

Mathématiques financières

INTERETS COMPOSES

Auteur : CHARFEDDINE Jihene

Maître Assistant

ESSEC – Tunis

Date de création : Avril 2018

Sous la Licence CC : CC BY NC SA



Cette ressource « INTERETS COMPOSES » est une création dérivée des ressources gratuites suivantes :

1- **Claudine DHUIN, Dominique PUJAL (2012): « Calcul actuariel et applications aux produits financiers : Les bases des mathématiques financières »** utilisée sous la

licence CC (BY NC)

Lien de la ressource : http://ressources.auneg.fr/nuxeo/site/esupversions/32a059fc-75f3-4ab3-9f37-ac936d50ad39/co/Module_Calcul_actuariel_2.html

Source de la ressource : http://www.sup-numerique.gouv.fr/pid33288/moteur-des-ressources-pedagogiques.html?ressourceUrl=http%3A%2F%2Fwww.sup-numerique.gouv.fr%2Fressources-pedagogiques%2Fnotice%2Fview%2Foai%25253Aauneg.fr%25253Aauneg-769%3Fxtmc%3Dmathematiques_financieres%26xtnp%3D1%26xtcr%3D10

2- **Gilles Aldon « Mathématiques financières »** utilisée sous la licence CC (BY NC SA

2.0)

Lien de la licence : <http://eduscol.education.fr/maths/mentions-legales.html>

Lien de la ressource <http://www2.ac-lyon.fr/enseigne/math/IMG/pdf/mathfi.pdf>

Mathématiques financières

INTERETS COMPOSES

Plan

Introduction

Définition

La valeur acquise

- ✓ Objectifs
- ✓ Définition de la valeur acquise
- ✓ Calcul de la valeur acquise

La valeur actuelle

- ✓ Objectifs
- ✓ Définition de la valeur actuelle
- ✓ Calcul de la valeur actuelle

Calculs sur la formule des intérêts composés

- ✓ Objectifs
- ✓ Le calcul de la période
- ✓ Le calcul du taux d'intérêt

Taux par période

- ✓ Objectif
- ✓ Introduction
- ✓ Taux proportionnel
 - Objectifs
 - Définition
 - Calcul du taux proportionnel
- ✓ Taux équivalent
 - Objectifs
 - Définition
 - Calcul du taux équivalent

Mots clés : actualisation, capitalisation, intérêts composés

Mathématiques financières

INTERETS COMPOSES

Présentation :

L'objectif ce cours est d'expliquer les notions d'actualisation et de capitalisation, d'appliquer les formules liées au système d'intérêts composés.

Introduction

Objectifs :

- Connaître la capitalisation des intérêts
- Connaître le principe de calcul des intérêts composés
- Calculer une valeur actuelle
- Calculer une valeur future

Définition

Lorsqu'un emprunt ou un placement excède la durée d'une année, les intérêts sont généralement payés périodiquement, en fin de période. Les intérêts perçus peuvent être placés. Ils viennent alors augmenter le capital initial.

C'est à partir de cette nouvelle somme que les intérêts sont calculés pour la période suivante ; on dit que les intérêts sont capitalisés, ils portent eux-mêmes intérêt. **C'est le principe de la capitalisation.** On parle alors d'intérêt composé.

La valeur acquise

Objectifs :

- Définir la notion de valeur future
- Comprendre le principe de calcul de la valeur future
- Connaître la notation d'une valeur future

Définition de la valeur acquise :

Lorsqu'un placement ou un emprunt sont sur une période longue (plusieurs années), les intérêts acquis au cours d'une période s'ajoutent au capital initial pour le calcul des intérêts de la période suivante.

Calcul de la valeur acquise

Pour calculer la valeur acquise à la fin de nième année, les opérations d'intérêt et de capitalisation annuelle des intérêts sont présentées dans le tableau suivant :

| Dates (années) | Capital au début de l'année | Intérêt de l'année | la valeur acquise à la fin de l'année après capitalisation annuelle des intérêts. |
|----------------|-----------------------------|-------------------------|---|
| 1 | C | C i | C + C i = C(1+i) |
| 2 | C(1+i) | C(1+i)i | C(1+i) + C(1+i)i = C(1+i) ² |
| 3 | C(1+i) ² | C(1+i) ² i | C(1+i) ² + C(1+i) ² i = C(1+i) ³ |
| . | | | |
| . | | | |
| . | | | |
| (n-1) | C(1+i) ⁿ⁻² | C(1+i) ⁿ⁻² i | C(1+i) ⁿ⁻² + C(1+i) ⁿ⁻² i = C(1+i) ⁿ⁻¹ |
| N | C(1+i) ⁿ⁻¹ | C(1+i) ⁿ⁻¹ i | C(1+i) ⁿ⁻¹ + C(1+i) ⁿ⁻¹ i = C(1+i) ⁿ |

On place un capital C à intérêts composés de i% par an. Chaque année, l'intérêt généré est proportionnel au capital de l'année antérieure. Ainsi, l'année n le capital est donné par la formule :

$$C_n = C (1 + i)^n$$

Le modèle mathématique est la suite géométrique.

La valeur acquise par le capital C à la fin de n périodes au taux i est donc donnée par la formule suivante :

$$C_n = C(1+i)^n$$

La valeur actuelle

Objectifs

- Définir la notion de valeur actuelle
- Comprendre le principe de calcul de la valeur actuelle
- Connaître la notation d'une valeur actuelle

Définition de la valeur actuelle

L'actualisation est l'opération qui consiste à ramener à une même date des sommes qui concernent des périodes différentes afin de pouvoir les comparer. Un capital dans n périodes vaudra C_n au taux i . Sa valeur actuelle est donc :

$$C_0 = C(1+i)^{-n}$$

C_0 désigné indifféremment par **valeur actuelle** ou **valeur présente**.

C'est la valeur aujourd'hui d'un capital C_n qui ne sera dispensé que dans n périodes. La valeur C_0 résulte d'un calcul d'actualisation.

Remarques :

- 1- Les deux opérations, capitalisation et actualisation, partent d'un même principe sous-jacent, à savoir l'existence d'un taux d'intérêt auquel il est possible de placer une certaine somme d'argent.
- 2- La formule $C_n = C(1+i)^n$ ne peut être appliquée que si le taux d'intérêt i et la durée n sont exprimés dans la même unité de temps que la période de capitalisation.

Calculs sur la formule fondamentale des intérêts composés

Objectifs

- Connaître la façon de calculer la période
- Connaître la façon de calculer le taux d'intérêt

Le calcul de la période :

En connaissant C_n , C et i ; la détermination de la période de placement n revient à résoudre l'équation suivante :

$$C_n = C(1+i)^n$$

$$\Leftrightarrow n \ln(1+i) = \ln(C_n/C)$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln(C_n/C)}{\ln(1+i)}$$

Le calcul du taux d'intérêt

En connaissant C_n , C et n ; le calcul du taux d'intérêt revient à résoudre l'équation suivante :

$$C_n = C(1+i)^n$$
$$\Leftrightarrow (1+i) = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C}}$$
$$\Leftrightarrow i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C}} - 1$$

Taux par période

Objectif

- Connaître la façon de calculer des intérêts composés sur une période autre que l'année

Introduction

Les taux d'intérêt sont exprimés annuellement, la période de référence est donc **l'année**.

Lorsque la période de comptabilisation est inférieure à une année, le taux utilisé devra être recalculé pour que le taux et la période soient en adéquation

On divise l'année en k périodes égales, le taux annuel étant i , on peut alors sur chaque période utiliser soit un taux proportionnel, soit un taux équivalent.

Taux proportionnel

Objectifs

- Définir la notion de taux proportionnel
- Comprendre la méthode de calcul d'un taux proportionnel

Définition :

La méthode la plus naturelle et la plus simple consiste à prendre pour chaque période, un taux proportionnel au taux annuel soit :

$$i_k = \frac{i}{k}$$

Calcul du taux proportionnel :

- ✓ Le taux proportionnel semestriel $i/2$
- ✓ Le taux proportionnel trimestriel $i/4$
- ✓ Le taux proportionnel mensuel $i/12$

Taux équivalent

Objectifs

- Définir la notion de taux équivalent
- Comprendre la méthode de calcul d'un taux équivalent

Définition

Des taux équivalents correspondant à des périodes de capitalisation différentes sont dits équivalents lorsque pour une même période de placement ils conduisent à une même valeur acquise à intérêt composé.

Calcul du taux équivalent

Si i est le taux annuel et si l'année comporte k périodes, pour une période, le **taux équivalent** noté i_k est tel que valeur acquise par le capital à l'issue de n années est

$$i \text{ et } i_k \text{ équivalents} \Leftrightarrow C(1+i)^n = C(1+i_k)^{nk}$$

$$\Leftrightarrow (1+i)^n = (1+i_k)^{nk}$$

$$\Leftrightarrow (1+i) = (1+i_k)^k$$

- ✓ Le taux équivalent semestriel $i_s = \sqrt{1+i} - 1$
- ✓ Le taux équivalent trimestriel $i_t = \sqrt[4]{1+i} - 1$
- ✓ Le taux équivalent mensuel $i_m = \sqrt[12]{1+i} - 1$

Autoévaluation

Pour réaliser une autoévaluation proposée par DHUIN. C et PUJAL. D (2012), cliquez sur le lien suivant :

http://ressources.auneg.fr/nuxeo/site/esupversions/32a059fc-75f3-4ab3-9f37-ac936d50ad39/co/D01_SD05_eval_finale.html

Bon courage