A propos de la fonction de Artin en dimension $N \geq 2$

About the Artin function in dimension $N \geq 2$

Guillaume ROND [a]

[a] *Laboratoire E. Picard, UFR MIG*
118 route de Narbonne
31062 Toulouse cedex 4
FRANCE
tel :05 61 55 76 83, fax : 05 61 55 82 00

Abstract

In this note we give a counter-example to a generalization in dimension $N \geq 2$ of a result of Hickel in dimension 1 [3] which relates the Artin function of a germ of holomorphic function to the Artin function of its jacobian ideal. Such links are important in order to prove the linear Artin approximation theorem that has been conjectured fifteen years ago [6].

Résumé

Dans cette note nous montrons, à l'aide d'un contre-exemple, qu'un résultat de Hickel [3] en dimension 1 est faux en dimension $N \geq 2$. Ce résultat de Hickel relie la fonction de Artin d'un germe de fonction holomorphe avec celle de son idéal jacobien. De tels liens sont importants pour prouver le théorème d'approximation linéaire de Artin conjecturé depuis quinze ans [6].

Nous considérerons un corps $\mathbb{k}$ muni d'une norme au sens de Nagata [5], c'est-à-dire d'une valuation multiplicative ν à valeurs dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$. On appellera valuation multiplicative toute application vérifiant les conditions suivantes :
- $\nu(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- $\nu(xy) = \nu(x)\nu(y)$ pour tous x et y dans $\mathbb{k}$,
- $\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y)$ pour tous x et y dans $\mathbb{k}$.

Par exemple $\mathbb{C}$ muni de la norme absolue et $\mathbb{Q}_p$ muni de la norme p-adique sont des corps normés.
Soit N un entier positif non nul ; nous noterons $\mathcal{O}_N$ l'anneau des séries convergentes $\mathbb{k}\{T_1, ..., T_N\}$ et $\mathfrak{m}_N$ son idéal maximal. Soit n un entier positif non nul ; nous noterons parfois X (resp. x) le n-uplet de variables $(X_1, ..., X_n)$ (resp. $(x_1, ..., x_n)$).

Email address: `rond@picard.ups-tlse.fr` (Guillaume ROND).

Preprint submitted to Elsevier Science — *1er avril 2005*

1. Introduction

En 1969 M. Artin a prouvé le théorème suivant :

Théorème 1.1 *[1][7] Soit I un idéal de $\mathcal{O}_N\{X_1, ..., X_n\}$ engendré par les f_l pour $1 \leq l \leq r$. Il existe une fonction $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que :*
Soient $i \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathcal{O}_N^n$, avec $x(0) = 0$, tels que $f_l(x) \in \mathfrak{m}_N^{\beta(i)+1}$ pour tout $l \in \{1, ..., r\}$. Alors il existe $\overline{x} \in \mathcal{O}_N^n$ tel que $\overline{x} = x$ modulo $\mathfrak{m}_N^{i+1}$ et tel que $f_l(\overline{x}) = 0$ pour tout $l \in \{1, ..., r\}$.

Si I est un idéal de $\mathcal{O}_N\{X_1, ..., X_n\}$, nous appellerons fonction de Artin de I la plus petite fonction $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ qui vérifie le théorème ci-dessus. Dans le cas $N = 1$, M. J. Greenberg [2] a montré que la fonction de Artin d'un idéal était majorée par une fonction affine et ce résultat est conjecturé pour $N \geq 2$ [6]. La preuve de M. J. Greenberg s'appuie sur une majoration de la fonction de Artin de I à l'aide de celle de son idéal jacobien. M. Hickel [3] donne une majoration plus fine que celle de M. J. Greenberg dans le cas d'un germe d'hypersurface analytique complexe. L'introduction de la fonction de Artin dans l'étude des singularités a été faite par M. Lejeune-Jalabert [4] et M. Hickel [3]. Soit I un idéal de $\Bbbk\{X_1, ..., X_n\}$ définissant un germe $(X, 0)$ plongé dans $(\Bbbk^n, 0)$. Notons I_N l'idéal de $\mathcal{O}_N\{X_1, ..., X_n\}$ engendré par I. On note $\beta_{I,N}$ la fonction de Artin de I_N. Cette fonction est un invariant analytique du germe $(X, 0)$. Le résultat prouvé par M. Hickel est le suivant :

Théorème 1.2 *[3] Soient f un germe de fonction holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^n$ et J_f l'idéal jacobien de $I = (f)$. Alors nous avons*

$$\beta_{(f),1}(i) \leq \beta_{J_f,1}(i) + i \,,\ \forall i \in \mathbb{N}\ .$$

Nous montrons ici que ce résultat est faux pour $N \geq 2$ en étudiant l'exemple de $f = X^2 - Y^3$. Nous ne savons pas dans ce cas si $\beta_{(f),N}$ est majorée par une fonction affine quand $N \geq 2$.

2. Approximation par une puissance p-ième

Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,, 1\}$. Nous nous plaçons dans le cas où l'anneau de base est $\mathcal{O}_N$ avec $\Bbbk$ un corps normé de caractéristique différente de p. Cet anneau est muni de la valuation $\mathfrak{m}_N$-adique que nous noterons ord. Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Nous allons tout d'abord présenter un algorithme d'approximation pour la valuation ord d'un d'élément de $\mathcal{O}_N$ par une puissance p-ième, c'est-à-dire trouver pour tout $x \in \mathcal{O}_N$ un élément z_x tel que $\sup_z \text{ord}(x - z^p) = \text{ord}(x - z_x^p)$.
Notons $x = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k$ où x_k est le terme d'ordre k de x. Soit k^0 le plus petit indice pour lequel $x_k \neq 0$.

Initialisation : Si x_{k^0} est une puissance p-ième d'un élément de $\mathcal{O}_N$, on peut initialiser l'algorithme, sinon $\sup_z \text{ord}(x - z^p) = \text{ord}(x)$. Dans le cas où ce terme est une puissance p-ième on pose

$$z_1 = \sqrt[p]{x_{k^0}} \text{ et } x_1 = x - z_1^p$$

avec $\sqrt[p]{x_{k^0}}$ une racine p-ième de x_{k^0}. On voit que $p\,\text{ord}\ z_1 = \text{ord}\ x$ et que $\text{ord}(x_1) > \text{ord}(x)$.

Récurrence : Supposons que l'on ait construit z_n à la n-ième étape tel que

$$x_n = x - z_n^p = \sum_k x_{n,k}$$

vérifie $\mathrm{ord}(x_n) > \mathrm{ord}(x)$ où $x_{n,k}$ est le terme d'ordre k de x_n. Soit k_n^0 tel que $\mathrm{ord}(x_n) = \mathrm{ord}(x_{n,k_n^0})$. Supposons que x_{n,k_n^0} soit divisible par $\sqrt[p]{x_{k_0}}^{p-1}$. On pose alors

$$z_{n+1} = z_n + \frac{x_{n,k_n^0}}{p\sqrt[p]{x_{k^0}}^{p-1}} \text{ et } x_{n+1} = x - z_{n+1}^p.$$

On a donc d'une part $\mathrm{ord}(z_{n+1}) = \mathrm{ord}(z_n) = \cdots = \mathrm{ord}(z_1) = \mathrm{ord}(x)/p = k^0/p = e$, et d'autre part $z_{n+1} \mod \mathfrak{m}_N^{e+1} = z_n \mod \mathfrak{m}_N^{e+1} = \cdots = z_1 \mod \mathfrak{m}_N^{e+1}$, d'où $\mathrm{ord}(x_{n+1}) > \mathrm{ord}(x_n)$.

Arrêt : Dans le cas où x n'est pas une puissance p-ième, l'algorithme s'arrête. Il existe un rang n pour lequel x_{n,k_n^0} n'est plus divisible par $\sqrt[p]{x_{k_0}}^{p-1}$ dans la récurrence. On a un terme que l'on ne peut pas éliminer et z_n est une puissance p-ième parmi celles qui sont les plus proches de x pour la topologie $\mathfrak{m}_N$-adique.

3. Etude la fonction de Artin de $X^2 - Y^3$

On suppose que la caractéristique de $\mathbb{k}$ est différente de 2 et de 3. Posons $f = X^2 - Y^3$ et fixons $N \geq 2$. Les solutions de f dans $\mathcal{O}_N^2$ sont les couples de la forme (z^3, z^2) avec $z \in \mathcal{O}_N$. Pour tout entier $j > 3$, nous allons donner $x_j \in \mathcal{O}_N$ tel que $\max_{z\in\mathcal{O}_N} \mathrm{ord}(x_j - z^3) = 2j + 9$ et $\max_{z\in\mathcal{O}_N} \mathrm{ord}(x_j^2 - z^3) = 8j + 6$. En choisissant y_j tel que $\max_{z\in\mathcal{O}_N} \mathrm{ord}(x_j^2 - z^3) = \mathrm{ord}(x_j^2 - y_j^3)$, nous voyons que toute solution (z^3, z^2) de f vérifie nécessairement $\mathrm{ord}(x_j - z^3) \leq 2j + 9$. Cela nous permet de dire que si $N \geq 2$

$$\limsup_{i\longmapsto+\infty} \frac{\beta_{(X^2-Y^3),\,N}(i)}{i} \geq 4\ .$$

L'idéal jacobien de $(X^2 - Y^3)$ est égal à (X, Y^2) dont la fonction de Artin est égale à $i \longmapsto 2i$. En particulier nous n'avons pas la majoration

$$\beta_{(X^2-Y^3),\,N}(i) \leq \beta_{J_{(X^2-Y^3)},\,N}(i) + i$$

pour i grand et $N \geq 2$, vérifiée pour $N = 1$ d'après le théorème 1.2.

Soit

$$x_j = T_1^{15} + \frac{3}{2}T_1^{12}T_2^j + T_1^9T_2^{2j} + \frac{1}{3}T_1^6T_2^{3j} + \frac{5}{96}T_1^3T_2^{4j} + \frac{1}{576}T_2^{5j}$$

avec $j > 3$. Nous avons, en appliquant l'algorithme d'approximation par une puissance 3-ième à x_j,

$$\max_{z\in\mathcal{O}_N} \mathrm{ord}(x_j - z^3) = \mathrm{ord}(x_j - (T_1^5 + \frac{1}{2}T_1^2T_2^j)^3) =$$

$$= \mathrm{ord}\left(\frac{1}{4}T_1^9T_2^{2j} + \frac{5}{24}T_1^6T_2^{3j} + \frac{5}{96}T_1^3T_2^{4j} + \frac{1}{576}T_2^{5j}\right) = 2j + 9.$$

Par ailleurs

$$x_j^2 = T_1^{30} + 3T_1^{27}T_2^j + \frac{17}{4}T_1^{24}T_2^{2j} + \frac{11}{3}T_1^{21}T_2^{3j} + \frac{101}{48}T_1^{18}T_2^{4j} + \frac{119}{144}T_1^{15}Y_2^{5j} +$$

$$+\frac{127}{576}T_1^{12}T_2^{6j} + \frac{11}{288}T_1^9T_2^{7j} + \frac{107}{27648}T_1^6T_2^{8j} + \frac{5}{27648}T_1^3T_2^{9j} + \frac{1}{331776}T_2^{10j}.$$

Appliquons l'algorithme d'approximation par une puissance 3-ième à x_j^2. Nous voyons que

$$x_j^2 = \left((T_1^5 + \frac{1}{2}T_1^2T_2^j)^2 + \frac{1}{6}T_1^4T_2^{2j} + \frac{1}{18}T_1T_2^{3j}\right)^3 +$$
$$+\frac{1}{82944}T_1^6T_2^{8j} + \frac{7}{746496}T_1^3T_2^{9j} + \frac{1}{331776}T_2^{10j}.$$

Donc

$$\max_{z\in\mathcal{O}} \operatorname{ord}(x_j^2 - z^3) = 8j + 6.$$

Posons alors

$$y_j = (T_1^5 + \frac{1}{2}T_1^2T_2^j)^2 + \frac{1}{6}T_1^4T_2^{2j} + \frac{1}{18}T_1T_2^{3j}.$$

Nous avons alors $\operatorname{ord}(x_j^2 - y_j^3) = 8j + 6$ et $\max_{z\in\mathcal{O}_N} \operatorname{ord}(x_j - z^3) = 2j + 9$ comme annoncé.

Références

[1] M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings, Publ. Math. IHES, **36,** (1969) 23-58.

[2] M. J. Greenberg, Rational points in henselian discrete valuation rings, Publ.Math. IHES, **31,** (1966) 59-64.

[3] M. Hickel, Fonction de Artin et germes de courbes traçées sur un germe d'espace analytique, Am. J. of Math., **115,** (1993) 1299-1334.

[4] M. Lejeune-Jalabert, Courbes tracées sur un germe d'hypersurface, Am. J. of Math., **112,** (1990) 525-568.

[5] M. Nagata, Local rings, Interscience, New York, 1962.

[6] M. Spivakovsky, Valuations, the linear Artin approximation theorem and convergence of formal functions, Proceedings of the II SBWAG, Santiago de Compostela, **54,** (1990) 237-254.

[7] J. J. Wavrik, A theorem on solutions of analytic equations with applications to deformations of complex structures, *Math. Ann.*, **216,** (1975) 127-142.