*V. Ueber den Einfluss der astronomischen Bewegungen auf die optischen Erscheinungen;
von Ed. Ketteler.*

Mit gegenwärtiger Abhandlung beginne ich eine Untersuchung über den Einfluss der astronomischen Bewegungen auf die optischen Erscheinungen. Ich sehe dabei ab von den nur schwer zu constatirenden Aenderungen der Amplitude und beschränke mich auf die Modificationen, die einerseits die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und andererseits Schwingungsdauer und Wellenlänge erfahren. Sofern nun die Vorgänge der Spiegelung und Brechung ihrem Wesen nach zu den Beugungserscheinungen gehören, diese selbst aber wieder unter den Begriff der Interferenzerscheinungen fallen, so lässt sich das zu entwickelnde Resultat in folgender Form aussprechen:

Der Einfluss der astronomischen Bewegungen auf die Interferenzerscheinungen, soweit er durch Versuche constatiert ist, bewirkt höchstens eine absolute, nie aber eine relative Verschiebung der Interferenzstreifen, d. h. er vermag bei unverändert bleibender Stellung der Mittelfranse eine Veränderung der Fransenbreite zu bewirken. Die Stellung der Mittelfranse ist aber abhängig von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf dem Wege, den die Strahlen durchlaufen, und die Breite der Streifen von der Wellenlänge.

Die Bedingungsgleichungen nun für die Unveränderlichkeit der Mittelfranse verlangen eine solche Aenderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, dass die bewegten Mittel als einfach brechende mit extraordinärem Strahle bezeichnet werden können, deren Wellenfläche durch die Fresnel'sche Hypothese über die Entrainirung des Aethers bestimmt ist. Andererseits führt die unmittelbare und umständliche Ableitung der Breite der Interferenzstreifen zu Formeln, wie sie sich kürzer und eleganter aus einer Verallgemeinerung des Doppler'schen Principis ergeben, das sonach

nicht bloß für das directe, sondern auch für das gespiegelte, gebrochene und gebeugte Licht als nothwendiges Erklärungsprincip Anerkennung beansprucht.

Von hierher gehörigen Versuchen habe ich selbst mehrere angestellt, die am betreffenden Orte beschrieben und erläutert werden sollen.

Ich beginne mit dem Einfluß der Bewegung des Erschütterungsmittelpunktes auf die Wellenlänge der direct von ihm ausgehenden Strahlen, und zwar wesentlich deshalb, weil ich bei diesem Anlaß gewisse Fundamentalsätze der Wellenlehre, die anscheinend noch vielfach mißverstanden werden, hervorheben möchte.

Zum Doppler'schen Princip.

1. Director Klinkerfues hat wiederholt in den *Astronomisch. Nachricht.* und später in den drei folgenden Schriften: »Die Aberration der Fixsterne nach der Wellentheorie. Leipzig 1867«, S. 22. »C. Briot, Mathematische Theorie des Lichtes. Uebersetzt und mit einem Zusatz vermehrt. Leipzig 1867« S. 130. »M. Huggins, Spectralanalyse der Himmelskörper, Deutsch mit Zusätzen, Leipzig 1868« S. 55, das sogenannte Doppler'sche Princip, demzufolge bei Translation von Ton- oder Lichtquelle längs den in der Richtung derselben sich fortpflanzenden Strahlen Schwingungsdauer und Wellenlänge gleichzeitig und in dem gleichen Verhältniß verkürzt werden, lebhaft angegriffen und dasselbe durch eine neue Theorie zu ersetzen gesucht.

Bekanntlich hat bei ruhendem Erschütterungscentrum die Gleichung der Welle, die einem einfachen Ton, resp. einer homogenen Farbe entspricht, die Form:

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x + X), \quad (1)$$

unter y die Excursion verstanden, die ein um $x - X$ vom Erschütterungsmittelpunkt abstehendes Theilchen zu Zeit t macht. a ist die Amplitude, λ die Wellenlänge und v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, und λ , v und Schwingungsdauer T sind durch die Relation $\lambda = vT$ mit einander ver-

knüpft. Befand sich das Wellencentrum zur Zeit $t=0$ im Punkte $X=0$, und wird dasselbe mit der gleichförmigen Geschwindigkeit g in der Richtung des Strahles bewegt, so ist $X=g \cdot t$. Diefs eingesetzt, gestaltet die Gleichung zur folgenden um:

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} [(v+g)t - x]. \quad (1b)$$

Und das ist nach Kl. der Ausdruck für das durch die Translation geänderte Schwingungsgesetz der oscillirenden Punkte. Die Gleichung ist doppelt periodisch: die Ausschläge wiederholen sich zeitlich nach den Intervallen $T_1 = \frac{\lambda}{v+g} = \frac{v}{v+g} T$ und räumlich nach den Strecken $\lambda = vT$. Sonach wäre in Folge der Translation zwar die Schwingungsdauer geändert, aber die Wellenlänge dieselbe geblieben, und es gehörten Schwingungsdauer und Wellenlänge nicht mehr als sich gegenseitig bedingend zusammen, wie es die bisherige Wellenlehre verlangt.

2. Zur Theorie von Kl. hat bereits L. Sohncke in den Astronomischen Nachrichten (No. 1646, Mai 1867) kritische Bemerkungen gemacht. Sohncke glaubte genug gethan, Sätzen gegenüber wie folgende: »Eine Welle kann angesehen werden als hervorgegangen aus unendlich vielen Wellen von unendlich kleiner Amplitude, aber mit einer Wellenlänge, die bei allen gleich ist und auch der schließlichen Wellenlänge gleich ist«. »Der während der Zeit dt ausgeübte Stofs prägt trotz der Kürze der Zeit der Bewegung des Aethertheilchens den Charakter der Wellenbewegung von bestimmter Wellenlänge auf« etc. an die elementaren Principien der Wellenlehre zu erinnern. Seine Bemerkungen sind nicht ganz vergebens gewesen. Da indess der Stein des Anstoßes nicht durch eine positive Entwicklung gehoben war, so hat sich Kl. zur Aufrechthaltung seiner Formel nach neuen Stützen umgesehen. Die seitdem von ihm vorgebrachte Begründung ist im Wesentlichen eine dreifache.

1) Für denjenigen Punkt des Mittels, der von der Ton-

oder Lichtquelle gerade erreicht wird, für den also $x = gt$, ist $y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} vt = a \sin 2\pi \frac{t}{T} =$ Elongation der Quelle.

»Ein Unterschied in der Beziehung würde der Voraussetzung des dauernden Strahles entgegen anzeigen, daß kein dynamisches Gleichgewicht hergestellt sey, sondern noch Discontinuitäten im Strahle Statt finden . . . Die Doppler'sche Annahme genügt dieser Bedingung nicht«.

II) »Die bekannte Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (2)$$

gilt nur für den Fall der ruhenden Quelle, sie ist für den Fall der Bewegung durch die folgende:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = (v + g) \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (2b)$$

zu ersetzen«, eine Gleichung, welche mittelst Identificirung der Aethertheilchen mit elastischen Kugeln erhalten und direct aus den Grundsätzen der Elasticitätslehre hergeleitet seyn soll; über die erstere dieser beiden Gleichungen wird die Bemerkung gemacht, »daß ihr sehr oft eine größere Allgemeinheit zugeschrieben wird, als sie in Wirklichkeit besitzt«. Denn, heißt es weiter, »sie gilt allerdings für jeden dauernden Strahl, wie complicirt auch die fortgepflanzte Welle, oder wenn wir auf die Ursache der Welle zurückgehen wollen, das Gesetz der von der Lichtquelle ausgeübten Stöße seyn möge, also auch für eine sehr complicirte Bewegung der Lichtquelle. Daraus darf aber durchaus nicht geschlossen werden, daß sie für jede, also auch für eine nichtperiodische, der Zeit proportionale Bewegung der Lichtquelle ebenfalls noch gültig sey«.

III) Die für den Fall des ruhenden Erschütterungsmittelpunktes geltende Gleichung (1) läßt sich bekanntlich auf folgende Form bringen:

$$y = c \cos \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x) + s \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x).$$

c und s , die dann natürlich von der Zeit unabhängig sind, sollen nun bei der Bewegung äußerst langsame Aenderungen

erleiden, •Aenderungen, welche wir ganz passend mit den Säkular-Aenderungen der Planeten-Bahn-Elemente bei den Störungs-Rechnungen vergleichen können Es braucht ja nur z. B.

$$c = a_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} g t, \quad s = a_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} g t,$$

worin a_0 eine Constante vorstellt, gesetzt zu werden«, so wird:

$$y = a_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} [(v + g) t - x].$$

Die hier nachzuweisende Periodicität wird dann sehr ungezwungen aus der Natur des Leuchtens als einer Bewegung abgeleitet. »Denn nicht nur der Ort, sondern auch die Quantität der von der Lichtquelle mitgetheilten Bewegung ändert sich, wenn die Lichtquelle zu einem anderen Aethertheilchen gelangt Auf ein Aethertheilchen, welches in dem Momente der directen Einwirkung mit der Lichtquelle die gleiche Geschwindigkeit hätte, würde die Lichtquelle gar nicht wirken«. Giebt man das freilich zu, so ist klar, daß diese Aenderungen sich periodisch wiederholen, und daß die Dauer der Periode durch die Gleichung $\lambda = g t$ gegeben ist.

Man sieht, daß die Erörterungen von Sohncke Hrn. Klinkerfues veranlaßt haben, seine früheren Ideen von der Erzeugung von Elementarwellen mit bestimmter Schwingungsdauer durch Elementarstöße aufzugeben und die früheren Elementarwellen durch Wellenelemente zu ersetzen. »Die hier (unter II) gegebene Theorie«, sagt Kl. selbst, »verdient vor der früheren bei Weitem den Vorzug, weil sie nicht mehr die allgemeinen Consequenzen der Lehre von der Superposition zum Fundamente wählt, sondern statt dessen den aus den Elementen der Elasticitätslehre allgemein bekannten Satz, daß zwei vollkommen elastische Kugeln bei der Berührung ihre Geschwindigkeit austauschen«.

Diese Gegenüberstellung enthält nun freilich eine Täuschung. Die zweite Begründung beweist vielmehr, daß es

in Betreff des Aktes der Bewegungsübertragung, mag diese seitens einer ruhenden oder einer bewegten Lichtquelle erfolgen, an der genügenden Klarheit fehlt, und so ist in der That bei dem der Zeit nach spätesten, dritten Beweis die Interferenzidee wiederum zum Durchbruch gekommen.

3. Eine Discussion des Doppler'schen Princip's muß offenbar mit der Frage nach dem Einfluß der Bewegung auf die Schwingungen des tönenden oder leuchtenden Punktes selber beginnen. Nun ist klar, daß z. B. eine rasch bewegte Stimmgabel in jedem Augenblick an die umgebenden Lufttheilchen nicht bloß Stöße austheilt, die sich mit einer gewissen Geschwindigkeit fortpflanzen, sondern daß auch zugleich in Folge der auftretenden Reibung die Amplitude und selbst das Gesetz ihrer Schwingungen modificirt werden. So lange freilich die Translationsgeschwindigkeit g als kleiner Bruchtheil der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v der Wellen vorausgesetzt wird, so lange werden die eben genannten Einwirkungen vernachlässigt werden dürfen; die inneren Elasticitätskräfte werden ein entschiedenes Uebergewicht bewahren und die spontanen Schwingungen annähernd bei Ruhe und Bewegung das gleiche Gesetz $y = f(t)$ befolgen.

Unter der nämlichen Voraussetzung darf man ferner absehen von der lokalen Dichtigkeitsänderung des Mittels in unmittelbarer Nähe der Quelle, und so geschieht denn auch die Uebertragung der unendlich vielen und unendlich kurzen Stöße, durch deren continuirliche Succession die Wellen entstehen, an das leitende Medium in gleicher Weise, mögen sie alle von demselben oder von verschiedenen Punkten des Raumes aus erfolgen. Es darf ja stets die Ton- oder Lichtquelle als während einer unendlich kurzen Zeit ruhend gedacht werden.

4. Dief's vorausgesetzt, läßt sich die wellenförmige Bewegung in keiner anschaulicheren Weise behandeln, als wenn man mit Klinkerfues der Betrachtung eine unendlich lange Reihe sich berührender elastischer Kugeln oder besser noch die von Mach ersonnene, in Pogg. Annalen

Bd. CXXXII, S. 174 beschriebene Vorrichtung zu Grunde legt. Da nämlich die Kugeln bloß durch Druck, nicht aber auch durch Zug auf einander wirken können, so ersetzt Mach dieselben durch eine Reihe schwerer Metallcylinder, deren Axen zu je zwei durch ringförmige elastische Stahlfedern verbunden sind.

Jeder von außen her erfolgende spontane Stoß, den man irgend einem Cylinder ertheilt, pflanzt sich successiv auf alle übrigen fort. Und zwar ist die Geschwindigkeit dieser Uebertragung nur abhängig von der Elasticität und Masse der Federn und Cylinder, dagegen unabhängig von der Stärke des Stoßes. Dabei ist zu beachten, daß zur primären Erschütterung eine gewisse mechanische Arbeit aufgewandt werden muß; diese mechanische Arbeit wandelt sich in unserem Mechanismus in lebendige Kraft um, und diese letztere läuft mit der Erschütterung von Cylinder zu Cylinder. Jeder einzelne also überträgt dieselbe dem folgenden und tritt dann sofort wieder in den Zustand der Ruhe zurück.

Ist nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Stoßes unabhängig von seiner Stärke, so ist sie auch gleich für eine fortlaufende Reihe von Stößen von wechselnder Stärke, mag diese in irgend einer periodischen oder unperiodischen Folge gegeben werden. Wird daher ein bestimmter Cylinder der Mach'schen Vorrichtung irgendwie stoßweise hin- und hergeführt, so wird jeder folgende Cylinder die Bewegung des ersten genau reproduciren, aber er wird sie um so später antreten, als er weiter von demselben absteht.

Es sey αO eine beliebige Curve, und ich nehme an, daß man zur Zeit t_0 dem primären Cylinder plötzlich eine Erschütterung mit der Oscillationsgeschwindigkeit $c_0 = \alpha \alpha$ ertheilt habe. Diese Erschütterung wird sich dem benachbarten Cylinder mittheilen, und nach einer sehr kleinen Zeit $\Delta t = ab \left(= \frac{\Delta x}{v} \right)$ wird dieser die Geschwindigkeit $\alpha \alpha$ gewonnen, folglich die Geschwindigkeit des ersteren, ent-

sprechend etwa der geraden Linie αb , auf 0 herabgesunken seyn. In diesem Augenblick werde ihm mittelst einer zweiten Momentankraft die etwas gröfsere Geschwindigkeit $c_1 = b\beta$ ertheilt; dieselbe überträgt sich während des folgenden Momentes Δt gleichfalls auf den benachbarten u. s. f. Bei dieser Anschauung wird also der Verlauf der spontan mitgetheilten Oscillationsgeschwindigkeiten der gebrochenen Linie $\alpha b\beta c\gamma d \dots$ entsprechen, und es wandern der Reihe nach die lebendigen Kräfte $\frac{1}{2} m c_0^2, \frac{1}{2} m c_1^2, \frac{1}{2} m c_2^2 \dots$ mit der

nämlichen Geschwindigkeit v über die Cylinderreihe fort¹⁾. Die während der Zeit $n \Delta t$ aufgewandte, gesammte mechanische Arbeit, resp. die währenddels fortgeleitete, äquivalente lebendige Kraft ist also die Summe:

$$t_0 + n \Delta t \\ \frac{1}{2} m \sum_{t_0} (c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + \dots)$$

Hört die spontane Stofskraft endlich zu wirken auf, so folgt dem letzten Stofse sofortige Ruhe.

Anstatt dem primären Cylinder in Intervallen discontinuirliche Momentan-Geschwindigkeiten mitzutheilen, darf man denselben auch continuirlich nach dem Gesetze der Curve αO :

$$c = \varphi(t)$$

bewegen. Denn hat derselbe in einem bestimmten Augenblick die Geschwindigkeit $\alpha\alpha = c_0$, und vermehrt sich letz-

1) Ich sehe davon ab, daß jede spontane Erschütterung sich in zwei Hälften theilt, die mit den Geschwindigkeiten $\pm v$ nach entgegengesetzten Richtungen fortwandern.

tere in irgend einem Zeittheilchen Δt auf $b\beta = c_1$, so läßt sich diese Aenderung auffassen als eine Geschwindigkeitsabgabe der vollen Geschwindigkeit c_0 an die folgenden Cylinder, entsprechend der geraden Linie αb , und als gleichzeitige Geschwindigkeitsaufnahme von aussen her um den Betrag c_1 , dessen Anwachsen längs der Linie $a\beta$ erfolgt und eine ganz gleiche Zeit in Anspruch nimmt. So laufen denn in jedem Augenblick zwei Strömungen neben einander her, und der Effect ist offenbar der nämliche wie vorhin, als man die Geschwindigkeitsabgabe in endlicher, die Geschwindigkeitsaufnahme in unendlich kurzer Zeit sich bewerkstelligt dachte.

Die während einer bestimmten Zeit seitens der spontanen Erschütterungskraft aufgewandte mechanische Arbeit, resp. die aequivalente fortgeleitete lebendige Kraft ist aber nunmehr:

$$\frac{1}{2}m \int_{t_0}^{t_1} c^2 dt. \quad (3).$$

5. Da nun jeder einzelne Cylinder sich den hinter ihm liegenden gegenüber wie ein primär bewegter verhält, so läßt sich das Princip der wellenförmigen Bewegung folgendermaassen aussprechen: Bei jeder wellenförmigen Bewegung hat jeder oscillirende Punkt in jedem Augenblick diejenige Oscillationsgeschwindigkeit, die jeder vorhergehende eine bestimmte Zeit früher, nämlich um soviel früher gehabt hat, als die einzelne Erschütterung braucht, um von jenem zu diesem zu gelangen.

Denkt man sich das elastische Mittel aus unendlich vielen und unendlich nahen Punkten gebildet, so läßt sich vorgenanntes Princip in doppelter Weise in die analytische Sprache umsetzen:

Auf unendlich kleine Entfernungen angewandt, lautet es, wenn $y = f(x, t)$, $c = \frac{\partial y}{\partial t}$ gesetzt wird:

$$\frac{\partial f(x + \Delta x, t + \Delta t)}{\partial t} = \frac{\partial f(x, t)}{\partial t},$$

$$\Delta x = v \Delta t.$$

Und diese beiden Gleichungen ziehen sich bei Benutzung des Taylor'schen Lehrsatzes in die bekannte Differentialgleichung 2:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

zusammen. Aus der oberen der beiden Gleichungen ersieht man übrigens, dafs man in die Formulirung des Principes der wellenförmigen Bewegung anstatt der Oscillationsgeschwindigkeit ebensowohl die Excursionen aufnehmen darf.

Dasselbe Princip, auf endliche Entfernungen angewandt, ergiebt ebenso unmittelbar:

$$\begin{aligned} c &= \varphi\left(t - \frac{x}{v}\right) \\ y &= f\left(t - \frac{x}{v}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Beide Gleichungen 2 und 4 gelten ebensowohl für einen einzelnen Stofs als für eine beliebige continuirliche Bewegung, sie besagen eben nur, dafs in jedem Mittel, für welches sie gelten, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unabhängig ist von der Art dieser Bewegung, also speciell für eine periodische Bewegung unabhängig von dem Rhythmus derselben, folglich auch von der Schwingungsdauer.

Beide Gleichungen verhalten sich zu einander wie Differential- und Integralgleichung. Da das Functionszeichen f ganz unbestimmt geblieben, so haben sie mit der anderweitig bekannten Thatsache, dafs es in der Natur pendelartig einfache Schwingungen giebt, und dafs zufällig die den Stimmgabeltönen und den homogenen Farben (im dispersionslosen Weltraum) entsprechenden Schwingungen sich durch Sinuscurven ausdrücken lassen, an sich gar nichts zu thun.

Wollte man (im Gegensatz zu y als Excursion der Theilchen des Mittels) die Excursion der Quelle mit Y bezeichnen, so folgt aus der Gleichung:

$$Y = f(t) = f\left(\frac{x}{g}\right)$$

die andere:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = g^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}.$$

Andererseits beruht offenbar die Klinkerfues'sche Differentialgleichung (2b) auf einer Nichtbeachtung des Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft; ihre Herleitung selbst bleibt unverständlich.

6. Die beiden Gleichungen:

$$y = f(t), \quad y = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

gelten für je zwei beliebige Punkte, die um die feste unveränderliche Strecke x von einander abstehen. Von dem Moment an, in welchem dem ersteren irgend ein Bewegungszustand auf irgend welche Weise mitgetheilt wird, beginnt die Weiterleitung desselben und die Bildung der entsprechenden Welle. Im Moment, wo die Zuführung der Bewegung aufhört, hört ebenso plötzlich die Fortbildung der Welle auf, und pflanzt sich nun sozusagen die Ruhe von Theilchen zu Theilchen fort. Die Form des inzwischen gebildeten Wellenstückes hängt ab vom Functionszeichen f^1).

Verweilen wir nochmals bei dem bestimmten Beispiel der unendlich langen Mach'schen Cylinderreihe. Ich nenne

- 1) Bringt man mittelst einer äußeren Kraft den schweren Massenpunkt eines ideellen Pendels etwa nach dem Gesetze $y = a \sin \frac{2\pi}{T} t$ auf eine gewisse Höhe, so beginnt dasselbe eine niemals aufhörende Reihe von Schwingungen. Ertheilt man dagegen einem Punkte eines idellen elastischen Mittels die nämliche Bewegung, so läuft dieselbe in der Gestalt einer Viertelwelle ununterbrochen weiter. In beiden Fällen also wird dem Princip der Erhaltung der Kraft genügt, nur ist es das eine Mal der nämliche Punkt, der eine unendliche Zeit lang schwingt, das andere Mal sind es fort und fort andere Punkte, auf die diese ewige Bewegung sich für eine endliche Zeit überträgt.

Die Punkte dieses Mittels machen aber nicht deshalb *einfache* Pendelschwingungen, weil von vornherein für jeden derselben die elastische Kraft $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -k^2 y$ wäre, sondern weil eben eine pendelförmige Succession der Bewegungsimpulse von aussen her gegeben ist. Man hat vielmehr allgemein: $\partial^2 t \Sigma y = -\Sigma k^2 y$.

irgend einen Cylinder den ersten und betrachte weiter die Oscillationen des p^{ten} . Macht derselbe in Folge Einwirkung einer spontanen Kraft in den auf einander folgenden Augenblicken: $t, t + \Delta t, t + 2\Delta t, \dots$ die Excursionen: $f(t), f(t + \Delta t), f(t + 2\Delta t) \dots$, so werden dieselben successive an die Cylinder $p + 1, p + 2, p + 3 \dots$ übergehen und werden sonach Theile einer Welle.

Da es nun gleichgültig ist, auf welche Weise dem Cylinder p die obige Reihenfolge von Excursionen zugeführt wird, so läßt sich z. B. auch so verfahren, daß man dem Cylinder o mittelst spontaner Einwirkung zur Zeit

$$t - \frac{p \Delta x}{v}, \quad t + \Delta t - \frac{p \Delta x}{v}, \quad t + 2\Delta t - \frac{p \Delta x}{v} \dots$$

die Excursionen:

$$f(t), \quad f(t + \Delta t), \quad f(t + 2\Delta t) \dots$$

ertheilt. Sie alle treffen in richtiger Folge so beim Cylinder p ein, daß derselbe zur Zeit t die beabsichtigten Schwingungen beginnt. Die von p gebildete Welle ist also mit der früheren identisch.

Oder auch bei Anwendung discontinuirlicher Momentanstoffe. Man giebt beliebigen Cylindern in bestimmten Augenblicken bestimmte Excursionen, so daß sich etwa entsprechen:

No. des Cylinders	Excursion	Zeit
0	$f(t)$	$t - \frac{p \Delta x}{v}$
m_1	$f(t + \Delta t)$	$t - \frac{(p - m_1) \Delta x}{v} + \Delta t$
m_2	$f(t + 2\Delta t)$	$t - \frac{(p - m_2) \Delta x}{v} + 2\Delta t$
m_n	$f(t + n\Delta t)$	$t - \frac{(p - m_n) \Delta x}{v} + n\Delta t.$

Auch jetzt treffen die Excursionen in richtiger Folge bei p ein, und die von p weitergehende Welle hat wiederum dieselbe Form.

Der hier betrachtete Vorgang ist nun kein anderer als derjenige, der in continuirlicher Form in Luft oder Aether bei Bewegung von Ton- oder Lichtquelle vor sich geht.

7. Es sey $y = f(t)$ die Excursion der Quelle zur Zeit t , sey ferner $\pm g$ die Geschwindigkeit ihrer Translation und $\pm v$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der einzelnen Erschütterung. Zur Zeit 0 mögen die Ausschläge beginnen, und es sey $y_0 = f(0)$. Ich zähle die Abscissen von demjenigen Punkte an, in dem sich die Quelle in diesem Augenblick befindet, so dafs also $x_0 = 0$.

In Folge der Spontanität ihrer Schwingungen ist die Excursion der Quelle am Ende des Zeittheilchens Δt zu $y_1 = f(\Delta t)$ geworden, und die zugehörige Abscisse sey $x_1 = g \Delta t$. Inzwischen ist die frühere Erschütterung mit der Geschwindigkeit v um $v \Delta t$ vorangeschritten, so dafs also $x_0 = v \Delta t$ geworden.

Am Ende der Zeit $2 \Delta t$ hat die Quelle die Excursion $y_2 = f(2 \Delta t)$, und die dieser Excursion entsprechende Abscisse ist $x_2 = 2 g \Delta t$. Mittlerweile ist die Excursion y_1 mit der Geschwindigkeit v fortgewandert, so dafs $x_1 = (v + g) \Delta t$ geworden, und aus demselben Grunde befindet sich die Excursion y_0 in einem Punkte mit der Abscisse $x_0 = 2 v \Delta t$.

Kurz, es entsprechen sich in den auf einander folgenden Augenblicken die nachstehenden Excursionen und Abscissen

$$\begin{array}{llll}
t & y_0 = f(0) & y_1 = f(\Delta t) & y_2 = f(2\Delta t) & y_3 = f(3\Delta t) \\
0 & x_0 = 0 & & & \\
\Delta t & = v \Delta t & x_1 = g \Delta t & & \\
2\Delta t & = 2v \Delta t & = (v + g) \Delta t & x_2 = 2g \Delta t & \\
3\Delta t & = 3v \Delta t & = (2v + g) \Delta t & = (v + 2g) \Delta t & x_3 = 3g \Delta t \\
: & : & : & : & : \\
n\Delta t & = nv \Delta t & = [(n-1)x + g] \Delta t & = [(n-2)v + 2g] \Delta t & = [(n-3)v + 3g] \Delta t
\end{array}$$

Man hat daher allgemein für die Excursion y_r :

$$t = n \Delta t, \quad y_r = f(p \Delta t), \quad x_r = [(n-p)v + pg] \Delta t.$$

Und wenn man Δt durch $\frac{t}{n}$ ersetzt:

$$\begin{aligned}
y &= f\left(\frac{p}{n}t\right) \\
x &= vt \left[1 - \frac{p}{n} \left(1 - \frac{g}{v}\right)\right]
\end{aligned}$$

Die Elimination von $\frac{p}{n}$ aus beiden Gleichungen giebt dann zwischen y und x die folgende Relation:

$$y = f\left(\frac{t - \frac{x}{v}}{1 - \frac{g}{v}}\right) = f\left(\frac{vt - x}{v - g}\right) \quad (5)$$

als Gleichung der erzeugten Welle.

Ist insbesondere das Schwingungsgesetz der bewegten spontanen Quelle das pendelartig einfache, so dafs also für sie:

$$y = a \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

so erzeugt sie eine Welle von der Form:

$$y = a \sin \frac{2\pi}{T} \frac{vt - x}{v - g}. \quad (5b)$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{v - g}{v} T = T_1, \quad (v - g) T = \lambda_1, \quad (6)$$

so schreibt sich:

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1} \right).$$

Diese Gleichung repräsentirt eine Sinussoide mit doppelter Periodicität, es ist T_1 die Schwingungsdauer und λ_1 die Länge der gebildeten Welle. Da die Lichtquelle im Zustand der Ruhe die Wellenlänge $\lambda = vT$ erzeugt, so leitet man ab:

$$\frac{T_1}{T} = \frac{\lambda_1}{\lambda},$$

es folgt also, dafs Schwingungsdauer und Wellenlänge, ganz entsprechend dem Doppler'schen Princip, im gleichen Verhältnifs verkürzt sind.

Es genügt übrigens ein viel einfacheres Raisonement, um zum nämlichen Ziele zu gelangen. Zunächst ist klar, dafs bei der Bildung der Welle an die Stelle von $\frac{\lambda}{2}$ eine Strecke:

$$\frac{\lambda}{2} - g \frac{T}{2} = \frac{\lambda_1}{2}$$

tritt, und dafs sonach $\lambda_1 = (v - g) T$. Die Form der Welle ferner bleibt vermöge der von ihr gegebenen Definition constant. Und da jedes Theilchen des Mittels während des Durchgangs einer Welle eine vollständige Oscillation macht, so ergibt sich, wenn die Geschwindigkeit einer Erschütterung, also auch die der Welle, $= v$ ist, für die Schwingungsdauer

$$T_1 = \frac{\lambda_1}{v} = \frac{v - g}{v} T.$$

8. Vorstehenden Entwicklungen zufolge ist die von Klinkerfues erhaltene abweichende Gleichung (1 b) sammt den für sie beigebrachten Beweisen unrichtig.

Wenn insbesondere behauptet wird, dafs die Doppler'sche Annahme der Bedingung, dafs für denjenigen Punkt des Mittels, der von der Quelle gerade passirt wird, die Elongation desselben der Elongation der Quelle gleich seyn mufs, nicht entspreche, so ist das irrig. In der That geht die Gleichung der Welle:

$$y = f\left(\frac{vt - x}{v - g}\right)$$

für den Punkt $x = gt$ über in die Gleichung der Spontanschwingungen der Quelle $y = f(t)$. — Wird obiger Bruch nach Potenzen von $\frac{g}{v}$ entwickelt, so schreibt sich z. B. für pendelartige Schwingungen angenähert:

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left[(v + g) \left(t - \frac{x}{v} \right) \right].$$

Diese Gleichung entspricht der genannten Bedingung schon nicht mehr streng. Verlegt man noch den Coordinatenanfangspunkt und nennt die Abscisse der Quelle zur Zeit 0 X statt 0, so tritt an die Stelle von x $x - X$; aber man darf dafür nicht schreiben:

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left[(v + g) \left(t - \frac{x}{v} \right) + X \right].$$

9. Unsere Entwicklungen beruhten auf der Annahme, daß der Bruch $\frac{g}{v}$ eine sehr kleine Gröfse sey. Ist das nicht der Fall, so können, wie bereits angedeutet wurde, bei der Bewegung von Ton- und Lichtquelle Momente auftreten, die eine unmittelbare Identificirung der Erscheinung mit dem analogen Vorgange auf der Mach'schen Maschine nicht mehr gestatten. Sieht man ab von dem Einfluß der Bewegung auf die Schwingungen der Quelle selbst, so bleibt noch zu beachten, daß die rasche Translation eine sich auf eine gewisse Entfernung hin erstreckende Dichtigkeitsänderung des Mittels hervorruft, und daß die Schwingungen sich zunächst an diese verdichtete, resp. verdünnte Umgebung übertragen. Die Theilchen innerhalb derselben haben eine Translationsgeschwindigkeit, die alle Zwischenstufen umfaßt zwischen g und 0 , und ebenso liegt ihre Dichtigkeit zwischen einem gewissen Maximal-, resp. Minimalwerth und 1 , so daß die entsprechende Fortpflanzungsgeschwindigkeit von $v \pm v_1$ allmählig in v übergeht. Nun ist klar, daß unsere Betrachtungen ihre Gültigkeit behalten, wenn man sie in continuirlicher Weise auf jede unendlich dünne Schicht der genannten Umgebung überträgt. Und andererseits wird der Fehler, der durch die Vernachlässigung dieser Verhältnisse entsteht, immerhin ein geringer seyn.

10. Was nun zum Schluß die »nicht geringe Schwierigkeit« betrifft, auf die man nach Kl. hinsichtlich der Brechung der (durch die Bewegung der Lichtquelle modificirten) Farben stoßen soll, so existirt dieselbe nur für seine Theorie.

Nach der gewöhnlichen Wellenlehre verhält sich jeder Punkt eines Strahles den folgenden gegenüber als secundärer Erschütterungsmittelpunkt. So also auch ein Punkt der Gränzfläche zweier verschieden dichter Medien. Daraus (das Princip der Erhaltung der Schwingungsdauer fällt mit dieser Anschauung zusammen) resultiren dann sofort die bekannten Gleichungen: $n = \frac{v}{v_1} = \frac{\lambda}{\lambda_1}$.

Kl. freilich ist consequent genug, die in Rede stehende Vorstellung, die nach seiner Theorie für die Punkte desselben Mittels unrichtig ist, auch nicht für den Vorgang der Brechung zu adoptiren.

Es hatte ihn die Form seiner Gleichung:

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} [(v + g)t - x]$$

in Verbindung mit den unter (II) genannten Gründen zu der Interpretation geführt, daß die Welle als ein gewisser »Integralwerth« mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v + g$ fortrücke. Dem entsprechend wird dann die Geschwindigkeit im zweiten Mittel $= v' + g$ gesetzt und nun wird man plötzlich, ohne zu erfahren, wie sich denn der Uebergang vollzieht, mit der Relation:

$$n = \frac{v + g}{v' + g}$$

überrascht.

Kl. hat die angedeutete Modification des Brechungsgesetzes später als unwahrscheinlich aufgegeben. An ihre Stelle setzte er die unter (III) mitgetheilte periodische Modification der Amplitude und vermuthet nun, daß die Dauer dieser Periode $(= \frac{\lambda}{g})$ für alle Medien gleich bleibt. Dem entsprechend wäre die Gleichung der Welle im zweiten Medium:

$$y = a_0 \cos \frac{2\pi g t}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda'} (v' t - x) \\ + a_0 \sin \frac{2\pi g t}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda'} (v' t - x).$$

Wird noch die Beziehung $\frac{v}{v'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$ berücksichtigt, so kommt:

$$y = a_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (v' t + \frac{v'}{v} g t - x),$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit des Integralwerthes »Welle« im zweiten Medium $v' + \frac{v'}{v} g$ und entsprechend dem früheren Schlusse:

$$n = \frac{v + g}{v' + \frac{v'}{v} g} = \frac{v'}{v}.$$

Nach dieser neuesten Ansicht wird der Brechungsindex der Welle dem Brechungsindex eines Momentanstoßes gleich, und so bleibt bei Translation der Lichtquelle die Brechung ungeändert. Schreibt man:

$$\frac{1}{n^2} = A + \frac{B}{\lambda'^2} + \dots,$$

und dehnt diese Unabhängigkeit von der Bewegung auf sämtliche Coëfficienten $A, B \dots$ aus, so wird jede Lichtart, sofern ja auch ihre Wellenlänge λ' unbeeinflusst bleiben soll, im Spectrum ihre Stelle behalten. Nun ist es die Schwingungsdauer, welche die Empfindung der Farbe bestimmt; dieselbe ändert sich von T in $\frac{v-g}{v} T$. Sonach bewirkte die Translation der Lichtquelle, daß die Absorptionslinien ihres Spectrums sich in unveränderter Lage auf einem farbigen Hintergrunde zeigen müßten, der gegen sie selbst verschoben wäre.

Nach der gewöhnlichen Theorie sind selbstverständlich A und B constant; die Translation der Lichtquelle bewirkt eine Aenderung von Schwingungsdauer und Wellenlänge zugleich, und so hat man im Spectrum zwar auch die Farbe geändert, aber gleichzeitig mit solcher Brechung, daß die resultirende Farbe wieder mit ungeänderter Brechung zum Vorschein kommt; gegen diesen scheinbar unveränderten Hintergrund sind dann die Absorptionslinien verschoben.

Ob eine genaue, experimentelle Prüfung der beiderseitigen Resultate nothwendig geworden, darüber wird die Entscheidung wohl nicht schwer fallen. Eine Beleuchtung der theoretischen Ansichten schien aber wünschenswerth, da die Schlüsse von Klinkerfues schon mehrfach Anklang gefunden haben.

Bevor wir zu einer Verallgemeinerung des Doppler'schen Principes übergehen, ist zunächst eine erschöpfende Behandlung der Frage nach der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in bewegten Mitteln voranzuschieken.