V. *Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in elastischen Röhren;*

von D. J. Korteweg.

Lehrer der H. Bürgerschule zu Breda (Holland).

Wenn der Schall sich in einem luftförmigen oder flüssigen Medium fortpflanzt, welches in einer elastischen Röhre eingeschlossen ist, deren Wände eine der des Mediums vergleichbare Elasticität besitzen, so erleidet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine Verringerung, so z. B. wenn Luft in dünnwandigen Kautschukröhren oder Wasser in Metallröhren den Schall fortleitet. Im Jahre 1825 hat schon Savart[1]) und später Liscovius[2]) diesen Einfluss in Orgelpfeifen mit viereckigem Durchschnitt wahrgenommen und untersucht, wo eine oder mehrere der Seitenwände aus elastischen Membranen bestanden. Cagniard de la Tour[3]) hat im Jahre 1835 versucht Flüssigkeiten in langen Glasröhren in Schwingung zu versetzen und den Ton wahrzunehmen; Wertheim[4]) hat im J. 1848 seine bekannten Versuche mit untergetauchten Orgelpfeifen angestellt; Kundt und Lehmann[5]) und Dvořák[6]) haben in jüngster Zeit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in schwingenden Wassersäulen in Glasröhren von verschiedenem Durchmesser und verschiedener Wanddicke durch Messung der Tonhöhe und Wellenlänge (mit Beihülfe der Kundt'schen Staubfiguren) bestimmt.

Bekanntlich fand Wertheim für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Wasser mit seinen unter-

1) Ann. de chim. et phys. (1.) XXX. XXXII.

2) Pogg. Ann. LVII. p. 497.

3) Ann. de chim. et phys. LVI. Vgl. auch Dvořák, Wien. Ber. LXXI. p. 315. 1875.

4) Pogg. Ann. LXXVII p. 427.

5) Pogg. Ann. CLIII. p. 1.

6) Pogg. Ann. CLIV. p. 156.

getauchten Orgelpfeifen nur 1170 m und nicht, wie aus directen Versuchen und dem Compressibilitätscoëfficienten abgeleitet wurde, 1450 m, und glaubte diesen Unterschied durch die Hypothese erklären zu müssen, die Flüssigkeitssäule schwinge wie ein Stab aus festem Stoffe. Nachdem schon im J. 1848 Helmholtz[1]) gegen dieselbe Einspruch erhoben hat, ist sie jetzt durch die Versuche von Kundt und Dvořák experimentell widerlegt.

Es schien mir, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in einer mit einem flüssigen elastischen Medium gefüllten elastischen Röhre sehr wohl zu berechnen sei, und die Ergebnisse dieser Berechnung sind es, die ich mir untenstehend mitzutheilen erlaube.

Ist R_1 der Radius der Röhre, a_1 deren Wanddicke, E_1 der Elasticitätscoëfficient der Röhrenwand, E der der Flüssigkeit, ϱ die specifische Masse der Flüssigkeit, ϱ_1 die der Röhrenwand, so muss die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, solange wenigstens Reibung und Wärmeleitung vernachlässigt werden können, ausschliesslich von diesen Elementen bedingt sein. Wir nehmen nun vorläufig an, dass irgend ein zwischen zweien auf der Röhrenaxe senkrechten Ebenen eingeschlossenes Flüssigkeitsscheibchen während des Vorbeischreitens der Schallwelle zwar breiter und schmaler wird, (da die Röhrenwand nachgibt) aber durch Ebenen begrenzt bleibt. Weiter nehmen wir an, dass die Wellenlänge gross genug ist, um bei den in der Röhrenwand entstehenden Spannungen nur auf die Ausdehnung oder Eindrückung des ringförmigen Durchschnittes senkrecht auf die Axe achten zu müssen.

Ist die Entfernung eines Flüssigkeitstheilchens im Gleichgewicht, also vor dem Durchgang der Welle, von irgend einer senkrecht zur Röhrenaxe liegenden Ebene gleich x, der Druck daselbst w und der Radius des Rohres R_1, und ändern sich diese Werthe während des Durchganges der Welle zur Zeit t um u_1, p_1, r_1, so sind u_1, p_1 und r_1 drei von x und t abhängige Functionen, und es

1) Fortschr. d. Physik. 1848.

handelt sich zunächst darum, die zwischen diesen Functionen waltenden Beziehungen zu suchen.

Wir vergleichen dazu fürs erste das Volumen eines Scheibchens im Gleichgewichtszustande und während der Wellenbewegung. Gesetzt, die Vorderfläche läge anfangs in einer Entfernung x und die Hinterfläche in einer Entfernung $x + \xi$, so ist das ursprüngliche Volumen:

$$v = R_1{}^2 . \xi . \pi. \tag{1}$$

In einem gegebenen Moment der Wellenbewegung liegt dagegen die Vorderfläche in einer Entfernung $x + u_1$, die Hinterfläche in einem Abstand $x + u_1 + \xi + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) . \xi$, die Dicke des Scheibchens beträgt jetzt $\xi\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x}\right)$ und das neue Volumen, da auch R_1 zu $R_1 + r_1$ geworden:

$$v + \Delta v = (R_1 + r_1)^2 . \pi . \xi\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x}\right), \tag{2}$$

oder, wenn man $\frac{r_1}{R_1}$ und $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ als kleine Grössen betrachten darf, deren Producte und Quadrate vernachlässigt werden:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{2 r_1}{R_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x}. \tag{3}$$

Nach der Definition des Elasticitätscoëfficienten ist jedoch:

$$p_1 = -\frac{E \Delta v}{v}, \tag{4}$$

demnach findet man die Beziehung:

$$\frac{p_1}{E} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{2 r_1}{R_1} = 0. \tag{I}$$

Zweitens berechnen wir die Beschleunigung, die das Scheibchen vermöge des Druckunterschiedes auf Vorder- und Hinterfläche erhält. Die Drucke auf diese Flächen sind resp.:

$$w + p_1 \quad \text{und} \quad w + p_1 + \left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right) \xi,$$

auf die Flächeneinheit kommt also eine treibende Kraft

$\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)\xi$; die Masse aber beträgt auf die Flächeneinheit $\varrho\xi$, demnach ist die Beschleunigung:

(II) $$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -\frac{\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)}{\varrho}.$$

Drittens betrachten wir die Röhrenwand. Diese ist ausgedehnt im Verhältnisse $1 : 1 + \frac{R_1}{r_1}$; auf die Quadrateinheit kommt also eine Spannungszunahme: $\frac{E_1 r_1}{R_1}$, wobei wir noch näher auf die Bedeutung zurückkommen werden, die hier dem Elasticitätscoëfficienten E_1 zuerkannt werden muss.

In dem dem Flüssigkeitsscheibchen von der Dicke ξ entsprechenden Ringe der Röhrenwand beträgt die gesammte Zunahme der beiden Kräfte, die sich an diametral gegenüberliegenden Stellen entwickeln und zwei beliebige Hälften des Röhrenwandringes zusammenhalten:

$$\frac{2 E_1 r_1 a_1 \xi}{R_1}$$

und diese Zunahme ist im Stande Gleichgewicht zu halten gegen einen Ueberdruck q_1 der Flüssigkeit, falls:

(5) $$2 R_1 q_1 \xi = \frac{2 E_1 r_1 a_1 \xi}{R_1} \quad \text{oder} \quad q_1 = \frac{E_1 a_1 r_1}{R_1^2}.$$

Nun beträgt jedoch die Zunahme des Flüssigkeitsdruckes nicht q_1, sondern p_1, es bleibt also eine Kraft $p_1 - q_1$ pro Flächeneinheit übrig, die die Bewegung des elastischen Ringes beschleunigt. Die Masse dieses Ringes beträgt pro Flächeneinheit $a_1 \varrho_1$, also ist die Beschleunigung:

(IIIa) $$\frac{\partial^2 r_1}{\partial t^2} = \frac{p_1 - q_1}{a_1 \varrho_1} = \frac{p_1 - \frac{E_1 a_1 r_1}{R_1^2}}{a_1 \varrho_1}.$$

Wir werden auf diese allgemeinere Formel zurückkommen, können aber in vielen Fällen, namentlich bei grösseren Wellenlängen die Trägheit der Röhrenwand vernachlässigen. Dann ist $q_1 = p_1$ und es wird einfach:

(IIIb) $$p_1 = \frac{E_1 a_1 r_1}{R_1^2}.$$

Mit Hülfe der Beziehungen (I), II) und (IIIb) können wir jetzt zwei der drei Functionen u_1, p_1, r_1 etwa p_1 und r_1 eliminiren.

Wir differenziren (I) partiell nach x, so ist:

$$\frac{1}{E}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial x}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{2}{R_1}\cdot\frac{\partial r_1}{\partial x}=0, \tag{6}$$

aus (II) ergibt sich aber:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x}=-\varrho\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

und aus (IIIb) durch partielle Differentiation nach x:

$$\frac{\partial r_1}{\partial x}=\frac{R_1{}^2}{E_1 a_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial x}=-\frac{\varrho R_1{}^2}{E_1 a_1}\cdot\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}.$$

Man findet durch Substitution in (6):

$$\frac{\partial u_1}{\partial x^2}-\left(\frac{\varrho}{E}+\frac{2\varrho R_1}{E_1 a_1}\right)\cdot\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=0. \tag{A}$$

Diese Formel gilt in allen Fällen, wie z. B. bei sehr grossen Wellenlängen, wo die lebendige Kraft der transversalen Bewegungen der Flüssigkeit und der Röhrenwand gegen die der longitudinalen Bewegung der Flüssigkeit zu vernachlässigen sei.

Die Beziehung (A), welche gilt, wenn sowohl Flüssigkeit als Röhrenwand elastisch sind, muss als besondere Fälle diejenigen enthalten, wo entweder nur die Flüssigkeit oder nur die Röhre als elastisch zu betrachten ist.

Der erste Fall, nur die Flüssigkeit elastisch, führt auf die gewöhnliche Gleichung für Schallbewegungen zurück. In diesem Falle ist $E_1=\infty$ und die Formel (A) wird dann:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{\varrho}{E}\cdot\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=0. \tag{7}$$

Sie stellt eine Wellenbewegung im flüssigen Medium vor, die sich mit der Geschwindigkeit fortpflanzt:

$$a=\sqrt{\frac{E}{\varrho}}. \tag{8}$$

Im zweiten Falle, nur die Röhrenwand elastisch, die Flüssigkeit dagegen incompressibel, der bei tropfbaren

Flüssigkeiten in sehr elastischen Röhren auftritt, z. B. beim gewöhnlichen thierischen Pulse, oder bei mit Wasser gefüllten Kautschukröhren, ist $E = \infty$, also:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{2\varrho R_1}{E_1 a_1} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0, \tag{9}$$

was eine Wellenbewegung vorstellt, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit beträgt:

$$\beta = \sqrt{\frac{a_1 E_1}{2\varrho R_1}}. \tag{10}$$

Weber[1]), Volkmann, Donders[2]), Ludwig, Rive, Marey[3]) haben durch Versuche mit Kautschukröhren die genaue Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Pulswellen zu bestimmen gesucht. Es ist ihnen dies nur theilweise gelungen. Résal[4]) berechnete, angeregt durch Marey's Untersuchungen, mathematisch die Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, und fand wirklich die Formel (9). Moens[5]) fand, unbekannt mit der Résal'schen Formel, durch scharfsinnige Combination von Theorie und Experiment eine Formel, die nur dadurch von der Résal'schen abweicht, dass sie für den, hier experimentell bestimmten Coëfficienten entweder 0,9 oder 1,03 ergibt, jenachdem man eine kleine Aenderung in Moens' Untersuchung annimmt oder nicht, während dieselbe nach der Résal'schen Formel gleich der Einheit sein muss. Die Weise dagegen, wie die Geschwindigkeit von a_1, E_1 ϱ und R_1 abhängt, wird experimentell ganz so gefunden, wie die Résal'sche Formel angibt. Diese Formel kann also theoretisch und experimentell als feststehend betrachtet werden; nämlich unter folgenden Bedingungen:

1) dass die Wellenlänge gegen den Röhrendurchmesser sehr gross ist, 2) dass die lebendige Kraft der transversalen Bewegungen gegen die der longitudinalen zu ver-

1) Ber. d. Sächs. Ges. d. Wiss. 1850.
2) Phys. d. Menschen. 1859. p. 79.
3) Travaux du laboratoire de M. Marey. 1875.
4) Journal de Math. de Liouville. 1876. II. p. 344.
5) Die Pulscurve von Dr. A. Isebree Moens, Leiden, Brill 1878.

nachlässigen ist, 3) dass der Elasticitätscoëfficient unabhängig ist von der Grösse der Belastung (was beim thierischen Pulse nicht, wohl aber bei Pulsbewegungen in Kautschukröhren der Fall ist), 4) dass die Flüssigkeit als incompressibel betrachtet wird, 5) dass die durch die Biegung der Röhrenwand erzeugten Längstensionen vernachlässigt werden dürfen.

Betrachten wir endlich den allgemeinen Fall, der bei den Versuchen von Wertheim, Kundt und Dvořák vorliegt, dass nämlich weder E noch E_1 als unendlich gross betrachtet werden können, so kann man die Gleichung (A) nach Einführung der soeben berechneten Geschwindigkeiten α und β in die Form bringen:

$$\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0. \tag{11}$$

Es liegt also eine Wellenbewegung vor, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit V_p an die Beziehung gebunden ist:

$$\frac{1}{V_p{}^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}. \tag{12}$$

„Das Quadrat des reciproken Werthes der Geschwindigkeit, womit Wellen sich in einer mit elastischer Flüssigkeit gefüllten elastischen Röhre fortpflanzen, ist also gleich der Summe der Quadrate der reciproken Werthe der Schallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit bei incompressibeln Wänden und der Pulswelle in der Röhre, wenn die Flüssigkeit als incompressibel betrachtet wird."

Man hat demnach:

$$V_p = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \frac{2ER_1}{a_1 E_1}}}, \tag{13}$$

oder auch: $$\alpha = \sqrt{1 + \frac{2ER_1}{a_1 E_1}} \cdot V_p. \tag{14}$$

So dass man also: $$\sqrt{1 + \frac{2ER_1}{a_1 E_1}} \tag{15}$$

bei den Versuchen von Wertheim, Dvořák und Kundt als den Correctionscoëfficienten für den Einfluss der

Wände zu betrachten hat, womit die in der Röhre wahrgenommene Fortpflanzungsgeschwindigkeit multiplicirt werden muss, um die wahre Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dem ungehemmt ausgedehnten Medium zu finden.

Wir haben die genaue Bedeutung von E_1 noch nicht angegeben, wodurch es ungewiss wird, ob für R_1 der innere oder äussere Radius der Röhre gesetzt werden muss. Nehmen wir an, dass in der Röhre keine Längstensionen entstehen, so hält es nicht schwer, mit Beihülfe der Elasticitätstheorie die Dicke a_1 der Röhre bei der Berechnung von E_1 zu berücksichtigen. Sei E'_1 der gewöhnliche Elasticitätscoëfficient der Röhrenwand, welcher also auch beim Ausdehnen eines Stabes aus demselben Stoffe auftritt, so ist:

$$E_1 = E'_1 \left\{ 1 - \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right) \frac{a_1}{2R_1} \right\}, \tag{16}$$

worin λ und μ die beiden bekannten Hülfsgrössen der Elasticitätstheorie vorstellen.

Nach Poisson's Hypothese ist $\lambda = \mu$ (17), nach Wertheim $\lambda = 2\mu$ (18), was jedenfalls der Wahrheit näher ist. Nehmen wir das Wertheim'sche Verhältniss an, so ist demnach:

$$E_1 = E'_1 \left(1 - \frac{5a_1}{6R_1}\right), \tag{19}$$

also:

$$a = V_p \,. \sqrt{1 + \frac{2ER_1}{a_1 \,. E'_1 \,. \left(1 - \frac{5a_1}{6R_1}\right)}}. \tag{20}$$

Ist nun $\frac{a_1}{R_1}$ ein kleiner Bruch, so darf man mit hinreichender Genauigkeit setzen:

$$a = V_p \sqrt{1 + \frac{2ER_1}{a_1 E'_1}\left(1 + \frac{5a_1}{6R_1}\right)} = V_p \sqrt{1 + \frac{E(2R_1 + 1\frac{2}{3}a_1)}{a_1 E'_1}}. \tag{21}$$

Diese Formel schlagen wir also zur Berechnung der Correction für das Nachgeben der Wand bei Schallschwingungen in cylindrischen Röhren vor, die in Bezug auf das flüssige Medium nicht als vollkommen unelastisch betrachtet werden können. In der Regel wird aber schon die Formel (14) genügen, wenn man in Betracht nimmt, dass die Experimente nichts weniger als genau sind.

Uebrigens ist auch die Formel (21) nicht vollkommen richtig, da angenommen wird, dass keine Längstensionen stattfinden. Da indess die Röhrenwand unter erhöhtem Drucke steht, so verkürzt sich die Röhre, indem sich ihr Radius vergrössert. Die relative Verkürzung ist der $\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}^{\text{te}}$ Theil der relativen Zunahme des Radius, also:

$$\frac{l}{L} = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \cdot \frac{r_1}{R_1}, \tag{22}$$

oder nach Poisson ein Viertel, nach Wertheim ein Drittel.

Diese periodische Verkürzung und Verlängerung der Röhrentheile wird aber je nach der Befestigungsweise der Röhre mehr oder weniger beeinträchtigt sein können, und jedenfalls wird sich ihr die Trägheit der Röhre entgegenstellen. Dadurch werden also Längstensionen entstehen. Es würde schwieirg sein diese für ein bestimmtes Experiment mit in Rechnung zu ziehen. Im äussersten Falle, wo jede Verschiebung eines Röhrentheiles vollkommen unmöglich wäre, ergibt die Elasticitätstheorie:

$$E_1 = \left\{1 + \frac{\lambda^2}{(3\lambda+2\mu)(\lambda+2\mu)}\right\} . E'_1 . \left(1 - \frac{3\lambda+2\mu}{2(\lambda+2\mu)} . \frac{a_1}{R_1}\right) \tag{23}$$

oder nach Poisson: $E_1 = 1\frac{1}{15} . E'_1 . \left(1 - \frac{5}{6} . \frac{a_1}{R_1}\right)$, (24)

nach Wertheim: $E_1 = 1\frac{1}{8} . E'_1 \left(1 - \frac{a_1}{R_1}\right)$. (25)

Es ist nicht unsere Absicht, die bisher angestellten Versuche einer eingehenden Kritik zu unterziehen. Wir sind der Meinung, dass es neuer Experimente mit sehr verschiedenen Röhrenradien und Wanddicken bedarf, um zu untersuchen, in wiefern die Formel von den beobachteten Erscheinungen gehörige Rechenschaft gibt, weil wahrscheinlich die Abweichungen von unserer Formel, die allerdings beträchtlich, aber sehr unregelmässig sind, den Beobachtungsfehlern zuzuschreiben sind. Die häufige Uebereinstimmung darf um so weniger für zufällig gehalten werden, da unsere Formel keinen aus den Versuchen entnommenen Coëfficienten enthält. Auch dürften ausser jener Correction noch andere Correctionen zufolge von Reibung oder von Longitudinalschwingungen der Röhre angebracht werden müssen. — Die gegen die Wertheim'schen Versuche mit Orgelpfeifen in Luft zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit von Kundt[1]) erhobenen Bedenken gelten in viel höherem Maasse von den in Wasser getauchten Orgelpfeifen.

Wertheim benutzte drei Röhren, A, B, C von Messing von resp. 4, 2, 1 cm Durchmesser und 0,2, 0,3 und 0,1 Wanddicke; und eine D von Glas von 2 cm Durchmesser und 0,1 cm Wanddicke.

Die dazu gehörigen Correctionscoëfficienten, nach Gleichung (2) berechnet, sind, wenn man für die Elasticitätscoëfficienten von Wasser, Messing und Glas in Centimetern und Grammen: $2{,}10^7$, $9{,}10^8$ und $6{,}10^8$ nimmt:

$$A = 1{,}216\,, \quad B = 1{,}093\,, \quad C = 1{,}125\,, \quad D = 1{,}317.$$

Wertheim benutzte als einzigen Correctionscoëfficienten für alle Röhren:

$$\sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}225,$$

der im Mittel ein gutstimmendes Resultat gibt und ungefähr dem Correctionscoëfficienten, den die Röhre A nach unserer Theorie haben müsste, entspricht. Bei der zahlreicheren Reihe der Versuche in Wasser zwischen 20° und 30° hat er diese Röhre und danach die Röhre D bei weitem am häufigsten benutzt.

Von den Kundt'schen und Lehmann'schen Versuchen geben wir untenstehend die Resultate, mit Hinzufügung

1) Pogg. Ann. CXXXV. p. 337.

einer neuen Columne, die den Werth von a — die Schallgeschwindigkeit im Wasser — angibt. Dieser Werth ist aus unserer Formel (19) berechnet, wobei für Glas wiederum $E_1 = 6{,}10^8$ gesetzt ist. Man müsste also in der letzten Columne stets ungefähr 1450 m finden.

Nummer.	a_1 mm	$2R_1$ mm	t Grade Celsius.	V_p beobachtet m	Mittlerer Werth von a berechnet m
1	2,2	28,7	18,3 18,5	1041,3 1039,5	1270
2	3,0	34,0	17,0	1218,6 1232,7 1231,9	1480
3	3,0	23,5	18,0	1264,0 1260,4	1450
4	3,5	21,0	18,5	1358,1 1357,0	1510
5	5,0	16,5	18,2 18,2 19,1	1360,7 1366,8 1353,3	1470
6	5,0	14,0	22,2	1383,2	1480

Bedenkt man nun, dass der Elasticitätscoëfficient der Glaswand hier ziemlich willkührlich gewählt ist, so können die Versuche mit den Röhren 2, 3, 5 und 6 als eine vorläufige Bestätigung der Theorie betrachtet werden. Die Versuche 1 und 4 widersprechen jedoch derselben. Indess dürfte dies der Ungenauigkeit der Beobachtungen zususchreiben sein. Da nämlich die Versuche im allgemeinen den Ausspruch von Helmholtz bestätigen, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei kleinerem Radius und grösserer Wanddicke kleiner wird, so musste dies bei der Röhre 4 im Verhältniss zu Röhre 5 zutreffen, während bei Röhre 6 bei dem kleineren Radius die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V_p sehr deutlich die in 5 übertrifft. — Wahrscheinlich ist die Beobachtung in Röhre 4 fehlerhaft. Bei Röhre 1 ist dies nicht so deutlich nachzuweisen.

Auch Dvořák[1]) hat Versuche mit schwingenden Wassersäulen in Glasröhren angestellt. Es folgen hier seine

1) Pogg. Ann. CLIV. p. 156.

Resultate mit der daraus nach meiner Correctionsformel berechneten Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Wasser:

Nummer.	α_1 mm	$2R_1$ mm	Beobachtet V_p m	Berechnet α m
1	0,82	17,9	998	1340
2	0,63	11,7	1046	1360
3	0,52	8,46	1164	1470
4	2,00	15,00	1213	1380
5	2,00	11,00	1281	1440

Bei späteren Versuchen von Dvořák[1]) mit einer Röhre von 15 mm Durchmesser und einer Wanddicke von $^1/_2$ mm betrug die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Wasser etwa 940 cm. Nach unserer Formel findet man 1410 m. Dies stimmt ziemlich gut und ist darum wichtig, weil der Einfluss der Wände hier am bedeutendsten ist, und also die weniger günstigen Resultate mit den Röhren 1 und 2 wieder ausgleicht.

Bisher haben wir angenommen, dass man die lebendige Kraft der transversalen Bewegungen der Röhrenwände und der Flüssigkeit vernachlässigen könne. Bei schwingenden Luftsäulen in Kautschukröhren, wenn die Masse der Röhrenwand die der Flüssigkeit weit übertrifft, kann indess die lebendige Kraft der Röhrenwand einen beträchtlichen Theil der ganzen lebendigen Kraft ausmachen, indem immer noch die lebendige Kraft der transversalen Bewegung der Flüssigkeit gegen die ihrer longitudinalen Bewegung äusserst klein bleibt. Wir setzen jetzt also voraus, dass die Röhrenwand und Flüssigkeit elastisch seien, die lebendige Kraft der transversalen Bewegung der Röhrenwand nicht, die der Flüssigkeit wohl vernachlässigt werden dürfe.

Wir haben dann zwischen u_1, p_1 und r_1 die Beziehungen: (I), (II) und (IIIa). Differenzirt man wieder (I) partiell nach x, und substituirt den so für $\frac{\partial p_1}{\partial x}$ gefundenen Werth in (II); löst man dann $\frac{\partial r_1}{\partial x}$ auf, so findet man:

1) Wien. Ber. LXXI. p. 315. 1875.

(26) $$\frac{\partial r_1}{\partial x} = -\tfrac{1}{2} \cdot R_1 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\varrho R_1}{2E} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} .$$

Differenzirt man ebenso (IIIa) partiell nach x und substituirt hier für $\frac{\partial p_1}{\partial x}$ seinen Werth aus (II), so ergibt sich:

(27) $$a_1 \varrho_1 \frac{\partial^3 r_1}{\partial x . \partial t^2} = -\varrho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{E_1 a_1}{R_1^2} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial x} .$$

Substituirt man hierin den Werth von $\frac{\partial r_1}{\partial x}$ aus Gleichung (26), sowohl im ersten als im zweiten Gliede, so findet sich endlich die partielle Differentialgleichung der Wellenbewegung im vorliegenden Falle:

(B) $$\frac{a_1 \varrho_1 \varrho R_1^2}{E_1 E} \cdot \frac{\partial^4 u_1}{\partial t^4} - \frac{R_1^2 a_1 \varrho_1}{E_1} \cdot \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2 . \partial t^2} + \left\{ \frac{2 \varrho R_1}{E_1} + \frac{a_1 \varrho}{E} \right\} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0.$$

Führen wir jetzt in diese Gleichung ausser den Hülfsgrössen α und β, deren Bedeutung wir aus Gleichung (8) und (10) kennen, die Grösse:

(28) $$\gamma = \sqrt{\frac{E_1}{\varrho_1}}$$

ein, welche die Schallgeschwindigkeit in dem Medium, aus welchem die Röhrenwand verfertigt ist, vorstellt, und dividiren wir durch a_1, so geht die Formel über in:

(29) $$\frac{R_1^2}{\alpha^2 \gamma^2} \cdot \frac{\partial^4 u_1}{\partial t^4} - \frac{R_1^2}{\gamma^2} \cdot \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2 . \partial t^2} + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial^2 x_1} = 0.$$

Substituirt man in dieser Formel:

(30) $$u_1 = b \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (x - \alpha' t) + \beta' \right\} ,$$

so finden wir zur Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit α':

(31) $$\frac{R_1^2}{\alpha^2 \gamma^2} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \alpha'^4 - \frac{R_1^2}{\gamma^2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \alpha'^2 - \frac{1}{V_p^2} \cdot \alpha'^2 + 1 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung besitzt zwei Wurzeln, eine, die für $\lambda = \infty$ unendlich gross wird, eine andere, die für $\lambda = \infty$ gleich dem Werthe V_p wird, für den wir gefunden haben:

$$(12) \qquad \frac{1}{V_p^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}.$$

Natürlich kommt nur diese letztere in Betracht.

Für sehr grosse Werthe von λ gibt uns Gleichung (31) die Lösung:

$$(32) \qquad \alpha' = V_p,$$

wie sich erwarten liess.

Für grosse Werthe von λ wird man noch immer in den beiden ersten und kleinsten Gliedern V_p für α' setzen dürfen; man findet dann:

$$(33) \qquad \alpha' = V_p \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi R_1}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{V_p^4}{\alpha^2\gamma^2} - \left(\frac{2\pi R_1}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{V_p^2}{\gamma^2}}.$$

Nun ist zweifelsohne bei allen gemachten oder zu machenden Versuchen $\frac{2\pi R_1}{\lambda}$ ein kleiner Bruch. Wenn also γ grösser, ebenso gross oder nicht sehr vielmal kleiner ist, als α und V_p — welche Bedingung bei den Versuchen von Wertheim, Kundt und Dvořák reichlich erfüllt ist — dann ist das Weglassen der Glieder der vierten Ordnung in (B) und somit die Anwendung der Formel (A) vollkommen gerechtfertigt.

Nur wenn man z. B. den Einfluss dünner Kautschukröhrenwände ($\gamma = 50$ bis 40 m) auf die Schallgeschwindigkeit in Luft erforschen wollte, dürfte man auch bei ziemlich ansehnlicher Wellenlänge die Glieder der vierten Ordnung nicht vernachlässigen, und müsste sodann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit — die man so in ziemlich hohem Grade von der Wellenlänge abhängig finden wird — aus der quadratischen Gleichung (31) oder annähernd aus (33) berechnen.

Eine Untersuchung solcher Wellen wäre gewiss höchst interessant, und die von J. Bosscha[1]) angegebene und

1) Pogg. Ann. XCII. p. 485.

später von Faye[1]) empfohlene Methode wäre hier vielleicht recht brauchbar.

Obwohl wir der Meinung sind, dass bei sehr kleiner Wellenlänge, wo die lebendige Kraft der transversalen Flüssigkeitsbewegung nicht mehr zu vernachlässigen ist mehrere Fehlerursachen auftreten werden, so dürfte es doch vielleicht nicht ohne Interesse sein, in aller Kürze zu untersuchen, welchen Einfluss das Verlassen der Scheibchenhypothese (Hypothese des Parallelismus der Schichten) auf das Resultat der Berechnung haben wird.

Die Lage eines Flüssigkeitstheilchens im Gleichgewichte definiren wir wieder durch x und durch seine Entfernung R von der Röhrenaxe, der im Gleichgewichte herrschende Druck sei wieder ω. Beim Vorbeischreiten der Welle ändere sich x zu $x + u$, R zu $R + r$, ω zu $\omega + p$, wo jetzt aber u, ω und p Functionen von x, R und t vorstellen. Es sind dann R_1, u_1, r_1, p_1 die Grenzwerthe von R, u, r, p für die Flüssigkeitsschichten, die an der Röhrenwand unmittelbar anliegen, für welche also: $R = R_1$. Es sind also u_1, r_1, p_1 nur noch Functionen von x und t. Statt (I) erhalten wir jetzt:

$$\text{(P)} \qquad \frac{p}{E} + \frac{r}{R} + \frac{\partial r}{\partial R} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Es ist weiter:

$$\text{(Q)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\varrho}, \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial^2 t} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial R}}{\varrho}, \qquad \text{(R)}$$

endlich haben wir die Grenzbedingung:

$$\text{(S)} \qquad \frac{\partial^2 r_1}{\partial t^2} = \frac{p_1 - \frac{E_1 a_1 r_1}{R_1^2}}{a_1 \varrho_1}.$$

Wir lösen diese Gleichungen durch das System:

$$\text{(34)} \qquad u = u' . \cos\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(x - \delta t) + \gamma\right\},$$

---

1) Pogg. Ann. CXVIII. p. 610.

(35) $$r = r' . \sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(x - \delta t) + \gamma\right\},$$

(36) $$p = p' . \sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(x - \delta t) + \gamma\right\},$$

worin u', r', p' näher zu bestimmende Functionen darstellen, die nur von R, nicht von x und t abhängig gesetzt werden, und wo δ jetzt die gesuchte Fortpflanzungsgeschwindigkeit vorstellt.

Durch Substitution in (P), (Q), (R) und (S) ergeben sich die Beziehungen:

(37) $$\frac{p'}{E} + \frac{r'}{R} + \frac{d r'}{d R} - \frac{2\pi}{\lambda} . u' = 0 .$$

(38) $$\frac{2\pi}{\lambda} . \delta^2 . u' - \frac{p'}{\varrho} = 0 , \qquad \frac{4\pi^2}{\lambda^2} . \delta^2 . r' - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d p'}{d R} = 0$$ (39)

und die Grenzbedingung:

(40) $$p'_1 = r'_1 \left(\frac{E_1 a_1}{R_1^2} - a_1 \varrho_1 . \frac{4\pi^2}{\lambda^2} . \delta^2\right).$$

Aus Gleichung (39) resp. (38) ergibt sich:

(41) $$r' = \frac{\lambda^2}{4\pi^2\delta^2\varrho} \cdot \frac{\partial p'}{\partial R}, \qquad u' = \frac{\lambda}{2\pi\delta^2\varrho} \cdot p'.$$ (42)

Durch Substitution dieser Ausdrücke in Gleichung (37) erhält man, indem man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles $a = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$ in der Flüssigkeit einsetzt:

(43) $$\frac{\partial^2 p'}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial p'}{\partial R} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\left(1 - \frac{\delta^2}{a^2}\right) p' = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung durch Reihenentwickelung und durch bestimmte Integrale ist bekannt.[1]) Fügt man die Bedingung hinein, dass p' für $R = 0$ endlich bleiben soll und setzt:

(44) $$K(x) = J_0(x\sqrt{-1}) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\, d\theta = 1 + \frac{x^2}{(1.2)^2} + \frac{x^4}{(1.2.4)^2} + \frac{x^6}{(1.2.4.6)^2} + \ldots,$$

1) S. z. B. Boole, a treatise on diff. equations, XVII. § 10, XVIII. § 3, 1865.

wo $J_0(x)$ die erste Bessel'sche Function vorstellt, so beschränkt sie sich auf:

$$p' = a_0 \,.\, K\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\sqrt{1-\frac{\delta^2}{\alpha^2}}\right) \tag{45}$$

und aus Gleichung (41) findet man dann:

$$r' = a_0 \,.\, \frac{\lambda \,.\, \sqrt{1-\frac{\delta^2}{\alpha^2}}}{2\pi\delta^2\varrho} \,.\, K'\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\sqrt{1-\frac{\delta^2}{\alpha^2}}\right). \tag{46}$$

Die Grenzbedingung (40) verwandelt sich dabei in die Gleichung:

$$\begin{aligned} K\left(\frac{2\pi R_1}{\lambda}\,.\,\sqrt{1-\frac{\delta^2}{\alpha^2}}\right) = \left(\frac{E_1 a_1}{R_1^2} - a_1\varrho_1 \,.\, \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\,.\,\delta^2\right)\,. \\ .\, \frac{\lambda\,.\,\sqrt{1-\frac{\delta^2}{\alpha^2}}}{2\pi\delta^2\varrho} \,.\, K'\left(\frac{2\pi R_1}{\lambda}\sqrt{1-\frac{\delta^2}{\alpha^2}}\right), \end{aligned} \tag{47}$$

woraus man jetzt die gesuchte Fortpflanzungsgeschwindigkeit δ zu finden hätte.

Nehmen wir an, es handle sich nur um eine Correction von V_p und $\frac{2\pi R_1}{\lambda}$ sei ein kleiner Bruch, so darf man sich bei der Entwickelung von $K(x)$ und $K'(x)$ nach x auf die zwei ersten Glieder beschränken, also:

$$K(x) = 1 + \frac{x^2}{4}, \tag{48}$$ $$K'(x) = \frac{x}{2}\left(1+\frac{x^2}{8}\right), \tag{49}$$

indem:

$$x = \frac{2\pi R_1}{\lambda}\,.\,\sqrt{1-\frac{\delta^2}{\alpha^2}}\,. \tag{50}$$

Aus Gleichung (47) ergibt sich dann:

$$1 + \frac{x^2}{4} = \left(\beta^2 - \frac{a_1\varrho_1 R}{2\varrho}\,.\,\frac{4\pi^2\delta^2}{\lambda^2}\right)\left(\frac{1}{\delta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{8}\right), \tag{51}$$

wo wieder: $$\beta = \sqrt{\frac{a_1 E_1}{2\varrho R_1}} \tag{10}$$

Man darf hier überall, wo es sich um Correctionsglieder handelt, für δ den Werth V_p aus Gleichung (12) einsetzen, und es ergibt sich:

$$(52) \qquad 1 + \frac{x^2}{8} = \beta^2\left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right)\left(1 - \frac{a_1 \varrho_1 R_1}{2\varrho} \cdot \frac{4\pi^2 V_p{}^2}{\beta^2 \lambda^2}\right),$$

wo jetzt:
$$x = \frac{2\pi R_1}{\lambda}\left(1 - \frac{V_p{}^2}{\alpha^2}\right) \qquad (53)$$

indem stets:
$$V_p < \alpha \text{ und } V_p < \beta. \qquad (54)$$

Es ist also:

$$(55) \qquad \frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\beta^2}\left(1 + \frac{x^2}{8} + \frac{a_1 \varrho_1 R_1}{2\varrho} \cdot \frac{4\pi^2 V_p{}^2}{\beta^2 \lambda^2}\right),$$

oder:

$$(56) \qquad \frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{V_p{}^2} + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{x^2}{8} + \frac{a_1 \varrho_1 R_1}{2\varrho} \cdot \frac{4\pi^2 V_p{}^2}{\beta^2 \lambda^2}\right),$$

$$(57) \qquad \delta = V_p\left\{1 - \frac{V_p{}^2}{2\beta^2}\left(\frac{x^2}{8} + \frac{a_1 \varrho_1 R_1}{2\varrho} \cdot \frac{4\pi^2 V_p{}^2}{\beta^2 \lambda^2}\right)\right\},$$

oder wenn man den Werth der Gleichung (53) für x einsetzt:

$$(58) \quad \delta = V_p\left\{1 - \frac{\pi^2 R_1{}^2 V_p{}^2}{4\beta^2\lambda^2}\left(1 - \frac{V_p{}^2}{\alpha^2}\right) - \frac{a_1 \varrho_1 R_1}{4\varrho} \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot \frac{V_p{}^4}{\beta^4}\right\}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, dass man die transversale Bewegung der Flüssigkeit vernachlässigen und also die Scheibchenhypothese annehmen darf, so lange:

$$(59) \qquad \frac{\pi^2 R_1{}^2 . V_p{}^2}{4\beta^2 . \lambda^2}\left(1 - \frac{V_p{}^2}{\alpha^2}\right)$$

ein kleiner Bruch ist.

Ob man auch die transversale Bewegung der Röhrenwand vernachlässigen kann, hängt von dem Werthe des Ausdrucks ab:

$$(60) \qquad \begin{aligned} \frac{a_1 \varrho_1 R_1}{4\varrho} \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot \frac{V_p{}^4}{\beta^4} &= \frac{a_1 \varrho_1 R_1}{4\varrho} \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot \frac{V_p{}^4}{\beta^2}\left(\frac{1}{V_p{}^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi R_1}{\lambda}\right)^2 \cdot \left(\frac{V_p{}^2}{\gamma^2} - \frac{V_p{}^4}{\alpha^2\gamma^2}\right), \end{aligned}$$

was auch in Uebereinstimmung mit Gleichung (33) ist. Wenn das Verhältniss $\frac{\varrho_1}{\varrho}$ gross ist, so wird man die Bewegung der Röhrenwand meistentheils mit in Rechnung ziehen müssen.