denen jedoch nur einer mit der Ladung  $e$  aus seiner Gleichgewichtslage verschoben werden kann. (Die übrigen seien daran durch ihre grossen Massen verhindert.) Es werde weiter dieser Punkt, wenn er eine Verschiebung  $(x, y, z)$  erlitten hat, durch den Einfluss der übrigen mit einer Kraft  $(-cx, -cy, -cz)$  ( $c$  positive Constante) nach der Gleichgewichtslage zurückgetrieben. Wirkt dann die äussere electromotorische Kraft  $(X, Y, Z)$ , so wird Gleichgewicht bestehen, wenn  $x = \frac{e}{c} X$ ,  $y = \frac{e}{c} Y$ ,  $z = \frac{e}{c} Z$  ist. Die Com-



ponenten des electricischen Momentes sind dann  $ex$ ,  $ey$ ,  $ez^1$ ), oder  $\alpha X$ ,  $\alpha Y$ ,  $\alpha Z$ , wenn  $\alpha = \frac{e^2}{c}$  ist.

Anders verhält sich die Sache, sobald sich der materielle Punkt bewegt. Ist  $\mu$  seine Masse, so muss dann:

$$eX - cx = \mu \frac{d^2x}{dt^2}, \quad eY - cy = \mu \frac{d^2y}{dt^2}, \quad eZ - cz = \mu \frac{d^2z}{dt^2}$$

sein. Für den Fall, dass der Punkt einfache Schwingungen macht mit der Oscillationsdauer  $T$ , kann man aus diesen Formeln noch die Beziehungen (2) herleiten; nur ist jetzt

$\alpha = \frac{e^2}{c - \frac{4\pi^2\mu}{T^2}}$ , also desto grösser, je kleiner  $T$  ist (wenn

immer  $\frac{4\pi^2\mu}{T^2} < c$  bleibt).

Wir haben hier eine sehr specielle Voraussetzung über die Natur der Molecüle zu Grunde gelegt, und ihr Bau kann in Wirklichkeit viel complicirter sein. Obiges Beispiel möge denn auch nur dazu dienen, die Annahme wahrscheinlich zu machen, dass man in den Formeln, welche wir früher erhalten haben, für  $\alpha$  eine mit wachsendem  $T$  abnehmende Grösse zu setzen hat, sobald man annimmt, dass bei dem Entstehen eines electricischen Momentes eine gewisse Masse in Bewegung gesetzt wird. Wie dann aber diese Annahme zu einer Erklärung der Dispersion führen kann, ergibt sich leicht aus den Gleichungen (III) und (14).

In meiner ursprünglichen Arbeit habe ich nachgewiesen, dass man wirklich auf dem hier angedeuteten Wege zu Dispersionsformeln gelangen kann, welche eine befriedigende Uebereinstimmung mit den Beobachtungen zeigen. Ich verzichte hier auf die Mittheilung derselben, da sie doch bei unserer Unbekanntheit mit dem Baue der Molecüle nur dazu dienen können, die Möglichkeit einer Erklärung zu beweisen, und da, sogar wenn sie theoretisch vollkommen genau waren, die Gleichung von Cauchy eine viel bequemere Interpolationsformel bleiben würde.

1) Es ist hierbei angenommen, dass die algebraische Summe der electricischen Ladungen im Molecül 0 ist, und dass im Gleichgewichtszustande kein electricisches Moment besteht.

Es muss schliesslich noch hervorgehoben werden, dass wenn die oben mitgetheilten Ansichten über die Ursache der Dispersion richtig sind, und also die Grösse  $\kappa$  eine Function von  $T$  ist, alle früher entwickelten Resultate gültig bleiben, wenn man sich auf Schwingungen mit bestimmter Oscillationsdauer beschränkt. Die Beziehung zwischen  $n$  und  $d$ , sowie die Gleichung (IV) müssen dann also für jede bestimmte Gattung von Lichtstrahlen gelten und nicht etwa bloß für solche mit unendlich grosser Wellenlänge.

§ 18. Ich habe die entwickelte Theorie zunächst verglichen mit den Versuchen des Hrn. Wüllner<sup>1)</sup> über die Aenderungen, welche die Brechungsexponenten von einigen Flüssigkeiten und Gemischen derselben durch Erwärmung erleiden. Nachstehende Tabelle I bezieht sich auf die (mittelst der Cauchy'schen Formel aus den Messungen abgeleiteten) Brechungsexponenten  $A$  für unendlich grosse Wellenlänge. Die Abnahme derselben durch Erwärmung ist nicht bloß nach der Formel (III), sondern auch nach den bekannten Formeln:

$$(V) \quad \frac{n^2-1}{d} = \text{Const.} \quad \text{und} \quad (VI) \quad \frac{n-1}{d} = \text{Const.}$$

berechnet. Es wurden dabei die von Hrn. Wüllner mitbestimmten Aenderungen der Dichtigkeit benutzt.

## I.

Abnahme von  $A$  für 1° C.

	Beobachtet	Berechnet nach (V)	Beob. Rechn.	Berechnet nach (VI)	Beob. Rechn.	Berechnet nach (III)	Beob. Rechn.
Glycerin . . . . .	0,000263	192	71	227	36	260	3
1 Wasser; 3,7 Glycerin	0,000229	167	62	196	33	223	6
1 " 1 "	0,000183	131	52	152	31	170	13
1 " 0,5 "	0,000152	107	45	123	29	136	16
1 Alkohol; 4 "	0,000289	213	76	251	38	286	3
1 " 2 "	0,000301	241	60	283	18	322	— 21
1 " 0,998 "	0,000325	260	65	303	22	342	— 17
1 " 0,4997 "	0,000350	288	62	335	15	376	— 26

1) Wüllner, Pogg. Ann. 133. p. 1. 1868.

Fortsetzung von Tabelle I.

	Beobachtet	Berechnet nach (V)	Beob. — Rechn.	Berechnet nach (VI)	Beob. — Rechn.	Berechnet nach (III)	Beob. — Rechn.
Alkohol . . . . .	0,000384	328	56	377	7	419	— 35
Gesättigte Chlorzinklösung	0,000286	242	44	290	—4	340	— 54
1 Wasser; 3,997 „	0,000264	223	41	264	0	303	— 39
1 „ 1,996 „	0,000256	208	48	244	12	278	— 22
1 „ 0,9998 „	0,000249	197	52	229	20	258	— 9
Schwefelkohlenstoff . . .	0,000754	569	185	700	54	860	—106
1 Alkohol; 3,955 CS <sub>2</sub>	0,000646	522	124	629	17	746	—100
1 „ 2,12836 „	0,000593	493	100	588	5	688	— 95
1 „ 1,03111 „	0,000544	450	94	532	12	611	— 67

Da die Dichtigkeit des Wassers nicht als eine lineare Function der Temperatur dargestellt werden kann, habe ich für diese Flüssigkeit aus dem Werth von  $A$  für  $10^\circ$  diejenigen für  $20^\circ$  und  $30^\circ$  berechnet und dabei folgende Werthe erhalten:

## II.

Temperatur	Beobachtet	Berechnet nach (V)	Beob. — Rechn.	Berechnet nach (VI)	Beob. — Rechn.	Berechnet nach (III)	Beob. — Rechn.
$10^\circ$	1,32508	—	—	—	—	—	—
$20^\circ$	1,32409	1,32467	—58	1,32461	—52	1,32456	—47
$30^\circ$	1,32310	1,32396	—86	1,32380	—70	1,32368	—58

§ 19. Da die gemessenen Brechungsexponenten jedenfalls bis auf 4 Decimalen genau sind, zeigen diese Tabellen, dass jede der drei angewandten Formeln, wenn man aus ihr die Aenderung von  $A$  für nur  $10^\circ$  ableitet, zu Abweichungen führt, welche die Beobachtungsfehler übersteigen. Diese Abweichungen sind am grössten bei (V), während je nach der Natur der betrachteten Flüssigkeit bald unsere Gleichung (III), bald die empirische Formel (VI) die grösste Genauigkeit liefert. Bei beiden erreichen die Abweichungen etwa den Werth von 19 Proc. der beobachteten Aenderung von  $A$ .

Mit Ausnahme des Wassers und der Gemische von Wasser und Glycerin liefert die Formel (III) für die Aen-

derung des Brechungsexponenten zu grosse Werthe. Wir wollen Abweichungen in dieser Richtung negativ, also die beim Wasser auftretenden positiv nennen. Der Einfluss des Wassers macht sich auch in den negativen Abweichungen der Chlorzinklösungen dadurch bemerkbar, dass dieselben mit steigender Verdünnung abnehmen.

§ 20. In ganz gleicher Weise wie oben auf die Aenderung von  $A$  habe ich die Formel (III) auch auf die Brechungsexponenten  $n_\alpha$  und  $n_\gamma$  für die beiden Wasserstofflinien  $H_\alpha$  und  $H_\gamma$  angewendet. Die Tabellen III und IV enthalten die Resultate.

### III. Abnahme für 1° C. von

	$n_\alpha$			$n_\gamma$		
	Beobachtet	Berechn. nach(III)	Beob. - Rechn.	Beobachtet	Berechn. nach(III)	Beob. - Rechn.
Glycerin . . . . .	0,000 265	267	- 2	0,000 267	275	- 8
1 Wasser; 3,7 Glycerin	0,000 231	228	+ 3	0,000 233	235	- 2
1 " 1 "	0,000 185	174	+ 11	0,000 187	180	+ 7
1 " 0,5 "	0,000 154	140	+ 14	0,000 156	144	+ 12
1 Alkohol; 4 "	0,000 292	293	- 1	0,000 296	303	- 7
1 " 2 "	0,000 305	330	- 25	0,000 310	340	- 30
1 " 0,998 "	0,000 330	350	- 20	0,000 336	361	- 25
1 " 0,4997 "	0,000 356	386	- 30	0,000 363	397	- 34
Alkohol . . . . .	0,000 389	429	- 40	0,000 395	442	- 47
Gesättigte Chlorzinklösung	0,000 288	353	- 65	0,000 291	369	- 78
1 Wasser; 3,997 "	0,000 266	314	- 48	0,000 268	327	- 59
1 " 1,996 "	0,000 258	287	- 29	0,000 261	298	- 37
1 " 0,9998 "	0,000 250	265	- 15	0,000 252	275	- 23
Schwefelkohlenstoff . .	0,000 780	920	-140	0,000 850	1032	-182
1 Alkohol; 3,955 CS <sub>2</sub>	0,000 678	790	-112	0,000 750	867	-117
1 " 2,12836 "	0,000 626	724	- 98	0,000 680	786	-106
1 " 1,03111 "	0,000 560	638	- 78	0,000 590	682	- 92

### IV. Wasser.

Temperatur	$n_\alpha$		Beob. - Rechn.	$n_\gamma$		Beob. - Rechn.
	Beobachtet	Berechnet		Beobachtet	Berechnet	
10°	1,33215	—	—	1,34130	—	—
20°	1,33116	1,33162	-54	1,34031	1,34076	-45
30°	1,33017	1,33071	-54	1,33932	1,33982	-50

§ 21. Die Tabellen I und III zeigen, dass die unbekannt<sup>en</sup> Ursachen, wodurch bei Glycerin, Alkohol, Chlorzinklösung und Schwefelkohlenstoff die Brechungsexponenten sich weniger ändern, als es nach unserer Theorie der Fall sein müsste, einen um so grössern Einfluss haben, je kleiner die Wellenlänge ist. Auch verschiedene andere Flüssigkeiten, auf welche ich die Formel (III) anwendete, zeigen ein ganz übereinstimmendes Verhalten.

Sogar beim Wasser, wofür in den Tabellen die Abweichungen entgegengesetzte Richtung haben, scheinen noch die nämlichen Ursachen wie bei den anderen Flüssigkeiten zu bestehen. Denn erstens wird hier die positive Abweichung um so geringer, je kleiner die Wellenlänge ist. Und zweitens erhält man wirklich negative Abweichungen, wenn man unsere Formel vergleicht mit den Beobachtungen des Hrn. Jamin über die Aenderung des Brechungsexponenten des Wassers durch Zusammen-  
drückung.

Während also negative Abweichungen die Regel sind, scheint man die positiven beim Wasser secundären Ursachen zuschreiben zu müssen, welche sich nur bei einer Temperaturänderung bemerkbar machen. Es wäre z. B. möglich, dass bei Erwärmung die Wassermolecüle sich so änderten, dass  $\alpha$  abnimmt, durch welche Auffassung man es auch erklären könnte, dass bei einer Abkühlung unter  $4^{\circ}$  C. trotz der Ausdehnung des Wassers der Brechungsexponent zunimmt. Ich bemerke schliesslich noch, dass die positiven Abweichungen nur bis zu einer bestimmten Temperatur zu bestehen scheinen.

§ 22. Unter den festen Körpern haben einige, wie z. B. Flussspath (nach den Bestimmungen von Baille<sup>1)</sup>), wie die Flüssigkeiten einen bei Erwärmung abnehmenden Brechungsexponenten. Bei Anwendung der Formel (III) zeigen sich wieder negative Abweichungen; nur sind sie jetzt grösser geworden. Man kann sich nun vorstellen, dass die Ursachen, welche hier noch mehr als bei den Flüssig-

1) Baille, Recherches sur les indices de réfraction. Paris, 1867.

keiten die Abnahme der Brechungsexponenten verkleinern, wenn sie in noch stärkerem Maasse aufträten, sogar eine Zunahme der Brechungsexponenten zur Folge haben könnten. Eine solche ist wirklich bei verschiedenen Glassorten durch die Versuche von Fizeau, van der Willigen und Baille nachgewiesen.

Mit der Auffassung, dass die Abweichungen von unserer Theorie sowohl bei festen Körpern wie bei Flüssigkeiten den nämlichen Ursachen zugeschrieben werden müssen, ist es ganz in Uebereinstimmung, dass erstens bei Flintglas die Zunahme des Brechungsexponenten um so grösser ist, für je kleinere Wellenlängen man ihn betrachtet, und dass zweitens, wie Baille fand, bei Crownglas der Brechungsexponent für grössere Wellenlängen bei Erwärmung ab-, derjenige für kleinere Wellenlängen zunimmt.

§ 23. Wir können schliesslich die Formel (III) noch auf diejenigen Körper anwenden, für welche der Brechungsexponent im flüssigen und dampfförmigen Zustande bekannt ist. Folgende kleine Tabelle enthält die (absoluten) Brechungsexponenten einiger Dämpfe, aus denjenigen der zugehörigen Flüssigkeiten berechnet. Es beziehen sich dabei erstere auf einen Druck von 760 mm und die Temperatur 0°.<sup>1)</sup>

	Dichte	Flüssig $n$	
Wasser . . . . .	1 (4°)	1,3345 (4°)	Wüllner
Schwefelkohlenstoff .	1,2702 (15,6°)	1,6308 (15,6°)	Baden Powell
Aether . . . . .	0,7166 (20°)	1,3529 (20°)	Landolt
Schweflige Säure .	0,4821	1,3384	Ketteler <sup>2)</sup>

1) Kann der Dampf unter diesen Verhältnissen nicht bestehen, so haben die angegebenen Zahlen die Bedeutung, dass man aus denselben mittelst einer der (für Gase identischen) Formeln (III), (V) und (VI) die Brechungsexponenten für wirklich vorkommende Zustände berechnen kann.

2) Ketteler, Beobachtungen über die Farbenzerstreuung der Gase.

	Dichte (die d. Luft = 1)	Gasförmig	
		Beobachtet	Berechnet
Wasser . . . . .	0,622	1,000 261 Jamin <sup>1)</sup>	1,000 249
Schwefelkohlenstoff .	2,644	1,001 50 Dulong	1,001 44
Aether . . . . .	2,580	1,001 53 „	1,001 51
Schweflige Säure . .	2,216	{ 1,000 665 { 1,000 686 Ketteler	1,000 605

Auch hier haben, wie man sieht, die Abweichungen die schon öfter angedeutete Richtung. Das Gegentheil schien der Fall zu sein bei Schwefel- und Phosphordampf, deren Brechungsexponenten aus denjenigen des festen Schwefels und Phosphors berechnet und mit den von Hrn. Le Roux<sup>2)</sup> bestimmten Werthen verglichen werden können. Für festen Schwefel ist (für rothe Strahlen)  $n = 2,053$ ,  $d = 2,065$ ; für Phosphor  $n = 2,106$ ,  $d = 1,823$ . Da nun die Dichtigkeit der Dämpfe in Beziehung auf Luft resp. 6,617 und 4,355 ist, erhält man für  $n$  die Werthe 1,0032 und 1,0020 (bei  $0^\circ$  und 760 mm), während nach Le Roux  $n = 1,001\ 629$  und  $n = 1,001\ 364$  sein sollte. Es scheinen mir aber die letzteren Zahlen mit einem bedeutenden Fehler behaftet zu sein. Le Roux hat bei Berechnung seiner Versuche den Satz angewandt, dass der relative Brechungsexponent zweier gasförmiger Körper von gleicher Temperatur und bei Atmosphärendruck von der Temperatur unabhängig ist. Dies ist augenscheinlich falsch. Eine entsprechende Correction reducirt die Angaben von Le Roux für Schwefel auf  $n = 1,0036$ , für Phosphor auf  $n = 1,0025$  (welche Zahlen indess wohl nicht sehr genau sein können). Die Abweichungen von unseren theoretischen Werthen wären dann also wieder negativ.<sup>3)</sup>

§ 24. Was nun die Ursachen der immer in gleicher Richtung wiederkehrenden Abweichungen betrifft, so kann man darüber nur Muthmassungen anstellen. Sie könnten

1) Jamin, Ann. de chim. et de phys. (3) 52. p. 163. 1858.

2) Le Roux, Ann. de chim. et de phys. (3) 61. p. 585. 1861.

3) Sind diese Bemerkungen über die Angaben von Le Roux richtig, so werden die Folgerungen, welche Hr. Schrauf in seinen „Physikalischen Studien“, p. 72, aus denselben ableitet, unstatthaft.

z. B. ihren Grund haben in einer Aenderung der Molecüle, in einem Einflusse derselben auf die Eigenschaften des Aethers, in einer Abweichung von den gewöhnlichen Wirkungsgesetzen der Electricität für moleculare Entfernungen oder endlich in den Complicationen, welche eintreten könnten, wenn die Molecüle einen grossen Theil des Körperarmes einnehmen. Es wäre indess voreilig, eine dieser Hypothesen, deren Zahl sich noch wohl vermehren liesse, schon jetzt weiter auszuarbeiten.

§ 25. Nach dem Obigen lässt sich auch bei der Formel (IV), welche wir für den Brechungsexponenten einer Mischung ableiteten, keine absolute Genauigkeit erwarten. In der That fand ich bei der Anwendung derselben auf verschiedene Mischungen nicht unbedeutende Abweichungen. Ihre Richtung lässt sich hier nicht mehr so einfach angeben wie in den früher untersuchten Fällen; dass aber auch hier die nämlichen Ursachen wirken wie bei der Dichtigkeitsänderung der Körper, dafür spricht der Umstand, dass die Abweichungen wieder im allgemeinen mit abnehmender Wellenlänge wachsen.

§ 26. Bekanntlich haben verschiedene Physiker gezeigt, dass man bei vielen chemischen Verbindungen mit ziemlicher Annäherung die Brechungsexponenten aus denjenigen der Bestandtheile mittelst der Formeln berechnen kann, welche für Mischungen angenommen wurden. Als ich die Formel (IV) auf einige Verbindungen von Kohlenstoff, Wasserstoff und Sauerstoff anwendete, deren Brechungsexponenten von Hrn. Landolt bestimmt sind, erhielt ich zwar eine gewisse rohe Uebereinstimmung; es steht indessen in dieser Hinsicht die Gleichung (IV) entschieden hinter der von Hrn. Landolt benutzten empirischen Formel zurück.

Wenn es sich übrigens bei weiterer Untersuchung zeigen sollte, dass wirklich für die Brechungsexponenten einer grössern Zahl von Verbindungen die nämlichen Formeln gelten wie für die Mischungen, so wäre dies, wenn man die electromagnetische Theorie des Lichtes annimmt



wohl am besten zu erklären durch die Annahme, dass ebenso wie in jedem Molecüle einer Mischung, so auch in jedem Atome einer Verbindung ein electricisches Moment erregt werden könne.

## VI. *Das Stokes'sche Gesetz; von O. Lubarsch.*

Seit ich vor mehr als Jahresfrist eine Abhandlung<sup>1)</sup> über Fluorescenz publicirte, in welcher ich die von Lommel erhaltenen Resultate nach genauer Untersuchung bestätigte, sind drei neue Arbeiten in diesen Annalen erschienen, welche sich mit der Gültigkeit des Stokes'schen Gesetzes beschäftigen. Die erste<sup>2)</sup>, von Lommel, ist gegen eine in den Comptes rendus erschienene Abhandlung<sup>3)</sup> von Lamansky gerichtet und soll zeigen, dass der letztere Beobachter, welcher für das Stokes'sche Gesetz eintritt, in Wahrheit durch seine Untersuchungen nur bewiesen hat, dass die mittlere Brechbarkeit des erregenden Lichtes grösser ist, als die mittlere des Fluorescenzlichtes (das Stokes'sche Gesetz verlangt bekanntlich, dass die höchste Brechbarkeit des erregenden Lichtes grösser sei als die höchste des erregten), dass er somit nichts Neues geliefert hat. Kurze Zeit darauf griff Hagenbach<sup>4)</sup> die Ansichten Lommel's an, indem er zeigte, dass bei richtiger Bestimmung der oberen Grenze des erregenden Lichtes dieselbe stets höher gefunden wird als bisher angenommen wurde, und dass das Stokes'sche Gesetz sich bei Vermeidung dieses Fehlers immer als richtig erweist. Endlich zeigt Lamansky<sup>5)</sup> in seiner

1) Lubarsch, Wied. Ann. 6. p. 248. 1879.

2) Lommel, Wied. Ann. 8. p. 244. 1879.

3) Lamansky, Compt. rend. 88. p. 1192. 1879.

4) Hagenbach, Wied. Ann. 8. p. 369. 1879.

5) Lamansky, Wied. Ann. 8. p. 624. 1879.