

CIRCUITI A COSTANTI DISTRIBUITE

In guida d'onda:

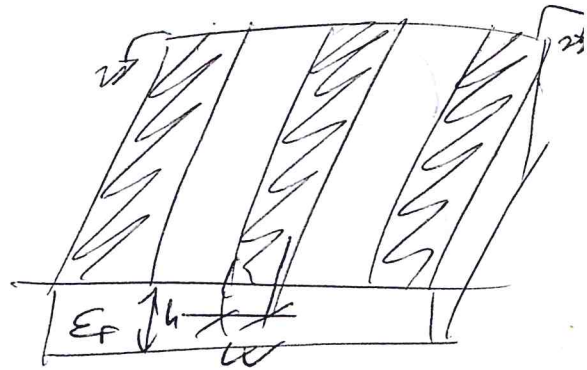
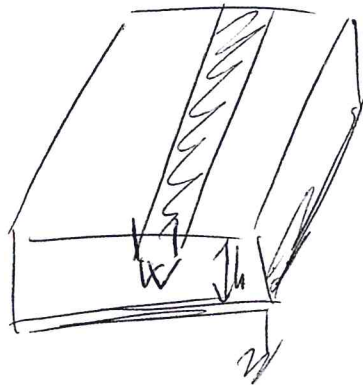
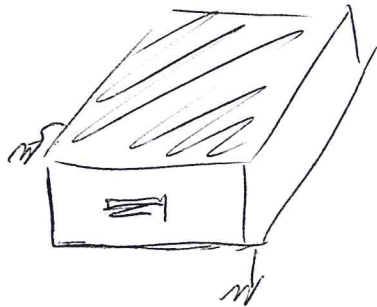
- strutture chiuse (non radiative), adatte per applicazioni ad onde millimetriche e elevate potenze
- Difficilmente miniaturizzabili e costose
- Non adatte ai dispositivi ottici

Strutture piane:

- Strutture aperte
- Facilmente miniaturizzabili ed economiche
- Facilmente collegabili ai dispositivi ottici
- Stripline

Microstriscia

Guida Coplanare



Hyp Quasi-staz

L'esponente nell'integrale per calcolare il campo indotto deve essere costante (approssimativamente) a zero

$$e^{-j\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} r} \Rightarrow \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} r \ll 2\pi$$

$$\Rightarrow 2\pi \frac{v_0}{\lambda} \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} r \ll 2\pi$$

$$\boxed{\frac{r}{\lambda} \ll 1}$$

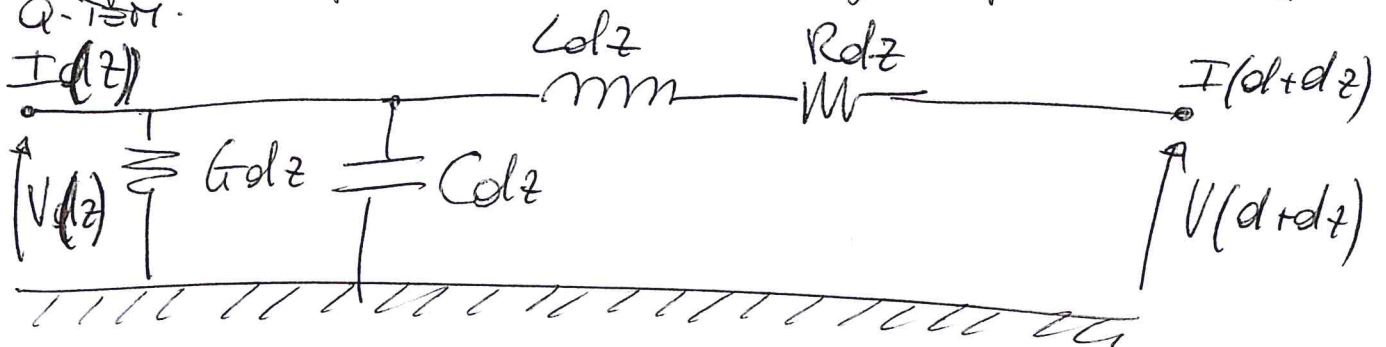
Circuiti a costanti distribuite

Le strutture planari possono essere studiate, in prima approssimazione, con la teoria delle linee di trasmissione.

Bisogna però fare attenzione ai modi radianti, approssimati esprimendo della formula

$$e_r(r) = \int_0^{w\sqrt{\epsilon}} \left(\underline{E}_+ e^{-\gamma z} + \underline{E}_- e^{+\gamma z} \right) dz$$

Nel caso di propagazione TEM, se omogenea, o Q-TEM se non omogenea, è possibile introdurre un circuito eq. L'esperienza circuitale è ottenibile dalle eq. di Maxwell (vedi comp. 2^a) per una frequenza infinitesima. Questo è rigoroso per TEM e approssimato per Q-TEM.



I parametri sono riferiti a componenti infinitesimi e distribuiti per la lunghezza della linea \Rightarrow circuiti a costanti distribuite \Rightarrow eq. dei telegrafisti.

Quindi entro una certa freq., per la quale vale l'ipotesi Q-TEM è approssimabile come circuito di questi elementi infinitesimi.

Sopra certe freq ($> 5; 7$ GHz) non vale più e bisogna simulare con sim. 3D non circuitale ma con che calcolano il campo in totale.

Le strutture planari possono essere utilizzate in diversi architetture. Per realizzare componenti non radiative, componenti puramente reattivi attraverso gli stub aperti o in cc, componenti concentrati (quelli L e C (e f non oltre) e componenti lineari (ad esempio filtri, accoppiatori e divisioni di potenza).

Consentano facili accoppiamenti con i componenti non attivi (2)

• Microvague Integrated Circuits (MIC)

Si suddividono la produzione e realizzazione dei dispositivi ottivi e passivi in fasi distinte e separate.

Su un substrato dielettrico (plastico o ceramico) si costruisce la struttura planare passiva.

Si collega o su di essa i vari dispositivi ottivi a semiconduttore che sono stati realizzati separatamente.

Queste reti sono dette IBRIDE

Pros:

Si possono includere componenti passivi di natura diversa. I sottocircuiti possono essere riparati o sostituiti singolarmente nel caso di difetto.

Possono essere scelti diversi tipi di substrati:

- plastico (ceramici): Dureid ($\epsilon_r = 2-10$), Teflon ($\epsilon_r = 2.2$), FR4 ($\epsilon_r = 4$)
- ceramico: Allumina (Al_2O_3) ($\epsilon_r = 9.8$)

I materiali ceramici hanno sintato fortemente i MIC.

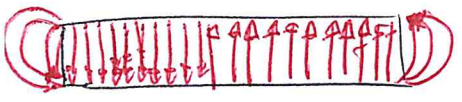
Questo grazie alle basse perdite ($\tan \delta = \frac{c}{\omega \epsilon}$ produzione), stabilità meccanica e termica, ϵ_r alto, ottime caratteristiche meccaniche.

Ovviamente il substrato dipende dalla applicazione. Valendo guidare il segnale, bisogna contenere il campo di fringing, mentre si espanderà nel caso si voglia irradiare.

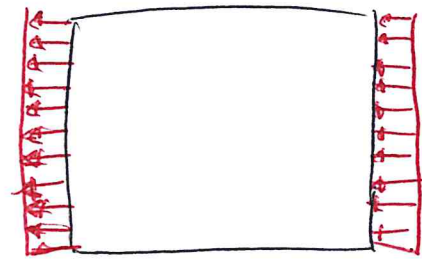
Quindi nel caso di irradiazione $\epsilon_r \gg$, mentre le perdite $\epsilon_r > 20$ e campo vicino < 4 .

Ovviamente in tutte quelle applicazioni: irradiazione ha un antenna $h \gg \lambda$.

PROCH



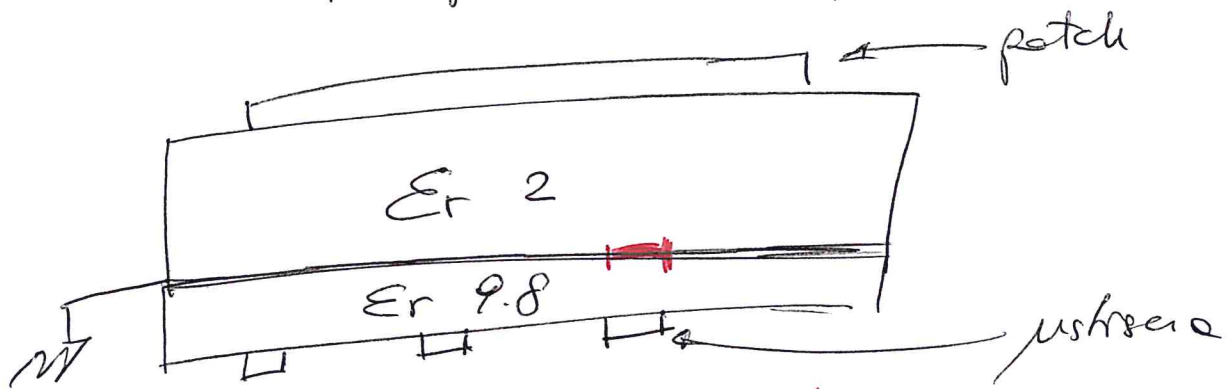
SA



Il campo di fringing si comporta come un'antenna col

apertura e quindi due aperture in array.

Ci sono soluzioni in cui devono convivere soluzioni diverse e allora le soluzioni più eleganti sono i supporti multistrato.



Per collegare la parte in microstrip alla patch si può lavorare un foro nella zona centrale e lavorare che vi sia un accoppiamento tra le strutture.

A volte però potrebbero essere entrambi fatti su un materiale intermedio.

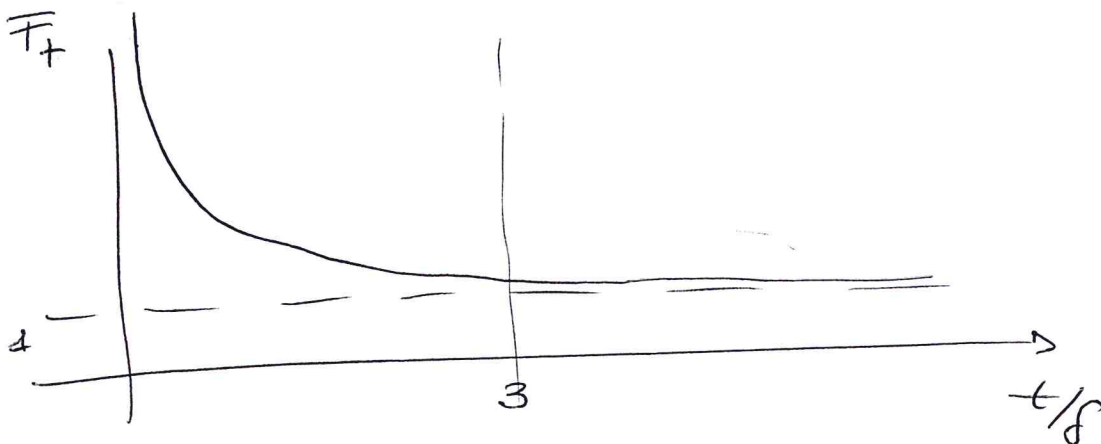
Materiali conduttivi:

Anche la parte conduttiva deve essere scelta accuratamente. Solitamente si sceglie tra oro, argento, rame e alluminio.

Infatti devono essere buoni conduttori con buone caratteristiche meccaniche e lo spessore deve essere almeno 3 volte lo spessore di penetrazione.

δ spessore penetrazione

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu}}$$



a 3 $\overline{T_+}$ circa 1

Lo spreco S dipende dalla frequenza e perciò dipende $\textcircled{3}$
dalla frequenza di utilizzo.

Ad esempio per l'oro

$$SAu = 2.6 @ 1 \text{ GHz}$$

$$\approx 8 @ 100 \text{ MHz}$$

ma non siamo in
microonde

La fabbricazione può avvenire per litografia ed etching chimico
oppure per fusione.

Monolithic Microwave Integrated Circuits (MMIC)

Si tratta di inserire tutto sullo stesso chip, unendo componenti
attivi e passivi.

Le interconnessioni sono realizzate in diverse fasi del processo
tecnologico.

Serve inoltre un materiale che possa essere stampato come semi
isolante e semi-conduttore.

Consentono però di integrare fortemente, riducendo la dimensione
del circuito completo. La tecnologia di costruzione è molto
refinata e costosa, che può essere distribuita solo su larga scala.
Non consentono replonari e posteriori, perciò è importante fare
buone simulazioni!

Materiali molto utilizzati e che rappresentano la maggioranza delle
realizzazioni MMIC sono Silicio (11.9) e GaAs (12.9).

Il primo è più economico ma le prestazioni sono modeste
e limitate a frequenze $< 6 \text{ GHz}$. Si basa sull'uso del BJT.

Il secondo ha consentito un forte sviluppo del MMIC grazie
a proprietà molto buone. Consente MESFET che lavorano fino a 100 GHz .

La frequenza massima dipende dalla lunghezza di canale, se è molto
ridotta, si verifica la considerazione sulle istantanee del canale
e perciò non è più istantanea la trasmissione.

Si sono substrati particolari per applicazioni di micelide (GaN, InP,
SiC) adatti ad applicazioni spaziali o link ad alta potenza.

Iniziano ad emergere anche SOI (Silicon On Insulator) e
SOS (Silicon on Sapphire) per ridurre le capacità parassite nei dispositivi
non lineari.

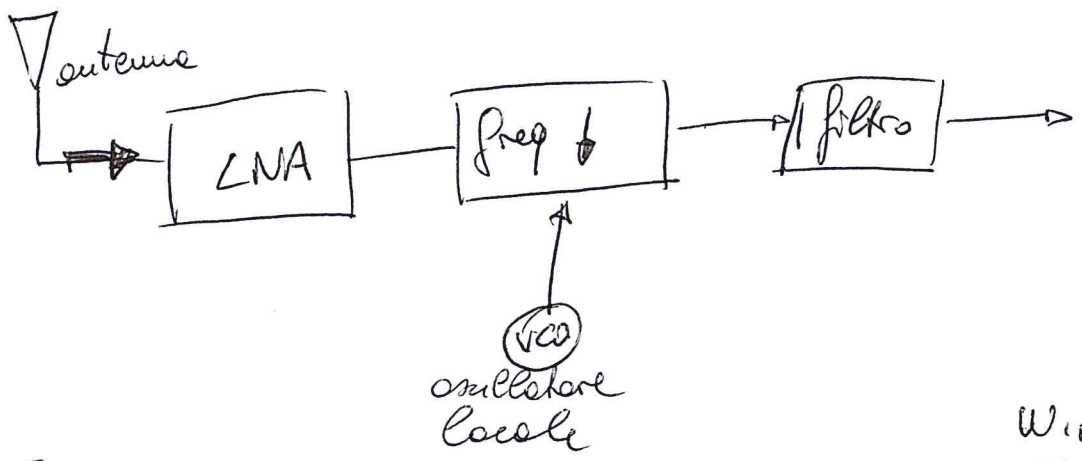
I MMIC sono creati in varie fasi:

1. Si forma uno strato attivo su uno semi conduttore di GaAs
2. Si creano zone isolanti per la parte passiva
3. Contatti ohmici e bonding Schottky per componenti attivi.
4. Si crea la metallizzazione per le strutture planari.
5. Si crea metallizzazione per le interconnessioni.

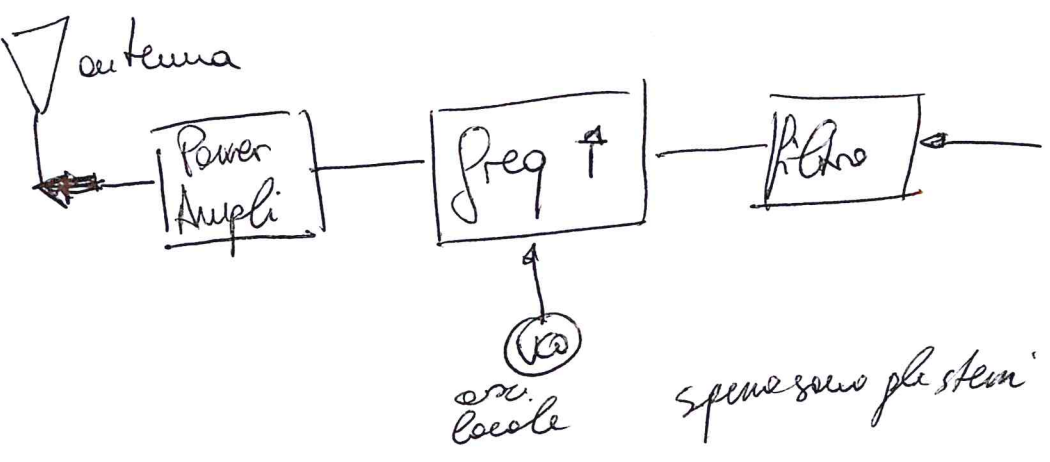
La scelta tra MIC e MMIC è fatta in base a varie caratteristiche tra cui costi, dimensioni, flessibilità, affidabilità, tipologia di circuito, rumore e destinazione del circuito. Per il rumore MIC è migliore, potendo scegliere componenti meno rumorosi nei primi stadi. Il MMIC offre un risultato più stabile ed è progettato avendo una tecnologia ben collaudata e stabile.

SISTEMA RADIO Rx e Tx

Rx



Tx



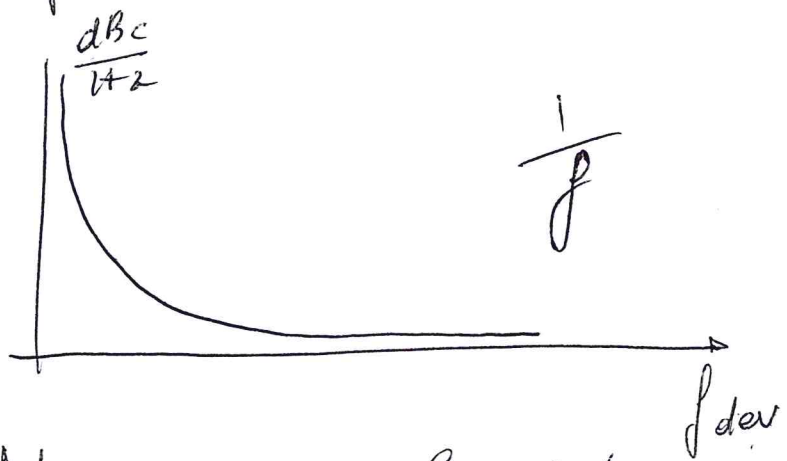
$$W_{IF} = |W_{osc} - W_{rc}|$$

nella freq ↓

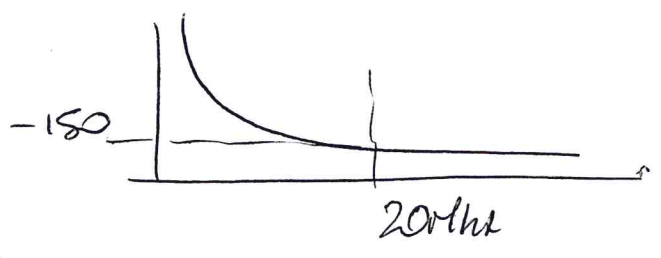
spese sono gli stessi

Il power amplifier è una componente molto delicata e difficile da progettare.
 L'oscillatore locale potrebbe introdurre del rumore di fase descritto in termini dBc/Hz cioè dB carrier / Hz

Dopo i vari blocchi si può passare ai vari ADC.



Ad esempio se la distanza tra due canali GSM è 200kHz
 e ha $-150 \frac{dBc}{Hz}$ $\frac{-150}{10} = -15$



Si nota che viene sprecata la fase.

$P_R = 1W \cdot 10^{-15} \cdot 200kHz = 200pW$ 200kHz è la banda del segnale.

Eventuali interferenze sull'oscillatore possono creare forti depressioni sui segnali.

Il front end contiene componenti passivi, come Antenna, Accoppiatore abutenna, Balun (tipo LAN G E CARIER, che divide potenza emessa), filtri, ma anche componenti attivi nell'LNA.

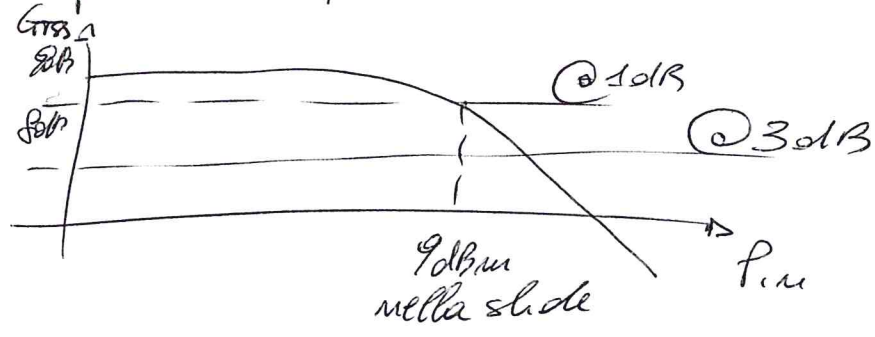
Nella figura dell'LNA a larga banda a senso capente di by-pass, in modo da bloccare la continua, induttori di choke attenuati con stub risonanti ($L \gg$ cioè $\sim 100nH$) per non fare andare RF su alimentazione.

Si parla di accoppiatae incrociate perché si ha un' accoppiatae a 3dB in ingresso e poi in uscita in modo da separare il segnale a metà in potenza e aumentare la dinamica totale.

Il travelling wave amplifier ha un comportamento a larga banda, perché amplifica sempre lo stesso segnale opportunamente ritardato.

I PHEMT sono transistor a effetto di campo che hanno una gamma tra due ordini di grandezza con bandgap differente per creare il canale invece che attraverso una regione dopata. Possono operare a frequenze molto elevate.

Il punto di compressione @ 1dB



G_{TSS} = guadagno di transizione small signals.

L'efficienza (Power Amplifier Efficiency) è intrinsecamente collegata alla tipologia di amplificatore.

Le perdite di ritorno e legate alla riflessione alla porta in ingresso. Più è alta le perdite di ritorno e migliore è l'efficienza.

Alcune volte si ha il front-end con HEMT e gli output con bipolari (o anche BiCMOS) per limitare il rumore.

Dopo che, volute le freq. si converte in digitali.

La tendenza è di trasferire tutto in CMOS perché consente di migliorare l'integrazione.

Quindi si possono dividere i processi attuali in:

- Circuiti e RF discreti: si acquistano componenti con il loro package e si collegano tra loro.

RF SIP

(System on a Package) : tutto in un package che contiene più circuiti (die) e uno o più componenti passivi per creare un sistema o sottosistema a RF.

RF SoC (System on a Chip) : tutto ottenuto sullo stesso die, compreso parte digitale e quindi in CMOS.

Ognuno ha i suoi vantaggi: flessibilità (1°), time to market e possibilità di diverse tecnologie (2°), risparmio e costo (3°).

Quindi per le scelte dipende dalle prestazioni e caratteristiche richieste dalle applicazioni.

NON LINEARITÀ NEI CIRCUITI A RF

Un circuito è senza memoria (non-stivo) se la risposta ad un certo istante t dipende solo dai valori presenti delle eccitazioni allo stesso istante t .

Un circuito è dotato di memoria (dinamico) se la risposta ad un certo istante t dipende anche dai valori presenti delle eccitazioni in istanti diversi da t .

Es.

Privo di memoria $u(t) = h[v(t)]$

Dotato di memoria $u(t) = h[v(\cdot), t]$

$v(\cdot)$ rappresenta l'andamento dell'ingresso

$v(t)$ valore di $v(\cdot)$ all'istante t

$u(t)$ uscite all'istante t

Un circuito è lineare se vale il principio di sovrapposizione degli effetti e non lineare quando non vale.

Si vuole considerare cosa succede in un circuito lineare resistivo

$$u(t) = h \cdot v(t) \quad h \text{ costante reale}$$

In un circuito lineare dinamico, nel dominio del tempo

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) v(t - \tau) d\tau \quad h(t) = \text{risposta all'impulso}$$

nel dominio delle frequenze

$$U(\omega) = H(\omega) V(\omega)$$

U, V, H = trasformate di Fourier di u, v, h

$H(\omega)$ = funzione di trasferimento

la risposta si dice non distorta se

$$u(t) = \alpha v(t - \tau) \quad \alpha, \tau = \text{costanti reali}$$

cioè si ha la stessa forma d'onda con qualche amplificazione o attenuazione e traslazione sull'asse dei tempi.

Nelle frequenze $U(\omega) = \alpha V(\omega) e^{j\omega\tau}$

Se non sono verificate si parla di distorsione lineare.

CIRCUITO NON LINEARE

Le proprietà delle risposte variano con il livello degli ingressi e vengono generate nuove frequenze.

Questi creano effetti di distorsione caratteristici dei circuiti non lineari (distorsione non lineare).

• Circuito non lineare resistivo

Circuito non lineare privo di memoria con un ingresso e un uscite

$$u(t) = h[V(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$$

Così la risposta è la somma di infinite risposte. Ogni risposta può essere per esprimere come serie di Taylor

$$u_n(t) = h_n [V(t)]^n \quad h_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n h(v)}{dv^n} \right|_{v=0}$$

$u_n(t)$ è detta risposta di grado n .

Ogni serie ha un certo raggio di convergenza, cioè l'ingresso per cui converge. Tanto più è non lineare, tanto più è ristretto e faticoso a convergere.

Si, partite ora con ingresso sinusoidale

$$v(t) = V_M \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} (V^* e^{-j\omega_0 t} + V e^{j\omega_0 t}) \quad V = V_M e^{j\varphi}$$

oppure anche

$$v(t) = \operatorname{Re} \{ V e^{j\omega_0 t} \} = \operatorname{Re} \{ V_M e^{j\varphi} e^{j\omega_0 t} \} = V_M \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

oppure ancora

$$v(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=-1}^1 V_i e^{j\omega_i t} \quad \begin{cases} V_0 = 0 \\ V_1 = V & \omega_1 = \omega_0 \\ V_{-1} = V^* & \omega_{-1} = -\omega_0 \end{cases}$$

La risposta totale sarà per

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{h_n(v(t))^n}_{u_n(t)}$$

La risposta di grado zero

$$u_0(t) = h_0$$

Nei casi di interesse pratico in RF, $u(0) = 0 \Rightarrow h_0 = 0$

~~all~~ $u(0) = h_0 + h_1 v(0) + h_2 (v(0))^2 + \dots$

Risposta di grado 1

$$u_1(t) = h_1 V_M \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Risposta di grado 2

$$u_2(t) = \frac{h_2}{2^2} (V^* e^{-j\omega_0 t} + V e^{j\omega_0 t})^2 = \frac{h_2}{4} (V^{*2} e^{-j2\omega_0 t} + 2V^*V + V^2 e^{j2\omega_0 t})$$

$$= \frac{h_2}{4} 2V_M^2 \left[1 + \frac{e^{-2j\phi} e^{-2j\omega_0 t}}{2} + \frac{e^{2j\phi} e^{2j\omega_0 t}}{2} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\cos(2\omega_0 t + 2\phi)}$

$$= \frac{h_2 V_M^2}{2} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\phi)]$$

Ad una risposta sinusoidale si nota un termine in continua e una frequenza doppia che si sommano alla ~~alla~~ ~~componente~~ risposta lineare del 1° grado.

Il 3° grado avrà poi altri termini da sommare.

Questo segue fino al grado n-esimo.

Se V_M è piccolo si può supporre la tradizionale linearizzazione al primo ordine e quindi trascurare i termini oltre al secondo.

Tutti gli n poli contengono la parte continua che andrà bilanciata nel calcolo del punto di polarizzazione.

e posti diversi invece generano armoniche a freq. ω_0 che andranno a creare distorsione nel segnale.

La risposta completa conterrà tutti i contributi e il periodo

sono ancora $\frac{2\pi}{\omega_0}$. Tutte le altre risposte hanno (o avranno) periodo multiplo di $\frac{2\pi}{\omega_0}$.

Le risposte di grado n giungono a risultare

$$U_n(t) = \frac{h_m}{2^n} \left(V^* e^{-j\omega_0 t} + V e^{j\omega_0 t} \right)^n = \frac{h_m}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} V^{*k} V^{n-k} e^{-jk\omega_0 t} e^{j(n-k)\omega_0 t}$$

$$= \frac{h_m V_H^n}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{j(n-2k)(\omega_0 t + \phi)}$$

con le coefficienti indicate in precedenza e proporzionali all' n -esima potenza di V_H .

Le risposte complete (con periodo $\frac{2\pi}{\omega_0}$)

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{jk\omega_0 t} = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^{\infty} U_k e^{jk\omega_0 t} \right]$$

$$= U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |U_k| \cos(k\omega_0 t + \angle U_k)$$

$$U_0 = U_0 \quad U_k = \frac{1}{2} U_k \quad k > 0 \quad U_{-k} = U_k^*$$

U_0 = componente continua di $u(t)$ (ovvero) di $u(t)$. $U_k = k$ -esima componente (ovvero) di $u(t)$.

Dopo un certo numero di armoniche potrebbe essere possibile approssimare a zero. Nel caso di oscillazioni fortemente non lineari, potrebbe essere necessario un numero di armoniche maggiori.

Si prende ora la risposta ad una eccitazione binomiale, cioè con due funzioni sinusoidali in ingresso

$$v(t) = V_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + V_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 V_i e^{j\omega_i t}$$

ottenuto che

$$v(t) = \operatorname{Re} \left\{ V_1 e^{j\omega_1 t} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ V_2 e^{j\omega_2 t} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ V_1 e^{j\omega_1 t} + V_1^* e^{-j\omega_1 t} + V_2 e^{j\omega_2 t} + V_2^* e^{-j\omega_2 t} \right\}$$

$$V_0 = 0$$

$$V_1 = V_1 e^{j\phi_1}$$

$$V_{-1} = V_1^*$$

$$\omega_{-1} = -\omega_1$$

$$V_2 = V_2 e^{j\phi_2}$$

$$V_{-2} = V_2^*$$

$$(\omega_2 > \omega_1)$$

La risposta di grado n sarà dunque il prodotto delle summate fino all' n -esima potenza

$$u_n(t) = h_n [v(t)]^n = \frac{h_n}{2^n} \left(\sum_{i_1=1}^2 V_{i_1} e^{j\omega_{i_1} t} \right) \left(\sum_{i_2=1}^2 V_{i_2} e^{j\omega_{i_2} t} \right) \dots$$

$$= \frac{h_n}{2^n} \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 V_{i_1} V_{i_2} \dots V_{i_n} e^{j(\omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \dots + \omega_{i_n}) t}$$

Per esempio la risposta di grado 2 contiene sempre la componente continua, due sinusoidali $2\omega_1$ e $2\omega_2$ e due altre sinusoidali $\omega_2 - \omega_1$ e $\omega_1 - \omega_2$.

La risposta completa contiene componenti alle pulsazioni

$$\Omega_{k_1, k_2} = k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2$$

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

Ω_{k_1, k_2} = prodotto di intermodulazione (IM) di ω_1 e ω_2

$|k_1| + |k_2|$ = ordine del prodotto (IM)

La risposta di grado M , $u_M(t)$, contiene prodotti M di ordine $\leq M$:

con n pari, $u_M(t)$ contiene solo prodotti M di ordine pari (incluse le costanti)

con n dispari, $u_M(t)$ contiene solo prodotti M di ordine dispari (inclusi i prodotti di ordine 1 w_1 e w_2)

se i due segnali sinusoidali in ingresso hanno uguale ampiezza V_M , $u_M(t)$ è proporzionale a V_M^M .

Quando w_1 e w_2 sono commensurabili (il loro rapporto è razionale), la risposta è periodica.

ω_0 è il valore più grande per cui $\frac{\omega_1}{m_1} = \frac{\omega_2}{m_2} = \omega_0$

con $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$

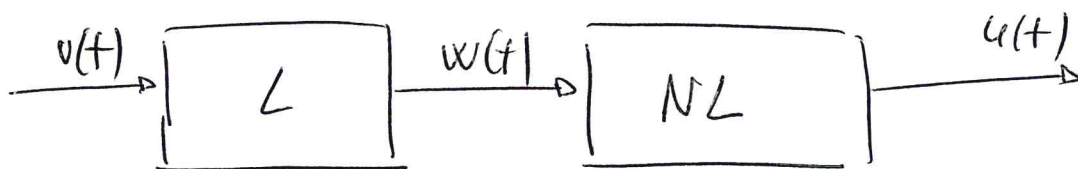
I prodotti M corrispondono esattamente gli ω_0 .

La risposta è periodica con pulsazione fondamentale ω_0 .

Se w_1 e w_2 non sono commensurabili la risposta non è periodica e si dice quasi-periodica.

CIRCUITI NON LINEARI DINAMICI

Si considera un circuito



$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) v(t-\tau) d\tau$$

$$u(t) = g[w(t)] = \sum_{m=0}^{\infty} g_m [w(t)]^m$$

$$u_m(t) = g_m \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) v(t-\tau) d\tau \right] \cdot \left[\int \dots \right] \left[\dots \right] =$$

Cioè $w(t)$ m volte per la risposta di grado m
 Raccogli tutti gli integrali

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_m \int_{-\infty}^{+\infty} g_m h(\tau_1) h(\tau_2) \dots h(\tau_m) v(t-\tau_1) v(t-\tau_2) \dots v(t-\tau_m) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_m$$

è la risposta completa quindi

$$u(t) = g_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g_m h(\tau_1) \dots h(\tau_m) v(t-\tau_1) v(t-\tau_2) \dots v(t-\tau_m) d\tau_1 \dots d\tau_m$$

che può essere generalizzata, scrivendo invece del prodotto

$$g_m h(\tau_1) \dots h(\tau_m)$$

la risposta impulsiva di ordine m

$$h_m(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$$

dette anche nucleo di Volterra di ordine m nel dominio del tempo e quindi

$$u(t) = h_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_m(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) v(t-\tau_1) v(t-\tau_2) \dots v(t-\tau_m) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_m$$

Se l'ingresso è una funzione sinusoidale

$$v(t) = V_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} \sum_{i=-1}^1 V_i e^{i\omega_i t} \quad \begin{aligned} V_0 &= 0 \\ V_1 &= V_m e^{i\varphi} \quad \omega_1 = \omega_0 \\ V_{-1} &= V_1^* \quad \omega_{-1} = -\omega_0 \end{aligned}$$

La risposta di grado n

$$u_n(t) = \frac{1}{2^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \sum_{i_1=-1}^1 V_{i_1} e^{i\omega_{i_1}(t-\tau_1)} \dots \sum_{i_n=-1}^1 V_{i_n} e^{i\omega_{i_n}(t-\tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{i_1=-1}^1 \dots \sum_{i_n=-1}^1 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) e^{-i(\omega_{i_1}\tau_1 + \dots + \omega_{i_n}\tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n \cdot V_{i_1} \dots V_{i_n} e^{i(\omega_{i_1} + \dots + \omega_{i_n})t} \right]$$

Trasf. Fourier n -dimensionali

Pertò

$$H_n(\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_n}) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) e^{-i(\omega_{i_1}\tau_1 + \dots + \omega_{i_n}\tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n$$

Funzione di trasferimento di ordine n o nucleo di n-terza di ordine n nel dominio delle frequenze, la risposta prodotta esprime come

$$u_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{i_1=-1}^1 \dots \sum_{i_n=-1}^1 H_n(\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n}) \cdot V_{i_1} \dots V_{i_n} e^{i(\omega_{i_1} + \dots + \omega_{i_n})t}$$

Se si di volterra nel dominio delle frequenze

Sotto condizioni appropriate generali la serie di volterra è convergente e il modulo dei termini della serie tende a diminuire al crescere del loro ordine. I nuclei di volterra non vanno le regole permutati i caso opposti.

volubile relazione

$$H_n(-\omega_{i_1}, -\omega_{i_2}, \dots, -\omega_{i_n}) = H_n^*(\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_n})$$

Quindi alle risposte sinusoidali:

$$v(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=-1}^1 V_i e^{i\omega_i t}$$

Un circuito non lineare resistivo (serie di Taylor) risponde

$$u(t) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h_n \sum_{i_1=-1}^1 \dots \sum_{i_n=-1}^1 V_{i_1} \dots V_{i_n} e^{i(\omega_{i_1} + \dots + \omega_{i_n})t}$$

Mentre un circuito non lineare dinamico (serie di Volterra) risponde con

$$u(t) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i_1=-1}^1 \dots \sum_{i_n=-1}^1 H_n(\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n}) \cdot V_{i_1} \dots V_{i_n} e^{i(\omega_{i_1} + \dots + \omega_{i_n})t}$$

Mentre se l'ingresso fosse multitonale, del tipo

$$v(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=-F}^F V_i e^{i\omega_i t}$$

contiene che tutte le armoniche e invece di essere da -1 a 1 saranno da $-F$ a F .

Per concludere, il caso particolare della serie di potenze è ottenibile dalle serie di Volterra quando $H_n(\omega) = h_n$, cioè il circuito è ~~non~~ privo di memoria.

Le spettri delle risposte dei circuiti resistivi e dinamici hanno le stesse proprietà.

Nel caso di circuiti resistivi tutte le componenti della risposta ad una data frequenza sono in fase tra loro.

Nel caso di circuiti dinamici hanno in generale fasi differenti a causa delle funzioni complesse H_n , questo comporta distorsione dovuta alla dipendenza delle fasi delle risposte dall'ampiezza dell'ingresso, come distorsione di fase, conversione AM-PM).

Ai piccoli segnali le risposte del circuito può essere approssimate
 con quelle di 1° grado, equivalente e lineare nel punto di riposo.
 Se il regime è debolmente non lineare si possono comunque
 prendere gradi d'abstrazione bassi (3, 5...) e usare metodi d'approssimati
 di ordine di volta.

Nei grandi segnali questo non è possibile e molti termini sono
 significativi e bisogna usare metodi d'analisi come il bilancio
 armonico.

• Generazione di armoniche

Fenomeno non lineare che è risposta di un segnale sinusoidale
 di pulsazione ω_0 , contiene componenti alle varie frequenze (pulsazioni
 multiple di ω_0 e alle continue. Possiamo farci eliminare
 mediante filtraggio se la banda B_0 consente. I filtri
 sono importanti nei trasmettitori per non generare interferenze.

• Autopolarizzazione

Le risposte di grado pari contengono una componente
 continua che potrebbe modificare il punto di polarizzazione
 dei dispositivi non lineari e perciò il punto di lavoro non
 coincide con il punto di riposo.
 Bisogna cercare di eliminarla con condensatori di
 accoppiamento.

Componente fondamentale delle risposte alle pulsazioni ω_0

$$v(t) = V_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} [V e^{j\omega_0 t} + V^* e^{-j\omega_0 t}]$$

$$\Rightarrow u_{\#}^{(1)}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \theta) = \frac{1}{2} [U(\omega_0) e^{j\omega_0 t} + U^*(\omega_0) e^{-j\omega_0 t}]$$

$u_0^{(4)}(t)$ è costituita da tutte le risposte alla pulsazione ω_0 di tutti gli n gradi; in particolare diremo emm di grado n .

$$u^{(4)}(t) = u_1(t) + u_3^{(1)}(t) + u_5^{(1)}(t) + u_6^{(1)}(t) + \dots$$

Se V_n è sufficientemente piccola si può approssimare a $u^{(4)}(t)$

$$u^{(4)}(t) \approx u_1(t) + u_3^{(1)}(t)$$

La risposta di grado 3 era

$$u_3(t) = \frac{1}{2^3} \sum_{i_1=-1}^1 \sum_{i_2=-1}^1 \sum_{i_3=-1}^1 H_3(\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \omega_{i_3}) V_{i_1} V_{i_2} V_{i_3} e^{i(\omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \omega_{i_3})t}$$

e i termini che hanno contributo a $u_3^{(1)}(t)$ sono

i_1	i_2	i_3	$\omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \omega_{i_3}$
-1	1	1	$-\omega_0 + \omega_0 + \omega_0 = \omega_0$
1	-1	1	$\omega_0 - \omega_0 + \omega_0 = \omega_0$
1	1	-1	$\omega_0 + \omega_0 - \omega_0 = \omega_0$
1	-1	-1	$\omega_0 - \omega_0 - \omega_0 = -\omega_0$
-1	1	-1	$-\omega_0 + \omega_0 - \omega_0 = -\omega_0$
-1	-1	1	$-\omega_0 - \omega_0 + \omega_0 = -\omega_0$

Le componenti alla pulsazione ω_0 della risposta di grado 3

$$u_3^{(1)}(t) = \frac{1}{8} \left[3H_3(\omega_0, \omega_0, -\omega_0) V V V^* e^{i\omega_0 t} + 3H_3(-\omega_0, \omega_0, \omega_0) V^* V^* V e^{-i\omega_0 t} \right]$$

$$= \frac{3}{8} H_3(\omega_0, \omega_0, -\omega_0) |V|^2 V e^{i\omega_0 t} + \text{complesso coniugato}$$

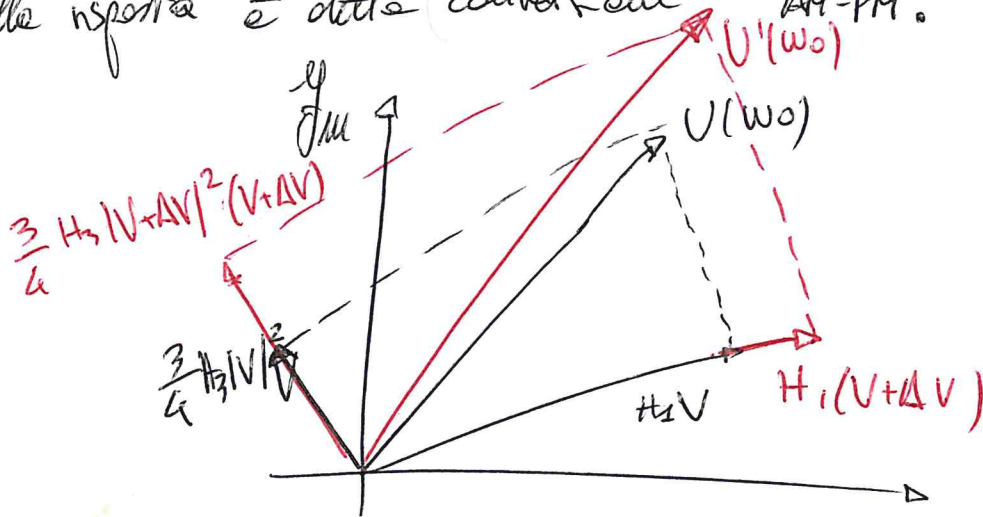
• CONVERSIONE = AM-PM

Per un circuito dinamico rispetto all'ingresso vale lo sfasamento della risposta

$$\arg \left[H_2(\omega_0) + \frac{3}{4} H_3(\omega_0, \omega_0, -\omega_0) |V|^2 \right]$$

dipende quindi dall'ampiezza dell'ingresso.

Il fatto che variazioni dell'ingresso portino a variazioni della fase della risposta è detta conversione AM-PM.



Si nota che varie fasi e ampiezze in uscita al variare di fase e ampiezza in ingresso.

Prendiamo un ingresso modulato in ampiezza e fase.

Se le leggi di modulazione sono sufficientemente lente, e sequele si può esprimere come

$$v(t) = \frac{1}{2} A(t) e^{j(\omega_0 t + \phi(t))} + \text{comp. conj.}$$

Dove

$A(t)$ = legge modulazione ampiezza

$\phi(t)$ = legge modulazione di fase

La risposta è indistorta solo se $A(t)$ costante, cioè se l'input è un segnale ad envelope costante, come può essere GMSK (GSM) ma QPSK non ha envelope costante e distorce.

Componente della pulsazione ω_0 in parte troncata con il contributo di u_3

$$u^{(4)}(t) \approx \frac{1}{2} \left[H_1(\omega_0) + \frac{3}{4} H_3(\omega_0, \omega_0, -\omega_0) |V|^2 \right] V e^{j\omega_0 t} + \text{comp. conj.}$$

La relazione tra i Fourier di $u^{(4)}(t)$ e $V(t)$

$$U(\omega_0) = \left[H_1(\omega_0) + \frac{3}{4} H_3(\omega_0, \omega_0, -\omega_0) |V|^2 \right] \cdot V$$

• SATURAZIONE o COMPRESIONE DEL GUADAGNO

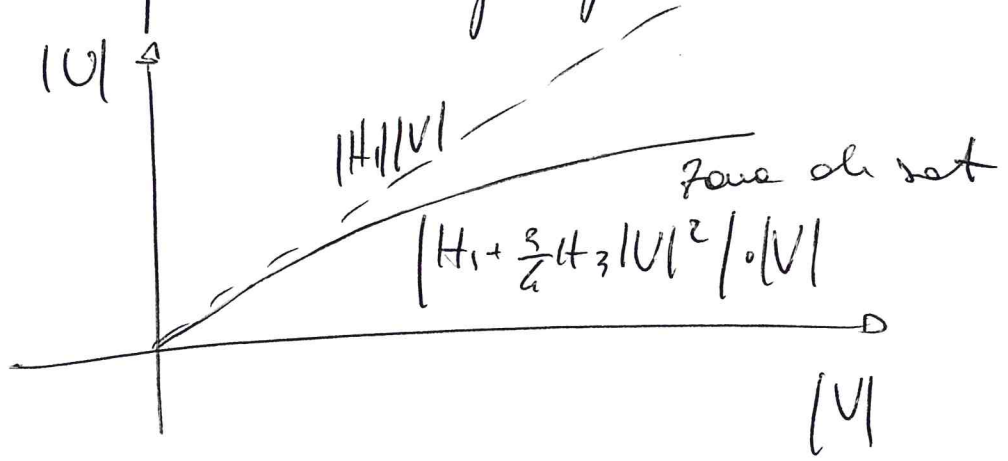
Relazione tra $u^{(4)}(t)$ e $v(t)$

$$|U(\omega_0)| = \left| H_1(\omega_0) + \frac{3}{4} H_3(\omega_0, \omega_0, -\omega_0) |V|^2 \right| \cdot |V| = G(\omega_0, |V|) \cdot |V|$$

Con l'aumentare in ingresso sufficientemente piccolo l'ampiezza delle risposte può essere praticamente proporzionale all'ingresso e il circuito è approssimativamente lineare.

Al crescere dell'ampiezza dell'ingresso diventa significativo il contributo della risposta di grado 3.

Nella maggior parte dei casi G è una funzione decrescente di $|V|$ e si parla di SATURAZIONE o se G rappresenta un guadagno, di compressione del guadagno.



° ASSERZIONE DI INTERMODULAZIONE

Si erume un ingresso bifonico con sterna compatta: ω_1 e ω_2 sono tutte le combinazioni armoniche $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$, con $\omega_1 - \omega_2 < 0$ (o $\omega_2 > \omega_1$) e $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 < \omega_1$

Il numero di righe da considerare è scelto dall'utilizzatore del software, e secondo di come otteniamo.

$m =$ prodotto di intermodulazione = $|k_1| + |k_2|$

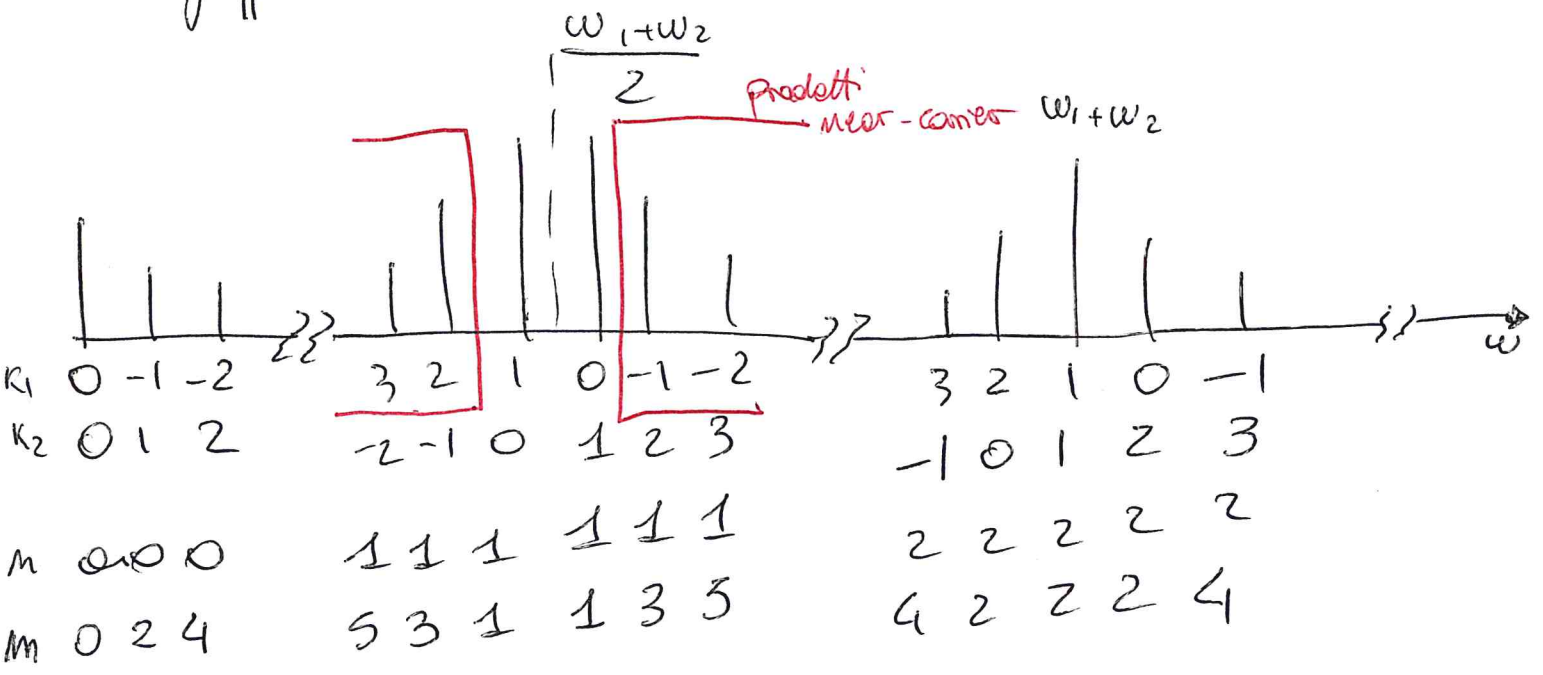
Area di ricerca sul diagramma k_1, k_2

$n =$ numero armonico equivalente = $k_1 + k_2$

I prodotti IM sulle rette oblique ($\pm 45^\circ$) hanno lo stesso valore di n , la distanza tra due prodotti consecutivi è $\Delta\omega$

Le righe spettrali si presentano divise in gruppi e i prodotti di ciascun gruppo hanno lo stesso valore del numero armonico equivalente n

Tutti i gruppi sono centrati sulle frequenze $\frac{n(\omega_2 + \omega_1)}{2}$

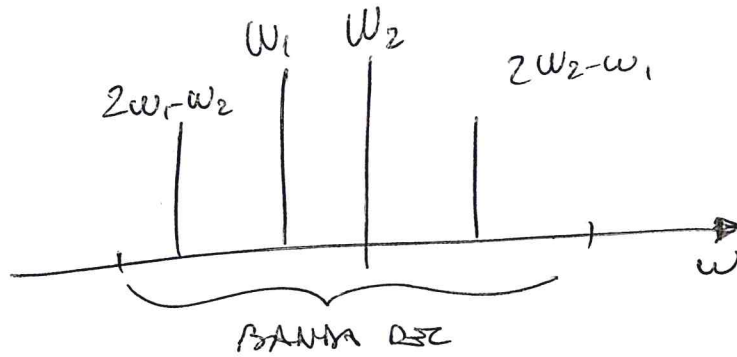


I prodotti IM dispari del tipo $(k+1)\omega_1 - k\omega_2$ e $-k\omega_1 + (k+1)\omega_2$ ($k=1, 2, \dots$)

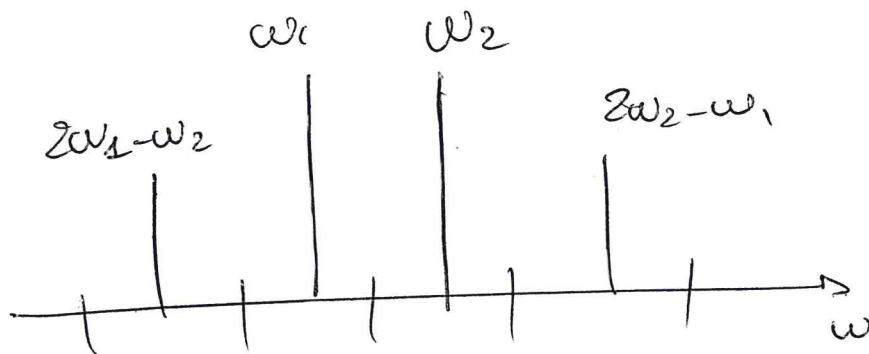
sono dispersi in prossimità delle fondamentali (prodotti near-carrier). Sono particolarmente dannosi perché cadono nella banda del segnale e sono difficilmente eliminabili attraverso filtri.

Ci potrebbe essere un segnale forte e uno debole con le bande laterali a seconda delle potenze.

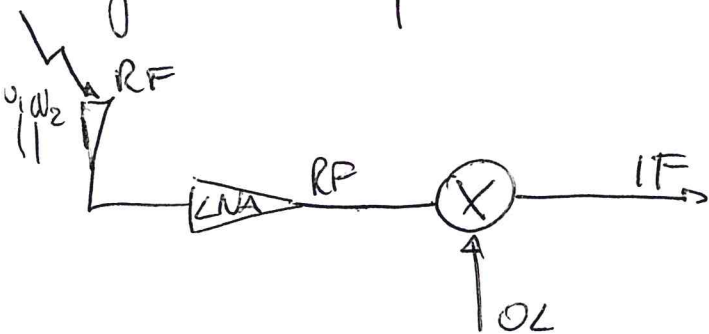
L'intermodulazione co-canal si ha quando le componenti spettrali di uno stesso canale generano prodotti IM che cadono nella banda del canale stesso.



Si parla di intermodulazione ^{canale} intercannello se le componenti spettrali di canali diversi generano prodotti IM che cadono nella banda di canali adiacenti.

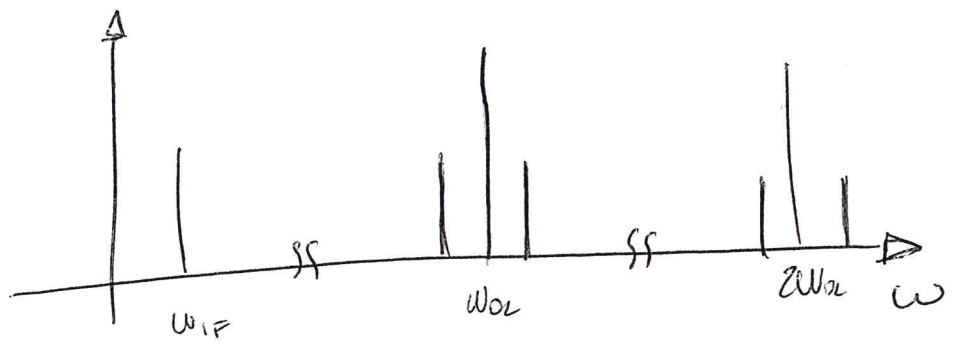


La generazione potrebbe avvenire con un sistema del tipo

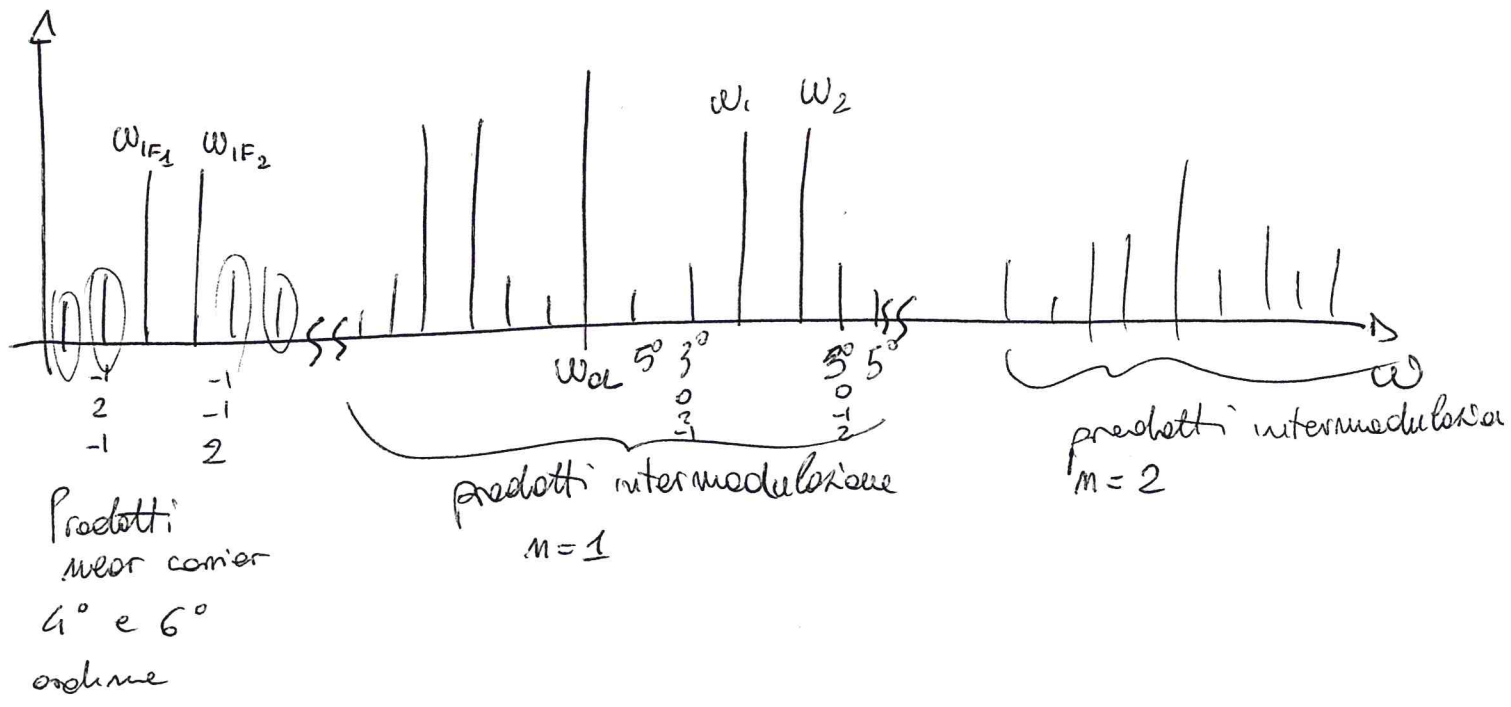


Anche se ben fatto, l'LNA non potrà mai essere perfettamente lineare e potrà quindi generare delle armoniche di quelle in ingresso.

effetto sarà del tipo invece che



ma con la non linearità dell'LNA



Nel caso digitale



Intercette

Prendendo sempre in ingresso due segnali sinusoidali di uguale ampiezza V , quando V è sufficientemente piccola, nell'espressione di un prodotto di intermodulazione prende il contributo delle risposte di grado m quando si considera IM con di ordine m .

In particolare l'ampiezza del prodotto IM è proporzionale a V^m , in un diagramma logaritmico l'andamento dell'ampiezza è rappresentato da una retta con pendenza m due volte anche (sempre in scala logaritmica) per la relazione tra la potenza in uscita e la potenza in ingresso, proporzionali ai quadrati delle ampiezze.

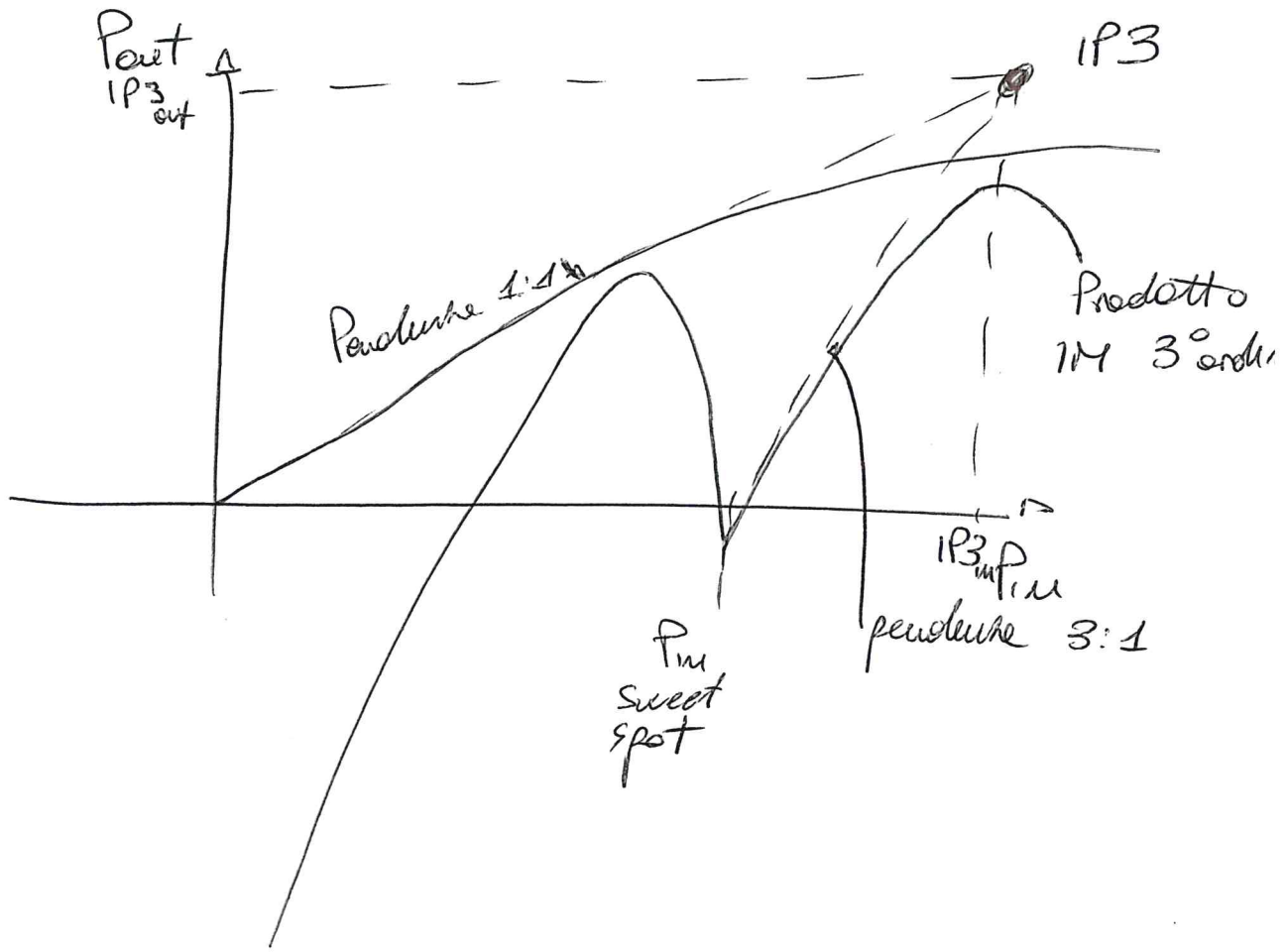
Non meno che V cresce anche le componenti di grado superiore diventano significative e l'andamento dell'ampiezza si discosta dalla retta.

Il punto in cui la retta, che rappresenta la componente di ordine m si incontra con la retta che rappresenta il prodotto IM di ordine m si incontra e' detto intercetta di ordine m . IP_m

L'ascissa e l'ordinata di questo punto sono detti intercetta di ordine m in ingresso ($IP_{m, in}$) o in uscita ($IP_{m, out}$).

Si usa la intercetta come misura della linearità di un operato (valori maggiori delle intercette corrispondono ad ampiezze minori dei prodotti IM).

Spesso si fa riferimento alle intercette del 3° ordine (IP_3) relative ai prodotti near carrier.



Ad esempio se $IP3_{in}$ 30dBm, prolungando il comportamento si raggiunge quello delle fondamentali.

Se usato a pot. più bassa la distorsione è enorme e perciò è molto lineare.

Lo sweet spot è un punto in cui si ha molta distorsione tra 1° e 3° e con P grande. È molto difficile da trovare con precisione, anche pochi potremmo essere anche 5° ecc che non cadono nello stesso punto. (le $IP3$ perché cadono a ω_0 e $-\omega_0$ e creano distorsione). Resta comunque una distorsione del primo perché c'è una compressione.

• TRASFERIMENTO DI ~~una~~ MODULAZIONE (CROSS-MODULATION)

In ingresso una portante non modulata a ω_1 e una modulata in amplitude con frequenza ω_2

$$v(t) = \frac{1}{2} \left[V_1 e^{i\omega_1 t} + A(t) e^{i\omega_2 t} \right] + \text{compl. conj.}$$

Le componenti di pulsazione ω_1 della risposta:

$$u^{(1,0)}(t) \approx u_1^{(1,0)}(t) + u_3^{(1,0)}(t) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[H_1(\omega_1) + \frac{3}{4} H_3(\omega_1, \omega_1, -\omega_1) |V_1|^2 + \frac{3}{2} H_3(\omega_1, \omega_2, -\omega_2) A^2(t) \right]$$

$$V_1 e^{i\omega_1 t} + \text{compl. conj.}$$

Però una versione distorta della legge di modulazione $A(t)$ viene trasferita sulla portante di pulsazione ω_1 (si introduce oltre alle mod di ampiezza minima, anche una modulazione di fase).

LIVELLI DI SIMULAZIONE

• System level (veloce ma poco accurata)

Usata per simulare interi collegamenti a RF, sfruttando descrizioni approssimate dei diversi blocchi del link e come output fornisce alcune figure di merito del link, quali: jitter, costellazione e BER...

• Circuit level (più lenta ma più accurata)

La simulazione del circuito (sotto sistemi e sistemi) basati su interconnessioni dei vari componenti circuitali lineari e non lineari attraverso simulatori circuitali ed elettromagnetici, in un'unica simulazione. L'output sarà il guadagno, la potenza in uscita, il campo lontano...

• Device level (estremamente lenta ma molto accurata)

È basata sulle fisiche del dispositivo non lineare.

• SIMULAZIONE CIRCUIT LEVEL

A seconda del tipo circuito la simulazione a livello di circuito è lineare o non lineare.

Se lineare a livello circuitale tutte le parti, componenti, reti di adattamento e può essere fatta a livello circuitale, così attraverso simulatori circuitali e decomponendo il circuito in componenti interconnessi descritti da formule in forma chiusa, oppure a livello elettromagnetico dove il circuito è trattato come un'unica entità e risolto e partendo dalle eq. di Maxwell.

Anche l'approccio ibrido è possibile, si simulano solo parti con un EM e si inseriscono i parametri (ad esempio S) all'interno del sim. circuitale tramite blocchi. Questo approccio è molto più sensato per simulazioni non lineari.

Simulazione non lineare a livello del circuito, cioè analisi di un circuito non lineare (amplificatore, mixer, oscillatore, inters front-end).

Anche queste può essere CIRCUITALE cioè permette di simulare circuiti sia per i componenti lineari che per i non lineari.

Oppure NIEM, cioè si simula la parte lineare con simulatori EM e poi si inserisce nel simulatore circuito attraverso dei blocchi dove a scanno anche i blocchi non lineari. Serve per simulare parti che difficilmente si potranno avere già disponibili o addirittura in forma chiusa.

L'output dei simulatori circuitali si distingue nei casi che ottenuti da ~~simulatori circuitali~~ simulazioni lineari, in questo caso si ottengono delle matrici di trasferimento dell'N parte, che potranno essere matrici di diffusione, impedenza, ammettanza, ecc. Nel caso di simulatori non lineari si possono ottenere le funzioni di rete del circuito insieme, quelli potenza in ac, ha, pseudopuls, interatta del 3° ordine, perdite di ritorno, potenza spettrale, campo lontano irradiato, ecc...

Per i simulatori EM la simulazione è sempre lineare e si ottiene la matrice dell'N parte quale matrice di diffusione (S), impedenza, ammettanza, la distribuzione della corrente all'interno e sulla struttura, il campo vicino e il campo lontano.

Simulazione di circuito lineare

CIRCUITALE

Risultato veloce, semplice ma può essere poco accurato EM.

È lenta, difficile ma molto accurata.

CIRCUITALE/EM

Mediamente lenta, moderatamente difficile e potenzialmente accurata.

Quando il circuito è composto da un insieme di parti con alto e basso livello di integrazione o altri e buoni effetti di accoppiamento EM si può organizzare la simulazione ~~veloce~~ facendo la simulazione prima delle parti in cui gli accoppiamenti EM non possono essere trascurati, ad esempio dopo una band si fa una parte di linea per ripulire il mezzo tras, si estrae la parte meccanica e la si inserisce in un blocco nel simulatore circuitali.

Simulazione circuito non lineare

CIRCUITALI

Si tratta ancora di un approccio veloce, semplice ma che può essere poco accurato.

Per contro e' NL=EM risulta lento, difficile e momentaneamente accurato.

Nella simulazione di circuito NL riducente si possono fare diverse scelte possibili, simulando con un carico fittizio a 50Ω o altro livello, progettando l'antenna per 50Ω e poi collegarli.

Oppure simulare il circuito con il carico (antenna) comune. Quest'ultimo approccio è più completo perché considera anche la sensibilità all'influenza dell'esterno, che sicuramente non è un carico fisso a 50Ω, ma più complesso.

Si rendere ancora più completo simulando EM tutta la parte lineare, per poi fare con CIRCUITALI per la parte non lineare.

Per concludere, i circuiti sono pochi da usare poiché l'utente non ha bisogno di conoscere il metodo di analisi e i risultati dipendono poco o niente dal set-up della simulazione.

La loro accuratezza è moderata e possono discostarsi dalla misura soprattutto per le misure ad HF.

Possono essere usati per analisi e progetto di circuiti a RF senza un elevato livello di integrazione e/o operanti nello spettro inferiore alle microonde (300MHz - 5GHz)

Consentono di ottenere una idea una grossolana idea del comportamento del circuito e quindi metterli in piedi nella prima fase di tuning, con la finale fatta con un EM. Gli EM per conto sono difficili da usare e l'utente deve conoscere il metodo di analisi poiché i risultati dipendono fortemente dal set-up.

Se ben utilizzati si ottengono risultati molto simili alle misure
Poi i tempi diventano molto lunghi.

METODI PER L'ANALISI CIRCUITALE

- Analisi di sistema con non linearità deboli, si possono usare le serie di Volterra.
- Analisi circuitale - non linearità deboli
Si può usare il metodo delle correnti non lineari (che sono un'applicazione della serie di Volterra), l'analisi nel dominio del tempo e il metodo del bilanciamento armonico
- Analisi circuitale - non linearità forti
È effettuabile con un'analisi nel dominio del tempo o con il bilanciamento armonico
- Ottimizzazione circuitale, solo con il metodo del bilanciamento armonico.
- Analisi di rumore
Può essere fatta nel dominio del tempo o con il metodo del bilanciamento armonico.

ANALISI NEL DOMINIO DEL TEMPO

Basate sull'integrazione per la soluzione di un sistema di equazioni differenziali, solitamente ricorrenziali e

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$$

$\mathbf{x}(t)$ = vettore v.a.d. di stato
 \mathbf{f} = funzione non lineare

Il sistema per più essere risolto facendo integrazione
con un qualche metodo numerico e, perciò, settando le condizioni
al centro, quale l'istante iniziale $\mathbf{x}(t_0)$, si possono determinare gli
stati successivi risolvendo in ogni istante l'equazione non lineare algebrica.

Con i circuiti a microonde ci sono diversi limiti per l'analisi nel tempo. I componenti distribuiti, come le linee di trasmissione, sono difficili da trattare nel dominio del tempo. Le equazioni devono poi essere interpretate dallo stato iniziale e quello definitivo e ciò può richiedere diverso tempo, soprattutto se le costanti di tempo dei circuiti sono molto grandi rispetto al periodo dei segnali RF o se la risposta contiene componenti spettrali con frequenze molto diverse tra loro e il loro effetto non lineare la parte a freq molto basse.

Nel caso in cui il regime sia multitone ed è difficile analizzare il periodo non è semplice ricominciare la condiz. di esperimento del transiento. Le lunghe interpretazioni potrebbe far diventare sbranti gli errori numerici di calcolo e i risultati alcuni prodotti di intermodulazione di minore entità.

• METODO DEL BILANCIAMENTO ARMONICO

Si ipotizza che il circuito giri in regime quasi periodico e con F toni fondamentali incommensurabili $\omega_1, \dots, \omega_F$. Ogni segnale sostenuto dal circuito è rappresentabile come combinazione di un numero finito di funzioni sinusoidali le cui pulsazioni sono prodotti di intermodulazione delle fondamentali.

$$R_k = \sum_{i=1}^F k_i \omega_i$$

k -esimo prodotto di intermodulazione (i.p.e.)

$$\underline{k} = [k_1, k_2, \dots, k_F]^T$$

vettore armonico

$$k_i \quad (i=1, \dots, F)$$

numero armonico

L'insieme S dei vettori che può assumere \underline{k} è finito e privo e costituisce un ~~insieme~~ sottoinsieme finito di \mathbb{Z}^F indipendente l'origine.

S = spettro dei segnali

I componenti lineari sono descritti nel dominio della frequenza, che automaticamente include gli effetti dispersivi.

I componenti non lineari, invece, sono descritti nel dominio del tempo e convertiti successivamente nelle frequenze attraverso le trasformate.

Le equazioni di Kirchhoff sono applicate nella frequenza, perciò servono inverse FFT e FFT per trasformare e antitrasformare nei tempi, essendo i c.c. non lineari nel dominio del tempo.

La determinazione della risposta e regime è ricondotta alla risoluzione di un sistema non lineare algebrico, dove la struttura del sistema risolvibile dipende dal metodo impiegato per la formulazione delle equazioni del circuito.

Il metodo HB determina direttamente la risposta a regime, trascurando il calcolo delle porte transienti.

Si è i componenti lineari che non lineari usano la rappresentazione più conveniente, cioè frequenza per i lineari e tempo per i non lineari.

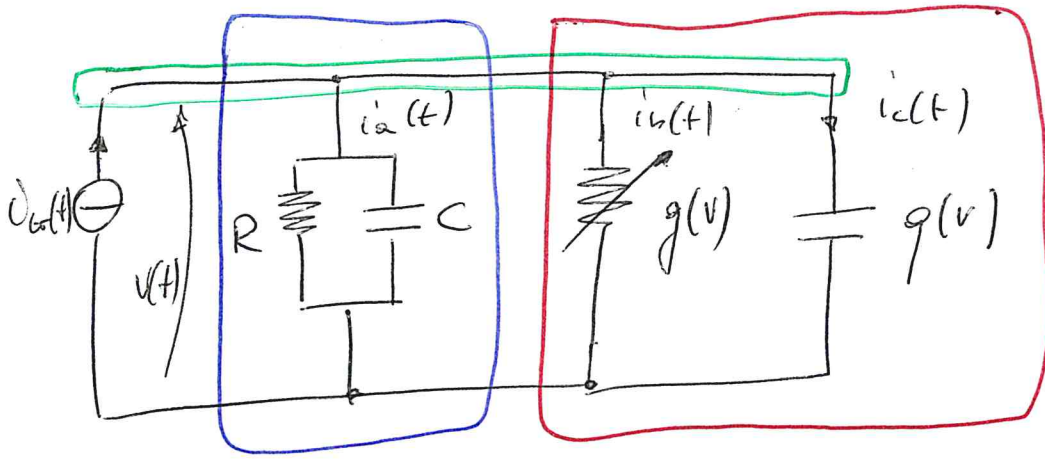
In questo modo i componenti dispersivi lineari sono facilmente caratterizzati e i non lineari sono più facilmente caratterizzati.

Questo metodo descrive accuratamente alcune componenti spettrali della risposta con accuratezze differenti fino a 200dBW.

Come più detto, l'HB non fornisce però il transiento, che può essere ottenuto sfruttando estensioni della tecnica HB.

A volte potrebbe succedere che gli algoritmi usati per risolvere il sistema non lineare incontrino problemi di convergenza all'aumentare del livello dei segnali e perciò potrebbero essere necessari opportuni accorgimenti per i soluzioni non lineari e nella definizione dei modelli.

Le dimensioni aumentano rapidamente al crescere della complessità del circuito e del numero di armoniche impiegate per rappresentare i segnali.



• Ingrediente sinusoidali

$$i_G(t) = I_G \cos(\omega_0 t)$$

• Repetizione strettamente periodica
 • Tutte le tensioni e le correnti

sono rappresentabili nella forma

$$a(t) = \text{Re} \left[\sum_{k=0}^{M_H} A_k e^{j k \omega_0 t} \right]$$

M_H = numero di armoniche

Il primo blocco lineare avrà le equazioni nel dominio ~~del tempo~~ delle frequenze

$$I_{ak} = Y(k\omega_0) V_k = \left(\frac{1}{R} + j k \omega_0 C \right) V_k \quad \text{per } k=0, \dots, M_H$$

I_{ak}, V_k = armoniche di $i_a(t)$ e $v(t)$

Y = ammettenza

Per il blocco non lineare ci servono le equazioni dei componenti non lineari (dominio del tempo)

$$i_b(t) = g(v(t))$$

$$i_c(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dv} \frac{dv}{dt} = C(v(t)) \frac{dv}{dt}$$

$g(v)$ = conduttanza non lineare

$C(v)$ = capacità non lineare

La legge di Kirchhoff al modo superiore per le correnti e nel dominio della ~~tempo~~ frequente.

$$I_{a_k} + I_{b_k} + I_{c_k} - I_{g_k} = 0 \quad \text{per } k=0, \dots, m_H$$

$I_{a_k}, I_{b_k}, I_{c_k}, I_{g_k}$ = ampiezze di $i_a(t), i_b(t), i_c(t)$ e $i_g(t)$
dato che $i_g(t)$ è sinusoidale con pulsazione ω_0 risulta
 $I_{g_k} = 0$ per $k \neq 1$

Inserendo l'espressioni delle correnti date dalle equazioni dei componenti si ottiene

$$Y(k\omega_0)V_k + G_k(V) + jk\omega_0 Q_k(V) - I_{g_k} = 0 \quad \text{per } k=0, \dots, m_H$$

V = vettore delle ampiezze di $v(t)$

Qgni espressione non lineare è funzione di TUTTE le ampiezze di $v(t)$.

$$V = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{m_H} \end{bmatrix}$$

G_k, Q_k = ampiezze di $g(v(t))$ e $q(v(t))$

G_k e Q_k sono funzioni di tutte le ampiezze V_k
per $k=0, \dots, m_H$

L'errore di imboccamento armonico all'armonica k è la funzione non lineare di V

$$E_k(V) = Y(k\omega_0)V_k + G_k(V) + jk\omega_0 Q_k(V) - I_{g_k}$$

La soluzione del circuito su V si ha quando tutti gli errori di imboccamento sono annullati.

Si tratta di risolvere un sistema di equazioni non lineari complesse nelle incognite \underline{V} .
 Questo può essere espresso nella forma reale

$$\underline{E}(\underline{X}) = 0$$

dove $\underline{E}(\underline{X})$ sarà il vettore degli elementi di bilanciamento armonico con parte reale ed immaginaria e \underline{X} sarà quello delle armoniche della tensione.

$$\underline{E}(\underline{X}) = \begin{bmatrix} E_0(\underline{X}) \\ \text{Re}\{E_1\} \\ \text{Im}\{E_1\} \\ \text{Re}\{E_2\} \\ \text{Im}\{E_2\} \\ \vdots \\ \text{Re}\{E_{m_H}\} \\ \text{Im}\{E_{m_H}\} \end{bmatrix} \quad \underline{X} = \begin{bmatrix} V_0 \\ \text{Re}\{V_1\} \\ \text{Im}\{V_1\} \\ \vdots \\ \text{Re}\{V_{m_H}\} \\ \text{Im}\{V_{m_H}\} \end{bmatrix}$$

La dimensione del sistema reale è $m_T = 2m_H + 1$

Per l'applicazione del bilanciamento armonico bisogna risolvere due problemi fondamentali: da porre essere affrontati, solitamente, solo per via numerica.

Conversione delle risposte dei componenti non lineari dal dominio del tempo al dominio delle frequenze
 • Risoluzione del sistema non lineare costituito dalle equazioni di bilanciamento armonico.

Infatti $G_n(\underline{V})$ e $Q_n(\underline{V})$ non sono solitamente note in forma chiusa e perciò il calcolo delle armoniche delle correnti nei componenti non lineari deve essere fatto per via numerica.

Si può quindi il calcolo in 3 fasi:

• Nota \underline{V} si calcola il valore di $v(t)$ in un opportuno intervallo di tempo t_i (ISTANTI A STABILIMENTO)

Si valutano $g(v(t_i))$ e $q(v(t_i))$ negli istanti di campionamento

Si determinano le ampiezze A_k e B_k a partire dai valori campionati di g e q .

Annicamente due esse rispettate il ~~proprio~~ ~~teorema~~ di Shannon nel campionare la ~~risposta~~.

Dato un segnale

$$a(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{M_H} A_k e^{jk\omega_0 t} \right\}$$

le freq maxime sono

$$f_{\max} = M_H \frac{\omega_0}{2\pi} = M_H f_0$$

Il numero di punti di campionamento per periodo m_p è legato a Δt dalla relazione

$$\Delta t = \frac{T_0}{m_p} = \frac{2\pi}{m_p \omega_0} = \frac{1}{m_p f_0}$$

Per cui

$$\frac{1}{m_p f_0} < \frac{1}{2M_H f_0} \Rightarrow m_p > 2M_H \quad \text{opp.} \quad \frac{m_p}{m_p f_0} \geq 2M_H + 1$$

Posto quindi $m_p = 2M_H + 1$, si campiona $a(t)$ negli m_p istanti

$$t_i = i \cdot \Delta t = i \cdot \frac{T_0}{m_p} = i \cdot \frac{2\pi}{m_p \omega_0} \quad i = 0, \dots, m_p - 1$$

I valori campionati di $a(t)$

$$a_i = a(t_i) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{M_H} A_k e^{jk\omega_0 t_i} \right\} = \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{M_H} A_k e^{jk \frac{2\pi}{m_p} i} \right\} = \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{M_H} A_k W^{ik} \right\}$$

$$C_{00} \quad W \stackrel{\Delta}{=} e^{j \frac{2\pi}{M_P}}$$

La serie può essere riscritta come

$$a_i = \sum_{k=-M_H}^{M_H} C_k W^{ik} \quad i = 0, \dots, M_P - 1$$

$$C_0 = A_0 \quad C_k = \frac{1}{2} A e \quad \text{per } k > 0 \quad C_{-k} = C_k^*$$

~~Il~~ nelle sommatorie compaiono coefficienti complessi del tipo

$$W^q = e^{j q \frac{2\pi}{M_P}} \quad (q \in \mathbb{Z})$$

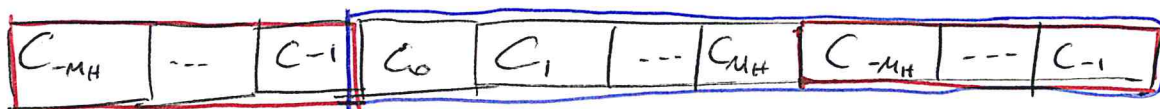
Questi coefficienti hanno modulo unitario e esponente pari a $q \frac{2\pi}{M_P}$.

Vali le proprietà

$$W^{q+m \cdot M_P} = W^q \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

È opportuno numerare i coefficienti C_k con k negativo

$$C_k = C_{M_P+k} = C_{2M_H+1+k} \quad k < 0$$



Spontanea identità

$$W^{i(M_P+k)} = W^{ik+iM_P} = W^{ik}$$

si ottiene

$$a_i = \sum_{k=0}^{M_p-1} C_k W^{ik} \quad i=0, \dots, M_p-1$$

Si definiscano i vettori dei campioni e delle armoniche di $a(t)$

$$\underline{a} = [a_0, \dots, a_{M_p-1}] \quad \underline{c} = [c_0, \dots, c_{M_p-1}]$$

e la matrice $\underline{M}_{M_p \times M_p}$ tale che

$$M_{ik} = W^{ik} \quad i, k = 0, \dots, M_p-1$$

La relazione tra i vettori dei campioni e delle armoniche è

$$\underline{a} = \underline{M} \underline{c}$$

Si può verificare che vale la proprietà

$$\underline{M}^{-1} = \frac{1}{M_p} \underline{M}^*$$

Quindi si può ottenere le varie armoniche dei valori campionati mediante la relazione

$$\underline{c} = \underline{M}^{-1} \underline{a} = \frac{1}{M_p} \underline{M}^* \underline{a}$$

La relazione tra i valori campionati e le armoniche di $a(t)$ sono

$$C_k = \frac{1}{M_p} \sum_{i=0}^{M_p-1} a_i W^{-ik} \quad k=0, \dots, M_p-1 \quad \text{DFT}$$

$$a_i = \sum_{k=0}^{M_p-1} C_k W^{ik} \quad i=0, \dots, M_p-1 \quad \text{IDFT}$$

$$W = e^{\frac{j2\pi}{M}P}$$

Queste sono le DFT e IDFT.
Attraverso tali trasformazioni, il costo delle trasformate risulta
proporzionale a M^2 .

Errori di ALIASING

Se lo spettro contiene un numero maggiore di $\frac{(M-1)}{2}$ ripli
più le continue, la DFT non discrimina più le ripli e
si ha l'errore di aliasing. I contributi delle armoniche
superiori vengono erroneamente attribuiti ad altre armoniche più
basse e in banda (con ω all'interno di $\frac{M-1}{2}$)

In un'analisi HB lo spostamento dei componenti non
avvoca e sempre effetto da aliasing.

Nel circuito considerato la tensione $v(t)$ ha, per costanza,
uno spettro contenente solo N_H armoniche.

$g[v(t)]$ e $q[v(t)]$ hanno spetto illimitato (generato
dalla non linearità).

Bisogna quindi sapere che le armoniche superiori a N_H sono
molto più attenuate e quindi trascurabili. Queste però generano
comunque un errore di aliasing.

Ciò porta a perdite di accuratezza e anche problemi
di convergenza. Per ridurre gli errori si può aumentare il numero
di armoniche N_H e quindi il tempo di calcolo e la memoria.
Questo è detto sovracampionamento, cioè usare M superiore al minimo
richiesto da Shannon e aumentare l'accuratezza a scapito di
tempo e memoria.

