

### TRIPHASI PARTI 1

correnti di linea

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Tensioni concatenate

$$V_{12}(t) + V_{23}(t) + V_{31}(t) = 0$$

$$V_{12} + V_{23} + V_{31} = 0$$

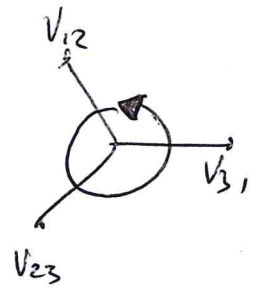
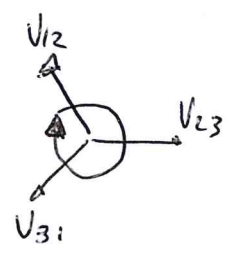
### Terna simmetrica

- tenore con uguale ampiezza
- somma delle tenore nulla in ogni istante

⇒ lo sfasamento dipende da

$-\frac{2\pi}{3} \Rightarrow$  terna sim. diretta

$+\frac{2\pi}{3} \Rightarrow$  terna sim. inversa



Una terna di correnti si dice equilibrata se

- correnti con uguale ampiezza
- somma delle correnti nulla in ogni istante

Sfasamento:

$-\frac{2\pi}{3} \Rightarrow$  diretta

$+\frac{2\pi}{3} \Rightarrow$  inversa

Con i fasori in uso sono valori efficaci  $V, E, I$ . Per si considerano, se non esplicitato, terna diretta

Nel generatore (vedi funzionamento, stato e rotore, ...) gli avvolgimenti possono essere collegati a stella o a triangolo

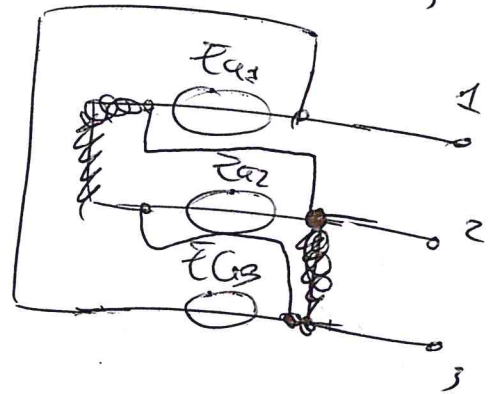
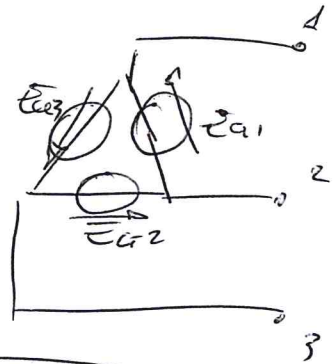
• Generatore a triangolo:

Le tensioni caratteristiche coincidono con quelle dei generatori.

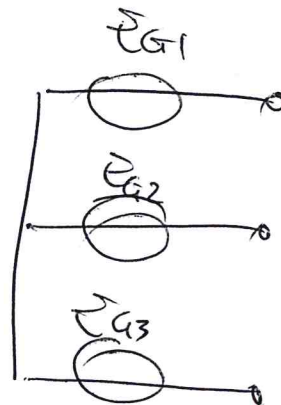
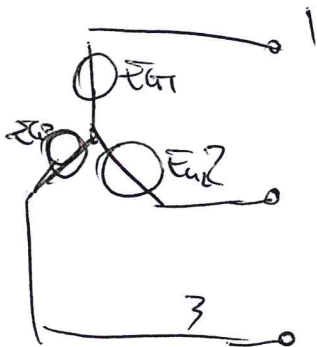
$$V_{12} = \bar{E}_{a1} = \bar{E}_g e^{j\alpha_1}$$

$$V_{23} = \bar{E}_{a2} = \bar{E}_g e^{j(\alpha_1 + \frac{2\pi}{3})}$$

$$V_{31} = \bar{E}_{a3} = \bar{E}_g e^{j(\alpha_1 + \frac{4\pi}{3})}$$



• Generatore a stella



$$\bar{E}_{a1} = \bar{E}_g e^{j\alpha_1}$$

$$\bar{E}_{a2} = \bar{E}_g e^{j(\alpha_1 + \frac{2\pi}{3})}$$

$$\bar{E}_{a3} = \bar{E}_g e^{j(\alpha_1 + \frac{4\pi}{3})}$$

$$V_{12} = \bar{E}_{a1} - \bar{E}_{a2}$$

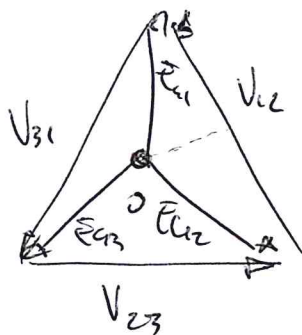
$$V_{23} = \bar{E}_{a2} - \bar{E}_{a3}$$

$$V_{31} = \bar{E}_{a3} - \bar{E}_{a1}$$

le funzioni stellate, soddisfa la relazione

$$\bar{z}_{a1} + \bar{z}_{a2} + \bar{z}_{a3} = 0 \quad (\text{coordinato tiene drette (0 m)})$$

Il punto  $O$  coincide con il baricentro



$$V_{12} = V = 2|\bar{z}_{a1}| \cos \frac{\pi}{6} \quad \leftarrow \text{metà di } 60^\circ \text{ del triangolo equilatero, } 30^\circ$$

$$= \sqrt{3} E_G$$

$$\arg(V_{12}) = \arg(\bar{z}_{a1}) + \frac{\pi}{6}$$

Lo stesso per  $V_{23}$  e  $V_{31}$ , seno  $\sqrt{3} E_G$  e fase  $\frac{\pi}{6}$  rispetto al primo numero

Utilizzatori in fase

Sono rappresentabili attraverso forme di impedenze (fas dell'ultimo collegato e stelle o e triangolo).

Equivalenze stelle-triangolo

slide 19

Stelle  $\leftrightarrow$  triangolo

Il prodotto di quelli con il numero, dunque sempre di tutti:

$$\bar{z}_1 = \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 + z_2 + z_3}$$

Triangolo  $\leftrightarrow$  stelle

Tutte le combinazioni, diversa quella che non c'è

$$Z_{12} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}{Z_3}$$

Per dimostrare si prendono due ~~due~~ ~~due~~ quelle tre ~~stelle~~ due punti e diviso esse uguali, in entrambe le configurazioni

$$Z_{12} Z_{31} = Z_1 Z_2 Z_3$$

serie e parallele      serie

si fanno tutte e tre e si risolve.

Oppure due dimensioni tra due punti, tipo 12 e 32, per entrambe e si trovano le correnti, vedi wiki. Sempre stessa cosa, corrente tra due punti uguali per entrambe.

Se il carico è resistivo, cioè equilibrato, le tre impedenze sono uguali:

$$Z_{\Delta} = \frac{Z_{\Delta}}{3}$$

$$Z_{\Delta} = 3 Z_{\Delta}$$

In un carico a triangolo la tensione alle tre impedenze coincide con quella circoscritta.

Correnti di fase

$$I_{12} = \frac{V_{12}}{Z_{12}}$$

$$I_{23} = \frac{V_{23}}{Z_{23}}$$

$$I_{31} = \frac{V_{31}}{Z_{31}}$$

Correnti di linea

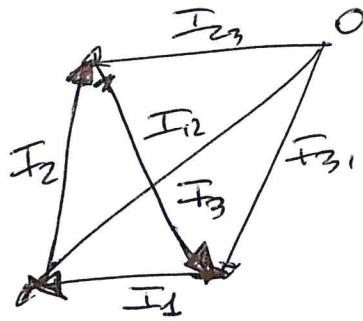
$$I_1 = I_{12} - I_{31}$$

$$I_2 = I_{23} - I_{12}$$

$$I_3 = I_{31} - I_{23}$$

3  
 Cerchio e triangolo, nel caso più generale, tensioni <sup>car.</sup> distribuite  
 e carico può essere irregolare.

I forze delle cune di forze collegano i vertici del cerchio  
 delle cune di linea



Cerchio di  
 linee formano  
 un triangolo

$$I_1 = I_{12} - I_{31}$$

$$I_2 = I_{23} - I_{12}$$

$$I_3 = I_{31} - I_{23}$$

Se il carico è regolare  $r_{12} = r_{23} = r_{31} = r$ , anche la  
 somma delle cune di forze è nulla

$$I_{12} + I_{23} + I_{31} = \frac{V_{12} + V_{23} + V_{31}}{r} = 0$$

e coincide con il baricentro del triangolo.

Per carico regolare, da

$$I_1 = I_{12} - I_{31}$$

$$I_2 = I_{23} - I_{12}$$

$$I_3 = I_{31} - I_{23}$$

$$I_{12} + I_{23} + I_{31} = 0$$

$$\Rightarrow I_{12} = \frac{I_1 - I_2}{3}$$

$$I_{23} = \frac{I_2 - I_3}{3}$$

$$I_{31} = \frac{I_3 - I_1}{3}$$

Se il carico è resistivo e le tensioni concatenate sono una terza simmetrica, le correnti di fase sono una terza equilibrata.

$$I_{12} = \frac{V_{12}}{|Z|} e^{-j\varphi}$$

$$I_{23} = I_{12} e^{-j\frac{2}{3}\pi}$$

$$I_{31} = I_{12} e^{-j\frac{4}{3}\pi}$$

$$\varphi = \arg(Z)$$

Anche le correnti di linea costituiscono una terza equilibrata e sono

$$I_1 = \sqrt{3} I_{12} e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$I_2 = \sqrt{3} I_{23} e^{-j\frac{5\pi}{6}}$$

$$I_3 = \sqrt{3} I_{31} e^{-j\frac{3\pi}{6}}$$

#### • CARICO A FASE

Le correnti delle impedenze coincidono con le correnti di linea, che possono essere ottenute risolvendo il sistema

$$Z_1 I_1 - Z_2 I_2 = V_{12}$$

$$Z_2 I_2 - Z_3 I_3 = V_{23}$$

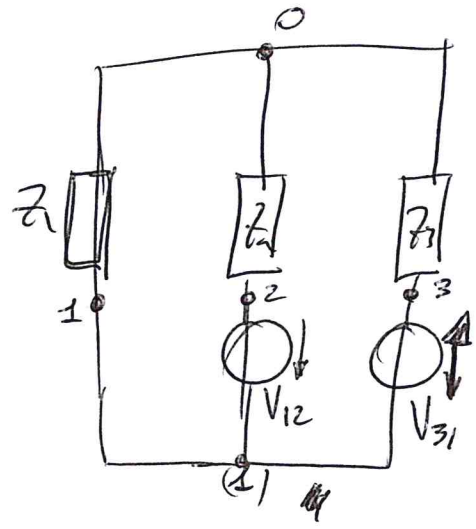
$$Z_3 I_3 - Z_1 I_1 = V_{31}$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Note le correnti di linea  $I_1, I_2, I_3$ , si trovano le tensioni di fase  $E_1, E_2, E_3$ , tensioni del carico sull'impedente.

$$E_1 = Z_1 I_1 \quad E_2 = Z_2 I_2 \quad E_3 = Z_3 I_3$$

Un modo alternativo per calcolare le ~~correnti di fase~~ tensioni di fase, è attraverso Millman e due soli generatori con tensioni costanti



~~XXXXXXXXXXXX~~

Millman

$$E_1 = \frac{Y_2 V_{12} - Y_3 V_{31}}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

e W ha anche

$$I_1 = \frac{Y_1 Y_2 V_{12} - Y_3 Y_1 V_{31}}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

Le altre tensioni di fase si ottengono con le altre coppie di generatori.

Se i generatori sono collegati a stella e il carico a stella, posso ricavare le tensioni di fase del carico, posso ricavare la tensione di fase del carico anche senza calcolarle quelle concatenate.

Con Millman ho Voa

$$V_{oa} = \frac{E_{a1} Y_1 + E_{a2} Y_2 + E_{a3} Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

$$E_1 = E_{a1} - V_{oa}$$

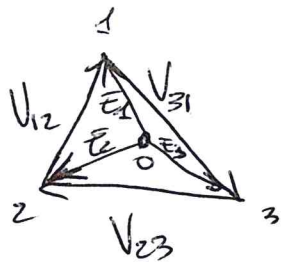
$$E_2 = E_{a2} - V_{oa}$$

$$E_3 = E_{a3} - V_{oa}$$

Si consideri il caso più generale, con termini consecutivi disimmetriche e caso non regolare.

$$V_{12} + V_{23} + V_{31} = 0 \quad \text{perci\u00f2 formano un triangolo}$$

Le funzioni di fase possono essere rappresentate da vettori che collegano un centro  $O$  ai vertici del triangolo



$$V_{12} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$$

$$V_{23} = \vec{E}_2 - \vec{E}_3$$

$$V_{31} = \vec{E}_3 - \vec{E}_1$$

Caso a stelle regolari,  $r_1 = r_2 = r_3 = r$  anche la somma delle funzioni di fase \u00e8 nulla. Infatti

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = r(\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3) = 0$$

Solo se posso raggiungere  $r$ , pero\u00f2.

Il centro delle fasi corrisponde con il baricentro del triangolo, che non \u00e8 <sup>equilatero</sup> regolare, perch\u00e9 le ~~due~~ <sup>non</sup> funzioni ~~non~~ <sup>non</sup> sono simmetriche.

In questo caso, trovate  $V_{12}, V_{23}, V_{31}$  e  $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 0$

$$\vec{E}_1 = \frac{V_{12} - V_{31}}{3}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{V_{23} - V_{12}}{3}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{V_{31} - V_{23}}{3}$$

Se il caso \u00e8 regolare e le funzioni consecutive formano una forma numerica, anche le funzioni fase formano una forma simmetrica (ottenuta da considerazioni geometriche) (il triangolo \u00e8 equilatero).

$$\vec{E}_1 = \frac{V_{12}}{\sqrt{3}} e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{V_{23}}{\sqrt{3}} e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{V_{31}}{\sqrt{3}} e^{-i\frac{\pi}{6}}$$



la relazione tra correnti di linea e correnti di fase di un carico a triangolo e quella tra tensioni concatenate e tensioni di fase di un carico a stella sono simili, ma non hanno esattamente le stesse forme.

Questo course che, con terna diretta, i vettori che rappresentano le correnti di fase circolano in senso orario, mentre i vettori che rappresentano le tensioni concatenate circolano in senso antiorario.

Le terna delle correnti di linea e delle tensioni concatenate sono entrambe dirette.

Ad una terna di tensioni concatenate se pensano ancora infinite terna di tensioni stellate, rappresentate da vettori che collegano un punto O del piano complesso ai vertici del triangolo delle tensioni concat. Le tensioni  $E_{10}, E_{20}, E_{30}$ , aventi centro coincidente con il baricentro del triangolo delle tensioni concatenate, sono dette tensioni principali di fase.

In generale le tensioni principali di fase possono essere ottenute da quelle concatenate mediante la relazioni

$$E_{10} = \frac{V_{12} - V_{31}}{3} \quad E_{20} = \frac{V_{23} - V_{12}}{3} \quad E_{30} = \frac{V_{31} - V_{23}}{3}$$

e se le tensioni concatenate costituiscono una terna simmetrica si ha

$$E_{10} = \frac{V_{12}}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}} \quad E_{20} = \frac{V_{23}}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}} \quad E_{30} = \frac{V_{31}}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

Nel caso di un carico a stella non regolare è possibile determinare le tensioni di fase  $E_1, E_2, E_3$  anche a partire dalle tensioni principali di fase e dalla tensione  $V_{0a}$ : spostamento del centro delle tensioni di fase

$$E_1 = E_{10} - V_{0ca}$$

(slide 36)

$$E_2 = E_{20} - V_{0ca}$$

$$E_3 = E_{30} - V_{0ca}$$

La tensione di tensione concatenate che alimenta il carico a stella può essere ottenuta mediante tre generatori collegati a stella aventi tensioni concatenate con le tensioni principali di fase.

$$V_{0ca} = \frac{E_{10} Y_1 + E_{20} Y_2 + E_{30} Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

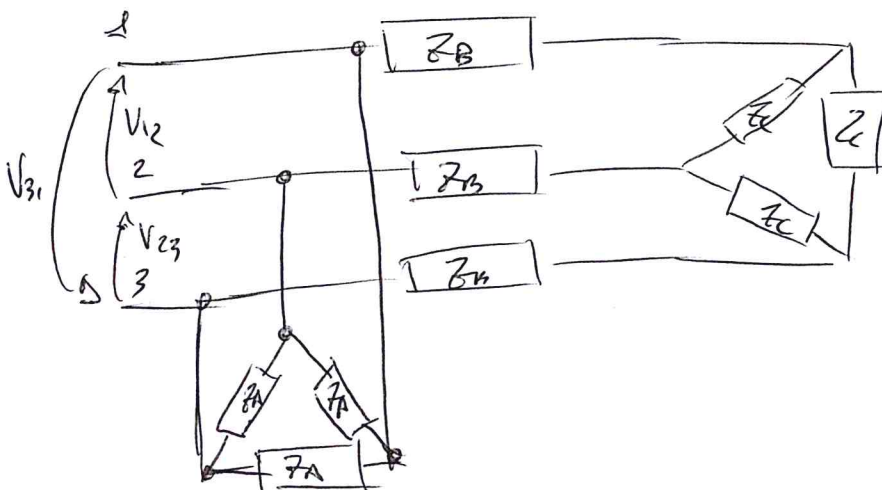
per un carico regolare  $\Rightarrow$  ha

$$V_{0ca} = \frac{E_{10} + E_{20} + E_{30}}{3} = 0$$

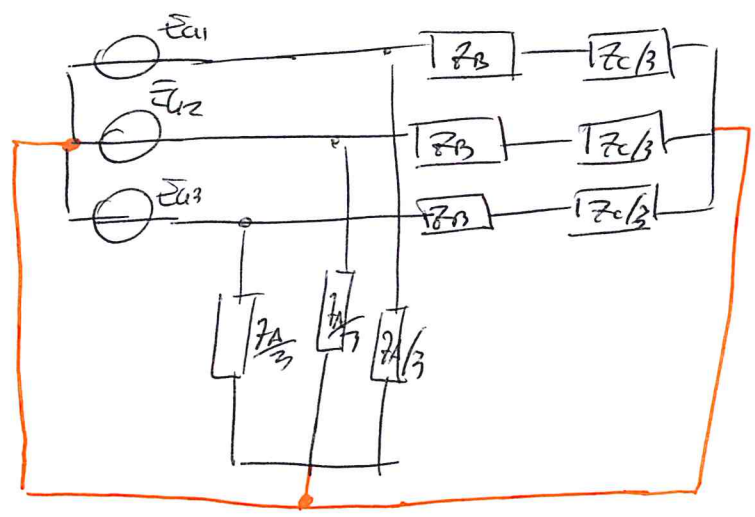
## RETE RIOTTA MONOFASE

Hyp:

- le tensioni concatenate costituiscono una terna simmetrica
- $\bar{I}$  carichi sono regolari



- Se sostituiamo i generatori a tre fasi con quelli a stella
- Si trasformano i carichi a tre fasi in stelle equivalenti

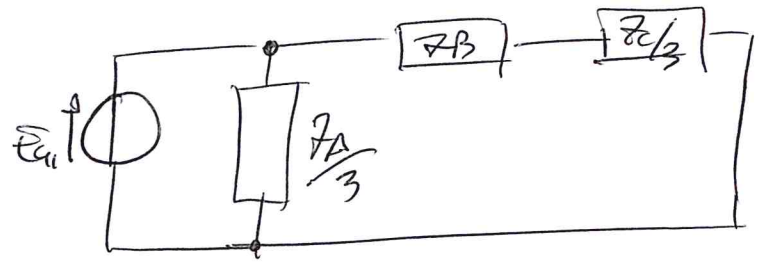


\* Tutti i carichi sono regolari

- I centri di tutte le stelle sono allo stesso potenziale
- Collegabili tra loro non si altera il comportamento del circuito.

Nel circuito ottenuto, ogni fase può essere studiata indipendentemente dalle altre.

I circuiti relativi alle tre fasi sono identici, a parte le relative di fase dei generatori.



Risolto il problema relativo alla prima fase (rete isoteta monofase) è possibile determinare le tensioni e le correnti delle altre due fasi introducendo i coefficienti sfasamenti di  $\pm \frac{2\pi}{3}$ .

Nel caso di generatori a carico a stella è possibile aggiungere un quarto conduttore (neutro) che collega il centro della stella di generatori al nodo centrale del carico. Le tensioni di fase del carico non dipendono dalle impedenze di carico ma coincidono con quelle dei generatori. Il neutro garantisce volentieri prefessati dalle tensioni di fase in presenza di carichi squilibrati.

Il neutro serve percorso della corrente

$$I_N = -(I_1 + I_2 + I_3) = -\left(\frac{\bar{E}_{G1}}{Z_1} + \frac{\bar{E}_{G2}}{Z_2} + \frac{\bar{E}_{G3}}{Z_3}\right)$$

Se le impedenze sono  $=$ ,  $\Rightarrow I_N = 0$

In questo caso la corrente nel neutro è irrilevante.

Se squilibrato il carico, nel neutro circola una corrente tanto più grande, tanto più grande è la differenza o lo squilibrio.

Potenza erogata da un carico trifase

Un generatore carico trifase si può esprimere come doppio bipolo.

Prendendo un terminale di riferimento si può esprimere la potenza istantanea erogata dal carico in funzione delle correnti degli altri terminali e delle tensioni degli altri terminali rispetto al riferimento.

$$p(t) = v_{12}(t) i_2(t) - v_{23}(t) i_3(t)$$

Il valore non dipende dal terminale di riferimento. Infatti:

$$v_{12}(t) + v_{23}(t) + v_{31}(t) = 0$$

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(t) &= v_{31}(t) i_3(t) - v_{12}(t) i_2(t) \\ &= v_{12}(t) i_2(t) - v_{23}(t) i_3(t) \\ &= v_{23}(t) i_2(t) - v_{31}(t) i_1(t) \end{aligned}$$

La potenza può anche essere espressa in funzione delle correnti di linea e di un arbitrario termine di tensione stellata associato alle tensioni concatenate.

$$p(t) = e_1(t) i_1(t) + e_2(t) i_2(t) + e_3(t) i_3(t)$$

in particolare possono essere usate le tensioni principali di fase

$$p(t) = e_{10}(t) i_1(t) + e_{20}(t) i_2(t) + e_{30}(t) i_3(t)$$

Dimostrazione: sostituire in  $v_2 = e_1(t) - e_2(t)$  e in nella formula precedente.

Inoltre, il caso con  $v_{21} \dots$ , con i due termini, può essere un caso particolare di quest'ultimo, se il centro stella coincide con uno dei vertici del triangolo delle tensioni concatenate. Una delle tensioni stellate si annulla, ma rimane e l'altro risulta l'opposto di una concatenata.

### CARICO STELLA

Nel caso di carico a stella, se come tensioni stellate si usano quelle delle impedenze, l'espressione

$$p(t)$$

con i tre termini, mostra che la potenza è data dalla somma delle potenze sulle tre impedenze.

### CARICO A TRIANGOLO

Anche nel triangolo è la somma, si può verificare scrivendo le correnti di linea in funzione di quelle di fase

$$i_{12} = i_{12} - i_{31}$$

poi sostituire in  $p(t)$  con i due termini.

$$p(t) = v_{12}(t) i_{12}(t) + v_{23}(t) i_{23}(t) + v_{31}(t) i_{31}(t)$$

• Potenza erogata conico in fase con neutro.

Questo può essere considerato un triplo bipolo (tre porte)  
 la potenza istantanea è

$$p(t) = e_1(t) i_1(t) + e_2(t) i_2(t) + e_3(t) i_3(t)$$

• POTENZA ATTIVA

Valori medio sul periodo della potenza istantanea

In termini di tensioni concatenate e correnti di linea

$$P = V_{31} I_3 \cos \delta_{31} - V_{12} I_2 \cos \delta_{12}$$

e tutte le altre coppie.  $\delta_{31} = \angle V_{31}, I_3$ , quindi tra tensione  
 e corrente.

In termini di tensioni stellate e correnti di linea

$$P = E_1 I_1 \cos \varphi_1 + E_2 I_2 \cos \varphi_2 + E_3 I_3 \cos \varphi_3$$

Nel caso a stella, se le tensioni stellate coincidono con quelle sull'impedenza,  
 $\varphi$  sono anche gli angoli di sfasamento dell'impedenza

Per un conico a triangolo si ha anche

$$P = V_{12} I_{12} \cos \varphi_{12} + V_{23} I_{23} \cos \varphi_{23} + V_{31} I_{31} \cos \varphi_{31}$$

Quindi la potenza attiva è data dalla somma delle potenze  
 attive erogate dalle tre fasi.

Tutto identico per quelle reattive, con sin invece di  $\phi$  cos.

Per:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \cos \Phi = \frac{P}{S} = \cos \left( \arctan \left( \frac{Q}{P} \right) \right)$$

$\Phi$  è un angolo convenzionale, non interpretabile come uno sfasamento tra una tensione ed una corrente.

### POTENZA COMPLESSA

$$N = P + jQ$$

• con terminali concatenati e correnti di linea

$$N = V_{31} I_3^* - V_{12} I_2^* = V_{12} I_1^* - V_{23} I_3^* = V_{23} I_2^* - V_{31} I_1^*$$

• con terminali stellati e correnti di linea

$$N = E_1 I_1^* + E_2 I_2^* + E_3 I_3^*$$

• Per un carico a tre poli, in terminali di terminali concatenati e correnti di fase

$$N = V_{12} I_{12}^* + V_{23} I_{23}^* + V_{31} I_{31}^*$$

### POTENZA NEI SISTEMI SIMMETRICI ED EQUILIBRATI

Ipotesi:

- le terminali concatenate costituiscono una terminazione simmetrica
- il carico è regolare

$$\begin{aligned}
 p(t) &= e_{10}(t) i_1(t) + e_{20}(t) i_2(t) + e_{30}(t) i_3(t) = \\
 &= E_{10} I \cos \varphi + E_{10} I \cos(2\omega t + \varphi_0 + \varphi_1) + \\
 &+ E_{20} I \cos \varphi + E_{20} I \cos(2\omega t + \varphi_0 + \varphi_1 + \frac{2\pi}{3}) \\
 &+ E_{30} I \cos \varphi + E_{30} I \cos(2\omega t + \varphi_0 + \varphi_1 + \frac{4\pi}{3}) = 3E_0 I \cos \varphi
 \end{aligned}$$

Le somme dei  $\cos(2\omega t + \dots)$  fa zero.

La potenza istantanea in un sistema equilibrato e regolare è costante.  $E_0$  ed  $I$  sono valori efficaci, tensione principali di fase e corrente di linea.

$$V = \sqrt{3} E_0$$

La tensione caratteristica è legata al valore efficace delle tensioni.

$$P = \sqrt{3} V I \cos \varphi$$

Il  $\varphi$  è lo sfasamento tra una tensione principale e una corrente di linea corrispondente.

Nel caso a stella per le tensioni <sup>principali</sup> di fase corrispondono con le tensioni nelle impedenze.  $\varphi$  rappresenta lo sfasamento delle impedenze.

Nel caso a triangolo regolare le tensioni delle impedenze corrispondono con le tensioni caratteristiche e sono spostate di  $\frac{\pi}{6}$  rispetto alle tensioni principali di fase, perciò le correnti nelle <sup>5</sup> impedenze sono scostate di  $\frac{\pi}{6}$  rispetto alle correnti di linea.  $\varphi$  rappresenta ancora lo sfasamento delle impedenze.



Quindi la potenza nei sistemi simmetrici ed equilibrati

Potenza attiva

$P = 3E_0 I \cos \varphi = \sqrt{3} V I \cos \varphi$   
reattiva

$Q = 3E_0 I \sin \varphi = \sqrt{3} V I \sin \varphi$   
apparente

$S = 3E_0 I = \sqrt{3} V I$

fattore di potenza

$\cos \phi = \cos \varphi$

e  $\phi$  rappresenta l'angolo della impedenza del carico

RIFASAMENTO CARICO TRIFASO

• Carico reattivo

Il valore eff. delle correnti di linea

~~$I = \frac{P}{\sqrt{3} V \cos \varphi}$~~

$P = \sqrt{3} V I \cos \varphi$

$\Rightarrow \boxed{I = \frac{P}{\sqrt{3} V \cos \varphi}}$

Quindi le correnti diminuiscono al crescere di  $\cos \varphi$ , max  $\cos \varphi = 1$ , ovviamente. Diminuisce la potenza reattiva

$\boxed{Q = P \tan \varphi}$

Si usano tre bipoli puramente reattivi, C o L, a seconda se  $Q > 0$  o  $< 0$ . Possiamo avere collegati a stella o a triangolo.

$Q_R = P (\tan \varphi' - \tan \varphi)$

$\varphi'$  è l'angolo che voglio ottenere

più frequentemente sono conduttori, perché i carichi tendono a essere induttivi/resistivi.

La tensione sul conduttore dipende dalla configurazione

$$V_c^Y = \frac{V}{\sqrt{3}} \quad V_c^\Delta = V$$

Quindi sul triangolo la tensione è  $\sqrt{3}$  volte più alta  
 la potenza erogata viene anch'essa con il collegamento

$$P_R = -3\omega C V_c^2 = -\omega C_Y V^2 = -3\omega C_\Delta V^2$$

$$C_Y V^2 = 3 C_\Delta V^2$$

$$C_Y = 3 C_\Delta$$

$C_Y$  deve essere 3 volte il condensatore  $\Delta$ .

Si guadagnava con tensioni più basse, ma si perde in termini di capacità.

La capacità di riferimento è quindi

stelle

triangolo

$$C_Y = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{\omega V^2}$$

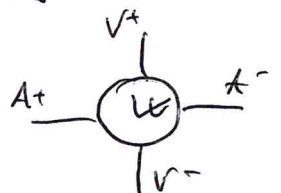
$$C_\Delta = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{3\omega V^2}$$

## WATTMETRO

Misura la potenza attiva. Ha una parte ampometrica e una voltmetrica. Lo strumento indica

$$P_W = VI \cos \varphi = VI \cos \hat{V} = \operatorname{Re}[\bar{V} I^*]$$

invertendo i terminali si inverte  $\cos \varphi$  nel segno



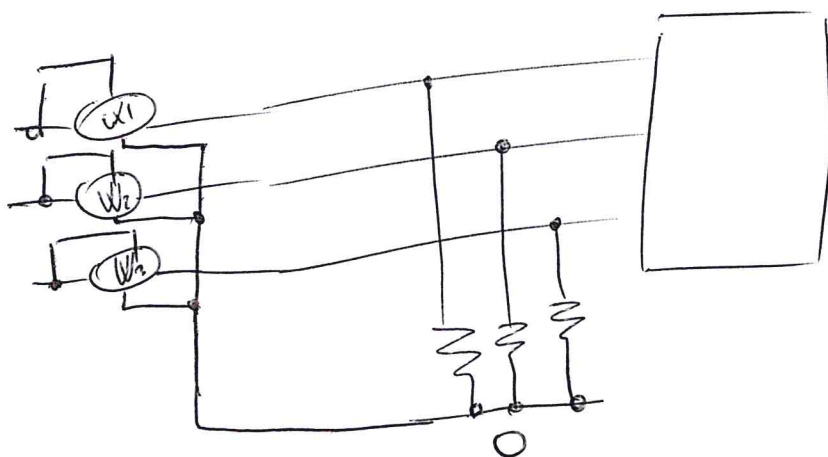
Se collega con porta 4 in serie al carico e  $V$  in parallelo  
l'inserto del wattmetro non deve influenzare il circuito.  
Solitamente  $V^+$  si mette a monte.

Nei sistemi con neutro

$$P = P_{w10} + P_{w20} + P_{w30}$$

cioè la somma delle potenze attive di ogni fase rispetto  
al neutro.

In sistemi senza neutro si crea il centro stella virtuale  
ottenendo una stella di resistenze di valore sufficientemente  
grande da non perturbare il circuito



la potenza è la somma delle 3 letture.

Con sistemi simmetrici ed equilibrati, si possono usare  
due resistori di valore pari a quella della parte resistiva del  
voltmetro. Se ne usa solo uno wattmetro sulle porte 1, ed  
esempio, riferito al centro ottenuto con i resistori.  
la potenza è 3 volte la lettura.

$$P = 3P_{w1} = 3EI \cos \varphi = \sqrt{3} VI \cos \varphi$$

Wattmetro in quadratura, misura la potenza reattiva.

Il pontino è ~~in~~ nella fase successiva, il segnale in due successive (ruotando 123123...)

$$P_{W1,23} = V_{23} I_1 \cos \widehat{V_{23} I_1} = \operatorname{Re}[V_{23} I_1^*]$$

In quadratura pura con sistema simmetrico, la tensione alla parte vettoriale è sfasata in quadratura rispetto alla ~~corrente~~ tensione di fase e così si misura la corrente

$$V_{23} = -j\sqrt{3}E_1$$

$$\Rightarrow P_{W1,23} = \operatorname{Re}[-j\sqrt{3}E_1 I_1^*] = \sqrt{3} \operatorname{Im}[E_1 I_1^*] = \sqrt{3} E_1 I_1 \sin \widehat{E_1 I_1}$$

$$= \sqrt{3} E_1 I_1 \sin \varphi_1$$

Per misurare la potenza reattiva quindi

$$Q = \frac{P_{W1,23} + P_{W2,31} + P_{W3,12}}{\sqrt{3}} = E_1 I_1 \sin \varphi_1 + E_2 I_2 \sin \varphi_2 + E_3 I_3 \sin \varphi_3$$

Se il carico è equilibrato basta un solo wattmetro in quadratura

$$Q = \sqrt{3} P_{W1,23} = 3 E_1 I_1 \sin \varphi$$

### Inserzione Arca

Nei sistemi senza neutro si può misurare la potenza anche con due wattmetri soli, in serie e due linee sottintese e con terminare con porte positive sulla linea e la negativa collegata alla terza linea.

$$P = P_{W12} + P_{W32} = V_{12} I_1 \cos \widehat{V_{12} I_1} + V_{32} I_3 \cos \widehat{V_{32} I_3}$$

L'inserzione misura la potenza attiva.

Nel caso di carico equilibrato si può avere anche la potenza reattiva.

Si indica con  $\varphi$  l'angolo di sfasamento tra le tensioni principali di fase e le correnti di linea (che coincide con l'argomento della impedenza).

Da considerazioni geometriche,

$$\alpha = \widehat{V_{12} I_1} = \varphi + \frac{\pi}{6} \quad \beta = \widehat{V_{32} I_3} = \varphi - \frac{\pi}{6}$$

Esprimendo

$$P_{W12} = V_{12} I_1 \cos \alpha \quad \text{e} \quad P_{W32} = \dots$$

si ha (carico reverso)

$$P = P_{W12} + P_{W32}$$

$$Q = \sqrt{3} (P_{W32} - P_{W12})$$

$$\cos \varphi = \cos \left[ \arctg \left( \sqrt{3} \frac{P_{W32} - P_{W12}}{P_{W12} + P_{W32}} \right) \right]$$

Con  $P > 0$ , i due wattmetri danno letture positive entrambi se

$$-\frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \cos \varphi > 0.5$$

Le indicazioni dei due wattometri sono uguali solo se il carico è puramente resistivo.

Se il carico non è puramente resistivo

$$P_{W32} > P_{W12} \Rightarrow \text{induttivo}$$

$$P_{W12} > P_{W32} \Rightarrow \text{capacitivo}$$

Il  $Q$  è il ~~pot~~ wattmetro dopo fase del meno termine - quello ancora dopo moltiplicato  $\sqrt{3}$ .

### Insiemei Ricatti

Serve a misurare la potenza in un sistema simmetrico con carico squilibrato, attivo e reattivo. Si aggiunge all'Aron, un terzo wattmetro in configurazione quadratura nella fase restante.

$$P = P_{W12} + P_{W32}$$

$$Q = \frac{P_{W32} - P_{W12} + 2P_{W2,31}}{\sqrt{3}}$$

$$P_{W32} - P_{W12} = \operatorname{Re} \left[ V_{32} I_3^* - V_{12} I_1^* \right] = \operatorname{Re} \left[ +i\sqrt{3} E_1 (-I_1^* - I_2^*) + i\sqrt{3} E_3 (-I_2^* - I_3^*) \right]$$

$$= \sqrt{3} \operatorname{Im} \left[ E_1 I_1^* + (E_1 + E_3) I_2^* + E_3 I_3^* \right]$$

$$= \sqrt{3} \operatorname{Im} \left[ E_1 I_1^* - E_2 I_2^* + E_3 I_3^* \right]$$

$$P_{W2,31} = \operatorname{Re} \left[ V_{31} I_2^* \right] = \operatorname{Re} \left[ -i\sqrt{3} E_2 I_2^* \right] = \sqrt{3} \operatorname{Im} \left[ E_2 I_2^* \right]$$

$$\Rightarrow P_{W32} - P_{W12} + 2P_{W2,31} = \sqrt{3} \operatorname{Im} \left[ E_1 I_1^* + E_2 I_2^* + E_3 I_3^* \right] = \sqrt{3} Q$$

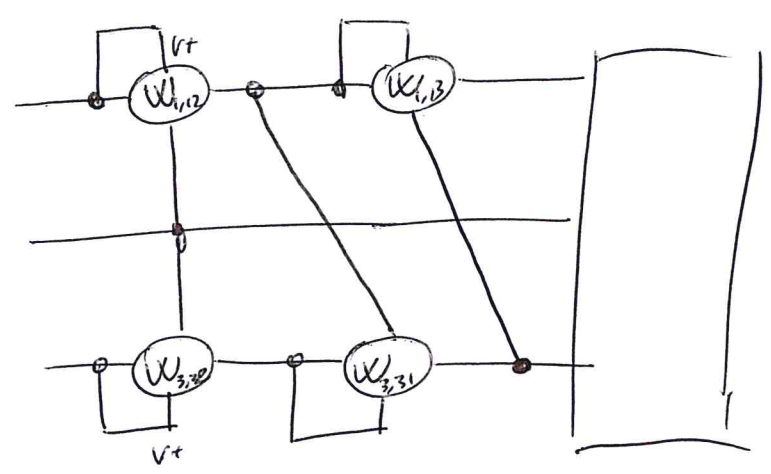
Se eq.  $E_1 I_1^* = E_2 I_2^* = E_3 I_3^*$  e si ottiene il risultato

$$P_{W_{32}} - P_{W_{12}} = \sqrt{3} E I \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

Di conseguenza non serve il wattmetro in quadratura.

INIEZIONE BARBAGLIATA

Invece del wattmetro in quadratura si usano due wattmetri inseriti nelle stesse linee di quelli Aron, ma con il vettore invertito. Ovvero il  $V^-$  del primo sulle linee dell'altro e viceversa



$$P = P_{W_{1,12}} + P_{W_{3,32}}$$

$$Q = \frac{P_{W_{3,32}} - P_{W_{1,12}} + 2(P_{W_{1,13}} - P_{W_{3,31}})}{\sqrt{3}}$$

È sufficiente verificare che l'espressione

$P_{W_{1,13}} - P_{W_{3,31}}$  sia uguale a quella del wattmetro

in quadratura dell'armatura  $P_{W_{12}}$ .

$$= \text{Re} [V_{13} I_1^* - V_{31} I_3^*] = \text{Re} [-i \sqrt{3} E_2 (I_1 - I_3)] = \sqrt{3} \text{Im} [E_2 I_2] = P_{W_{2,31}}$$

Se il cavo non varia nel tempo si possono usare due wattometri sulle  $V^-$  dei wattometri nell'addere e in quello successivo.  
 Con 2 wattometri si misura tutto (slide pag)

### WATTAGGI 3 fase.

- In un sistema simmetrico ed eq. la potenza erogata è costante, la potenza fornita al motore del generatore è costante. In un generatore monopole sarebbe necessario e quindi sarebbe controproducente l'energia meccanica. Quindi stesso discorso sulle coppie al motore.
- In trifase, a parità di conduttori si perde meno energia nelle linee di trasporto.
- Può essere usato per generare un campo ~~elettrico~~ magnetico rotante, un sistema di correnti trifase, su cui ruotano le macchine elettriche.

$$P_D = nRI^2 = np \frac{l}{S} I^2 = n^2 p \frac{l^2}{\tau} I^2$$

nls volume totale conduttori

\*confronto cc, alt. monopole, alt. trifase

$$K = p \frac{l^2 p^2}{V^2}$$

| cc  | CAM  | CAT  |
|---|--|--|
| $I_{cc} = \frac{P}{V}$  | $I_{CAM} = \frac{P}{V \cos \varphi}$   | $I_{CAT} = \frac{P}{\sqrt{3} V \cos \varphi}$  |
| $P_{Dcc} = 4p \frac{l^2 p^2}{\tau_{cc} V^2} = \frac{4K}{\tau_{cc}}$ | $P_{DCAM} = 4p \frac{l^2 p^2}{\tau_{CAM} V^2 \cos^2 \varphi} = \frac{4K}{\tau_{CAM} \cos^2 \varphi}$ | $P_{DCAT} = 3p \frac{l^2 p^2}{\tau_{CAT} V^2 \cos^2 \varphi} = \frac{3K}{\tau_{CAT} \cos^2 \varphi}$ |



4 punti di volume dei conduttori

- trifase 25% meno perdite di monofase
- monofase perde sempre più di DC, tranne con  $\cos\varphi=1$
- con  $\cos\varphi > \frac{\sqrt{3}}{2}$  CAT meno perdite di DC

4 punti di perdite

CAT ripercuote sul volume conduttori  
con  $\cos\varphi$  elevati conviene anche su DC

- I generatori e i motori in alternata sono più affidabili.
- Si ha la possibilità di usare le tensioni facilmente  
altreverso i trasformatori.

Le linee in DC sono usate per i cavi sottomarini, dove si può usare una tensione efficace più bassa (la  $V_{\text{eff}}$  alternata è più alta), ma ci sono le induttanze nelle linee e perciò minori perdite, ma ci sono le capacità parassite nei cavi, che causano perdite di corrente,  $\Rightarrow$  può usare un solo cavo e il mare come ritorno.  
La DC usata in maniera tradizionale, ora si vede in maniera.

• CAMPO MAGNETICO ROTANTE

Campo magnetico avente intensità costante e direzione che ruota attorno ad un asse con velocità costante  $\omega$ .

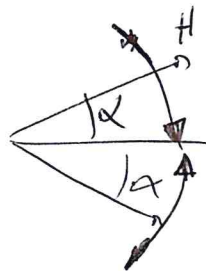
Si può ottenere facendo ruotare un magnete permanente o anche facendo passare correnti opportunamente spostate tra loro in avvolgimenti fissi.

Un solenoide percorso dalla corrente sinusoidale  $i(t) = I_m \cos(\omega t)$  produce al suo interno un campo magnetico con direzione omnia ed espressione

$$H(t) = H_m \cos(\omega t)$$

Questo può essere scomposto in due vettori controtanti con modulo  $\frac{H_m}{2}$  che ruotano con velocità  $\omega$ :  $H_{d1}$  e  $H_{d2}$ .

Se si ruota la corrente di un angolo  $\alpha$ ,  $H_{d1}$  e  $H_{d2}$  ruotano in senso opposto di  $\alpha$  per giorno.



Qui  $\alpha$  negativo, cioè ruotato

con due solenoidi disposti alla stessa distanza dal punto P, agendo sulla distanza e fase è possibile creare un campo rotante.

I campi diretti devono essere in fase tra loro e i campi inversi in opposizione di fase.

Occorre che la corrente del secondo solenoide sia in quadratura e che l'asse del 2° solenoide sia ruotato di  $90^\circ$  rispetto al 1°. I campi inversi si elidono mentre i diretti si sommano. Si genera quindi un campo magnetico rotante.

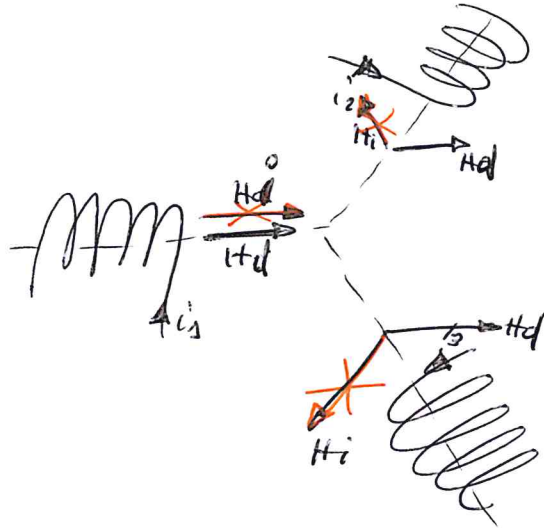
Con una serie di avvolgimenti, si dispongono a  $120^\circ$  e si fanno percorrere da una stessa equibrate di corrente diretta.

Per i campi diretti la rotazione del solenoide e della fase si compensano e i campi diretti si sommano. I campi inversi formano una terza sinusoide e si elidono.

$$i_1(t) = I_m \cos(\omega t)$$

$$i_2(t) = I_m \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$

$$i_3(t) = I_m \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})$$

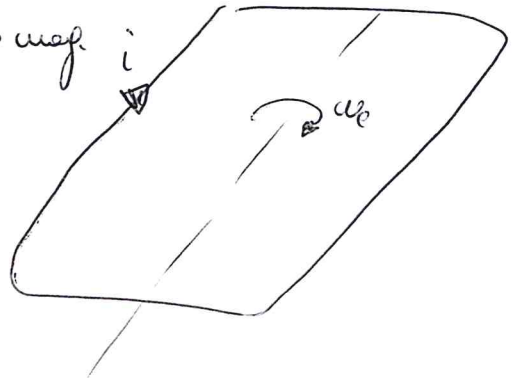


Il solenoide è simmetrico per rotazione

### Funzionamento motore ad induzione

Spira libera di ruotare sul proprio asse e immersa in un campo magnetico (vedi figura B, vedi in futuro).

Ruota con velocità angolare  $\omega_c$  (il campo mag.  $i$ ). Il flusso concatenato varia nel tempo e perciò si induce una f.e.m. e quindi circolo corrente.



Questa è sottile e forte che la fanno ruotare in senso concorde con il campo magnetico. La reazione tende ad annullare la rotazione del flusso concatenato, così le forze si groupano alle curve che le ha permesso.

Idoneamente la spira tendrebbe a raggiungere una velocità di rotazione corrispondente con quella del campo, velocità di sincronismo. In pratica non lo raggiunge perché la forza

sarebbe nulla. Ruota ad una velocità inferiore, dove  
le coppie dovute al campo magnetico bilanciano le coppie resistive  
dell'effetto. De ciò MACHIDA ASINCRONA. (vedi ITIS SUCCHI, in  
futuro).



# TRIFASE = PARTE 2:

Terme simmetrica:

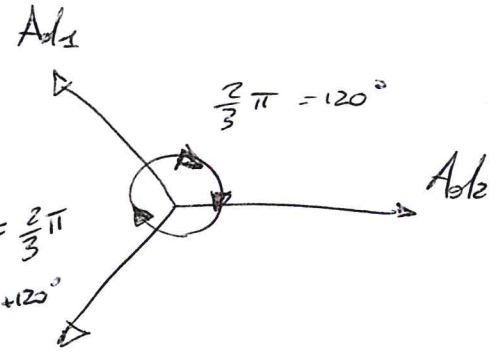
diretta (sfor.  $-\frac{2}{3}\pi$ )

$$a_{d1} = \sqrt{2} A_d \cos(\omega t + \varphi_d)$$

$$a_{d2} = \sqrt{2} A_d \cos(\omega t + \varphi_d - \frac{2\pi}{3})$$

$$a_{d3} = \sqrt{2} A_d \cos(\omega t + \varphi_d + \frac{2\pi}{3})$$

da  $-\frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$   
 $-240^\circ = +120^\circ$

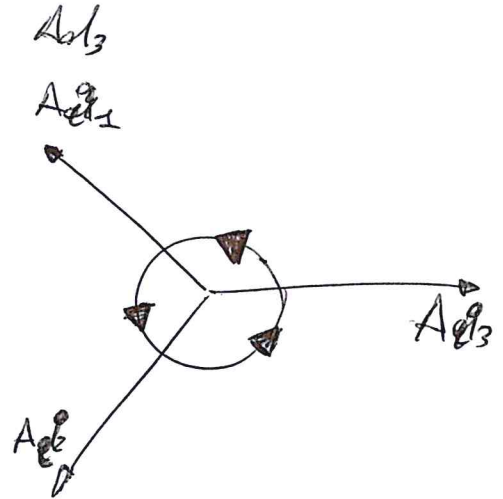


inversa (sfor.  $+\frac{2}{3}\pi$ )

$$a_{i1} = \sqrt{2} A_i \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$a_{i2} = \sqrt{2} A_i \cos(\omega t + \varphi_i + \frac{2\pi}{3})$$

$$a_{i3} = \sqrt{2} A_i \cos(\omega t + \varphi_i - \frac{2\pi}{3})$$

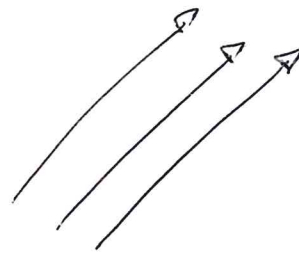


Terme omopola

$$a_{o1} = \sqrt{2} A_o \cos(\omega t + \varphi_o)$$

$$a_{o2} = \sqrt{2} A_o \cos(\omega t + \varphi_o)$$

$$a_{o3} = \sqrt{2} A_o \cos(\omega t + \varphi_o)$$



Terme pure: Terme isofreq. e pure pseudo

$$a_1(t) + a_2(t) + a_3(t) = 0$$

se non soddisfa e' spuria

BRA: simmetrica diretta e inversa, ed es

SPURIA: ad es, omopola.

Op. di rotazione

$$\alpha = e^{\frac{12\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$|\alpha| = 1$ , ruota  $120^\circ$  in senso antiorario

periodico con periodo 3:  $\alpha^{3k} = 1$   $\alpha^{3k+1} = \alpha$   $\alpha^{3k+2} = \alpha^2$

$$\alpha^2 = e^{-\frac{12\pi}{3}}$$

Si verifica:

$$1 + \alpha + \alpha^2 = 0$$

$$1 + e^{\frac{12\pi}{3}} + e^{-\frac{12\pi}{3}} = \frac{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2} = 0$$

Vali poi

$$1 - \alpha = \sqrt{3} e^{-\frac{j\pi}{6}}$$

$$1 - \alpha^2 = \sqrt{3} e^{\frac{j\pi}{6}}$$

$$\alpha^2 - \alpha = -j\sqrt{3}$$

Le forme possono essere rappresentate

diretta

$$1, \alpha^2, \alpha$$

inversa

$$1, \alpha, \alpha^2$$

omopolare

$$1, 1, 1$$

Una forma di sequenza (diretta, inversa o omopolare) è individuata con solo dal primo termine. Detto esso,

$$A_d = A_d e^{j\psi_d}$$

$$A_i = A_i e^{j\psi_i}$$

$$A_o = A_o e^{j\psi_o}$$

Le componenti si possono esprimere con

$$A_{d1} = A_d, \quad A_{d2} = \alpha^2 A_d, \quad A_{d3} = \alpha A_d$$

e con le altre due, attraverso l'operatore rotazionale.

Teorema Fortesque:

Quali terne di forze  $A_1, A_2, A_3$  si può esprimere invariabilmente come somma di una terna diretta, una inversa e una angolare

diretta  $Ad(1, \alpha^2, \alpha)$

inversa  $Ai(1, \alpha, \alpha^2)$

angolare  $A_0(1, 1, 1)$

In particolare (tutte forze, come bold  $A$ )

$$A_1 = Ad + A_0 + A_0$$

$$A_2 = \alpha^2 Ad + \alpha Ai + A_0$$

$$A_3 = \alpha Ad + \alpha^2 Ai + A_0$$

I componenti  $Ad, Ai, A_0$  sono detti componenti sequenziali o simmetriche della terna  $A_1, A_2, A_3$ .

Risolvendo il sistema per  $Ad, Ai, A_0$  c'è sempre la soluzione  $\Rightarrow$  dimostrato

Per una terna pura le componenti angolare è sempre nulla

$$Ad = \frac{1}{3}(A_1 + \alpha A_2 + \alpha^2 A_3)$$

$$Ai = \frac{1}{3}(A_1 + \alpha^2 A_2 + \alpha A_3)$$

$$A_0 = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3)$$

Tutto ciò può essere espresso in forma matriciale.

Detti vettori

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

$$A_S = \begin{bmatrix} Ad \\ Ai \\ A_0 \end{bmatrix}$$

con la matrice di sequenza  $S$

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{S}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \underline{S} \underline{A}_S$$

$$\underline{A}_S = \underline{S}^{-1} \underline{A}$$

CARICO TRIFASE BILIBERALE NEUTRO

$$Y_{11} = \frac{\bar{I}_1}{\bar{E}_1} \Big|_{\substack{\bar{E}_2=0 \\ \bar{E}_3=0}} \quad Y_{21} = \frac{\bar{I}_2}{\bar{E}_1} \Big|_{\substack{\bar{E}_2=0 \\ \bar{E}_3=0}} \quad Y_{31} = \frac{\bar{I}_3}{\bar{E}_1} \Big|_{\substack{\bar{E}_2=0 \\ \bar{E}_3=0}}$$

Si come la somma delle correnti è zero

$$Y_{11} + Y_{21} + Y_{31} = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3}{\bar{E}_1} \Big|_{\substack{\bar{E}_2=0 \\ \bar{E}_3=0}} = 0$$

Uguale per le altre due colonne.

La matrice è simmetrica se lo scambio sequenziale della parte non altera tensioni e correnti su terminali



Case

$$Y_{11} = Y_{22} = Y_{33} = Y_p$$

$$Y_{12} = Y_{23} = Y_{31} = Y_q$$

$$Y_{13} = Y_{21} = Y_{32} = Y_r$$

$\bar{Y}$  detta matrice  
CIRCOLANTE

Reciproco se applicando alla parte  $i$  un impulso, alla parte  $i$  si ottiene quello che si otterrebbe alla parte  $i$  se fosse applicato un'!

$$Y_{12} = Y_{21}$$

$$Y_{23} = Y_{32}$$

$$Y_{31} = Y_{13}$$

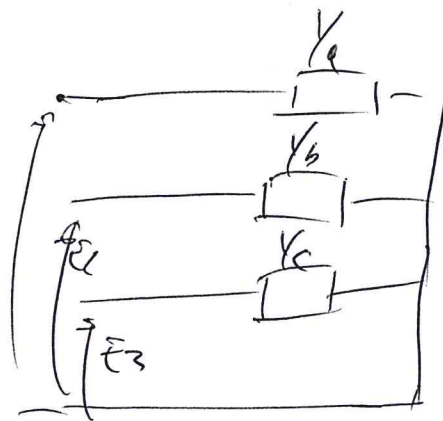
Una tripla bipolo, ottenuto da interconnessione di bipoli, è sempre ~~reciproca~~ reciproca.

Una macchina rotante non ha in genere un tripla bipolo reciproco.

Esempio

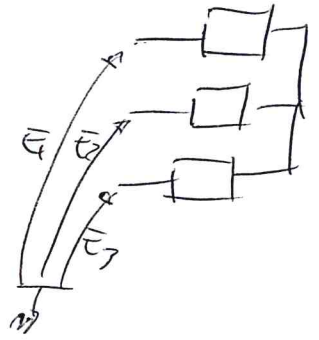
Stella a punta

$$Y_s = \begin{bmatrix} Y_a & 0 & 0 \\ 0 & Y_b & 0 \\ 0 & 0 & Y_c \end{bmatrix} \bar{e}_i$$



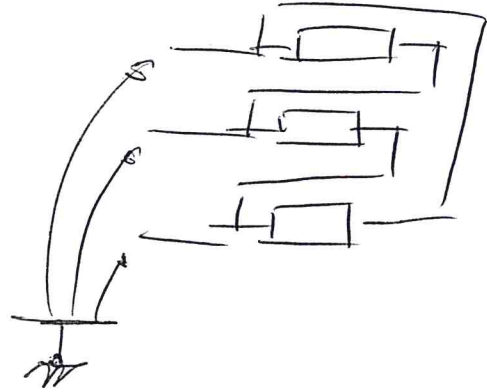
Stella pura

$$Y = \frac{1}{Y_a + Y_b + Y_c} \begin{bmatrix} Y_a(Y_b + Y_c) & -Y_a Y_b & -Y_a Y_c \\ -Y_a Y_b & Y_b(Y_a + Y_c) & -Y_b Y_c \\ -Y_a Y_c & -Y_b Y_c & Y_c(Y_a + Y_b) \end{bmatrix}$$



Triangolo

$$Y = \begin{bmatrix} Y_a + Y_c & -Y_c & -Y_b \\ -Y_c & Y_a + Y_b & -Y_a \\ -Y_b & -Y_a & Y_b + Y_c \end{bmatrix}$$



Si può anche trovare le ammettenze delle sequenze

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{E}$$

$$\underline{I}_s = \underline{S}^{-1} \underline{I}$$

$$\underline{E}_s = \underline{S}^{-1} \underline{E}$$

$$\underline{I}_s = \underline{S}^{-1} \underline{I} = \underline{S}^{-1} \underline{Y} \underline{E} = \underline{S}^{-1} \underline{Y} \underline{S} \underline{E}_s = \underline{Y}_s \underline{E}_s$$

In un caso generico, ogni componente seq. delle correnti di linea dipende da tutte le componenti sequenziali delle tensioni stellate.

Con carico simmetrico, la matrice è diagonale

$$Y_S = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_p & Y_q & Y_r \\ Y_r & Y_p & Y_q \\ Y_q & Y_r & Y_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Y_0 & & \\ & Y_i & 0 \\ 0 & & Y_0 \end{bmatrix}$$

$$Y_0 = Y_p + \alpha^2 Y_q + \alpha Y_r$$

$$Y_i = Y_p + \alpha Y_q + \alpha^2 Y_r$$

$$Y_0 = Y_p + Y_q + Y_r$$

come si definisce la sequenza con vettore  $\alpha$   
 Ad  $(1, \alpha^2, \alpha) = Y_p + \alpha^2 Y_q + \alpha Y_r$

In queste condizioni, ognuna delle componenti sequenziali  $I$  dipende solo dalla corrispondente ~~sequenza~~ sequenziale della tensione stellata

$$I_d = Y_d E_d$$

$$I_i = Y_i E_i$$

$$I_0 = Y_0 E_0$$

Se il carico è anche reciproco

$$Y_g = Y_r \Rightarrow Y_d = Y_i$$

Un carico senza neutro, considerato che la somma delle colonne o righe di  $Y \Rightarrow$ , ha  $Y_0 = 0$

$$Y_0 = Y_p + Y_g + Y_r = 0$$

Stime cose per le impedenze alle seguenti:

$$Y_d = \frac{1}{Z_d} \quad Y_i = \frac{1}{Z_i} \quad Y_0 = \frac{1}{Z_0}$$

Se non è neutro, le matrici  $\neq$  non è definite.  
Si può fare però quella alle eq. dirette e inverse,  
quelle impedenze è definite.

Se un carico simmetrico è alimentato con una tensione di tensione simmetrica (diretta o inversa), le correnti di linea costituiscono una tensione ~~simmetrica~~ equilibrata.

$$I_{d1} = Y_d E_{d1}$$

$$I_{d2} = Y_d \alpha^2 E_{d1} = \alpha^2 I_{d1}$$

$$I_{d3} = Y_d \alpha E_{d1} = \alpha I_{d1}$$

$$I_{i1} = Y_i E_{i1}$$

$$I_{i2} = Y_i \alpha E_{i1} = \alpha I_{i1}$$

$$I_{i3} = Y_i \alpha^2 E_{i1} = \alpha^2 I_{i1}$$

In queste condizioni il carico è equivalente ad una stella di impedenze di fase vale  $\frac{1}{Y_d}$  o  $\frac{1}{Y_i}$ .

Con corso non reciproco, le stelle eq per le dirette e  
inverse sono diverse.

### Reti HONORARI di sequenza.

Conditi simmetrici, determinati con una terza generata di  
tensioni.

Tensioni e correnti si determinano attraverso la rete  
ridotta mancante:

Reti mancanti di sequenze diretta;  
inversa;  
omopolare.

Si rappresentano tutti i conditi attraverso una rappresentazione  
a stelle e si procede come per la rete mancante di un sistema  
simmetrico equilibrato. Nel caso delle porte dirette e inverse,

Tutti i conditi delle stesse sono allo stesso potenziale, il neutro è imbrato

Il sistema reciproco ha seq. dirette e inverse che differiscono  
solo riguardo l'elaborazione.

Nella rete mancante di sequenze omopolare, le stelle prive di neutro non  
vengono considerate.

### POTENZA COMPLESSA

$$N = E_1 I_1^* + E_2 I_2^* + E_3 I_3^*$$

Con componenti simmetriche, può essere con  $E_s$

$$N = 3E_d I_d^* + 3E_i I_i^* + 3E_o I_o^*$$

Evole anche con corso senza neutro, ma senza le porte  
 $I_o$  dato che  $I_i = 0$

La parte complessa non influenza sulla potenza perché il centro di fase può essere scelto in maniera arbitraria.

## o Potenza fluttuante

$$e_k(t) = \sqrt{2} \bar{e}_k \cos(\omega t + \varphi_{e_k}) \quad k = 1, 2, 3$$

$$i_k(t) = \sqrt{2} I_k \cos(\omega t + \varphi_{i_k})$$

La potenza istantanea è

$$p(t) = e_1(t) i_1(t) + e_2(t) i_2(t) + e_3(t) i_3(t) = \\ = P + p_F(t)$$

$P$  = potenza attiva

$p_F$  = potenza fluttuante, somma delle 3 potenze fluttuanti del carico. È funzione  $\cos$ , con ~~freq~~ pulsazione  $2\omega$

Anche  $p_F$  si può esprimere in forma (come è con il  $\cos$ )

$$p_F(t) = E_1 I_1 \cos(2\omega t + \varphi_{e_1} + \varphi_{i_1}) + E_2 I_2 \cos(2\omega t + \varphi_{e_2} + \varphi_{i_2}) + \\ E_3 I_3 \cos(2\omega t + \varphi_{e_3} + \varphi_{i_3})$$

$$P_F = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3$$

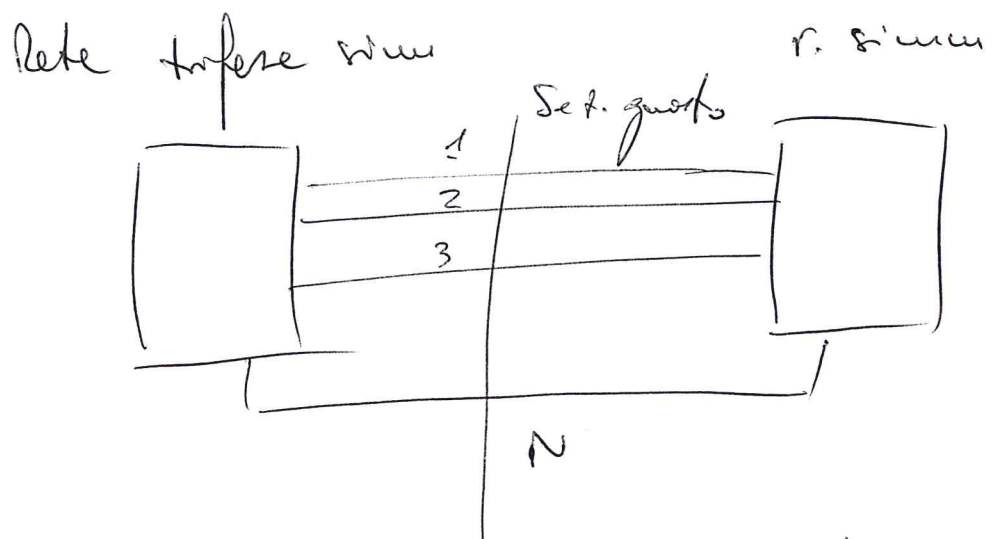
procedendo come per la potenza complessa

$$P_F = 3 \bar{e}_d \bar{I}_d + 3 \bar{e}_i \bar{E}_d + 3 \bar{e}_a \bar{E}_0$$

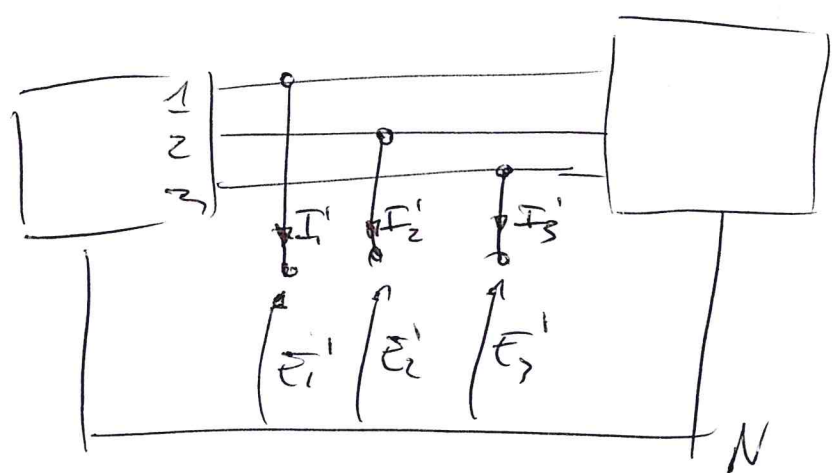
Se il circuito contiene anche

Senza neutro, la  $P_F$  si annulla solo con carichi simmetrici delle stessequenze di quelle delle tensioni di alimentazione.

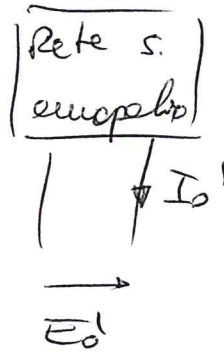
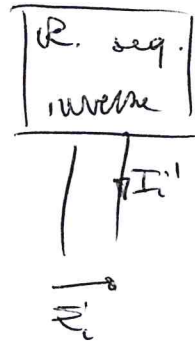
CALCOLO DELLE TENSIONI E CORRENTI DI GUASTO



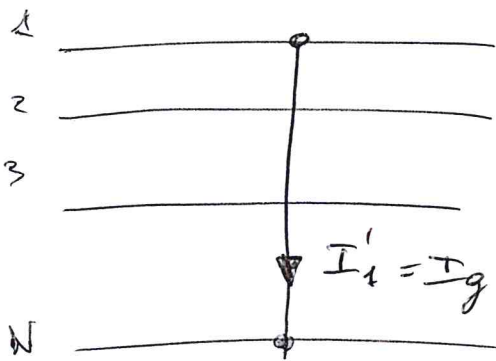
Il guasto rende la rete asimmetrica e perciò non si può applicare il metodo delle reti che seguono direttamente. Si può però rappresentare il guasto imponendo opportune tensioni e correnti nelle reti alla sezione di guasto. Dalla rete guasto si può vedere così come un triplo bipolo simmetrico a cui sono state applicate tensioni o correnti non simmetriche.



Si possono usare le reti manofase di sequenza. Per ognuna componente si può determinare un bipolo equivalente di Thevenin. Senza guasto il triplo bipolo è quindi le reti manofase sono a vuoto e quindi correnti nulle alla parte. I guasti impongono particolari valori alla tensione e correnti che possono essere ottenuti con particolari collegamenti della rete manofase.



• Cortocircuito tre fase e neutro



$$E_1' = 0$$

$$I_1' = I_g$$

$$I_2' = I_3' = 0$$

$$E_1' = E_{d1}' + E_{d2}' + E_{d3}' = 0$$

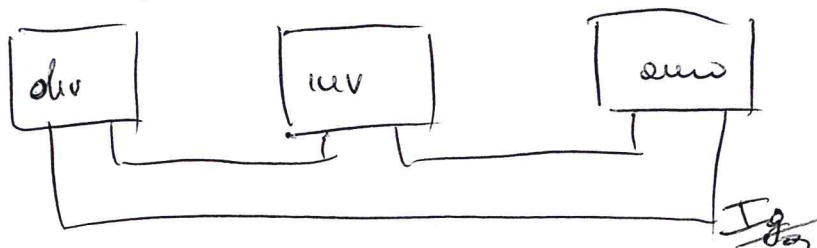
$$I_1' = I_{d1}' + I_{d2}' + I_{d3}' = I_g$$

$$I_{d1}' = \frac{1}{3} (I_1' + 0 + 0) = \frac{1}{3} I_1'$$

$$I_{d2}' = \frac{1}{3} (I_1' + 0 + 0) = \frac{1}{3} I_1'$$

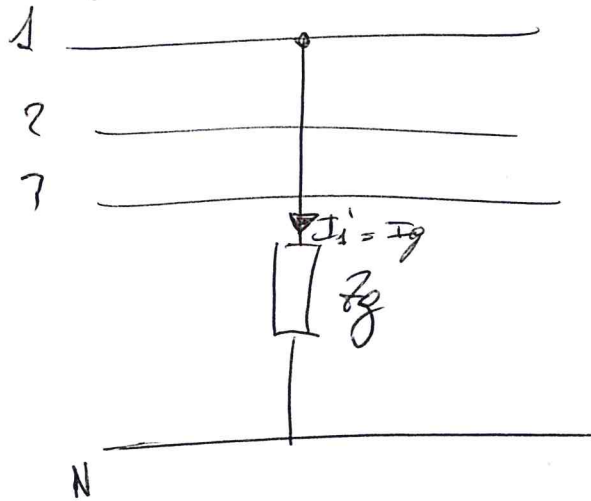
$$I_{d3}' = \frac{1}{3} (I_1' + 0 + 0) = \frac{1}{3} I_1'$$

La somma delle tensioni è zero, perciò la serie è in cortocircuito. Serie perché hanno tutti la stessa corrente, per esse  $\frac{I_g}{3}$





Impedance di questo



$$E_1' = I_1' Z_g = I_g Z_g$$

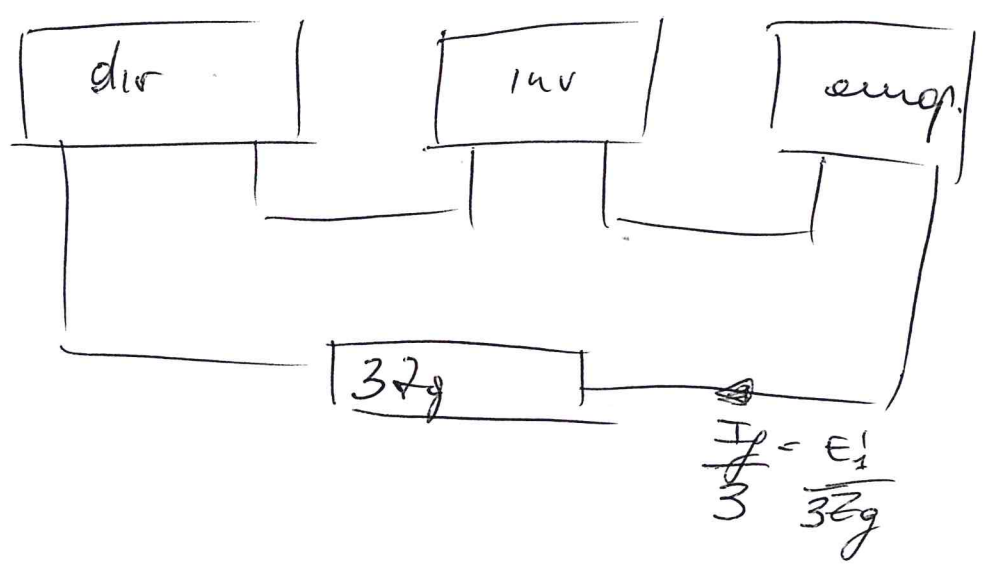
$$I_1' = I_g$$

$$I_2 = I_3 = 0$$

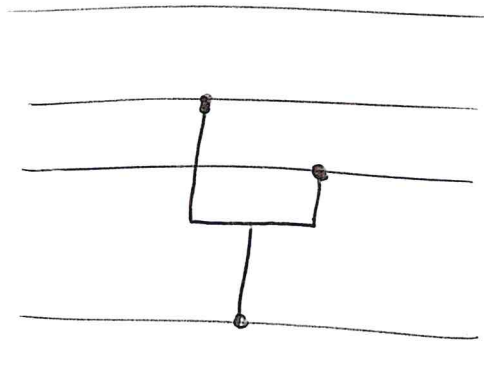
$$E_{d1}' + E_{d2}' + E_{d3}' = E_1' = I_g Z_g$$

$$I_d = \frac{I_g}{3} = I_i = I_o$$

Autore in serie ma con  $Z_g$



Corto circuito tra due fasi e neutro



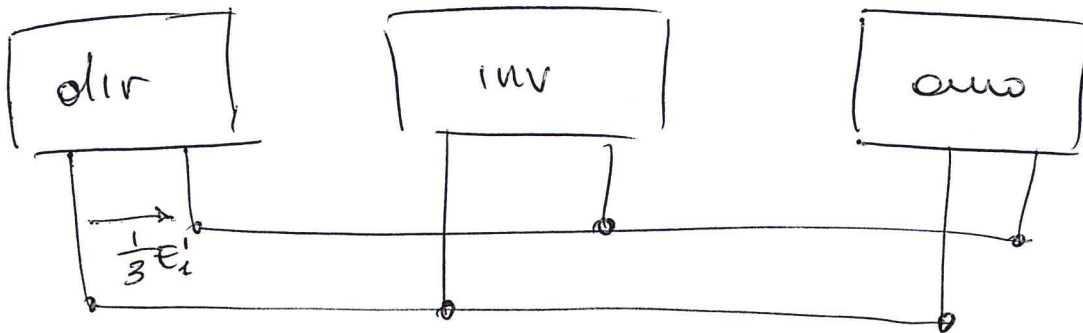
$$E_2' = E_3' = 0$$

$$I_1' = 0$$

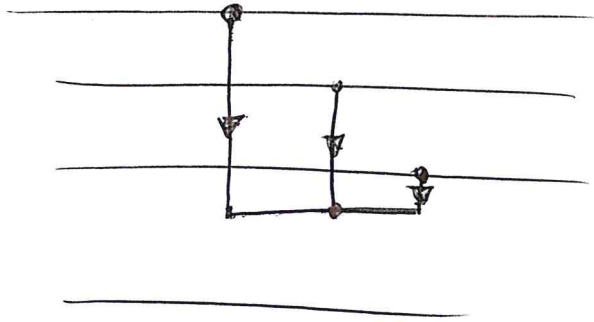
$E_1 = E_d' + E_i' + E_o' \Rightarrow E_d' = E_i' = E_o' = \frac{1}{3} E_1$  *sono in parallelo*

$$E_d' = \frac{1}{3} E_1 + 0 + 0 = E_i' = E_o'$$

$$I_1' = I_d' + I_i' + I_o' = 0$$



Cortocircuito tre 3 foi sem neutro



$$E_1' = E_2' = E_3'$$

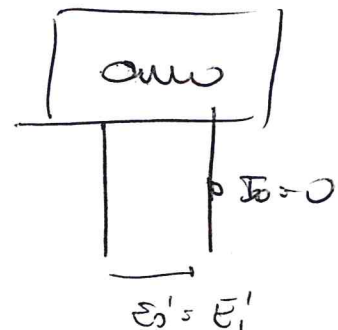
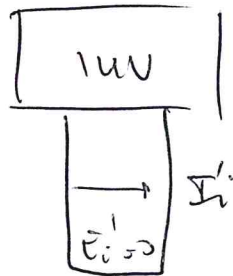
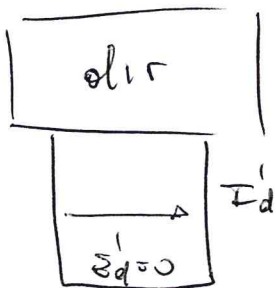
$$I_1' + I_2' + I_3' = 0$$

$$E_d' = \frac{1}{3} (E_1' + \alpha E_2' + \alpha^2 E_3') = \frac{E_1'}{3} (1 + \alpha + \alpha^2) = 0 \text{ curto}$$

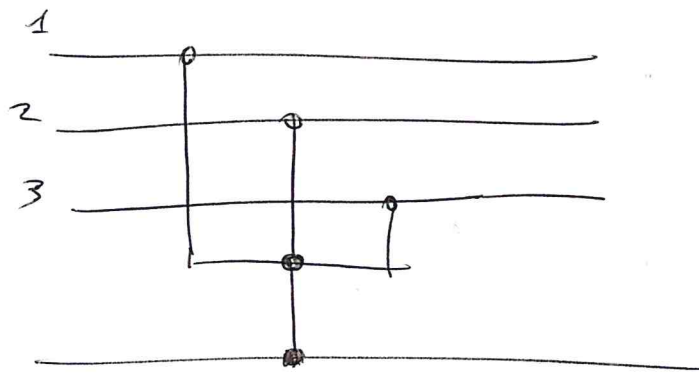
$$E_i' = \frac{1}{3} (E_1' + \alpha^2 E_2' + \alpha E_3') = \frac{E_1'}{3} (1 + \alpha^2 + \alpha) = 0 \text{ curto}$$

$$E_0' = \frac{1}{3} (E_1' + E_2' + E_3') = E_1'$$

$$I_0' = \frac{1}{3} (I_1' + I_2' + I_3') = 0 \quad (\text{aperto, se no corrente})$$

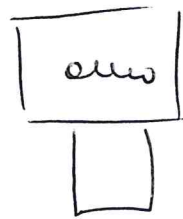
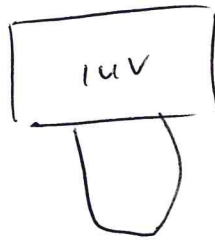
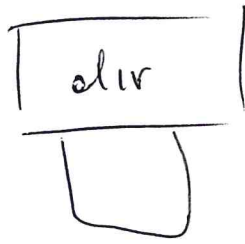


Corbocircuito tra tre fasi e neutro



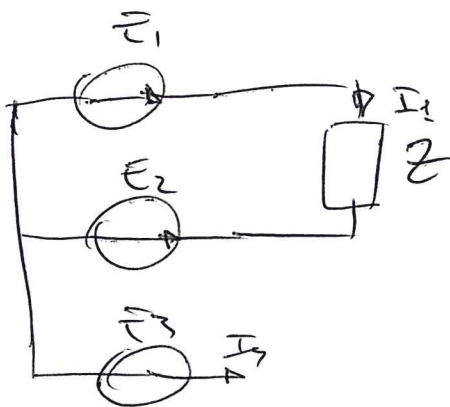
$$E_1 = E_2 = E_3 = 0$$

$$E_d = E_i' = E_s' = 0$$



### EQUILIBRATURA GRICO MONOFASE

Linea trifase simmetrica <sup>diretta</sup> e cui n° collegi in cavo monofase  $Z = R + ix$



$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{Z} = \frac{E_1 (1 - \alpha^2)}{Z}$$

$$I_2 = -I_1$$

$$I_3 = 0$$

One  $\Delta$  componenti simmetriche

$$I_d = \frac{1}{3}(I_1 + \alpha I_2 + \alpha^2 I_3)$$

(after  $\delta^{-1}$ )

$$I_i = \frac{1}{3}(I_1 + \alpha^2 I_2 + \alpha I_3)$$

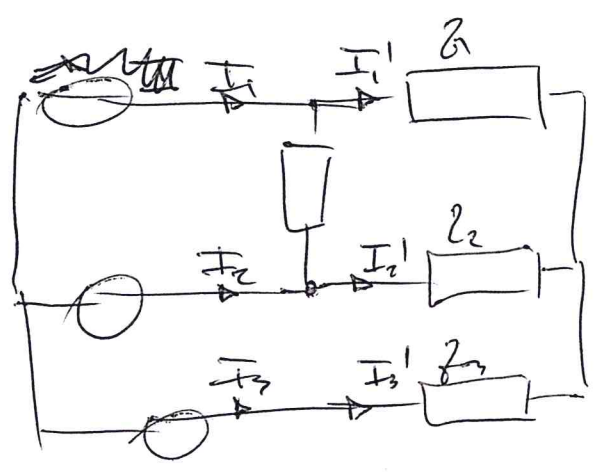
$$I_0 = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3)$$

$$I_d = \frac{1}{3}(1 - \alpha) I$$

$$I_i = \frac{1}{3}(1 - \alpha^2) I$$

$$I_0 = 0$$

Si può equilibrare il carico collegando alla linea una stella di impedenze ( $Z_1, Z_2, Z_3$ ), in modo da cancellare la parte  $I_i$



$$I_1' = -I_i = \frac{1}{3}(\alpha^2 - 1) I$$

$$I_2' = -\alpha I_i = \frac{1}{3}(1 - \alpha) I$$

$$I_3' = -\alpha^2 I_i = \frac{1}{3}(\alpha - \alpha^2) I$$

$$I_1 = I_d = \frac{1}{3}(1 - \alpha) I = I_d$$

$$I_2 = \alpha^2 I_d + \alpha I_i + 0 \neq I_2' = \alpha I_d = \frac{1}{3}(\alpha^2 - 1) I = \alpha^2 I_d$$

$$I_3 = +I_3' = +\frac{1}{3}(\alpha - \alpha^2) I = \alpha I_d$$

Ora, sulla stella impolare ci saranno due componenti.  
 Due dirette e una dovuta ad una componente complessa  
 due spente, il cui centro ~~è~~ ~~stato~~ di fase.

Quindi

~~000000000000~~  
~~000000000000~~  
~~0000~~

$$\begin{cases} E + E_0 = -Z_1 I_i \\ \alpha^2 E + E_0 = -Z_2 \alpha I_i \\ \alpha E + E_0 = -Z_3 \alpha^2 I_i \end{cases}$$

3 eq in 4 incognite  $E_0, Z_1, Z_2, Z_3$

Se moltiplico la 2° per  $\alpha^2$  e la 3° per  $\alpha$

$$E + E_0 = -Z_1 I_i$$

$$\alpha E + \alpha^2 E_0 = -Z_2 I_i$$

$$\alpha E_0 + \alpha^2 E = -Z_3 I_i$$

Se sommo membro a membro

$$E (1 + \alpha + \alpha^2) + E_0 (1 + \alpha^2 + \alpha) - (Z_1 + Z_2 + Z_3) I_i = 0$$

$$(Z_1 + Z_2 + Z_3) I_i = 0 \quad Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0$$

Per risolvere queste relazioni bisogna usare, se a componenti  
 passivi, dei bipoli puramente reattivi.

$$Z_1 = jX_1 \quad Z_2 = jX_2 \quad Z_3 = jX_3 = -j(X_1 + X_2)$$

Quindi

della rel prec e della 1°

$$E_0 = - (E + Z_1 I_i) = - (E + jX_1 I_i)$$

Se lo sostituisco nella 2°

$$\alpha^2 E + E_0 = -Z_2 I_i \alpha$$

$$\alpha^2 E - E - jX_1 I_i = -jX_2 \alpha I_i$$

$$E(\alpha - 1) = I_i (-\alpha X_2 + jX_1)$$

Orò  $I_i = \frac{1}{3} I_1 (\alpha^2 - 1)$  (4 eq)

$$E(\alpha^2 + 1) = \frac{1}{3} I_1 (\alpha^2 + 1) (-j\alpha X_2 + jX_1) = \frac{1}{3} (-j\alpha X_2 + jX_1) \left( \frac{-\alpha^2 + 1}{\alpha} \right)^2$$

$$jX_1 - \alpha jX_2 = \frac{3E}{1 - \alpha^2}$$

Risoluzione

$$X_1 = \sqrt{3} R - X \quad X_2 = -\sqrt{3} R - X \quad X_3 = 2X$$

La terza si è ottenuta da  $Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0$ , ottenute come combinazione delle 3 equazioni

Il tripolo di eq. è dimensionato con una base sinusoidale diretta e ha correnti che sono una base inversa. Assorbire in potenza attiva in reattive, ma solo quella fluttuante opposta al carico.

$$N' = 3E_d \overline{I_d}'^* + 3E_i \overline{I_i}'^* + 3E_o \overline{I_o}'^* = 0$$

$\uparrow$                        $\uparrow$                        $\uparrow$   
 0                      0                      0  
 solo                      solo                      solo corr.  
 corrente                      termine                      termine  
 term. inversa                      term. diretta                      term. inversa

$$P_P' = 3E_d \overline{I_i}' + 3E_i \overline{I_d}' + 3E_o \overline{I_o}' = 3E_d \overline{I_i}' = -3E_i \overline{I_i}'$$

$\uparrow$                        $\uparrow$   
 0                      0

Il carico risultante assorbe la stessa potenza attiva e reattiva del carico monopase, mentre la potenza fluttuante si annulla. ( $3E_i I_i$ )



REGIMI PERIODICI NON SINUSOIDALI

$y(t)$  periodica  $\Rightarrow y(t+KT) = y(t)$

è periodica se  $\exists T$  che soddisfi tale relazione.  
 Il  $T$  più piccolo è detto periodo.

$\exists T \in \mathbb{R}: y(t+KT) = y(t)$

Valore medio

$$Y_{med} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t) dt$$

Valore medio del modulo, se  $Y_{med} = 0$ , allora alternata, allora

$$Y'_{med} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |y(t)| dt$$

Valore efficace RMS

$$Y_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y^2(t) dt}$$

Fattore di forma: rapporto tra valore efficace e valore medio

$$K_p = \frac{Y_{eff}}{Y_{med}}$$

Se alternata, cioè v.m. nullo, si usa v.m. modulo.

$$K_p = \frac{Y_{eff}}{Y'_{med}}$$

Il fattore di cresta è il rapporto tra il valore massimo e quello efficace

$$K_c = \frac{Y_m}{Y_{eff}}$$

funzione sinusoidale

$$Y(t) = Y_M \cos(\omega t)$$

$$v.m. = 0 = \frac{1}{T} Y_{M,eff}$$

$$Y_{M,eff} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |Y_M \cos(\omega t)| dt = \frac{\omega}{2\pi} Y_M \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} |\cos(\omega t)| dt = \frac{Y_M}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(\omega t)| d(\omega t) =$$

$$= \frac{2}{\pi} Y_M \approx 0.637 Y_M$$

Il valore efficace è

$$Y_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_M$$

Per una funzione sinusoidale

$$K_f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.111$$

il fattore di cresta

$$K_c = \frac{Y_M}{\frac{Y_M}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \approx 1.414$$

# Serie Fourier

$f(t)$  periodo di periodo  $T$ , soddisfa le condizioni di Dirichlet:

- Numero finito di discontinuità all'interno di un periodo
- Numero finito di minimi e massimi in un periodo
- L'integrale sul periodo del modulo è finito ( $\in L^1$ )

## Altra

$f(t)$  può essere rappresentata dalla serie di Fourier

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

$\frac{2\pi}{T} = \omega$  = pulsazione fondamentale

$$a_0 = v.m. = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(k\omega t) dt$$

Cas particolari:

$f(t)$  alternata  $\Rightarrow a_0 = 0$

$f(t)$  pari  $\Rightarrow f(t) = f(-t) \Rightarrow b_k = 0 \forall k \Rightarrow$  la serie è solo di coseni

se dispari  $\Rightarrow f(t) = -f(-t) \Rightarrow a_k = 0 \forall k \Rightarrow$  la serie è solo di seni

una funzione dispari è sempre alternata,

$y(t)$  ha simmetria di semionda

$$y(t) = -y\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

$$a_0 = 0 \quad a_k = b_k = 0 \text{ per } k \text{ pari}$$

La serie contiene solo termini di ordine dispari e l'onda è sempre alternata se a simmetria dispari:

La serie di Fourier può anche essere espressa con

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \alpha_k)$$

dove

$$A_0 \neq a_0$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\tan(\alpha_k) = \frac{-b_k}{a_k}$$

$A_0$  è la componente continua di  $y(t)$

$A_k \cos(k\omega t + \alpha_k)$  è la componente fondamentale o prima armonica di  $y(t)$ .

Le  $A_k \cos(k\omega t + \alpha_k)$  è la  $k$ -esima armonica di  $y(t)$ .

Gli esponenti di  $A_k$  e  $\alpha_k$  significano rispettivamente

lo spettro di ampiezze e lo spettro di fase di  $y(t)$ .

Si può ottenere il valore efficace partendo dalla serie di Fourier

$$\begin{aligned} y^2(t) &= \left[ A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \alpha_k) \right]^2 \\ &= A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \cos^2(k\omega t + \alpha_k) + 2A_0 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \alpha_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} A_k A_h \cos(k\omega t + \alpha_k) \cdot \cos(h\omega t + \alpha_h) \end{aligned}$$

Il secondo membro può essere messo nella forma, dato  $\cos^2 \alpha = 1 + \cos(2\alpha)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} \cos(2k\omega t + 2\alpha_k)$$

Tutti i termini oscillanti hanno valore medio nullo e perciò il valore efficace è determinato dai valori costanti

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x^2(t)| dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[ A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} \right] dt}$$

$$= \sqrt{A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{k,eff}^2}$$

Il valore efficace di una grandezza periodica è dato dalla radice quadrata della somma dei quadrati dei valori efficaci delle sue componenti armoniche; Teorema di Parseval.

I generatori periodici possono essere ottenuti collegando in serie generatori che danno tensioni come da serie di Fourier

$$V_G(t) = V_{G0} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{Gk} \cos(k\omega t + \alpha_k) = V_{G0} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{Gk}(t)$$

Stessa cosa per i generatori di corrente, ma intercolati in parallelo.

Circuiti lineari in regime periodico

Si consideri un circuito lineare alimentato da generatori periodici con periodo T. Se il circuito è stabile analiticamente

stabile, a regime tutte le tensioni e correnti sono periodiche con periodo  $T \Rightarrow$  REGIME PERIODICO.

Se i generatori sono rappresentati come indicato in precedenza, si può usare il principio di sovrapposizione e si valuterà separatamente i vari contributi, anche dei generatori alla stessa freq.

Normalmente si possono approssimare le funzioni periodiche usando un numero  $N$  limitato di componenti periodiche.

Le determinazioni della risposta periodica richiedono:

• un esatto in continuo

•  $N$  esatti di risposta a regime stazionarie

Per un impulso lineare in regime periodico, le tensioni e correnti non sono deformate l'una rispetto all'altra se le funzioni  $v(t)$  e  $i(t)$  differiscono per un fattore di proporzionalità e una traslazione nel tempo

$$v(t) = A i(t - t_0)$$

Questo richiede che il impulso ~~non~~ abbia

$$|Z(k\omega)| = \frac{V_R}{I_R} = A$$

$$\arg(Z(k\omega)) = \varphi_R - \varphi_{IR} = -k\omega t_0 + \varphi_R$$

Alla stessa modo, in un circuito con un solo generatore periodico, le forme d'onda della risposta non sono deformate rispetto alle forme d'onda originali se

$$|H(k\omega)| = \frac{V_R}{I_R} = A$$

$$\arg(H(k\omega)) = -k\omega t_0 + \varphi_R$$

Sono sempre soddisfatte con circuiti puramente resistivi, mentre in generale le risposte dei circuiti dinamici sono deformate.

## Componenti non lineari:

Un componente non lineare, se alimentato con tensioni o correnti sinusoidali genera armoniche.

Per fare un esempio con una conduttanza non lineare, si consideri un ipole per l'equazione caratteristica risulta

$$i(t) = f[v(t)]$$

dove  $f$  è una generica funzione non lineare.

Si rappresenta  $f[\ ]$  attraverso uno sviluppo di Taylor

$$f(v) = c_0 + c_1 v + c_2 v^2 + \dots$$

in cui  $v(t)$  sinusoidale

$$v(t) = V_m \cos(\omega t)$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} i(t) &= c_0 + c_1 V_m \cos(\omega t) + c_2 V_m^2 \cos^2(\omega t) + c_3 V_m^3 \cos^3(\omega t) + \dots = \\ &= c_0 + c_1 V_m \cos(\omega t) + \frac{c_2 V_m^2}{2} [1 + \cos(2\omega t)] + \frac{c_3 V_m^3}{4} [3\cos(\omega t) + \cos(3\omega t)] \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Le potenze di ordine  $n$  dispari di  $v$ , danno origine ad armoniche dispari di ordine  $\leq n$

Quelle di ordine  $n$  pari, danno origine ad armoniche pari di ordine  $\leq n$  e a termini costanti. Le correnti e potenze e con pulsazione fondamentale  $\omega$ .

In condizioni di regime, un circuito non lineare alimentato da generatori sinusoidali sovrapposti, o in più in generale periodici con la stessa frequenza o pulsazione fondamentale  $\omega$ , tutte le correnti sono periodiche con la stessa pulsazione fondamentale  $\omega$ .

Le risposte di componenti non lineari, a differenza di lineari, possono contenere anche armoniche non presenti negli ingressi.

In genere, se ~~le~~ gli ingressi sono sinusoidali, le risposte sono periodiche, quindi distorte.

A differenza di circuiti lineari, i circuiti non lineari possono introdurre distorsioni, anche se sono puramente resistivi.

L'entità della distorsione della forma d'onda della tensione o della corrente rispetto all'elemento sinusoidale è rappresentata mediante il THD (Total Harmonic Distortion).

Per una funzione periodica

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega t + \alpha_k)$$

$$\text{THD} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} A_{k\text{eff}}^2}}{A_{1\text{eff}}}$$

← RMS  
armoniche  $\geq$  ordine 2

$$A_{k\text{eff}} = \frac{A_k}{\sqrt{2}}$$

ossia il rapporto tra le ~~potenze~~ potenze quadratiche della somma delle ~~potenze~~ armoniche efficaci quadratiche, diviso la potenza efficace

$$\text{THD} \% = 100 \text{ THD}$$



Valutiamo la potenza erogata da un bipolo in regime periodico

$$v(t) = V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cos(k\omega t + \varphi_{V_k})$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t + \varphi_{I_k})$$

$$\varphi_k = \varphi_{V_k} - \varphi_{I_k}$$

rappresenta lo sfasamento tra tensione e corrente delle  $k$ -esime armoniche della tensione e della corrente.

$$\begin{aligned} p(t) = v(t)i(t) &= V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k I_k \cos(k\omega t + \varphi_{V_k}) \cos(k\omega t + \varphi_{I_k}) + \\ &+ V_0 \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t + \varphi_{I_k}) + I_0 \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cos(k\omega t + \varphi_{V_k}) \\ &+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} V_k I_h \cos(k\omega t + \varphi_{V_k}) \cos(h\omega t + \varphi_{I_h}) \end{aligned}$$

Il secondo termine può essere posto nella forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k I_k}{2} \cos(\varphi_{V_k} - \varphi_{I_k}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k I_k}{2} \cos(2k\omega t + \varphi_{V_k} + \varphi_{I_k})$$

La potenza istantanea ha una parte costante pari a

$$V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k I_k}{2} \cos(\varphi_{V_k} - \varphi_{I_k})$$

e da un termine oscillante a valore medio nullo.

La Potenza Attiva, definita come il valor medio sul periodo della potenza istantanea, coincide con il termine costante.

$$P = V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{V_k I_k}_{P_{eff}} \cos(\varphi_{v_k} - \varphi_{i_k}) = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k$$

$P_{eff}$ , poiché  $\frac{V_k}{\sqrt{2}} = V_{k,eff}$   $\frac{I_k}{\sqrt{2}} = I_{k,eff} \Rightarrow V_{k,eff} \cdot I_{k,eff} = P_{eff} = \frac{V_k I_k}{2}$

Nell'espressione della potenza ci sono solo termini di prodotti tra lo stesso ordine  $k$ .

Quindi la potenza attiva è pari alla somma delle potenze attive associate alle singole componenti sinusoidali.

La potenza apparente è definita, come in regime sinusoidale, come prodotto dei valori efficaci di corrente e tensione

$$S = V_{eff} I_{eff} = \sqrt{\left( I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{k,eff}^2 \right) \left( V_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} V_{k,eff}^2 \right)}$$

~~S~~  $S \geq |P|$  e  $S = P$  solo se è un resistore lineare.

Si può definire il fattore di potenza, cioè il rapporto tra la potenza attiva e la potenza apparente

$$PF = \cos \phi = \frac{P}{S}$$

La definizione di  $\phi$  è puramente convenzionale perché l'angolo  $\phi$  non rappresenta uno sfasamento tra una tensione ed una corrente.

Il valore efficace infatti ha proprietà simili alla norma di un vettore.

Il fattore di potenza è analogo all'angolo tra due vettori

$$PF = \frac{\langle v(t), i(t) \rangle}{\|v(t)\| \cdot \|i(t)\|} = \cos \phi$$

Il valore è 1 solo se i due vettori sono (allineati) o paralleli, cioè legati da una costante scalare.

La quantità

$$P_{NA} = \sqrt{S^2 - P^2}$$

è detta potenza NON attiva.

Si annulla solo se il bipolo è lineare e puramente resistivo.

In questo caso

$$V_R = RI_{eff} \quad P_R = 0 \quad \forall R \quad \Rightarrow \quad S = P = \frac{V_{eff}^2}{R} = RI_{eff}^2$$

Un bipolo generico che assorbe potenza non attiva può essere rappresentato collegando in parallelo un resistore e un bipolo che assorbe la potenza non attiva.

La corrente nel resistore è detta potenza attiva, quella nell'altro bipolo corrente non attiva.

$$i_A(t) = \frac{v(t)}{R_A}$$

$$i_{NA}(t) = i(t) - i_A(t)$$

La potenza istantanea erogata ad  $i_A(t)$  è detta potenza istantanea attiva

$$P_A(t) = v(t) i_A(t) = \frac{v^2(t)}{R_A} = P \frac{v^2(t)}{V_{eff}^2}$$

l'altra è la potenza istantanea non attiva

$$p_{NA}(t) = v(t) i_{NA}(t) = v(t) [i(t) - i_A(t)]$$

Però si ha

$$p(t) = p_A(t) + p_{NA}(t)$$

Il valore medio sul periodo di  $p_A(t)$  è  $\bar{P}$ , coincide con il v.m. di  $p(t)$ . Il v.m. sul periodo di  $p_{NA}$  è  $\bar{p}_{NA} = 0$ .

Ortogonalità delle componenti delle correnti.

$\bar{I}$  valore efficace della corrente e delle componenti attive e non attiva sono legati dalle relazioni

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{I_{A\text{eff}}^2 + I_{NA\text{eff}}^2}$$

$I_{\text{eff}}$  si ha

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [i_A^2(t) + i_{NA}^2(t) + 2i_A(t)i_{NA}(t)] dt$$

$$= I_A^2(t) + I_{NA}^2(t) + \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{\frac{2V_{\text{eff}}}{R_A}}_{\text{circled}} i_{NA}(t) dt =$$

$$= I_A^2(t) + I_{NA}^2(t) + \frac{2}{T R_A} \int_0^T v(t) i_{NA}(t) dt$$

$$= I_A^2(t) + I_{NA}^2(t) + \frac{2}{T R_A} \int_0^T \underbrace{p_{NA}(t)}_0 dt = I_A^2(t) + I_{NA}^2(t)$$

Quindi vale anche

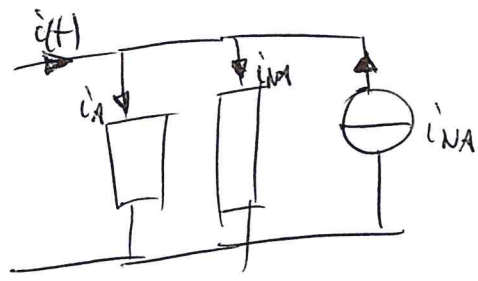
$$P_A = V_{eff} I_{Aeff}$$

$$P_{AN} = V_{eff} I_{NAeff}$$

Compensazione carico induttivo.

Nel caso passivo non sono sufficienti le tecniche usate nel caso sinusoidale. Per ridurre la potenza reale attiva (compensazione del carico) è possibile:

- Usare filtri passivi per eliminare le armoniche
- Collegare in parallelo al carico un impedenza (reattanza) mediante un circuito elettronico, che eroghi una corrente pari alla corrente reale attiva. In questo modo la  $i(t)$  è la corrente attiva



In regime sinusoidale non sinusoidale, si è introdotta la definizione di potenza reattiva. Si definisce come la somma di tutte le potenze reattive delle varie armoniche

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_k V_k}{2} \sin \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k$$

Al contrario del caso sinusoidale, si ha che

$$\sqrt{P^2 + Q^2} \leq S$$

Per chiudere il bilancio della potenza si introduce un ulteriore termine, detto potenza deformante.

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

$D$  si annulla se

$$\frac{V_R}{I_R} = \frac{V_h}{I_h} \quad \text{non } f_R = f_h \quad \text{non } \forall h, R$$

e quindi in particolare nel caso di un resistore lineare, poiché la tensione e la corrente non sono deformate l'una rispetto all'altra.

Le definizioni di potenza reattiva e potenza deformante sono poco utilizzabili nella pratica, dove si tende a regimare perfettamente sinusoidalmente.  $Q$  si annulla anche se i vari  $Q$  si annullano tra di loro, non solo se sono tutti nulli.

La  $D$  non risulta strettamente collegata alla deformazione della corrente rispetto alla tensione, ma può annullarsi anche in presenza di deformazioni o anche  $\neq 0$  anche in presenza di correnti e tensioni solo sfasate tra loro.

### • LINEE CON CARICHI NON LINEARI

Con  $\rho$  come una linea, in generale la tensione e corrente non obbediscono. Se le condutture lungo la linea sono trascurabili, la tensione può essere considerata sinusoidale.

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$$

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega t + \varphi_{i,k})$$

$$\text{ovvero } I_0 = 0$$

Se la tensione è sinusoidale, tutte le armoniche superiori della corrente non danno contributo alla potenza attiva, che vale

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi_1$$

$$\varphi_1 = \varphi_v - \varphi_{i,1}$$

Il valore efficace nella linea e quindi la potenza dissipata dipende anche dalle armoniche superiori. La corrente nella linea sommate all'armonica dello sfasamento e della componente coseno superiore della corrente.

Il fattore di potenza può essere espresso come

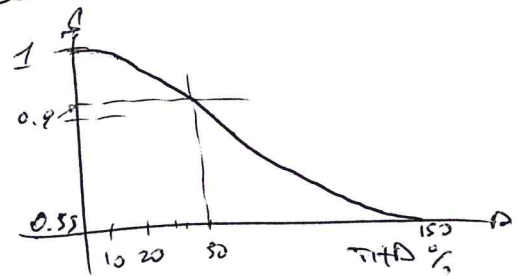
$$\cos \phi = \frac{P}{S} = \frac{V_{eff} I_{eff} \cos \phi_1}{V_{eff} I_{eff}} = \cos \theta \cos \phi_1$$

Il fattore  $\cos \phi_1$  è l'angolo dello sfasamento tra tensione e corrente detto fattore di potenza, qui è chiamato fattore di sfasamento. Il  $\cos \theta$  è detto fattore di distorsione

ed è dato da 
$$\cos \theta = \frac{I_{1eff}}{I_{eff}}$$

Questo è sempre tra 0 e 1, perciò rappresentabile come coseno di un angolo, detto angolo di distorsione, con la relazione

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + THD_I^2}}$$



In fatti con  $I_0 = 0$

$$THD_I = \sqrt{\frac{I_{eff}^2 - I_{1eff}^2}{I_{1eff}^2}} \Rightarrow THD_I^2 = \frac{1}{\cos \theta} - 1$$

Se la corrente è sinusoidale, resta la potenza reattiva dovuta solo allo sfasamento tra la tensione e la componente fondamentale della corrente

$$Q = V_{eff} I_{1eff} \sin \phi_1$$

con il significato analogo di quello in sinusoidale e potenza deformante, si ha solo con la presenza di armoniche

milha corrente

$$\Delta = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = V_{\text{eff}} \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_{k\text{eff}}^2}$$

Por nome

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \psi_1$$

$$Q = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \psi_1$$

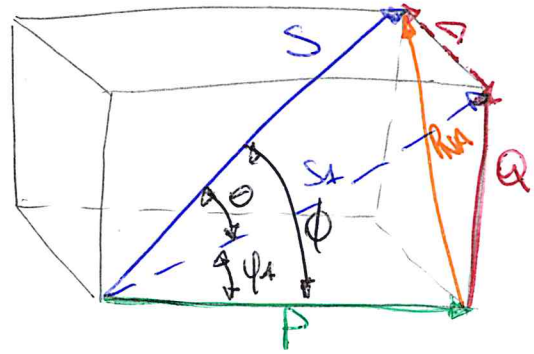
$$\Rightarrow P = S_1 \cos \psi_1$$

$$S_1 = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \sqrt{P^2 + Q^2 + \Delta^2}$$

$$S_1 = S \cdot \frac{I_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = S \cos \theta$$

$$P = S \cos \theta \cos \psi_1 = S \cos \phi$$





# RICHIANI DI ELETTROMAGNETISMO

EQ CONTINUITA'

LEGGI - AMP. MAX

LEGGI FARADAY

LEGGI CAUSE ELETTRICA

LEGGI GAUSS MAGNETICA

LOCALI

$$\nabla \cdot \underline{J} = - \frac{d\rho_c}{dt}$$

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \underline{D} = \rho_c$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

INTEGRARE

superficie chiusa circuitazione

$$\oint_S \underline{J} \cdot d\underline{s} = - \frac{d}{dt} \int_V \rho_c dV$$

$$\oint_e \underline{H} \cdot d\underline{l} = \int_S \underline{J} \cdot d\underline{s} + \frac{d}{dt} \int_S \underline{D} \cdot d\underline{s}$$

$$\oint_e \underline{E} \cdot d\underline{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \underline{B} \cdot d\underline{s}$$

$$\oint_S \underline{D} \cdot d\underline{s} = \int_V \rho_c dV$$

$$\oint_S \underline{B} \cdot d\underline{s} = 0$$





# CIRCUITI MAGNETICI

Condizioni stazionarie: grandezze sono costanti nel tempo

Condizioni quasi stazionarie: quando le variazioni delle grandezze nel tempo, sono sufficientemente lente da consentire di trascurare le componenti di spostamento, rispetto alle condizioni.

$$\left| \frac{dA}{dt} \right| \ll |J|$$

In queste condizioni si descrive il campo attraverso le equazioni

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J}$$
$$\nabla \times \underline{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$
$$\nabla \cdot \underline{D} = \rho$$

Considerando solo i circuiti magnetici

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J}$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

o anche

$$\oint_{\Gamma} \underline{H} \cdot d\underline{l} = \int_S \underline{J} \cdot d\underline{S}$$

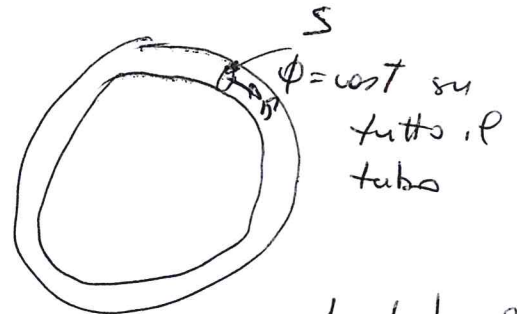
$$\oint_S \underline{B} \cdot d\underline{S} = 0$$

Si ricorda per le relazioni, per i materiali <sup>isotropi</sup> lineari e non lineari  
lineari:  $\underline{B} = \mu \underline{H}$  non lineari:  $\underline{B} = \underline{B}(\underline{H})$

Il vettore  $\underline{B}$  è solenoidale, perciò i tubi di flusso non possono avere sezioni terminali ma devono essere chiusi, eventualmente all'infinito.

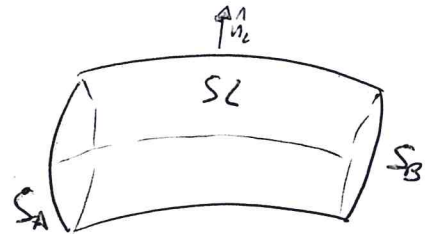
Il flusso di  $\underline{B}$  attraverso ogni sezione trasversale di un tubo di flusso è sempre lo stesso valore

$$\phi = \int_S \underline{B} \cdot d\underline{S}$$



Questo può essere dimostrato, considerando un tratto di tubo di flusso di  $\underline{B}$  delimitato da due superfici trasversali  $S_A$  e  $S_B$ .

Se come  $\underline{B}$  è solenoidale, il flusso su una superficie chiusa è nullo



$$\oint_{S_T} \underline{B} \cdot d\underline{S} = \int_{S_A} \underline{B} \cdot d\underline{S} + \int_{S_B} \underline{B} \cdot d\underline{S} + \int_{S_C} \underline{B} \cdot d\underline{S} = 0$$

Si consideri poi che le linee di campo sono tangenti al tubo di flusso, perciò  $\int_{S_C} \underline{B} \cdot d\underline{S} = 0$ . Prendendo il  $d\underline{S}$  per  $S_A$  con direzione verso interno, invece che esterno, cioè un flusso entrante

$$\int_{S_A} \underline{B} \cdot d\underline{S}_A = \int_{S_B} \underline{B} \cdot d\underline{S}_B$$

Avevamo preso sezioni  $S_A = S_B$  arbitrarie, questo ha lo stesso valore su tutte le superfici.

Si può quindi, data la geometria, definire un potenziale scalare magnetico.

Si prende un tubo di flusso delimitato da due superfici  $S_A$  e  $S_B$  ortogonali alle linee di flusso.  
 Il tubo si trova in un mezzo lineare isotropo. Se la densità di corrente nel tubo è nulla, si ha

$$\nabla \times \underline{H} = 0$$

come la regione è semplicemente connessa, si può definire un potenziale scalare magnetico  $\psi$  [in Amp]

$$\underline{H} = -\nabla\psi$$

$S_A$  e  $S_B$  sono ortogonali anche alle linee di campo di  $\underline{H}$ , perciò sono due superfici equipotenziali.

Si può definire una funzione magnetica tra due superfici del tubo di flusso come

$$\psi_{AB} = \psi(A) - \psi(B) = \int_{\Gamma} \underline{H} \cdot d\underline{l}$$

cioè sulla linea  $\Gamma$  qualunque, tra due punti A e B qualunque,  $\Gamma$  deve essere contenuta nel tubo di flusso.

Si definisce RILUTTANZA [ $H^{-1}$ ] del tubo di tubo <sup>di flusso</sup> compreso tra le sup. equipot.  $S_A$  e  $S_B$ , il rapporto tra la funzione magnetica  $\psi_{AB}$  e il flusso di induzione magnetica  $\phi$  (su  $S_A = S_B$ )<sub>equiv.</sub>

$$R_{AB} = \frac{\psi_{AB}}{\phi} = \frac{\int_{\Gamma_{AB}} \underline{H} \cdot d\underline{l}}{\int_{S} \underline{B} \cdot d\underline{S}}$$

Il reciproco della riluttanza è detto permeanza e si misura in Henry

$$P_{AB} = \frac{1}{R_{AB}} = \frac{\Phi}{\Psi_{AB}} = \frac{\int \underline{B} \cdot d\underline{S}}{\int \underline{H} \cdot d\underline{\ell}}$$

La riluttanza e permeanza non dipendono da  $B$  ed  $H$ , ma solo della geometria del tubo di flusso e della permeabilità del materiale.

Da ciò deriva la legge di Hopkinson: la femme magnetica tra i poli terminali di un tubo di flusso di  $\underline{B}$  e il flusso magnetico che lo attraversa sono legate dalla relazione (analoga alla legge di Ohm)

$$\Psi_{AB} = R_{AB} \Phi$$

$$\Rightarrow \Phi = P_{AB} \Psi_{AB}$$

Per calcolare  $R_{AB}$  è conveniente fare considerare:

$\underline{F}$  con una linea di campo  $\left( \frac{d\underline{S}}{ds} = \hat{n} \right) = \left[ \hat{t} = \frac{d\underline{\ell}}{d\ell} \right]$

$S$  con una superficie equipotenziale  $\underline{B}, \underline{H} \parallel \hat{n}$

Considerando che il flusso di  $\underline{B}$  ha lo stesso valore in tutte le sezioni trasversali, si può esprimere  $R_{AB}$

$$R_{AB} = \frac{\Psi_{AB}}{\Phi} = \frac{\int_0^{\rho} H(u) du}{\int \underline{B} \cdot d\underline{S}} = \int_0^{\rho} \frac{H(u)}{\int \underline{B} \cdot d\underline{S}} du$$

int. lungo  $\underline{B}$  (B ds)       $\int \underline{B} \cdot d\underline{S}$  su  $S$  per  $\hat{n}$  nel tubo conduttore

dove  $w$  è l'ossatura curvilinea lungo  $r$  e  $l$  è la lunghezza di.

Considerando un tubo filiforme, cioè con area trasversale molto piccola, si può assumere che l'induzione magnetica  $\underline{B}$  e la permeabilità  $\mu$  sono uniformi sulla superficie  $S$ .

Però se  $\underline{B}$  che  $\mu$ , dipendono solo da  $r \Rightarrow$

$$R_{AB} = \int_0^l \frac{H(r)}{\int_{S(r)} \underline{B} \cdot d\underline{S}} dr = \int_0^l \frac{H(r) dr}{\int_{S(r)} \mu(r) H(r) dr} = \int_0^l \frac{dr}{\mu(r) A(r)}$$

Se la permeabilità e la sezione sono costanti lungo tutto  $r$ , si ha

$$R_{AB} = \frac{l}{\mu A}$$

l'espressione precedente

$$R_{AB} = \int_0^l \frac{dr}{\mu(r) A(r)}$$

vale anche in tutti quei casi in cui la permeabilità e l'induzione magnetica sono uniformi <sup>lungo l'asse del tubo</sup> lungo il tubo, ovvero dipendono solo da  $r$ . In alcuni casi, per ragioni di simmetria, si può riconoscere che  $\underline{B}$  deve essere ~~uniforme~~ uniforme per delle simmetrie del sistema.

Un tubo non filiforme può però essere suddiviso in  $n$  filini filiformi le cui sezioni trasversali sono contenute nelle superfici  $S_1$  e  $S_2$ . Al ~~caso~~ ~~di~~ tubo di filino elementare è associato il flusso  $\phi_k$ . Per tutti i tubi di filino la tensione magnetica è pari alla differenza di potenziale  $\psi_{AB}$  tra  $S_1$  e  $S_2$ .

A ciascuna elementare si può trovare  $R_R = \frac{\Psi_{AB}}{\phi_R}$

Il flusso totale è dato da

$$\phi = \sum_R \phi_R = \sum_R \frac{\Psi_{AB}}{R_R}$$

La resistenza totale è quindi

$$R_{AB} = \frac{\Psi_{AB}}{\phi} = \frac{\Psi_{AB}}{\Psi_{AB} \sum_R \frac{1}{R_R}} = \frac{1}{\sum_R \frac{1}{R_R}}$$

Dato che gli  $R_R$  dipendono solo dalle configurazioni geometriche e delle permeabilità, lo stesso vale anche per  $R_{AB}$

Un tubo di flusso chiuso, costituisce un circuito magnetico chiuso. Pensando anche a strutture complesse con tubi di flusso riempiti per ogni tubo di flusso chiuso, la corrente concatenata deve essere diversa da zero, infatti se non a zero, sarebbe

$$\oint_{\Gamma} \underline{H} \cdot d\underline{l} = 0 \Rightarrow \underline{H} = 0 \Rightarrow \underline{B} = 0$$

le linee indicherebbero la direzione e dove il campo è più forte ci sono più linee

Legge di Hopkinson per un circuito magnetico.

In presenza di correnti concatenate, dalla legge di Ampere si ha

$$R = \frac{\oint_{\Gamma} \underline{H} \cdot \hat{t} d\underline{l}}{\int_S \underline{B} \cdot \hat{t} dS} = \frac{i_c}{\phi}$$



Per un tubo di flussio la legge di Hopkinson assume la forma

$$R\phi = i_c$$

In particolare, se il tubo è caratterizzato con un avvolgimento composto da  $N$  spire e percorso da una corrente  $i$ , si ha

$$R\phi = Ni$$

La corrente caratterizzata è detta forza magnetomotrice (f.m.m.) o un ruolo analogo alla f.e.m. in un circuito elettrico.

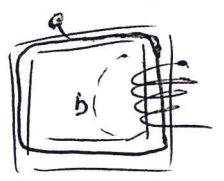
Per il campo magnetico stazionario, è possibile sviluppare un modello circuitale analogo a quello definito per i circuiti elettrici

A partire dalle equazioni fondamentali si possono ottenere leggi analoghe a quelle di Kirchhoff per i circuiti elettrici. Si può quindi studiare un circuito equivalente.

Il modello circuitale è utilizzabile solo quando l'andamento dei tubi di flussio è noto a priori, come in sistemi con macchine o circuiti magnetici costituiti da materiali con permeabilità molto elevata rispetto a quella dei mezzi circostanti.

Dal punto di vista magnetico, non esiste l'equivalente degli isolanti, le differenze possono essere nell'ordine di massimo 5 o 6 ordini di grandezza.

Ad esempio, circuito con avvolgimento



Circolo due flussi,  $\mu_r \gg \mu_0$

Se sono due flussiiferi

$$\phi_A = \frac{Ni}{R_A} \Leftrightarrow R_A = \frac{Ni}{\phi_A} \quad R_B = \frac{Ni}{\phi_B} \Rightarrow \phi_B = \frac{Ni}{R_B}$$

Se come il tratto di  $a$  ha  $\mu_0 \Rightarrow \mu_0 \Rightarrow$

$$R_a \ll R_b$$

però si può trascurare il circuito  $b$ , cioè i circuiti feroci del magnetico. Si può considerare il materiale ad elevato permeabilità come tubo di flusso di  $\underline{B}$ .

• legge Kirchhoff per i flussi magnetici

La somma algebrica dei flussi dei rami che attraversano una superficie chiusa è nulla.

Cioè la somma dei flussi in un nodo è nulla.

È conseguenza del fatto che  $\underline{B}$  è solenoide, cioè

$$0 = \oint_S \underline{B} \cdot \hat{n} \, dS = \sum_k \pm \oint_{\Sigma_k} \underline{B} \cdot \hat{n}_k \, dS = \sum_k \pm \Phi_k = 0$$

• legge Kirchhoff per le tensioni magnetiche

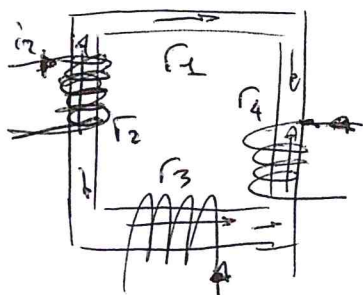
La somma algebrica delle tensioni magnetiche dei rami di una maglia è uguale alle forze magnetomotrici coincidenti con la maglia stessa.

Si ottiene dalla legge di Ampere

$$i_c = \oint_{\Gamma} \underline{H} \cdot \hat{t} \, dl = \sum_k \int_{\Gamma_k} \underline{H} \cdot \hat{t} \, dl = \sum_k \oint \pm \mathcal{F}_k = \sum_k \pm R_k \Phi_k$$

Se la  $i_c$  è prodotta da una serie di avvolgimenti

$$\sum_k \pm R_k \Phi_k = \sum_k \pm N_k i_k$$



$$-\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 - \Psi_4 = -N_2 i_2 + N_3 i_3 + \dots$$

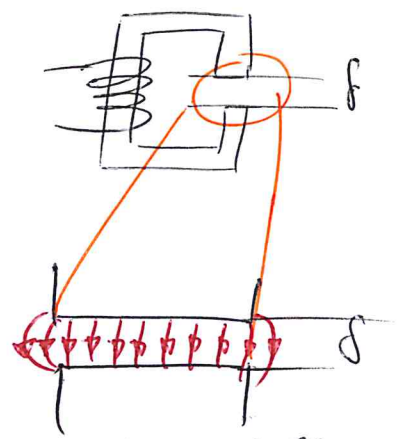
Per il verso negli avvolgimenti si usa la regola della mano destra.  
 Nel secondo membro si mette più se il verso è concorde.  
 Si può fare uno schema di analogia tra circuiti elettrici e circuiti magnetici

| ELE   | MAG  |
|---|--|
| R   | R  |
| i   | $\phi$   |
| v   | $\psi$   |
| $\sum_{k} i_k R_k = 0$                        | $\sum_{k} \pm \phi_k = 0$                        |
| $\sum_{k} \pm R_k i_k = \sum_{k} \pm i_k R_k$ | $\sum_{k} \pm R_k \phi_k = \sum_{k} \pm N_k i_k$ |

Circuito con trafilati.

Alcune volte il circuito può avere dei trafilati, cioè delle interruzioni del circuito ad alta permeabilità.

Se il trafilato ha  $\delta$  piccolo, non alterano le linee di flusso, così per i effetti di bordo sono trascurabili.



È molto diverso da un condensatore: qui vuole neppure nel  $\mu \gg \mu_0$  per tornare a ridursi, lì vuole andare dallo polo opposto in ogni caso. Con trafilato grande aumentano qui i richiami, e con

Se dovremo avere un'analisi accurata gli effetti di bordo, bisogna prendere una superficie maggiore, empiricamente con un bordo pari al triplo  $S' > 3S$ .

Poniamo nuovo di molto l'entità dei flussi magnetici dato che la induttanza nel trifase può essere molto elevata.

Spero i tratti al di sotto per poniamo con i termini ed essere approssimati con condutture ideali nel circuito equivalente.

Coefficienti di auto e mutua induttanza

Si considerino due circuiti elettrici  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , percorsi delle correnti  $i_1$  e  $i_2$  e immersi in un mezzo lineare isotropo. Le equazioni che descrivono il campo magnetico generato dalle due correnti sono lineari.

I flussi concatenati con i due avvolgimenti sono funzioni lineari delle correnti  $i_1$  e  $i_2$ .

Le espressioni dei flussi sono del tipo

$$\Phi_{c1} = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_{11}i_1 + M_{12}i_2$$

$$\Phi_{c2} = \Phi_{21} + \Phi_{22} = M_{21}i_1 + L_{22}i_2$$

I coefficienti  $L_{11}$  e  $L_{22}$  sono detti coefficienti di auto-induttanza o (auto) induttanze dei circuiti  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  [Henry].

$M_{12}$  e  $M_{21}$  sono detti coefficienti di mutua induttanza o mutue induttanze di  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  [H].

Si dimostra che è sempre verificata

quindi si può parlare di un unico coefficiente di mutua induttanza tra i due circuiti.

$$L_{11} = \left. \frac{\Phi_{c1}}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

$$L_{22} = \left. \frac{\Phi_{c2}}{i_2} \right|_{i_1=0}$$

Il coefficiente di mutua induzione

$$M = \frac{\Phi_{c2}}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{\Phi_{c1}}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

Possiamo per essere generalizzare al caso di ~~un~~ circuiti con

$$\Phi_{c1} = L_1 i_1 + M_{12} i_2 + \dots + M_{1N} i_N$$

$$\Phi_{c2} = M_{21} i_1 + L_2 i_2 + \dots$$

$$\Phi_{c\dots}$$

$$\Phi_{cN} = M_{N1} i_1 + \dots + L_N i_N$$

dove

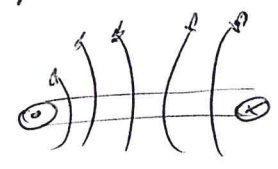
$$L_k = \frac{\Phi_{ck}}{i_k} \Big|_{i_j=0 \text{ } \forall j \neq k}$$

$$M_{kj} = \frac{\Phi_{ck}}{i_j} \Big|_{i_n=0 \text{ } \forall n \neq j}$$

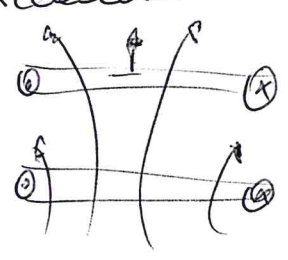
Si ha  $M_{nk} = M_{kn}$

Il coefficiente di autoinduzione è sempre positivo.

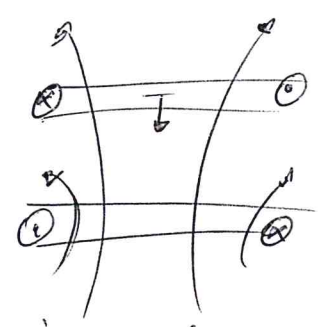
$$i_1 > 0 \Rightarrow \Phi_{11} > 0 \Rightarrow L_1 > 0$$



Il coefficiente di mutua induzione può essere positivo o negativo a seconda di come sono definiti i versi di riferimento



$$i_1 > 0 \quad \Phi_{21} > 0 \\ M > 0$$



$$i_1 > 0 \quad \Phi_{21} < 0 \\ M < 0$$

Esempio magnetico di un circuito filiforme

↳ considero un circuito formato da un conduttore filiforme  $\Gamma$  con sezione  $\Delta_S$  e conducibilità  $\sigma$ , sede di un campo impresso  $\underline{E}_i$  che agisce tra le sezioni  $A$  e  $B$ .

↳ assume che per  $t=0$ ,  $\underline{E}_i$  e quindi lo corrente e il campo magnetico sono nulli.

Mediante un processo quasi stazionario, nell'intervallo  $[t_0, t_0]$  la corrente viene portata che zero fino al valore  $i_0$ .

Il lavoro compiuto nell'intervallo delle forze del campo impresso  $\underline{E}$

$$\int_0^{t_0} \left( \int_{A\Gamma}^B \underline{E}_i \cdot \underline{j} \Delta_S d\ell \right) dt = \int_0^{t_0} e i dt$$

dove  $e = \int_{A\Gamma}^B \underline{E}_i \cdot \underline{j} d\ell \quad i = \int \underline{j} \cdot \underline{1} \Delta_S$

usando

$$\underline{j} = \sigma(\underline{E} + \underline{E}_i) \quad \Rightarrow \quad \underline{E}_i = \frac{\underline{j}}{\sigma} - \underline{E}$$

e dalla legge di Faraday

$$\oint \underline{E} \cdot \underline{1} d\ell = - \frac{d}{dt} \int_S \underline{b} \cdot \underline{n} dS$$

si ha

$$\int_{A\Gamma}^B \underline{E}_i \cdot \underline{1} d\ell = \oint \frac{\underline{j}}{\sigma} \cdot \underline{1} \frac{\Delta_S}{\Delta_S} d\ell + \frac{d}{dt} \int_S \underline{b} \cdot \underline{n} dS$$

e può essere espressa come

$$e = R i + \frac{d\phi}{dt} \quad \text{dove } R = \oint \frac{d\ell}{\sigma \Delta_S}$$

Il lavoro compiuto dal campo magnetico in un tempo  $t_0$  quindi

$$\int_0^{t_0} e i dt = \int_0^{t_0} R i^2 dt + \int_0^{\phi_0} i d\phi$$

Il primo è un'energia dissipata per effetto Joule.

Se la relazione tra  $i$  e  $\phi$  è lineare (casi puro di induttori), l'ultimo integrale dipende solo dal valore del flusso all'istante  $t_0$  e rappresenta l'energia accumulata nel campo magnetico.

Corrisponde al lavoro compiuto dal campo magnetico per creare il campo magnetico prodotto dalla corrente  $i_0$  e viene restituito completamente se la corrente è riportata a zero.

In un nastro lineare e isotropo

$$W_M = \int_0^{\phi_0} \frac{\phi}{L} d\phi = \frac{1}{2} \frac{\phi_0^2}{L} = \frac{1}{2} i_0^2 \phi_0 = \frac{1}{2} L i_0^2$$

Nel caso di un sistema costituito da  $N$  circuiti filiformi l'espressione dell'energia magnetica è

$$W_M = \sum_{k=1}^N \int_0^{\phi_k} i_k d\phi_k$$

Se il nastro in cui il campo magnetico in sede è lineare e isotropo si ha

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N i_k^2 L_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N L_k i_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N M_{ki} i_k i_i$$

Con solo due fili

$$W_M = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M_{12} i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

l'energia può anche essere espressa in funzione dei campi  $\underline{B}$  e  $\underline{H}$

da 
$$W_M = \int_0^{\phi_0} i d\phi$$

Il flusso concatenato è

$$\phi = \int_S \underline{B} \cdot d\underline{S} = \int_S B \hat{t} \cdot \hat{n} dS$$

l'elemento di area  $dS$  individua un tubo di flusso di  $\underline{B}$  concatenato con il circuito.

Si può esprimere la corrente  $i$  in funzione di  $\underline{H}$  applicando la legge di Ampere ad una linea di campo  $\gamma$  di  $\underline{B}$  coincidente con l'asse del tubo di flusso (se il mezzo è isotropo  $\gamma$  è anche una linea di campo di  $\underline{H}$ )

$$i = \oint_{\gamma} \underline{H} \cdot d\underline{l} = \oint_{\gamma} H dl$$

Con le espressioni di  $i$  e  $\phi$  appena trovate si può scrivere, considerando che il volume del tubo infinitesimo è  $dV = dl \hat{t} \cdot \hat{n} dS$

$$i d\phi = \oint_{\gamma} H dl \int_S d B \hat{t} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{S, \gamma} H dB dl \hat{t} \cdot \hat{n} dS = \int_{\tau_c} H dB d\tau$$

Quindi

$$W = \int_0^{\phi_0} i d\phi = \int_{\tau_c} \int_0^{B_0} H dB d\tau$$

Lo  $\tau_c$  è la regione in cui  $\underline{B}$  e  $\underline{H}$  sono diversi da zero.

Vala anche per i mezzi non lineari, ma la relazione tra  $\underline{B}$  e  $\underline{H}$  deve essere biunivoca, cioè senza isteresi.



Per un mezzo lineare e isotropo  $\underline{B} = \mu \underline{H}$  e si ha

$$W_M = \int_{V_c} \frac{1}{2} \mu H^2 dV = \int_{V_c} \frac{1}{2} H_0 B_0 dV = \int_{V_c} \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu} dV$$

Si può dimostrare che queste espressioni valgono per un circuito polifase, vale a dire anche per distribuzioni di corrente più generali.

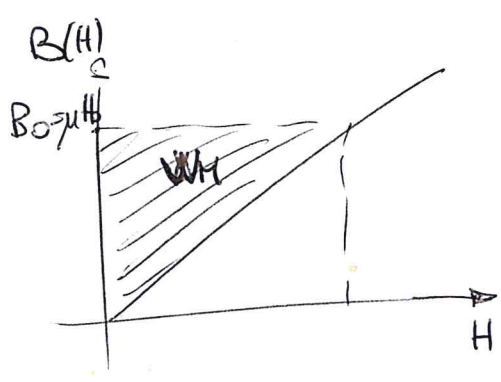
L'espressione

$$\frac{dW_M}{dV}$$

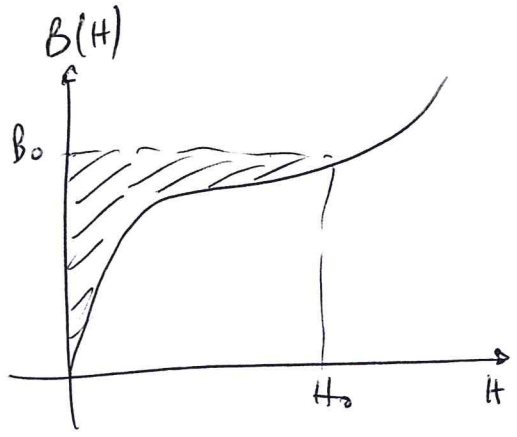
può essere interpretata come elemento di energia del campo magnetico la quantità infatti

$$w_M = \frac{dW_M}{dV} = \int_0^{B_0} H dB$$

una rappresenta l'area compresa tra la curva  $B(H)$  e l'asse delle ordinate

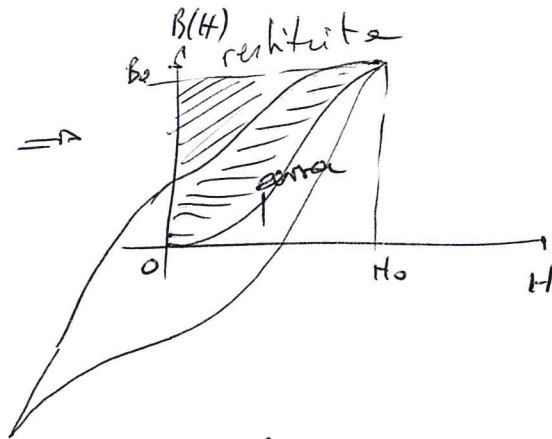
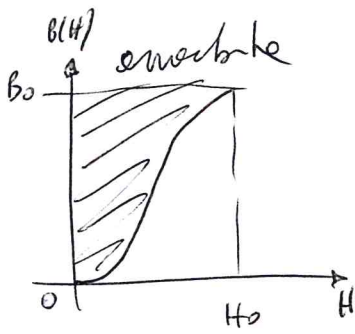


METODO LINEARE



METODO NON LINEARE

Si possono però definire le perdite per istanti. l'energia usata per creare il campo è mezza di quella richiesta se si la corrente  $i$ , e quindi  $H$ , sono rimpetati a zero



l'energia dissipata è

$$W_D = \int_0^{B_0} H dB + \int_{B_0}^0 H dB$$

Se viene fatto ruotare periodicamente, ed equivo la perdita sarà

$$w_D = \oint H dB$$

corrisponde all'energia dissipata in calore ed è equivalente all'area all'interno della curva di isteresi.

### FORZA È UN ELETTROMAGNETISMO

F = forza sull'ancora dovuta all'elettromagnete

F<sub>e</sub> = forze esterne necessarie per tenere l'ancora in equilibrio

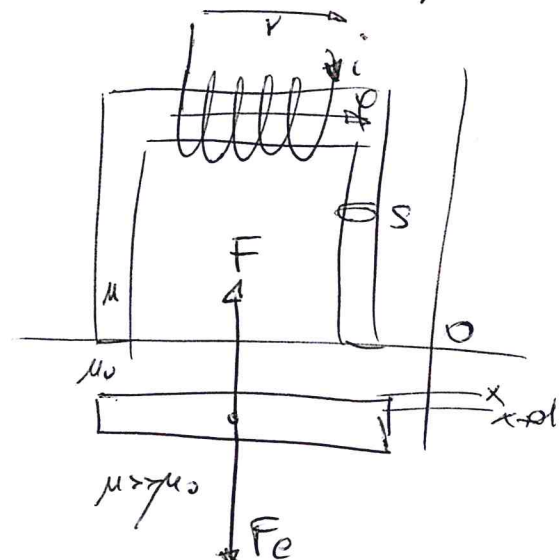
Si può volere F ed F<sub>e</sub> applicando uno spostamento virtuale dx (nella direzione di F<sub>e</sub>) all'ancora.

Il lavoro

$$dL_m + dL_e = dW_{ext}$$

dL<sub>m</sub> = lavoro meccanico di F<sub>e</sub>

dL<sub>e</sub> = lavoro elettrico dei pesi esterni = V idt = idφ



$\phi = N\varphi =$  flusso concatenato  
 $dW_M =$  variazione energia magnetica

Si ha quindi

$$F_e dn + i d\phi = dW_M$$

Si può avere conduttore in trasformazione infinitesimale  
 nelle quali il flusso viene mantenuto costante ( $d\phi = 0$ )

$$F = F_e = \left. \frac{dW_M}{dn} \right|_{\phi \text{ cost}} = \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L^2} \frac{dL}{dn} = -\frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dn}$$

$\uparrow$   
 $\frac{d}{dn} \left( \frac{1}{L} \right) = -\frac{1}{L^2} \frac{dL}{dn}$

Il risultato non dipende dalla trasformazione effettuata, in fatto  
 nel caso generale si ha

~~$F_e dn + i d\phi = dW_M$~~   
 $F_e dn + i d\phi = d\left(\frac{1}{2} Li^2\right)$

$$F_e dn + i(L di + dLi) = \frac{1}{2}(dLi^2 + 2i diL) = \frac{1}{2} dLi^2 + Li di$$

derivata  
 prodotto  
 o derivata di  
 un prodotto

$$F_e dn = \frac{1}{2} dLi^2 - i^2 dL = -\frac{1}{2} i^2 dL$$

$$F = F_e = -\frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dn}$$

Ossendo la legge di Hopkinson

$$R\varphi = Ni$$

e delle relazioni

$$L = \frac{\phi}{i} = \frac{N^2}{R} = \frac{N\varphi}{i}$$

si può esprimere la forza sull'incavo attraverso la riluttanza

$$F = -\frac{1}{2} \frac{dLi^2}{dn} = \frac{1}{2} \frac{N_i^2 \cdot 2}{R^2} \frac{dR}{dn} = \frac{1}{2} \varphi^2 \frac{dR}{dn}$$

$$\text{dove } dL = -\frac{N^2}{R^2} dR \quad \text{e} \quad \frac{N_i^2}{R^2} = \varphi^2$$

Quando è possibile insieme la riluttanza dei tratti fermati del materiale  $\mu$ ,  $R$  è la somma dei due trapezi

$$R = \frac{2n}{\mu_0 S} \Rightarrow F = \frac{1}{2} \varphi^2 \cdot 2 \frac{1}{\mu_0 S} = \frac{\varphi^2}{\mu_0 S} = \frac{N_i^2 \cdot 2}{R^2 \mu_0 S}$$

$$= \frac{N_i^2 \cdot 2}{\mu_0 S} \cdot \frac{\mu_0^2 S^2}{4n^2} = \frac{N_i^2 \mu_0 S}{4n^2}$$

Quando il campo magnetico è uniforme si ha

$$\frac{\varphi}{\mu_0 S} = \frac{B}{\mu_0} = H$$

$$\text{Per cui } F = H^2 \cdot \mu_0 S = \frac{1}{2} H^2 \mu_0 \cdot 2S$$

La forza è data dalle ~~relazioni~~ superficie dei trapezi per la pressione magnetica  $F_H = \frac{1}{2} \mu_0 H^2$

## TRASFORMATORE

Macchina elettrica statica, senza parti in movimento.

Costituito da due avvolgimenti, primario e secondario, avvolti rispettivamente  $N_1$  e  $N_2$  spine avvolte su un nucleo ferromagnetico. È in due parti che consente di trasferire potenza tra due circuiti non collegati elettricamente ma con un circuito magnetico.

Quando uno percorso da corrente viene generato un campo magnetico, con linee che può concatenarsi tra le due bobine e che steno in  $\mu$  e quelle con un solo avvolgimento e sono in serie.

Quello in  $\mu$  è detto flusso principale, gli altri sono flussi di dispersione cioè concatenati solo con il primario o solo con il secondario.

Si può annullare il nucleo lineare con flussi di dispersione proporzionali alle correnti. Lo induttanza dei flussi di dispersione è data principalmente dai tratti in aria.

$$\varphi_{d1} = L_{d1} i_1$$

$$\varphi_{d2} = L_{d2} i_2$$

$L_{d1}, L_{d2}$  = induttanze di dispersione

Se non considerate ai soli flussi di dispersione, però non rappresentano l'induttanza totale.

I flussi totali concatenati con gli avvolgimenti:

$$\Phi_{c1} = N_1 \phi + \varphi_{d1} = N_1 \phi + L_{d1} i_1$$

$$\Phi_{c2} = -N_2 \phi + \varphi_{d2} = -N_2 \phi + L_{d2} i_2$$

Si possono ora scrivere le equazioni interne:

• Primario

$$V_1(t) = R_1 i(t) + \frac{d\Phi_{c1}}{dt} = R_1 i(t) + L_{d1} \frac{di_1}{dt} + N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$R_1$  resistenza dell'inv. primario

$$v_2(t) = -R_2 i_2(t) + \frac{d\Phi_2}{dt} = -R_2 i_2(t) + N_2 \frac{d\phi}{dt} - L_{d2} \frac{di_2}{dt}$$

Circuito magnetico

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \phi R$$

$R$  = resistenza del nucleo

Equazioni in regime sinusoidale del trasformatore.

Si considera il primario alimentato da una tensione  $v_1(t)$  sinusoidale. Il secondario è collegato ad un carico lineare e si possono trascurare gli effetti non lineari del nucleo.

In condizioni di regime, tutte le grandezze dipendenti dal tempo variano con legge sinusoidale.

È possibile applicare la trasformazione di Steinmetz alle equazioni interne

$$V_1 = R_1 I_1 + j\omega L_{d1} I_1 + j\omega N_1 \phi$$

$$V_2 = -R_2 I_2 - j\omega L_{d2} I_2 + j\omega N_2 \phi$$

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = R \phi$$

Nel modello sviluppato fino a questo punto si è considerato solo le perdite nel rame. Ci sono altri effetti dissipativi dovuti alle perdite nel ferro, cioè nel nucleo magnetico.

In particolare sono:

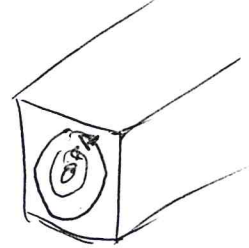
- Perdite per correnti parassite (correnti di Foucault), quando la variazione nel tempo del flusso di induzione magnetica crea correnti nel nucleo, eddy currents. Queste dissipano per effetto Joule.
- Perdite per isteresi.

Correnti perenni.

Induzione magnetica  $B$  uniforme, ortogonale alle sezioni trasversali e che varia con legge sinusoidale

$$B(t) = B_m \cos \omega t$$

In ogni sezione ci sono dei circuiti elementari



Se  $S$  indica l'area della sezione trasversale di un circuito elementare, il flusso concatenato è

$$\phi(t) = S B_m \cos(\omega t)$$

e la fem  $-\frac{d\phi}{dt}$

$$e = \omega S B_m \sin(\omega t) = \varepsilon_m \sin(\omega t)$$

Se  $R$  è la resistenza di un circuito elementare, la potenza media dissipata in un periodo è

$$P_d = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_m^2}{R} = \frac{\omega^2 S^2 B_m^2}{2R}$$

Giustificando la ~~trattazione~~ precedente la seguente formula semiempirica

$$P_{cp} = K_{cp} f^2 B_m^2$$

$B_m$  = induzione max

$f$  = freq.

$P$  = potenza dissipata per unità di peso

$K_{cp}$  = costante dipendente dalle dimensioni della sezione e dal materiale

Per ridurre le perdite dovute alle correnti parassite  
 • si usano lamine ad elevata resistività (ferro-silicio)  
 • si ricorre alla laminazione del nucleo

Per i laminari, isolati tra loro, la resistenza è più elevata e a parte di ferro si hanno correnti minime. Per il flusso concatenato è minore perché la superficie è minore e perciò meno corrente.

In un nucleo laminato, la potenza si può esprimere con

$$P_{\Sigma} = K_{\Sigma} \delta^2 f^2 B_m^2$$

$\delta$  = spessore di un laminario  
 $K_{\Sigma}$  = costante di proporzionalità del nucleo

Le perdite per isteresi sono dovute ai vortici. Dipendono dalla frequenza, cioè il numero di cicli, e dall'area del ciclo, determinato dal valore max induttivo mag  $B_m$ .  
 ⇒ può esprimersi con la formula empirica

$$P_{\Sigma} = K_{\Sigma} f B_m^{1.6}$$

Quindi otteniamo correnti parassite e isteresi.

Trascurando le perdite di  $R_1$  e  $L_{\Sigma}$  sulla tensione

$$V_1 \approx i\omega N_1 \phi = i\omega N_1 B S$$

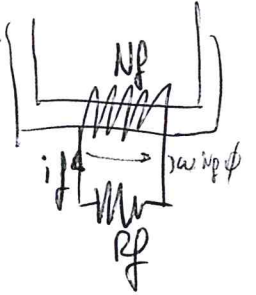
Se  $V_1$  è fissa,  $B$  è inversamente proporzionale alla frequenza. Le perdite per correnti parassite sono quasi costanti al variare di  $f$ , mentre quelle per isteresi diminuiscono con il crescere di  $f$ . Se invece  $f$  è fissa, al crescere di  $V_1$  le perdite aumentano al crescere di  $V_1$ .



Per calcolare le perdite del ferro, si può approssimare un terzo avvolgimento fatto con un numero  $R_f$  di spire e il numero di giri dell'avvolgimento reale scelto in modo che la potenza dissipata su  $R_f$  coincida con la potenza dissipata e causa delle perdite nel ferro.

Per l'avvolgimento fittizio vale la relazione

$$R_f I_f + j\omega N_f \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad I_f = -j\omega \frac{N_f}{R_f} \phi$$



Con il terzo avvolgimento l'equazione del circuito magnetico diventa

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 + N_f I_f = R \phi$$

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = (-j\omega R_f + R) \phi$$

$$R_f = \frac{N_f^2}{R}$$

Le equazioni interne diventano

$$V_1 = (R_1 + j\omega L_{d1}) I_1 + j\omega N_1 \phi$$

$$V_2 = -(R_2 + j\omega L_{d2}) I_2 + j\omega N_2 \phi$$

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = (-j\omega R_f + R) \phi$$

### TRASFORMATORE IDEALE

Il trasformatore ideale ha le seguenti proprietà:

- avvolgimenti con resistenza nulla  $R_1 = R_2 = 0$
- niente flussi dispersi  $L_{d1} = L_{d2} = 0$
- permeabilità nucleo infinita  $\mu \rightarrow \infty \Rightarrow R = 0$
- niente effetti dispersivi del nucleo  $\Rightarrow R_f = 0$

Le equazioni intere diventano

$$V_1 = j\omega N_1 \phi \quad V_2 = j\omega N_2 \phi$$

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = 0$$

⇓

$$V_1 = \frac{N_1}{N_2} V_2 \quad I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2$$

Quindi

$$v_1(t) = k v_2(t) \quad i_1(t) = \frac{1}{k} i_2(t) \quad k = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{rapporto spire}$$

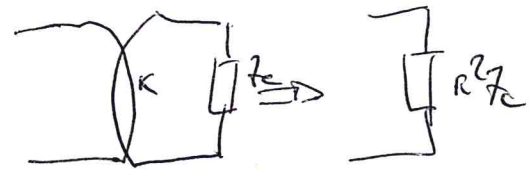
Potenza erogata

$$p(t) = v_1(t) i_1(t) - v_2(t) i_2(t) = k v_2(t) \left[ \frac{1}{k} i_2(t) \right] - v_2(t) i_2(t) = 0$$

La potenza erogata al primario, viene completamente trasferita al secondario.

Si trasformano anche le impedenze di carico

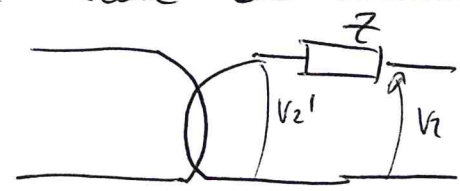
$$V_1 = \frac{N_1}{N_2} V_2 \quad I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2$$



$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{\frac{N_1}{N_2} V_2}{\frac{N_2}{N_1} I_2} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_2$$

L'impedenza equivalente del secondario riferita al primario se carico con  $Z_2$ , è pari a  $Z_2$  moltiplicata per il rapporto spire al quadrato

L'impedenza in serie al secondario



$$V_1 = \frac{N_1}{N_2} V_2' = \frac{N_1}{N_2} (V_2 + Z I_2)$$

$$I_2 = \frac{N_2}{N_1} I_1$$

$$V_1 = \frac{N_1}{N_2} V_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z I_1$$

È quindi una impedenza equivalente in serie al primario.  
 Può essere portata al primario moltiplicando per il quadrato del rapporto spire.

Facendo lo stesso con la corrente, si ha che un'impedenza in parallelo al secondario può essere portata al primario moltiplicandola per il rapporto spire al quadrato. sempre  $K^2$ .

Corrente magnetante e corrente attiva

L'equazione del circuito magnetico può essere scritta nella forma

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = (R + j\omega K \mu) \phi \quad I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2 = I_\mu + I_a$$

Si può quindi suddividere in corrente magnetante  $I_\mu$  e corrente attiva  $I_a$ .

$$I_\mu = \frac{R \phi}{N_1}$$

Quella corrente con la corrente circolante nel primario con  $I_2 = 0$  che produrrebbe il flusso  $\phi$   $N_1 I_\mu = R \phi$   
 la corrente attiva  $I_a = j\omega K \mu \phi$  determina le perdite nel nucleo

Inducendo con  $\underline{E}_1$  ed  $\underline{E}_2$  la f.e.m. dovuta al flusso principale

$$\underline{E}_{11} = \omega N_1 \dot{\phi} \quad \underline{E}_{22} = \omega N_2 \dot{\phi}$$

La corrente attiva  $\underline{I}_a$  è in quadratura con  $\phi$  ed è in fase con  $\underline{E}_1$

Si può quindi trovare una resistenza

$$R_0 = \frac{\underline{E}_{11}}{\underline{I}_a} = \frac{\omega N_1 \dot{\phi}}{\omega \frac{R_f}{N_1} \dot{\phi}} = \frac{N_1^2}{R_f}$$

$R_0$  = resistenza ohmica nel nucleo

La corrente magnetizzante  $\underline{I}_m$  è in fase con  $\phi$  e perciò in quadratura con  $\underline{E}_1$ . Si può scrivere

$$jX_0 = \frac{\omega N_1 \dot{\phi}}{\frac{R_f}{N_1}} = \frac{\omega N_1^2}{R_f}$$

$X_0$  = reattanza magnetizzante

Effettivamente si riportano al primario i flussi, in termini di correnti per poi cercare i poli.

Si può così iniziare a scrivere le equazioni interne per trovare il circuito equivalente

$$V_1 = R_1 I_1 + \omega N_1 \dot{\phi} + \omega L_{11} \dot{I}_1$$

$$V_2 = -R_2 I_2 + \omega N_2 \dot{\phi} - \omega L_{22} \dot{I}_2$$

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = (R_f + \omega K_f) \dot{\phi}$$

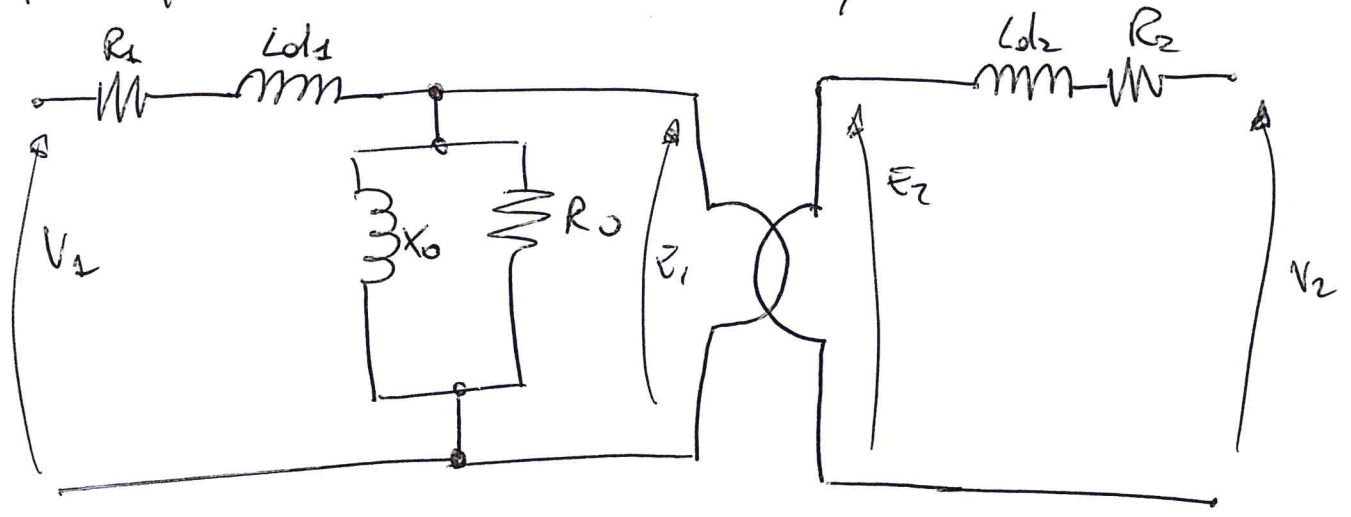
è necessario quanto trovato prima  $\underline{E}_1, \underline{I}_m, \underline{I}_a$

$$V_1 = (R_1 + j\omega L_{d1}) I_1 + E_1$$

$$V_2 = -(R_2 + j\omega L_{d2}) I_2 + \frac{N_2}{N_1} E_1$$

$$I_1 - \frac{N_2}{N_1} I_2 = I_\mu + I_a = \left( \frac{1}{jX_0} + \frac{1}{R_0} \right) E_1$$

Si può quindi usare un circuito equivalente

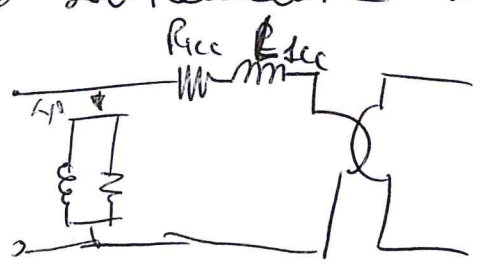


$X_0$  è stato rappresentato come induttanza perché  $jX_0$

lo si può riferire al primario, partendo da  $V_2 = E_2$  moltiplicata per  $K$ .  $E_1$  è sempre prima di punto serie. e la corrente dopo non è più  $I_1$  ma  $I_2$ , diversa. Come la  $V_1$  e  $V_2$  e il secondario non ha  $E_2$ , ma  $V_2$ .

$$V_2 = E_2 K \quad I_{12} = \frac{I_2}{K} \quad K = \frac{N_1}{N_2}$$

Si possono per fare anche circuiti semplificati. In  $R_1$  e  $L_{d1}$  la caduta è solitamente molto piccola, perciò  $E_1 \approx V_1$ . Ora si ha

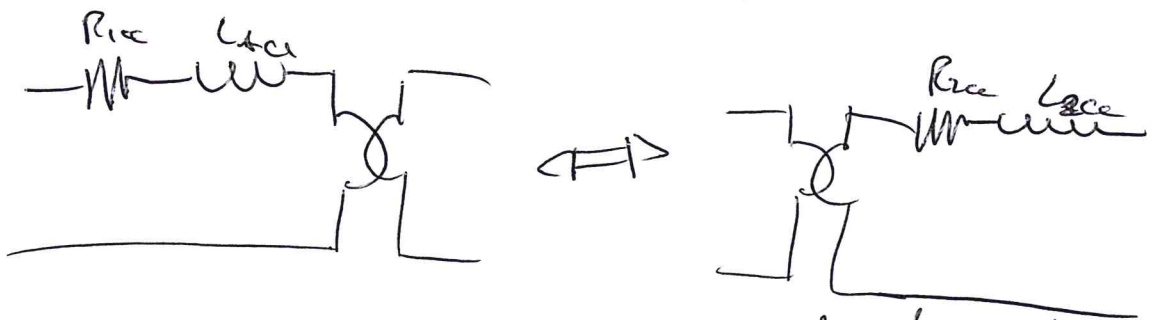


$$R_{acc} = R_1 + R_2 \frac{N_1^2}{N_2^2} \quad \text{e} \quad L_{acc} = L_{1d} + L_{2d} \frac{N_1^2}{N_2^2}$$

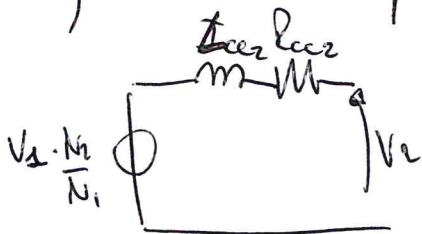
giune mittendola in serie al secondario

$$R_{acc} = R_1 \frac{N_2^2}{N_1^2} + R_2 \quad L_{acc} = L_{1d} \frac{N_2^2}{N_1^2} + L_{2d}$$

Quando  $I_0$  è trascurabile, cioè magnetizzazione è trascurabile nel ferro, allora si può trascurare il parallelo. Solitamente  $C_0$  si può fare quando il trasformatore opera in condizioni "normali". Sono dette reti equivalenti di Kapp



Questo quando corrente di eccitazione il trasformatore attraverso il circuito equivalente semplificato



Se la caduta di tensione su  $R_1$  e  $L_{1d}$  è trascurabile si ha

$$E_1 = I_1 N_1 \phi \approx V_1$$

Se  $V_1$  quindi è fissato,  $\phi$  è fissato e non dipende dal carico del trasformatore

$$\phi = \frac{V_1}{I_1 N_1}$$

Allora la quantità

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = (R + j\omega K_p) \phi$$

è costante.

Quindi se una variazione del campo produce una variazione della corrente nel secondario, il trasformatore reagisce con una variazione della corrente del primario tale da mantenere costante la differenza tra i prodotti  $NI$  (ampere-pire) e primario e secondario.

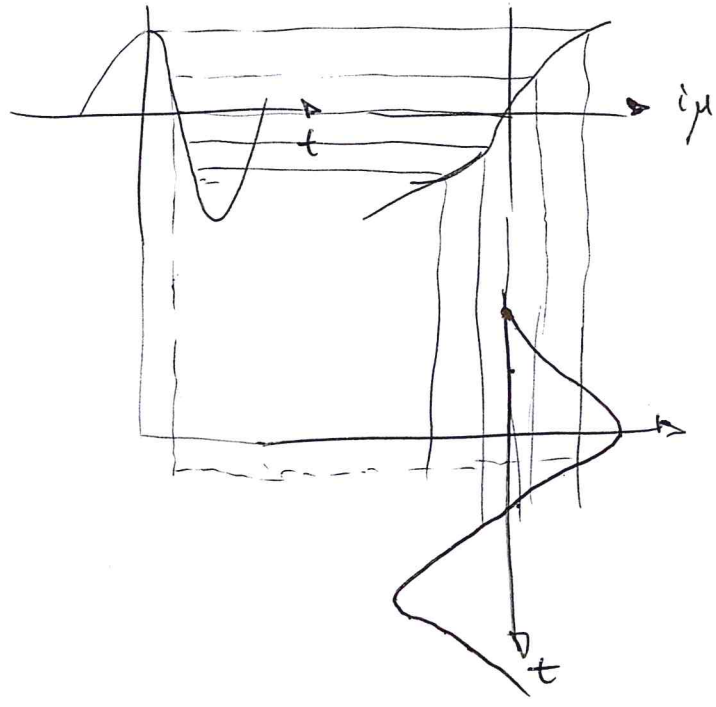
Differenza delle correnti magneticamente.

Se il trasformatore è alimentato con una tensione  $v_1(t)$  sinusoidale, anche  $e_2(t)$  e  $\phi(t)$  sono sinusoidali.

Se il nucleo non è lineare la  $i_1(t)$  è distorta. (Componente  $H(t)$   $\cos \omega t$   $M_r$ )

Senza isteresi,  $i_1(t)$  contiene solo armoniche dispari, in cui il contributo principale ~~è~~ è la 3° armonica.

Già che  $i_1$  è piccola rispetto alle altre correnti, la  $i_1$  può trattare come sinusoidale, con valore efficace pari a quello delle distorte.

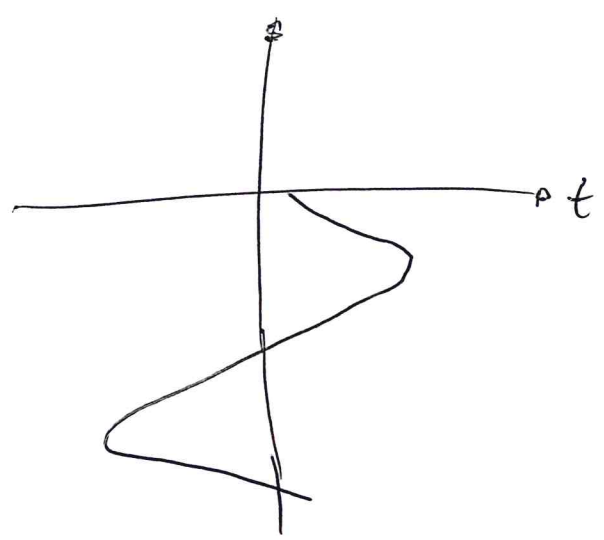
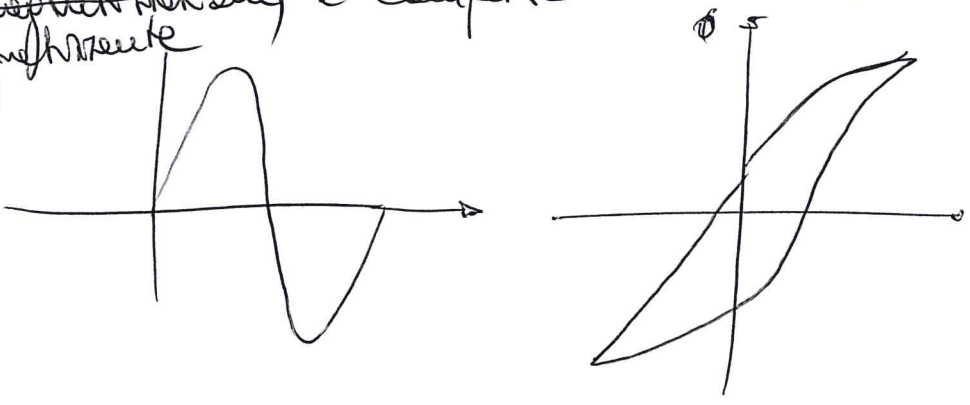


Se fanno punti equidistanti in  $t$ ,  $f_1$  non può dipendere.

In presenza di istanti, e  $i(t)$  si aggiunge una componente  $i_1(t)$ , sfasata in quadratura o anticipo rispetto  $i(t)$ .

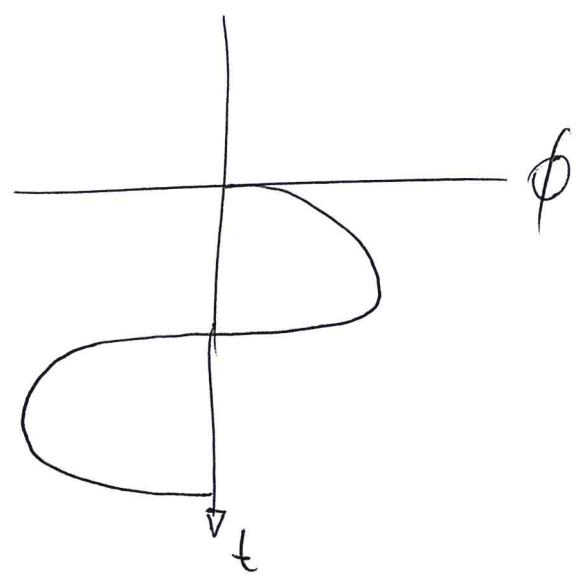
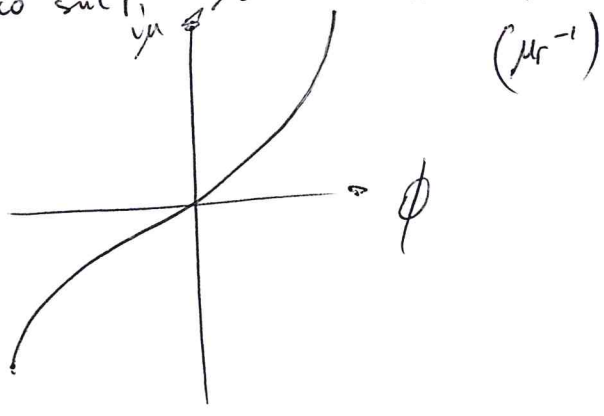
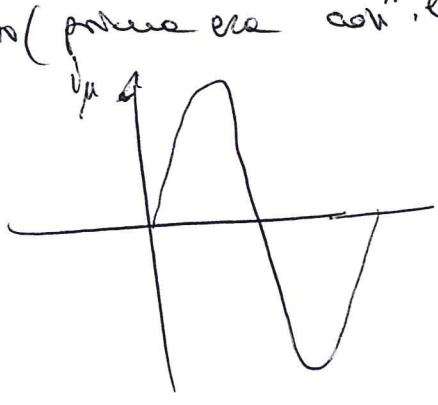
È in fase con la tensione  $e_1$ , anche potere attivo da compensare alla portata nel caso per istanti. Per avere valore in  $i_1$ , diminuiscono bene  $R_0$ .

Altre ad esse distorta è con ciclo totale ~~il flusso~~ la corrente ~~di~~ (di ~~componente~~) e coperta nei momenti di potenza attiva. (magnetizzante)





Se invece la corrente magnetante è fornita ad una  
 linea, la distorsione sarà sulla tensione. Succede  
 nei sistemi trifase. Il flusso contiene armoniche dispari  
 e il contributo maggior è delle terze armoniche, in fase con il  
 flusso (potrebbe essere con il picco sul picco, una ha le volte).



DATI DI TARGA

Valori nominali, definiscono prestazioni per governo e  
 collaudi. Sono riportati su una targa

Alcuni sono:

freq. nominale:  $f_n$

tensione nominale primaria  $V_{1n}$

tensione secondaria e neutri (valori efficaci):  $V_{2n}$

rapporto nominale di trasformazione  $K_0 = \frac{V_{1n}}{V_{2n}}$

Potenza nominale apparente  $S_n = V_{1n} \cdot I_{1n} = V_{2n} \cdot I_{2n}$

$I_{1n}$  = corrente nominale primario

$I_{2n}$  = corrente nominale secondario.

Prove a vuoto.

- Primario tensione nominale
- Secondario aperto

Corrente  $I_1 = I_m + I_a = I_0$

Le  $I_0$  è molto inferiore a quella nominale e si possono trascurare le perdite nel rame  $\Rightarrow$   ~~$R_2$~~  e  $L_{sd}$  è nulla ( $I_2 = 0$ ).

Su  $R_1$  e  $L_{sd}$  è molto piccola rispetto al valore in condizioni nominali

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = k_0$  rapporto di trasformazione nominale.

$E_1$ , perciò  $I_a$ , hanno valori nominali e le perdite nel ferro coincidono con quelle nominali (al funzionamento nominale).

Il corrispondente a vuoto può essere direttamente ottenuto i percentuali

Corrente a vuoto percentuale

$$I_0\% = \frac{I_{I0}}{I_{1n}} \cdot 100$$

$I_{I0}$  = corrente a vuoto primario

$$P_0\% = \frac{P_0}{S_n} \cdot 100$$

$P_0$  = potenza attiva a vuoto

Fattore di potenza a vuoto

$$\cos \phi_0 = \frac{P_0}{V_{1n} \cdot I_{I0}}$$

I parametri non sono indipendenti, dato che risulta

$$P_o \% = \frac{V_{in} I_{o} \cos \phi_o}{V_{in} I_{in}} = I_o \% \cos \phi_o$$

Nota:  $S_n, V_n, I_o \%$  e  $\cos \phi$ , facendo riferimento ad un circuito semplificato, si può ricavare i valori  $R_o$  e  $X_o$

$$R_o = \frac{V_{in}^2}{P_o} \quad X_o = \frac{V_{in}^2}{Q_o}$$

Prova in cortocircuito

Se il secondario è in CC  $\Rightarrow I_2 = 0, V_{i2} = 0$ .

$R_o, X_o$  è in parallelo con  $R_{12} + jX_{12}$ :  $R_o, X_o$  può essere trascurata perché  $R_{12}$  e  $X_{12}$  di norma sono piccoli.

$$I_1 = \frac{V_1}{R_{12} + jX_{12} + R_o + jX_o} \approx \frac{V_1}{R_{12} + jX_{12}}$$

Le impedenze sono estremamente e alle induttanze disproporzionate, sono molto piccole. Ci possono essere correnti molto elevate con  $V_1$  nominale e si possono danneggiare sensibilmente per surriscaldamento per effetto Joule. Si alimenta con una tensione  $V_{acc}$  e non  $V_1$ , in modo che  $I_2$  sia  $I_{2n}$ .

Si ha  $\sim I_{in}$  e le perdite nel rame sono praticamente ~~quelle~~ coincidenti con le fondamentali nominali.

$V_{1c}$  ha valore  $\ll V_{in} \Rightarrow I_{1c}$  e  $I_{2c}$  sono trascurabili

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{praticamente quello di un traf. ideale}$$

Anche qui si possono definire delle grandezze o parametri

$$\eta_{cc} \% = \frac{V_{acc}}{V_{in}} \cdot 100$$

$$\rho_{cc} \% = \frac{P_{cc}}{S_n} \cdot 100$$

$\swarrow$   $V_{in} I_{in}$

$$\cos \varphi_c = \frac{P_{cc}}{V_{acc} I_{in}}$$

Anche qui non sono indipendenti!

$$\rho_{cc} \% = \frac{P_{cc}}{V_{in} I_{in}} = \frac{V_{acc} I_{in} \cos \varphi}{V_{in} I_{in}} = \eta_{cc} \% \cos \varphi$$

Ora, dalle prove in corto circuito, si trovano  $P_{icc}$ ,  $R_{acc}$ ,  $I_{2n}$ ,  $I_{2d}$  sono a, cioè la somma delle perdite.



$$P_{icc} = \frac{P_{cc}}{I_{1n}^2}$$

$$R_{acc} = \frac{P_{cc}}{I_{2n}^2}$$

$$X_{icc} = \frac{Q_{cc}}{I_{1n}^2}$$

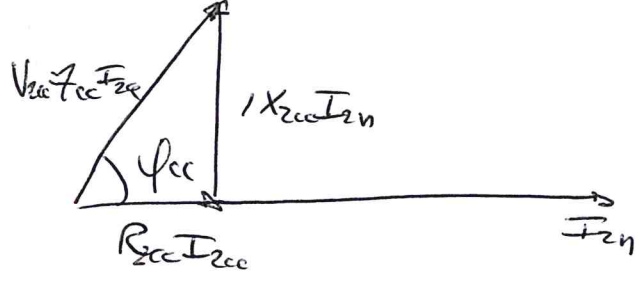
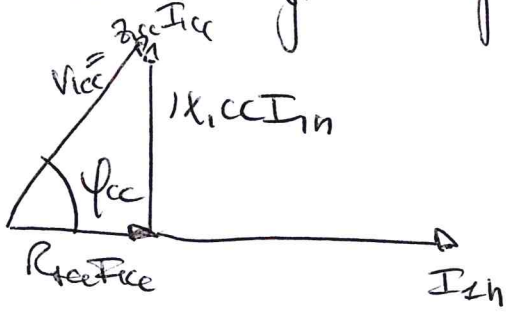
$$X_{acc} = \frac{Q_{cc}}{I_{2n}^2}$$

$$I_{1n} = \frac{S_n}{V_{in}}$$

$$I_{2n} = \frac{S_n}{V_{2n}}$$

TRASFORMAZIONE AL CORTOCIRCUITO

Si può rappresentare il funzionamento dei due circuiti equivalenti con i diagrammi fasoriali



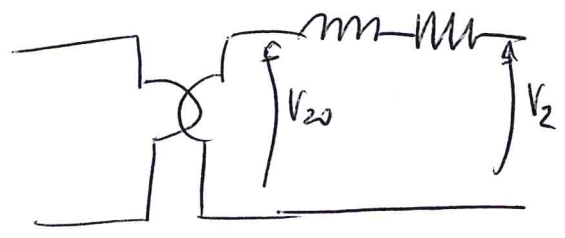
Il  $V_{cc}$ , o meglio il triangolo formato da  $V_{cc}$  è detto triangolo di cortocircuito.

Le cadute di tensione si definite come la differenza tra i valori efficaci della tensione del secondario a vuoto e a carico

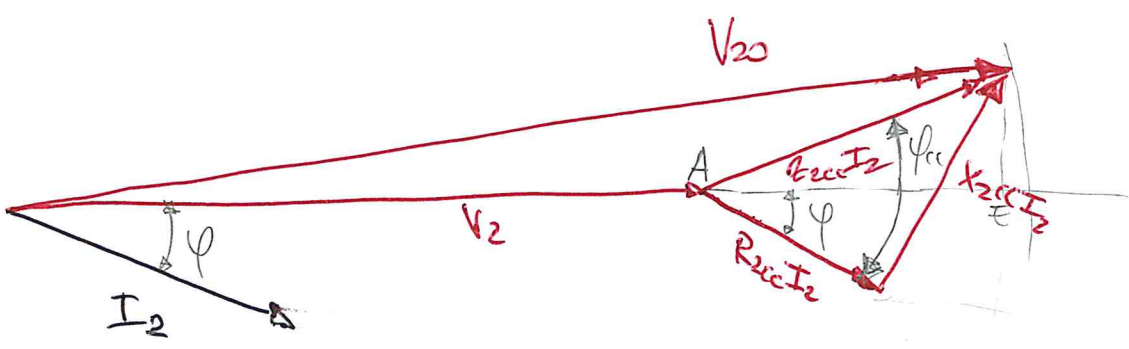
$$\Delta V = V_{20} - V_2$$

Quando rete di Kapp al secondario

$$\Delta V\% = \frac{V_{20} - V_2}{V_{20}} \cdot 100$$



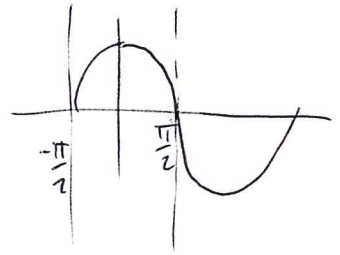
Si può rappresentare il funzionamento mediante il seguente diagramma fasoriale



come le volute su  $R_{cc}$  e  $X_{cc}$  solitamente sono piccole  
 si può considerare  $V_{10} - V_2$  e il segmento  $AE$

$$AE = Z_{cc} I_2 \cos(\varphi_{cc} - \varphi) = \text{~~... (crossed out) ...~~}$$

$$= R_{cc} I_2 \cos(\varphi) + X_{cc} I_2 \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$



$$= R_{cc} I_2 \cos \varphi + X_{cc} I_2 \sin \varphi$$

Le volute di tensione risultano se

$$R_{cc} I_2 \cos \varphi + X_{cc} I_2 \sin \varphi = 0 \quad \varphi = -\arctg\left(\frac{R_{cc}}{X_{cc}}\right)$$

Se  $-\arctg\left(\frac{R_{cc}}{X_{cc}}\right) < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$   $\Delta V > 0$   $\varphi$  sopra  $\left(\frac{\pi}{2} \text{ o } \text{discuss. arctg}\right)$

Se  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < -\arctg\left(\frac{R_{cc}}{X_{cc}}\right)$   $\Delta V < 0$   $\varphi$  sotto

In fatti

$$R_{cc} I_2 \cos \varphi = -X_{cc} I_2 \sin \varphi$$

$$-\frac{R_{cc}}{X_{cc}} = \tan \varphi \Rightarrow \tan \varphi - \frac{R_{cc}}{X_{cc}} \geq 0$$

$\Delta V < 0$  significa aumento di tensione.

$\Delta V > 0$  diminuzione di tensione, cioè con conduttori ohmici indotti o ohmici capacitivi che non fanno troppa.

Rendimento. Il trasformatore è alimentato al primario da una tensione sinusoidale e al secondario collegato ad un impedenza di carico

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}$$

$P_2 =$  potenza attiva ceduta al carico

$P_1 =$  potenza attiva erogata al primario (o assorbita dal primario)

Abbiamo rendimenti elevati perché sono macchine statiche. La definizione non è buona per le misure, perché  $P_1$  e  $P_2$  ed è influenzato molto dagli errori di misura. Anche perché ci sono potenze molto elevate. Se una delle il rendimento converrebbe, definito che

$$\eta_c = \frac{P_2}{P_2 + P_{cu} + P_{fe}}$$

$P_{cu}$  si ottengono con prova in corto e  $P_{fe}$  con prova a vuoto (o si ottengono la impedenza e poi la perdita).

Il rendimento nominale si ottiene con  $P_2 = S_n$ . Infatti la potenza ceduta al carico è

$$P_2 = V_2 I_2 \cos \varphi$$

$$P_{cu} = R_{ec} I_2^2$$

Se la tensione del primario è fissa, la  $P_{fe}$  sarà probabilmente costante.

$$\eta_c = \frac{V_2 I_2 \cos \varphi_2}{V_2 I_2 \cos \varphi_2 + R_{2cc} I_2^2 + P_{Fe}}$$

Fissando  $\varphi_2$ , si può avere il massimo di  $\eta_c$  in funzione di  $I_2$

$R_{2cc} I_2^2 = P_{Fe}$  si ha il massimo di efficienza.  
 cioè quando le perdite nel rame e nel ferro sono uguali.

### PARTECIPAZIONE AI TRASFORMATORE

Spesso si usano più trasformatori in parallelo, in modo da avere meno delle perdite nominali ed essere più efficiente. Invece di uno solo sottoutilizzato, si usano più progressivamente.

Corrente per la manutenzione di uno alla volta. Per funzionare bene diversi problemi si presentano con le

Devono avere uguali termini nominali primarie e secondarie

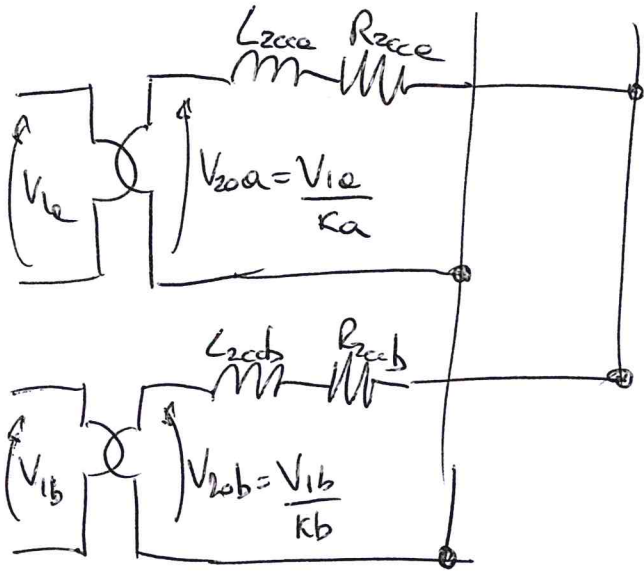
$$V_{sna} = V_{sub} \quad V_{oca} = V_{ob} \Rightarrow K_a = K_b$$

cioè devono avere lo stesso rapporto spire  
 Devono poi avere uguali triangoli di cortocircuito

$$V_{acc} \% = V_{bcc} \% \quad \cos \varphi_{cc} = \cos \varphi_{cc}$$

Le prime due condizioni implicano che nella doppia tra tra i due secondari la differenza di tensione sia nulla e non ci sia una differenza anche con potenza erogata nulla.



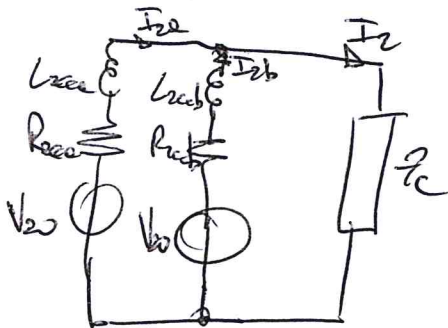


$$V_{1e} = V_{1b}$$

⇒ per non esseri' una differenza tra le tensioni

$$\frac{V_1}{K_e} = \frac{V_2}{K_b} \Rightarrow K_e = K_b$$

Per valutare l'alta conduttanza, prendiamo il circuito eg al secondario



$$I_z = I_{ze} + I_{zb}$$

Se voglio mantenere le stesse cadute di tensione

$$Z_{ce} I_{ze} = Z_{cb} I_{zb}$$

che è equivalente a scrivere

$$\frac{Z_{ce}}{Z_{cb}} = \frac{I_{zb}}{I_{ze}}$$

$$\frac{Z_{cb}}{Z_{ce}} = \frac{I_{ze}}{I_{zb}}$$

A parità di volti' efficaci della corrente, la corrente sul carico è massima quando sono in fase.

$$|I_z| = |I_{ze}| + |I_{zb}|$$

Se supponiamo che entrambi siano a pieno carico

$$\frac{Z_{cb}}{Z_{ce}} = \frac{I_{ze}}{I_{zb}}$$

Se come le correnti diverse esse in fase, il rapporto  $\frac{I_{ca}}{Z_{cb}}$  deve essere reale. Allora

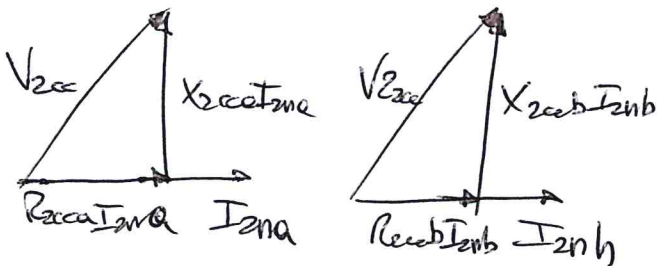
$$Z_{ca} I_{ca} = Z_{cb} I_{cb}$$

$$(R_{ca} + jX_{ca}) I_{ca} = (R_{cb} + jX_{cb}) I_{cb}$$

$$\Rightarrow R_{ca} I_{ca} = R_{cb} I_{cb}$$

$$X_{ca} I_{ca} = X_{cb} I_{cb}$$

Però devono essere uguali ~~nel~~ di corrente



però avranno lo stesso cos  $\phi$  e la stessa  $V_{cc}$

Se queste condizioni sono rispettate, il funzionamento normale si ha

$$S_n = V_{20} I_{2n} = V_{20} I_{2na} + V_{20} I_{2nb} = S_{na} + S_{nb}$$

Le trasformatori in parallelo si comportano come un unico trasformatore avente potenza nominale la somma delle potenze. Inoltre in ogni condizione di funzionamento risulta

$$\frac{I_{ca}}{I_{cb}} = \frac{I_{ca}}{I_{cb}} = \frac{I_{ca}}{I_{cb}} = \frac{S_{na}}{S_{nb}}$$

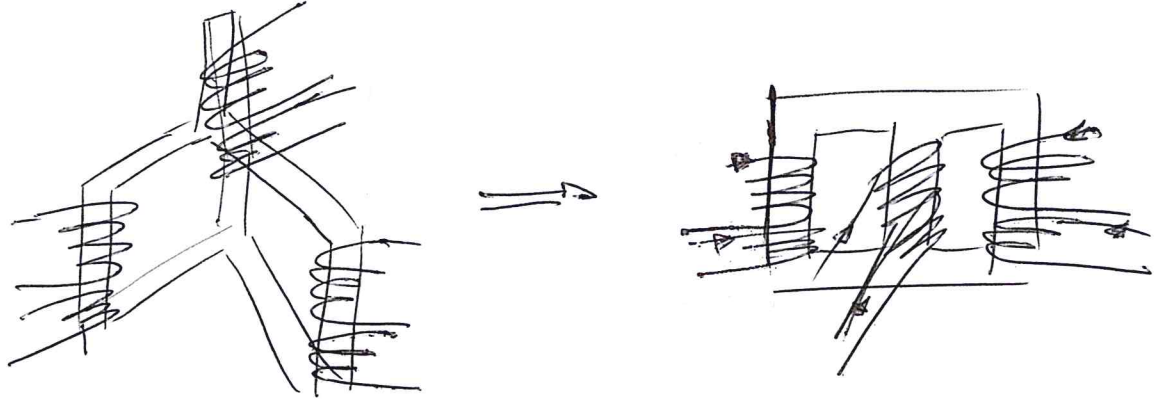
Quindi le correnti, e quindi le potenze, si ripartiscono in quote proporzionali alle potenze nominali.

# TRASFORMATORI TRIFASE

Per trasformare energia tra due reti trifase, si possono usare tre trasformatori monopole, uguali tra loro e collegati appropriatamente. Unendo i nuclei, si può ottenere un unico trasformatore trifase.

Se gli avvolgimenti sono percorsi da una corrente di corrente simmetrica, anche il flusso è una corrente simmetrica. Perciò nelle colonne centrali il flusso è nullo e si può togliere la colonna centrale.

La configurazione tridimensionale è difficile da costruire e si preferisce usare una configurazione piana, sia pur che questa crea piccole asimmetrie, ma con effetti trascurabili.



Si hanno lo stesso numero di spire nei primari  $N$   
 lo stesso numero di spire nei secondari  $n$   
 le tensioni nei primari  $U_A, U_B, U_C$ , e nei secondari  $U_a, U_b, U_c$ .

$$\frac{U_A}{U_a} = \frac{N}{n} \text{ ed è uguale per le altre fasi, e due a due.}$$

con coincidenza con il rapporto spire.

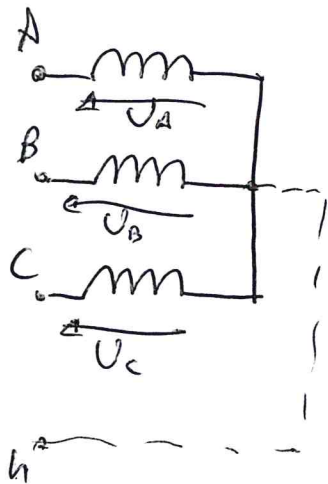
Si possono collegare le fasi in vari modi:

stelle, triangolo, zigzag.

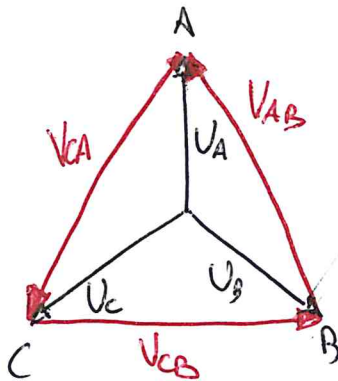
Il campo di fase indotte,  $V$  le tensioni concatenate,  $E$  le tensioni stellate.

Si sa anche che il primario è alimentato con una tensione alternata di frequenza  $f$ , quindi la f.e.m. indotte sono una tensione alternata

### A STELLA



$$E_A = U_A \quad E_B = U_B \quad E_C = U_C$$



Le tensioni negli avvolgimenti sono quelle di fase!

~~$V_{AB} = \sqrt{3} U_A$~~

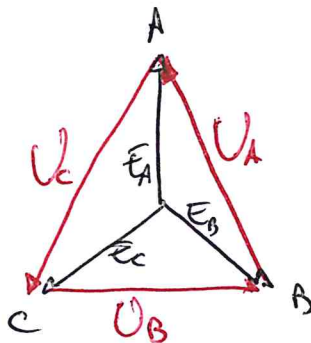
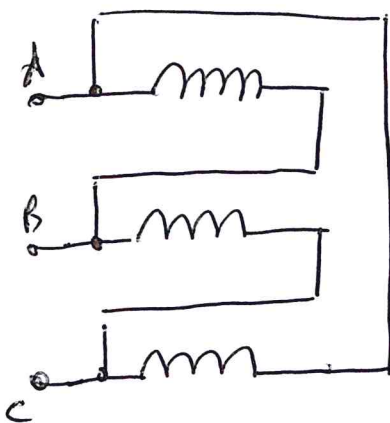
$$V_{AB} = (U_A - U_B) = \sqrt{3} U_A e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$V_{BC} = (U_B - U_C) = \sqrt{3} U_B e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$V_{CA} = (U_C - U_A) = \sqrt{3} U_C e^{j\frac{\pi}{6}}$$

Ci sono due tipi di collegamento A TRIANGOLO.

### TRIANGOLO TIPO 1:



$$V_{AB} = U_A$$

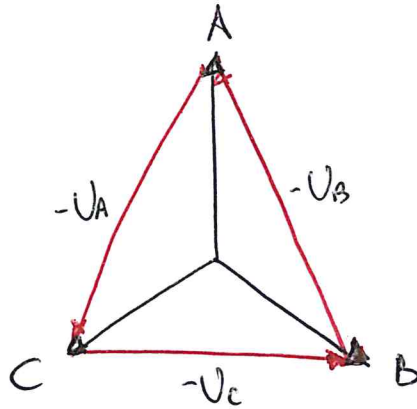
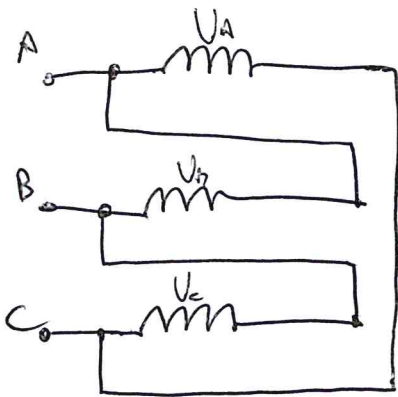
$$V_{BC} = U_B$$

$$V_{CA} = U_C$$

Le tensioni negli avvolgimenti sono quelle di fase!

TRIANGOLO TIPO 2

La differenza è come seno collegati tra loro gli avvolgimenti  
 (~~Quasi come una terza inversa~~  
~~sugli avvolgimenti~~)



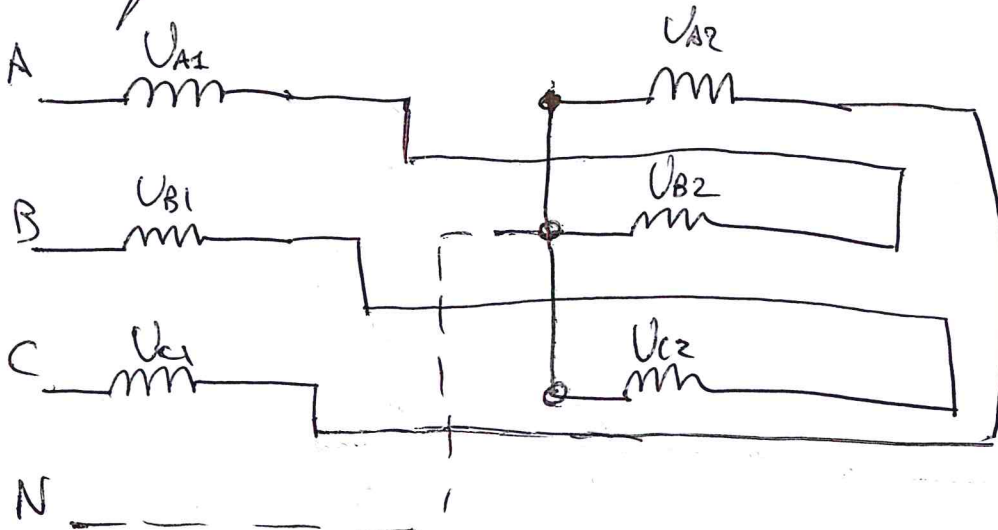
$$V_{CA} = -U_A = U_C e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$V_{AB} = -U_B = U_A e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$V_{BC} = -U_C = U_B e^{j\frac{\pi}{3}}$$

COLLEGAMENTO A ZIG ZAG

Si dividono gli avvolgimenti in due parti uguali.  
 La prima parte dell'avvolgimento è collegata in serie discorde  
 con il secondo di quello successivo. Gli avvolgimenti risultano  
 sono collegati a stella.



Si considerano ora le tensioni stellate

$$|U_{A1} = U_{A2} = \frac{U_A}{2}$$

$$U_{B1} = U_{B2} = \frac{U_B}{2}$$

$$U_{C1} = U_{C2} = \frac{U_C}{2}$$

$$E_A = \frac{\text{collegam. 2ip 2ip}}{|U_{A1} - U_{B2}|}$$

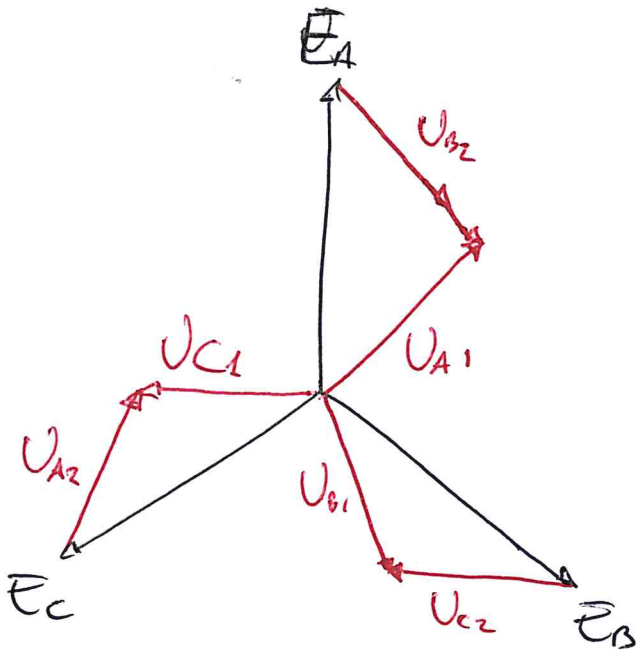
$$E_B = U_{B1} - U_{C2}$$

$$E_C = U_{C1} - U_{A2}$$

$$\frac{\sqrt{3} U_A}{2} e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} U_B e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} U_C e^{j\frac{\pi}{6}}$$



Lo sappiamo, quindi, come terza simmetrica e quindi le fasi indotte sono una terza simmetrica.

In ogni caso

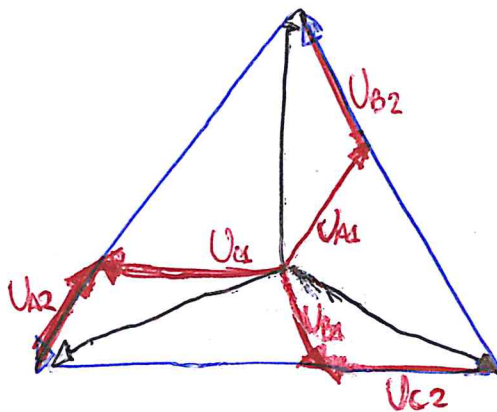
$E_A + E_B + E_C = 0$ , le tensioni stellate sono sempre una terza simmetrica

Per le tensioni caratteristiche

$$V_{AB} = \sqrt{3} E_A e^{j\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2} U_A e^{j\frac{12\pi}{6}} = \frac{3}{2} U_A e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$V_{BC} = \frac{3}{2} U_B e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$V_{CA} = \frac{3}{2} U_C e^{j\frac{\pi}{3}}$$



terza simmetrica diretta

con neutro: terza simmetrica diretta

$U_A, U_B, U_C$  terza simmetrica diretta

### RAPPORTO A<sup>n</sup> TRASFORMAZIONE

Rapporto tra il valore efficace di una tensione concatenata o stellata primaria e il valore efficace della tensione secondaria avvolge voluto e vuoto.

$$K = \frac{|V_{AB}|}{|V_{ab}|} = \frac{|E_A|}{|E_a|}$$

Può essere diverso dal rapporto spire perché dipende dal tipo di collegamento adottato per le fasi del primario e secondario.

### SPOSTAMENTO ANGOLARE

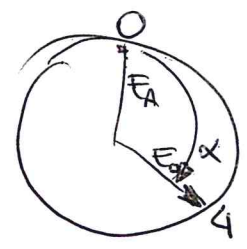
Angolo in gradi di sfasamento tra una tensione concatenata o stellata primaria e l'induzione secondaria

$$\alpha = \arccos\left(\frac{V_{AB}}{V_{ab}}\right) = \arccos\left(\frac{E_A}{E_a}\right) \quad 0 \leq \alpha < 360^\circ$$

di fase del collegamento ed è sempre multiplo di 30°

### GRUPPO (o INDICE ORARIO)

È il rapporto tra lo spostamento angolare e 30° può assumere valori tra 0 e 11



Il più usato sono

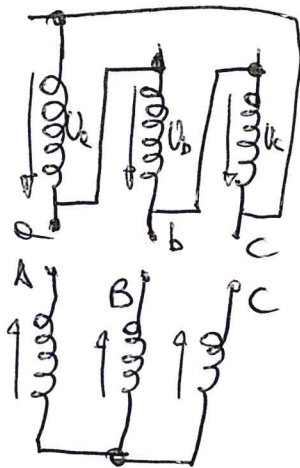
- 0 ⇒ α = 0
- 5 ⇒ α = 150
- 6 ⇒ α = 180
- 11 ⇒ α = 330

Esempio collegamento

stella-triangolo

~~YΔ~~

YΔ



$$\frac{V_{AB}}{V_{ab}} = \frac{\sqrt{3} U_A e^{j\frac{\pi}{6}}}{-U_b} = \frac{\sqrt{3} U_A e^{j\frac{\pi}{6}}}{U_A e^{j\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3} \frac{N}{n} e^{j(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})} = \sqrt{3} \frac{N}{n} e^{-j(\frac{\pi}{6})}$$

$$= \sqrt{3} \frac{N}{n} e^{-j(\frac{\pi}{6})} \Rightarrow K = \sqrt{3} \frac{N}{n} \quad \text{GR: II}$$

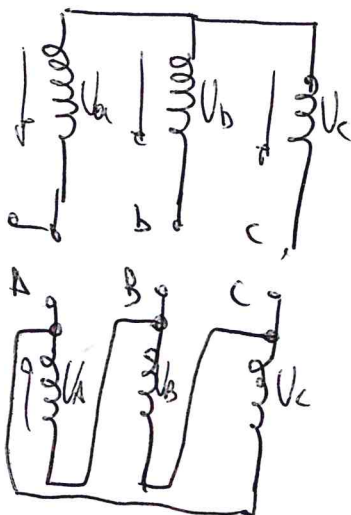
Lo stesso con polarità invertite al secondario  $\Rightarrow$

YΔS

TRIANGOLO stella

~~YΔ~~

YΔ



$$\frac{V_{AB}}{V_{ab}} = \frac{U_A}{\sqrt{3} U_A e^{j\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{N}{n} e^{j(\frac{\pi}{6} - \pi)}$$

GR: III

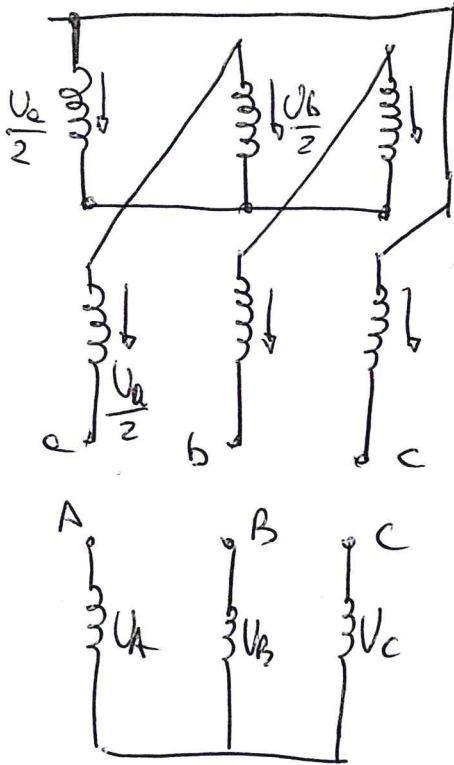
$$K = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{N}{n}$$

Inverta terminali secondario  $\Rightarrow$  GR: S



Ora STELLA ZIGZAG

$Y \neq \emptyset$



$$\frac{V_{AB}}{V_{ab}} = \frac{\sqrt{3} U_a e^{j\frac{\pi}{6}}}{\frac{3}{2} U_a e^{j\frac{\pi}{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{j\frac{\pi}{6}}$$

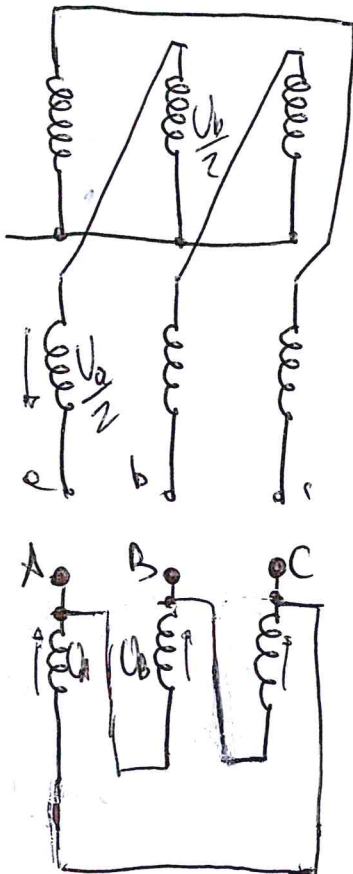
G.R. ~~11~~  $K = \frac{N}{n} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$

Se invertito la tensione sul secondario

G.R. ~~5~~ 5

Ora TRIANGOLO - ZIGZAG

$D \neq \emptyset$



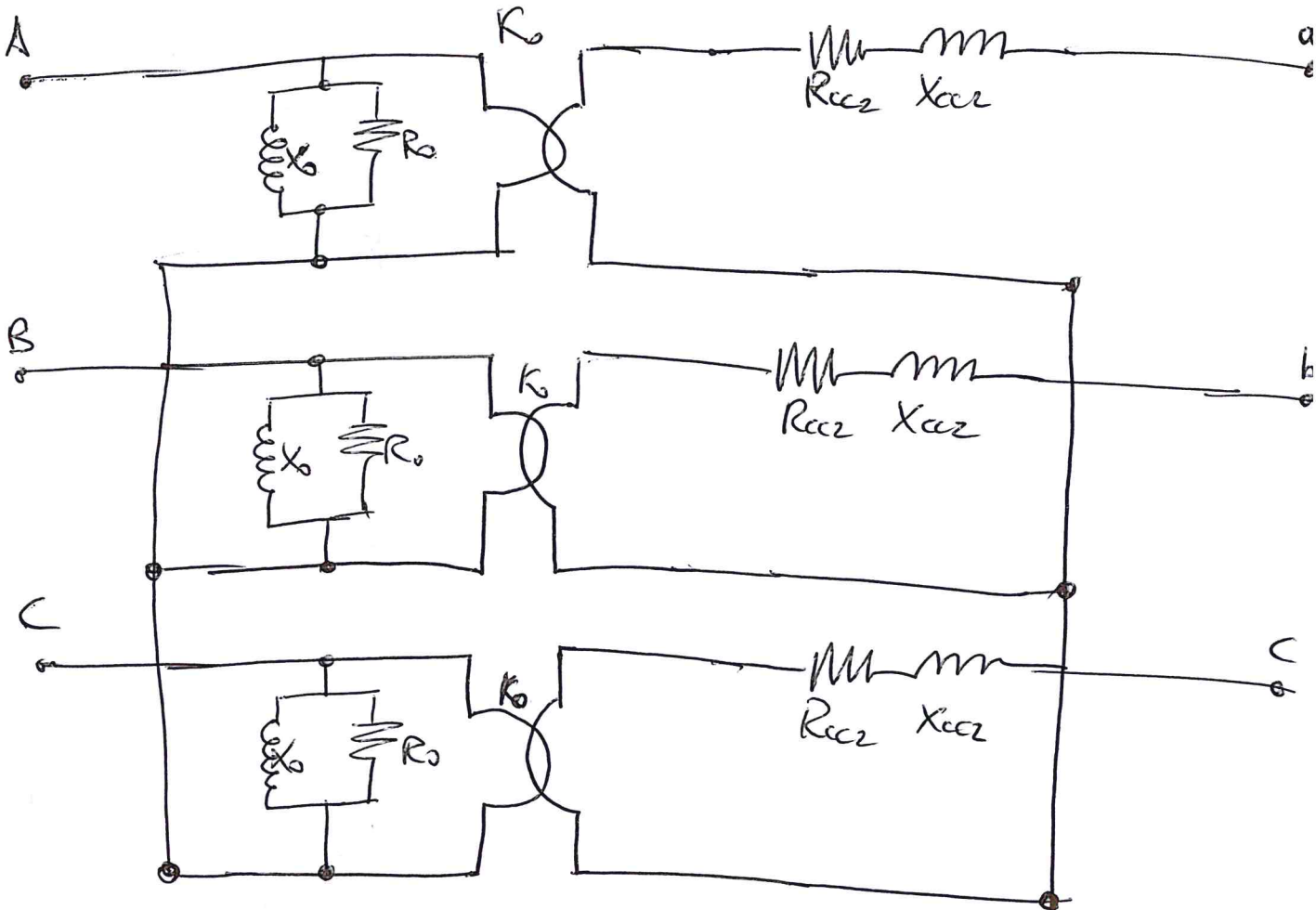
$$\frac{V_{AB}}{V_{ab}} = \frac{-U_B}{\frac{3}{2} U_a e^{j\frac{\pi}{3}}} = \frac{U_a e^{j\frac{2\pi}{3}}}{\frac{3}{2} U_a e^{j\frac{\pi}{3}}} = \frac{2}{3} e^{j\frac{\pi}{3}}$$

G.R.: 0  $K = \frac{N}{n} \cdot \frac{2}{3}$

Se invertito la tensione degli avvolgimenti sul secondario ho gr: 6

## CIRCUITO EQUIVALENTE

Indipendentemente dal tipo di collegamento, si può studiare un modello equivalente ottenuto collegando a stella 3 circuiti equivalenti a quello usato nelle manovre.



Quando è alimentato da una terna simmetrica, si può usare la rete ridotta monophasica:

- valori efficaci della tensione primaria e secondaria uguali a quelli delle tensioni stellate del trasformatore trifase
- v. efficaci correnti uguali a quelle del terzo trifase
- Potenza nominale, erogata, perdite rame e ferro uguali a un terzo delle potenze corrispondenti del trasformatore trifase.

La potenza nominale è

$$S_n = 3 E_{sn} I_{sn} = \sqrt{3} V_{ln} I_{ln} = \sqrt{3} V_{20} I_{2n}$$

Nel funzionamento a vuoto si ha ancora

$$i_0\% = \frac{I_{c0}}{I_{2n}} \cdot 100 \quad P_0\% = \frac{3 E_{sn} I_{c0} \cos \varphi}{3 E_{sn} I_{2n}} = \frac{P_0}{S_n} \cdot 100$$

$$P_0\% = i_0\% \cos \varphi$$

e nel funzionamento in cortocircuito

$$V_{cc}\% = \frac{V_{cc}}{V_{ln}} \cdot 100 \quad P_{cc}\% = \frac{3 E_{sc} I_{sn} \cos \varphi}{3 E_{sn} I_{sn}} = \frac{P_{cc}}{S_n} \cdot 100$$

$$P_{cc}\% = V_{cc}\% \cdot \cos \varphi$$

I parametri si possono ottenere: manovra avvolge a quello manovra vuoto e precedente.

Il rendimento convenzionale può essere espresso come

$$\eta_c = \frac{P_2}{P_2 + P_f + P_{cu}} = \frac{\sqrt{3} V_{20} I_2 \cos \varphi}{\sqrt{3} V_2 I_2 \cos \varphi + 3 P_{cc} I_2^2 + P_{fe}}$$

Per la caduta di tensione, nel manovra si avere

$$\Delta \vec{V} = R_{cc} I_2 \cos \varphi + X_{2cc} I_2 \sin \varphi$$

Però nel difese sarà  $\Delta E \cdot \sqrt{3}$

Categorie trasformatori trifase.

Riordinando ciclicamente i terminali  $a \rightarrow b, b \rightarrow c, ecc, n'$  otteniamo una rotazione di  $\pm 120^\circ$  e perciò una rotazione di  $\pm 4$  gruppi orari.

Si possono perciò raggruppare i tipi 3 fase in 4 ~~gruppi~~ categorie

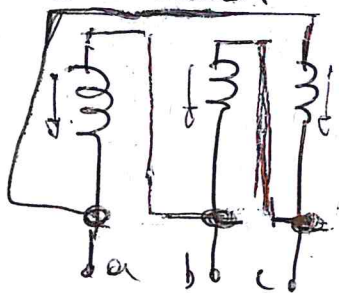
I: gruppi 1, 5, 9

II: gruppi 2, 6, 10

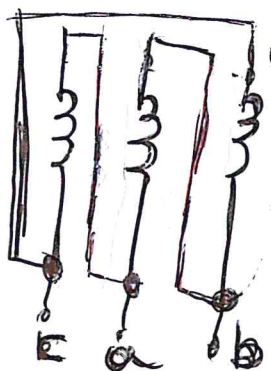
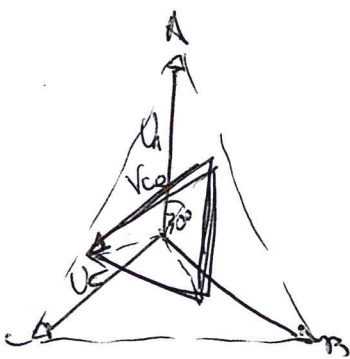
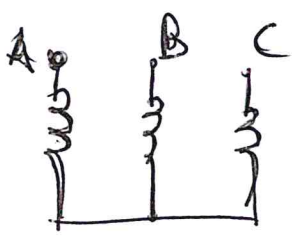
III: gruppi 3, 7, 11

IV: gruppi 4, 8, 0

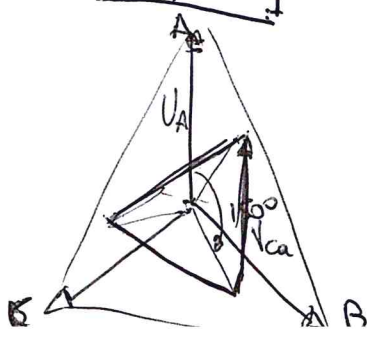
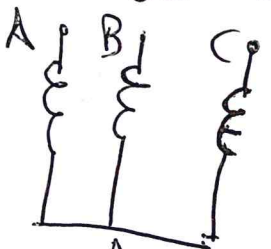
Da un trasformatore di una categoria, posso ottenere un altro della stessa categoria solo per permutazione i terminali ciclicamente.



GR1



GR5



GR9

b c a  
A B C

### Parallelo di trasformatori trifase

Come per il mono fase:

- Steno rapporto di trasformazione
- Collegati in modo che le fasi opposte in opposizione di fase nelle maglie formate dai secondari
- Steno triangolo di cartavante.

Inoltre per i trifase:

- devono appartenere alla stessa categoria, altrimenti le fasi nelle maglie formate dai secondari non si bilanciano
- Se steno gruppo  $\Rightarrow$  collegano i terminali ausiliari
- Gruppo diversi  $\Rightarrow$  due permuta i terminali
- C'è l'eccezione che consente, con appartenenti i cambi di terminali, di collegare un categoria III con un col I in parallelo.

### EFFETTI NON LINEARI

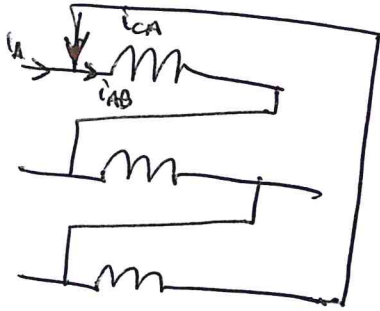
• Primario a triangolo

Se le tensioni <sup>col.</sup> sono sinusoidali, i flussi sono sinusoidali  $\Rightarrow$  le fasi indotte sono sinusoidali nel secondario.

Per effetto della non linearità del nucleo, le correnti magnetizzanti sono non lineari e quindi le correnti di fase sono distorte (hanno la terza armonica in opposizione di fase con le fondamentali).

Le 3 correnti di fase sono sfasate di  $\pm \frac{2}{3}\pi$ , l'insieme risultano in fase tra loro

Le correnti di linea sono date da differenze tra due correnti di fase.



$$i_A = i_{AB} - i_{CA}$$

$$i_B = i_{BC} - i_{AB}$$

$$i_C = i_{CA} - i_{BC}$$

ma considerate le armoniche in fase  $i_{AB}^{(3)} = i_{BC}^{(3)} = i_{CA}^{(3)}$

$$i_{AB} = i_{AB}^{(1)} + i_{AB}^{(3)}$$

$$i_{BC} = i_{BC}^{(1)} + i_{BC}^{(3)}$$

$$i_{CA} = i_{CA}^{(1)} + i_{CA}^{(3)}$$

$$i_A = i_{AB}^{(1)} - i_{CA}^{(1)}$$

$$\Rightarrow i_B = i_{BC}^{(1)} - i_{AB}^{(1)}$$

$$i_C = i_{CA}^{(1)} - i_{BC}^{(1)}$$

Le correnti di linea sono sinusoidali, perché le terze armoniche si annullano.

• Primo a stella con neutro

Termini concatenate sinusoidali  $\Rightarrow$  tensioni di fase e flussi sinusoidali.  
 Fem indotte sono sinusoidali.

Le correnti magnetizzanti sono distorte e perciò anche le correnti di linea lo sono (hanno la terza armonica).

Se le correnti di linea sono  $\pm 2/3\pi$ , le terze armoniche sono in fase.

Se le correnti di linea sono equilibrate, la corrente nel neutro è dovuta alle 3<sup>o</sup> armoniche e quindi il neutro è sempre percorso da una terza armonica che può essere disturbata, ad esempio alle linee telefoniche, emessa a 150 Hz.

$$i_A = i_A^{(1)} + i_A^{(3)}$$

$$i_B = i_B^{(1)} + i_B^{(3)}$$

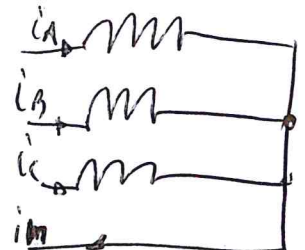
$$i_C = i_C^{(1)} + i_C^{(3)}$$

$$i_n = i_A + i_B + i_C$$

$$i_A^{(1)} + i_B^{(1)} + i_C^{(1)} = 0 \text{ (cond. equilibrio)}$$

$$i_A^{(3)} + i_B^{(3)} + i_C^{(3)} = i_n^{(3)}$$

$$i_n = i_A^{(3)} + i_B^{(3)} + i_C^{(3)} = 3 i_A^{(3)}$$



Prendendo un primario a stella senza neutro.

Le somme delle correnti di linea deve essere nulla

Le terre ammucchiate non possono circolare sulle linee perché sono in fase tra loro e devono annullarsi

$$i_A = i_A^{(1)} + i_A^{(3)}$$

$$i_B = i_B^{(1)} + i_B^{(3)}$$

$$i_C = i_C^{(1)} + i_C^{(3)}$$

$$i_A + i_B + i_C = 0 \quad (\text{non c'è neutro})$$

$$i_A^{(3)} + i_B^{(3)} + i_C^{(3)} = 0$$

$$i_A^{(3)} \neq i_B^{(3)} = i_C^{(3)} = 0$$

⇓

$$i_A = i_A^{(1)}$$

$$i_B = i_B^{(1)}$$

$$i_C = i_C^{(1)}$$

In queste condizioni occorre la tensione del centro steno, perciò le tensioni di fase vanno e vanno anche i flussi, che non sono più sinusoidali.

Inoltre, se le tensioni di fase sono sfasate di  $\pm \frac{2}{3}\pi$ , le terre ammucchiate sono in fase.

Le tensioni concatenate sono sinusoidali, questo non è in contraddizione con il fatto che le tensioni di fase siano distorte

$$e_A = e_A^{(1)} + e_A^{(3)}$$

$$e_B = e_B^{(1)} + e_B^{(3)}$$

$$e_C = e_C^{(1)} + e_C^{(3)}$$

$$e_A^{(3)} = e_B^{(3)} = e_C^{(3)}$$

$$v_{AB} = e_A - e_B = e_A^{(1)} - e_B^{(1)}$$

$$v_{BC} = e_B - e_C = e_B^{(1)} - e_C^{(1)}$$

$$v_{CA} = e_C - e_A = e_C^{(1)} - e_A^{(1)}$$

$$e_A \propto \phi \Rightarrow \phi \text{ distorto}$$

Questo può creare problemi sul secondario, non avendo il flusso sinusoidale (ferroto, come lo era a triangolo con il neutro).

Se il scenario è a TRI

- Le tensioni sono distorte (di fase)
- Le concatenate sono sinusoidali

Se il SECONDARIO È A ZIG-ZAG

Se servono le tensioni di fase, quindi un secondario con neutro, il collegamento a zig-zag elimina le armoniche e ottiene tensioni sinusoidali.

Se i flussi sono distorti, le tensioni indotte contengono le terze armoniche. Le tensioni di fase sono date però dalla differenza di due tensioni indotte su colonne diverse. Le terze armoniche perciò si annullano.

$$E_a = U_{a2} - U_{b1} = U_{a2}^{(1)} + U_{a2}^{(3)} - U_{b1}^{(1)} - U_{b1}^{(3)} \quad \left. \begin{array}{l} \\ U_{a2}^{(2)} = U_{b1}^{(3)} \end{array} \right\} = U_{a2}^{(1)} - U_{b1}^{(1)} = E_a$$

Per il secondario a triangolo, le tensioni caratteristiche sono distorte, essendo distorto il flusso. Le correnti di fase sono anche distorte. Quelle di linea, differenza di due, sono sinusoidali. Una corrente di fase armonica circola sulla maglia formata dalla stella triangolo, cioè sui tre avvolgimenti. Per lei, questa si oppone alle sue cause (cioè la terza armonica nel flusso) diminuendola, in una sorta di retroazione. La distorsione è più ridotta che nel caso della stella.

### SCelta COEFFICIENTI

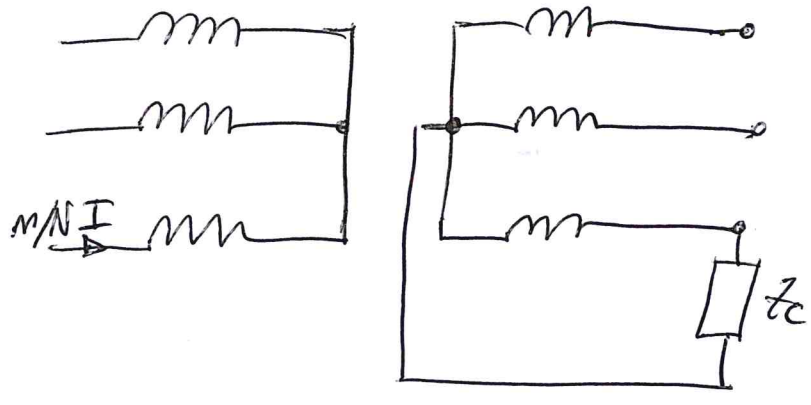
- Stesse condizioni nelle armoniche
- A parte di tensioni caratteristiche in quello a stella le tensioni di fase sono minori  $\cong = \frac{V}{\sqrt{3}} \Rightarrow$  avvolgimenti con minori tensioni, adatti per tensioni elevate.
- Il collegamento a triangolo non ha dipendenza il neutro
- Se le correnti nel secondario sono equilibrate è conveniente avere il primario a triangolo: il triangolo-stella è usato nei trasformatori di



distribuzione.

### TRASFORMATORI CON GRUPO SQUILIBRATO

PRIMARIO A STELLA

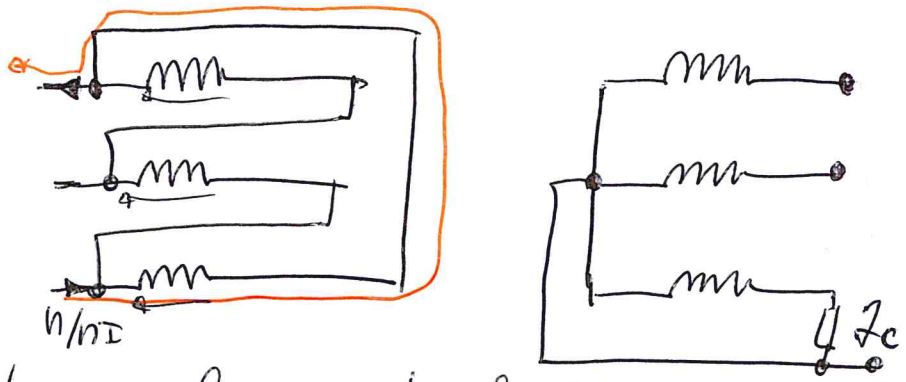


Si collega un cavo che mette I tre una fase del secondario e il neutro.

La fase corrispondente nel primario è percorsa da corrente  $nNI$  e deve richiudersi attraverso le altre due fasi

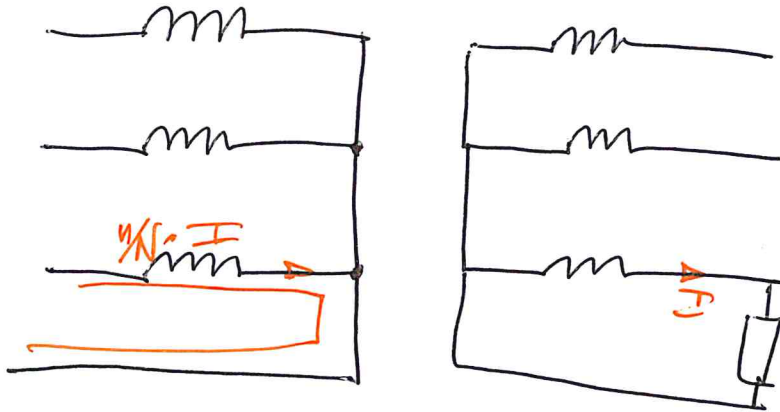
Le correnti nelle altre fasi del primario, non essendo bilanciate dai correnti nel secondario, causano una rotazione del flusso e perciò delle forze elettromagnetiche indotte. Le tensioni delle femme di fase diviene asimmetriche (spostamenti del centro di fase).

PRIMARIO A TRIANGOLO



In questo caso la corrente al primario si richiude sui conduttori senza attraversare le altre due fasi e perciò la presenza del cavo le femme di fase non sono perturbate.

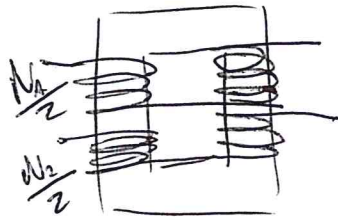
PRIMARIO A STELLA CON NEUTRO



Si può ottenere lo stesso risultato con il primario a stella con neutro, le correnti si riducono con il neutro. In fatti le tensioni di fase ora sono fimate praticamente e quindi lo è anche il flusso  $\phi$ , di conseguenza le correnti (e parte una parte continua, che è nulla essendo t. simmetrica).

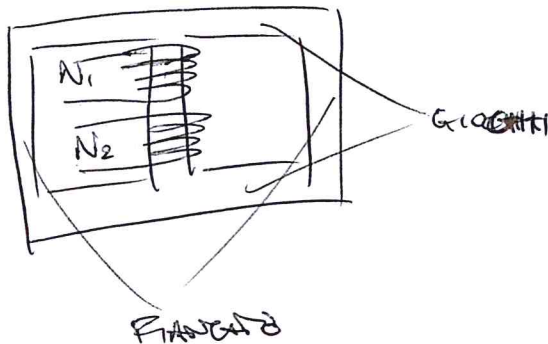
CARATTERISTICHE COSTRUTTIVE

trifase: AT e BT ~~su due~~ divisi in due colonne



Se le colonne e propri hanno stessa sezione, il valore dell'induzione è lo stesso in tutte le sezioni del nucleo.

Se a ventello (o connesso)



- Entrambi nella colonna centrale
- Sui propri e fraente c'è un bel flusso da quella centrale.
- Per area stessa induzione, la sezione deve essere metà.

Traforare tre colonne: su ciascuna colonna sono disposti AT e BT. Se temp. elev. sono term. simmetriche, i flumi sono un sistema simmetrico. Se colonne e propri hanno stessa sezione, il valore dell'induzione è lo stesso in tutte le sezioni del nucleo.

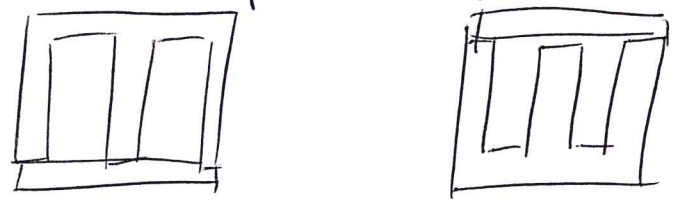
Traforare 5 colonne: i flumi nei propri e fiancate sono inferiori di un valore  $\sqrt{3}$ . Per uno flumo, le colonne esterne devono essere nobette.

Nucleo:

Il nucleo è realizzato con laminari ferro-silicio, il quale consente più rendimento e una più nobetta istantanea magnetica. Ha lo sviluppo di essere più fragili.

Si possono fare anche laminari a cristalli orientati; ma hanno migliori prestazioni di quelli non orientati, quando se l'asse coincide con quello del nucleo. Essendo orientato bisogna fare attenzione particolare a costruire il nucleo.

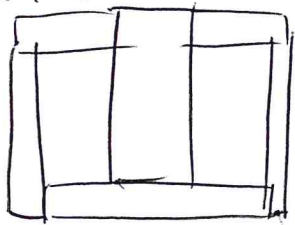
Per necessità costruttive non sono continui, ma devono essere tagliati. Per piccole potenze si usano due laminari



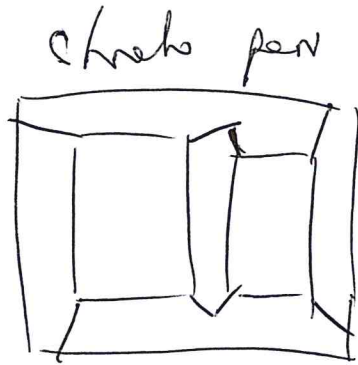
Per potenze sopra e qualche kVA si usano più strati di laminari

strati pari

strati dispari



con circuiti sventati, le stacche hanno pochi difetti:  
per ridurre i fatti in cui la direzione del flusso non corrisponda  
con le direzioni di laminazione



(se vuoto) di spina  
(il divergere)

I giunti possono essere fatti con i laminari spaccati, più semplice,  
o intercalati, più robusti e con meno rilletatura e perciò minore  
corrente di magnetizzazione (sempre anche e sbreco).

Le sezioni delle colonne è quadrata per i trasformatori a bassa  
potenza. Al crescere si fa a peduni, per avvolgimenti ~~più~~ con  
spire più corte e maggiore resistenza agli sforzi elettrodinamici.  
Per i potenzi sono introdotti canali per lo smaltimento del calore con  
l'isolamento, per potenze ancora più elevate.

Gli avvolgimenti possono essere in rame o alluminio, con  
sezioni circolari o rettangolari (piattine). Le piattine  
si usano se la sezione non è circolare e consente miglior sfruttamento  
del volume disponibile.

Come sono disposti gli avvolgimenti dipende da diversi fattori:

- accoppiamento magnetico: se uno dentro l'altro si riducono i flussi di perdita
- isolamento: i due avvolgimenti e nucleo devono essere isolati tra loro
- raffreddamento: nei trasformatori di alta potenza, vengono usati per il raffreddamento per mettere il calore creato nel nucleo e condutture

## Envolpments:

- Concentrico semplice: due bobine concentriche. Solitamente BT interno per ragioni di isolamento, realizzato con tubi isolanti e tra avvolgimento in lancia uno spazio per refrigerante.
- Concentrico doppio: uno dei due avvolgimenti (di solito BT) è diviso in due sezioni che occupano lo strato più interno e il più esterno. Si hanno ragioni di dispersione minori e si riduce lo spessore elettromeccanico tra le bobine.
- Alternato: Gli avvolgimenti BT e AT sono costituiti da più bobine messe in alternanza, intercolate tra loro. Le prime e ultime bobine (di solito BT) sono divise per ridurre reatt. dispersione sezioni più isolanti. Questa configurazione riduce gli spari e perciò si usano solitamente con circuiti divisi (e tensioni come  $\frac{4}{11}$  o comunque non molto elevate).

## RAFFREDDAMENTO

Per migliorare l'efficienza prodotta servono sistemi di raffreddamento della potenza nominale del trafe. che funzionano distribuiti sempre più complessi ed efficaci.

- A secco: fuso e qualche kVA, con raffreddamento a circolazione naturale o forzata
- A olio: si mette il trafe in un contenitore pieno d'olio minerale. Questo raffredda e isola. L'esterno del contenitore deve essere raffreddato. Per potenze fino a 100kVA si usano eliche e canali naturali, per potenze superiori (centimetri) con ventilazione forzata naturale o acqua. C'è da 50kVA in su, oltre alle eliche si mettono radiatori esterni, raffreddati ad acqua.

Si indicano i raffreddamenti con delle sigle composte da 2-4 lettere, indicante fluido e circolazione

A = aria      O = olio      W = water      L = liquido non infiammabile  
 G = gas

N = circolazione naturale      F = forata con pompe o ventole  
 D = driven: guidate con pompe, quindi forate e guidate

Ad esempio

AN = Naturale col aria

AF = Aria forata

ODAF = trafe in olio, circolazione olio forata, circolazione  
 aria forata con ventole

ODWA = trafe olio, circ. forata, refl. esterno ed segue con  
 circolazione forata tramite pompe.

## TRASFORMATORI SPECIALI

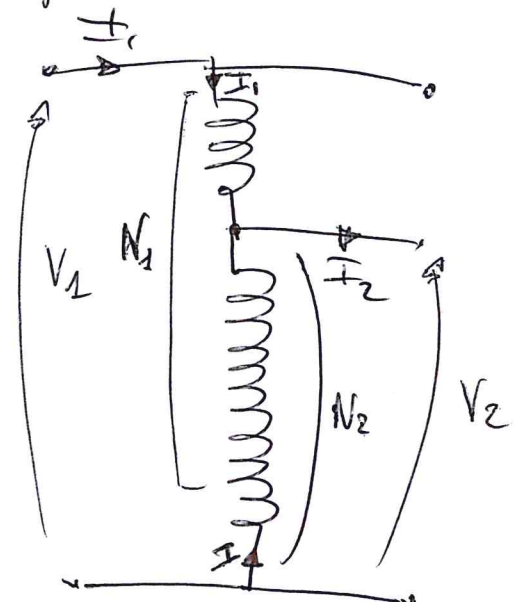
### AUTOTRASFORNITORI

È un trasformatore dotato di un solo avvolgimento con  
 una presa intermedia

Può essere considerato come un trasformatore  
 in cui primario e secondario sono avvolti  
 in un unico avvolgimento:

Il primario ha tutte le  $N_1$  spire,  
 il secondario  $N_2$  spire, una parte.

Il circuito primario e secondario non sono  
 elettricamente separati.



Per vedere il funzionamento, si considerano trascurabili le cadute interne degli avvolgimenti, la perdita nel ferro e la ruttanza del circuito magnetico.

Tali effetti possono essere considerati allo stesso modo dei trasformatori tradizionali.

Le equazioni interne con le potenze di cui sopra, sono

circuito primario  $\rightarrow V_1 = i\omega N_1 \Phi$

secondario  $\rightarrow V_2 = i\omega N_2 \Phi$

magnetico  $\rightarrow \cancel{(N_1 i_1 - N_2 i_2)} \rightarrow (N_1 - N_2) I_1 - N_2 I = 0$   
in principio una condizione la config

legge Kirchhoff correnti  $\rightarrow I_2 = I_1 + I$

Da ciò si ottiene

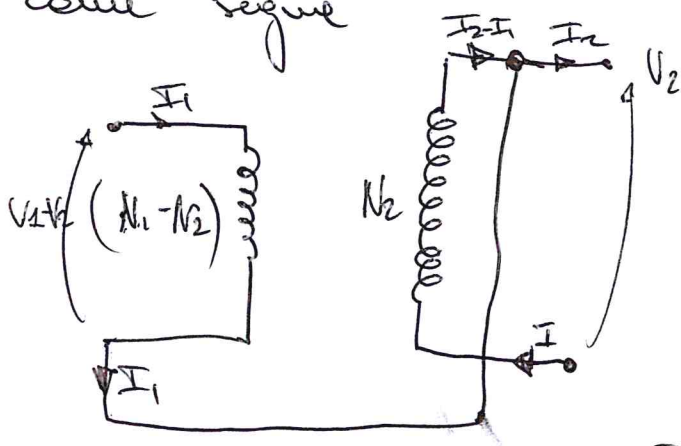
$$V_1 = \frac{N_1}{N_2} V_2 = K V_2$$

$$I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2 = \frac{1}{K} I_2$$

$$I = \left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right) I_2 = \frac{K-1}{K} I_2$$

Concludono le relazioni con quelle del trasformatore ordinario di  $N_1$  e  $N_2$  spire. La corrente del tratto comune è inferiore a quella di  $I_2$ , come all'incirca è 1 di  $K$ .

Si può immaginare che sia ottenuto da un trasformatore collegato come segue



Con buona approssimazione  $V_1$  e  $V_2$  sono in fase tra loro. Come lo sono  $I_1$  e  $I_2$ .

Si possono scrivere le potenze apparenti.

$$S_1 = (V_1 - V_2) I_1 = S_2 = V_2 (I_2 - I_1) = S_0$$

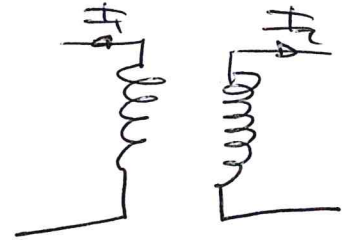
Sono uguali tra loro

Gli avvolgimenti devono essere proporzionati con questo valore, detta potenza di dimensionamento  $S_D$ .

Inoltre l'autotrasformatore è comunque un trasformatore con  $N_1$  spire e primario e  $N_2$  e secondario.  
 La potenza trasferita da primario a secondario è detta potenza portante

$$S_1 = V_1 I_1 = S_2 = V_2 I_2 = S_p$$

Coincide con la potenza apparente trasferita da primario a secondario per il trasformatore con



Per un trasformatore ordinario la potenza portante è quella di dimensionamento coincidente. In un autotrasformatore si ha

$$\frac{S_D}{S_p} = \frac{V_1 - V_2}{V_1} = \frac{I_2}{I_2 - I_1} = \frac{(K-1)V_2}{KV_2} = \frac{K-1}{K}$$

Quindi a parità di potenza portante, l'autotrasformatore può essere dimensionato per una potenza inferiore.

In fatti solo parte della potenza <sup>portante</sup> è trasferita dal circuito magnetico, la parte ~~portante~~ restante (che è la maggior parte se  $K < 2$ ) avviene direttamente grazie al collegamento dei circuiti.

$K=1$ , è trasferita tutta dal circuito (collegato direttamente...)

È conveniente se  $K > 1$ : primario con spire ridotte in numero di un fattore  $\frac{K-1}{K}$ ; secondario con sezione ridotta del fattore  $\frac{K-1}{K}$ . Il minor ingombro fa ridurre le dimensioni totali. Le perdite sono minori e perciò rendimenti migliori e minori reattanze di dispersione.



I vantaggi relativi al crescere di  $K$ . Dato che gli isolamenti devono essere dimensionati in base a  $V_1$ , in pratica non conviene sopra il valore di  $K > 4$ .

Il principale svantaggio resta comunque quello che il primario e secondario non sono isolati elettricamente. Non può essere usato se i circuiti devono essere tenuti distribuiti per ragioni di sicurezza. Se si ha un punto ~~del~~ con interruzione nel tratto comune, sul secondario si ha la tensione del primario.

Finora era un abbinata di tensioni, può essere usato come divettore di tensioni, facendo diventare  $V_2$  l'input e  $V_1$  output.

Il VARIAC è un autotrasformatore con il contatto scorriente mobile, in modo da poter variare il rapporto spire in maniera continua.

Possono essere realizzati gli auto trasformatori anche trifasi, e usualmente sono collegati a stelle. Con il triangolo il rapporto di trasformazione può essere solo tra 1 e 2.

### TRASFORMATORI DI MISURA

Per misure tensioni e correnti molto elevate si usano comunemente dei trasformatori, un modo da collegare i livelli di tensione e corrente alle portate degli strumenti e garantire la sicurezza dell'operatore. Tali trasformatori sono i trasformatori di corrente, che operano in condizioni diverse da quelli di potenza e servono a scopi diversi. Il primario si collega alla tensione da misurare e il secondario al relèmetro. Si ha se la tensione ripete la parte del relèmetro  $\Rightarrow V_1 > V_2$  e perciò  $N_1 > N_2$ . Il topo funziona praticamente a vuoto, essendo  $I_{relèmetro} \approx 0 \Rightarrow V_1 = V_2 \frac{N_2}{N_1}$  abbastanza precisa.

Tra gli errori di misura ci sono le cadute sulle impedenze  $R_1 + jX_{d1}$  e  $R_2 + jX_{d2}$ , due diversi errori trascurabili, perciò la  $I_0$  deve essere piccola (cioè quella parallela al primario).

Per minimizzare comunque, si aumentano le sezioni per aumentare la riluttanza ~~reluttanza~~, si usa un nucleo con  $\mu \gg 1$  in modo da aumentare la riluttanza e perciò  $I_0$ . Gli avvolgimenti sono fatti in modo che minimizzino la reazione di dispersione.

Altro trasformazione di misura è quello di corrente. (prima era tensione).

Qui si mette il primario in serie alla fase si cui misurare la corrente. Sul secondario si collega l'ampereometro, con secondario in corto  $\Rightarrow V_2 = 0$

Si misura quindi una corrente troppo alta per il fuso del dell'ampereometro

$$I_1 > I_2 \Rightarrow N_1 < N_2$$

$I_2 = I_1 \frac{N_1}{N_2}$  essendo il secondario praticamente in corto, la corrente è ripartita dal primario

Se il rapporto spire è ~~molto~~ piccolo, se si toglie l'ampereometro si riducono tensioni indotte e perciò serve un interruttore che si chiude e mette in corto se non c'è l'ampereometro, per sicurezza.

Per ridurre gli errori si deve aumentare la corrente  $I_0$ . Le fasi isolate devono essere la più piccole possibili, perciò due esse piccole  $R_2$  e  $X_{d2}$ .

Si usa un materiale ad elevata permeabilità e si aumenta la sezione del nucleo per ridurre la riluttanza. Ancora per ridurre si usano nuclei toroidali (minore lunghezza media del

circuito magnetico. Si assume la sezione dei conduttori nel secondario.

La corrente  $i_2$  dipende da  $R_1 + jX_1$  e perciò il numero di spire del primario è sempre molto piccolo rispetto a quello del secondario. Si può ridurre ad un solo caso particolare all'interno del nucleo toroidale.

o Trasformatore a corrente costante

Esige una corrente costante al verso del cono, usato in reti di illuminazione con lampadine in serie.

Ci sono due bobine, una fissa e una mobile, sulla stessa colonna di un nucleo ferromagnetico. La mobile è collegata ad un contropeso  $Q$ , non sufficiente a bilanciare il peso  $P$  della bobina.

Gli avvolgimenti sono realizzati in modo che, quando circola corrente, la forza  $F$  sia repulsiva. La forza  $F$  tra le bobine è indipendente della distanza  $d$ , ma funzione solo della corrente nelle bobine.

All'aumentare della distanza, cresce la reazione di dispersione.

Il sistema è in equilibrio, con la bobina sollevata, solo quando

$$F(I) = P - Q$$

- $Q =$  forza peso contropeso
- $P =$  forza peso bobina
- $F =$  forza campo bobine

Facciamo riferimento al circuito eq. di Kapp

$$I_2 = \frac{V_2}{\sqrt{(R_2 + R)^2 + (X_2 + X)^2}}$$

e si assume che il sistema sia in equilibrio con  $I_2 = I$ . Si verifica quali dimensioni abbia una versione dell'modulo di  $F$ .

Una diminuzione oltre  $I_2$ , che aumenta la forza repulsiva tra le bobine, ne aumenta la distanza, aumenta la ruttanza di dispersione e quindi il modulo di  $Z_{cc} + Z$ . Si riduce la corrente e perciò anche la forza. Il sistema tende a ripartirsi in equilibrio con  $I_2 = I$ . L'aumento della ruttanza di dispersione compensa la diminuzione del modulo dell'impedenza, perciò il valore efficace della corrente resta costante. Infatti il sistema è in equilibrio solo con una particolare forza e quindi corrente.

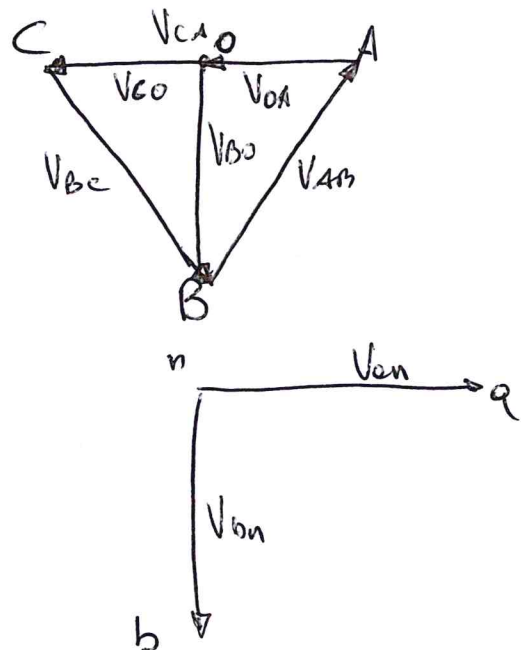
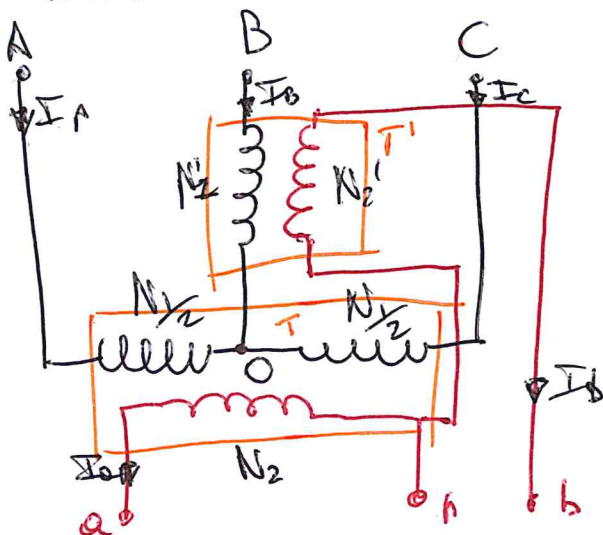
### • TRASFORMATORI A TRE FASE

Permette di trasferire potenza tra due sistemi polifase con numero di fasi diverse. Il caso più comune è con una da due fasi, essendo la norma nelle distribuzioni.

Si vedranno due casi particolari:

- TN trifase - rete Scott  $\Rightarrow$  trifase in doppio monofase, per ottenere un carico trifase equilibrato da due carichi monofase uguali
- for-escape - usata per alimentare gruppi resistivi.

### INVERSIONI SCOTT



La conversione trifase può essere ottenuta mediante due trasformatori  $T$  e  $T'$  collegati come nella figura.

Il primario del trasformatore  $T$  è dotato di pene centrale a cui è collegato  $T'$ .

Le tensioni sulle due sezioni del primario di  $T$  sono uguali ( $V_{BO}$  e  $V_{OA}$ ) (sono uguali perché hanno lo stesso flusso).

Di conseguenza le  $V_{BO}$  e  $V_{OA}$  sono sfasate di  $90^\circ$  rispetto a  $V_{CA}$  e si ha

$$V_{BO} = \frac{\sqrt{3}}{2} V_{CA}$$

Affinché le tensioni del secondario costituiscono un sistema trifase simmetrico ( $V_{an} = j V_{bn}$ ) occorre che i rapporti spire dei trasformatori soddisfino la condizione

$$K' = \frac{N_1'}{N_2'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{N_1}{N_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} K$$

in modo che over le stese tensioni, cioè annullando le  $V_{BO}$  rispetto alle  $V_{CA}$  se vengono collegate due impedenze uguali ai terminali a-n e b-n, le correnti  $I_a$  e  $I_b$  formano un sistema trifase simmetrico.

$$I_a = j I_b$$

La corrente nel primario di  $T'$  è  $I_B = \frac{I_b}{K'}$   
Le correnti negli avvolgimenti di  $T$  devono soddisfare le condizioni

$$\frac{N_1}{2} I_A - \frac{N_1}{2} I_C = N_2 I_a$$

Inoltre

$$I_A + I_B + I_C = 0$$

Combinando le relazioni si ha

$$\frac{N_1}{2} I_A + \frac{N_1}{2} (I_A + I_B) = N_2 \cdot k I_B$$

Quindi

$$I_A = -\frac{I_B}{2} + i \frac{k}{k} I_B = \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) I_B$$

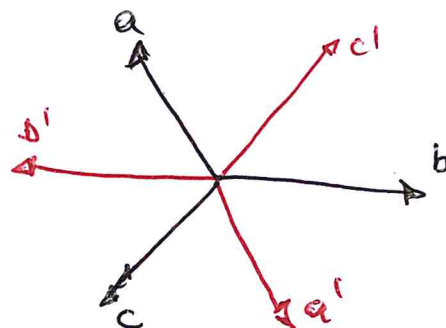
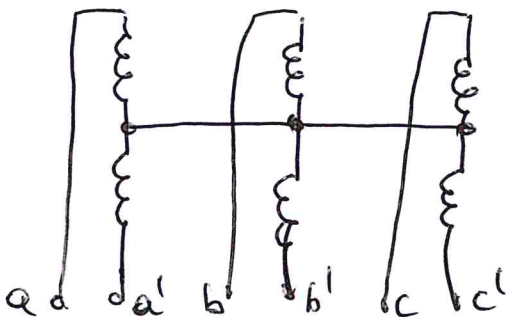
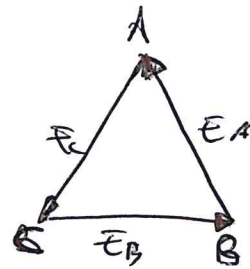
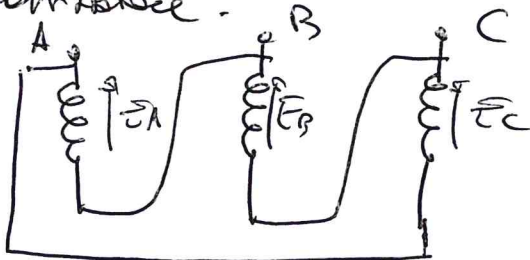
Inoltre risulta

$$I_C = \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) I_B$$

Se le due impedenze sono uguali si ottiene un sistema trifase equilibrato.

### TRASFORMAZIONE TRI-ESAFASE

Può essere ottenuta mediante un trasformatore con secondario a doppia stella. Gli avvolgimenti secondari sono collegati in modo che stiano in opposizione di fase. Di solito il primario è collegato a triangolo, in modo da ridurre gli effetti dovuti agli squilibri del carico, che di solito è un ~~resistore~~ resistore.



Elementi di impianti elettrici e sicurezza

