

4 Wahrscheinlichkeit

4.1 Lernsteuerung

4.1.1 Lernziele

Nach Absolvieren des jeweiligen Kapitels sollen folgende Lernziele erreicht sein.

Sie können ...

- die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung erläuternd definieren
- die drei Arten der direkten Ermittlung von Wahrscheinlichkeit erläutern
- typische Relationen (Operationen) von Ereignissen anhand von Beispielen veranschaulichen
- mit Wahrscheinlichkeiten rechnen

4.1.2 Prüfungsrelevanter Stoff

Lesen Sie dazu ([bourier_2018?](#)), Kap. 2-4. Weitere Übungsaufgaben finden Sie im dazugehörigen Übungsbuch, ([bourier_statistik-ubungen_2022?](#)).

4.1.3 Zentrale Begriffe

4.1.3.1 Grundbegriffe

- Zufallsvorgang (Zufallsexperiment)
- Elementarereignis
- Ereignisraum
- Zufallereignis (zufälliges Ereignis)
- Sicheres Ereignis
- Unmögliches Ereignis

4.1.3.2 Wahrscheinlichkeitsbegriffe

- Klassische Wahrscheinlichkeit (LaPlace'sche Wahrscheinlichkeit)
- Statistische (empirische) Wahrscheinlichkeitsermittlung
- Subjektive (Bayes) Wahrscheinlichkeitsermittlung

4.1.3.3 Wahrscheinlichkeitsrelationen

- Vereinigung von Ereignissen
- Schnitt(menge) von Ereignissen
- Komplementärereignis
- Vollständiges Ereignissystem
- Kolmogorovs Definition von Wahrscheinlichkeit

4.1.3.4 Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Allgemeiner Additionssatz

- Disjunkte Ereignisse
- Additionssatz für disjunkte Ereignisse
- Bedingte Wahrscheinlichkeit
- (Stochastische) Unabhängigkeit
- Baumdiagramm für gemeinsame Wahrscheinlichkeit
- Allgemeiner Multiplikationssatz
- Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse
- Totale Wahrscheinlichkeit
- Satz von Bayes

4.1.4 Begleitvideos

- [Video zum Thema Wahrscheinlichkeit](#)

4.2 Unterstützung: Wahrscheinlichkeit in Bildern

Wahrscheinlichkeit in Bildern: zur einfachen Erschließung des Materials, ein Unterstützungsangebot.

Im Folgenden sind einige Schlüsselbegriffe und -regeln in (ver-)einfach(t)er Form schematisch bzw. visuell dargestellt mit dem Ziel, den Stoff einfacher zu erschließen.

4.2.1 Zufall

Werfen Sie eine Münze!

Diese hier zum Beispiel:



[Quelle: By OpenClipartVectors, CC0](#)

Wiederholen Sie den Versuch 10, nein, 100, nein 1000, nein: 10^6 Mal.

Notieren Sie das Ergebnis!

Oder probieren Sie die [App der Brown University](#).

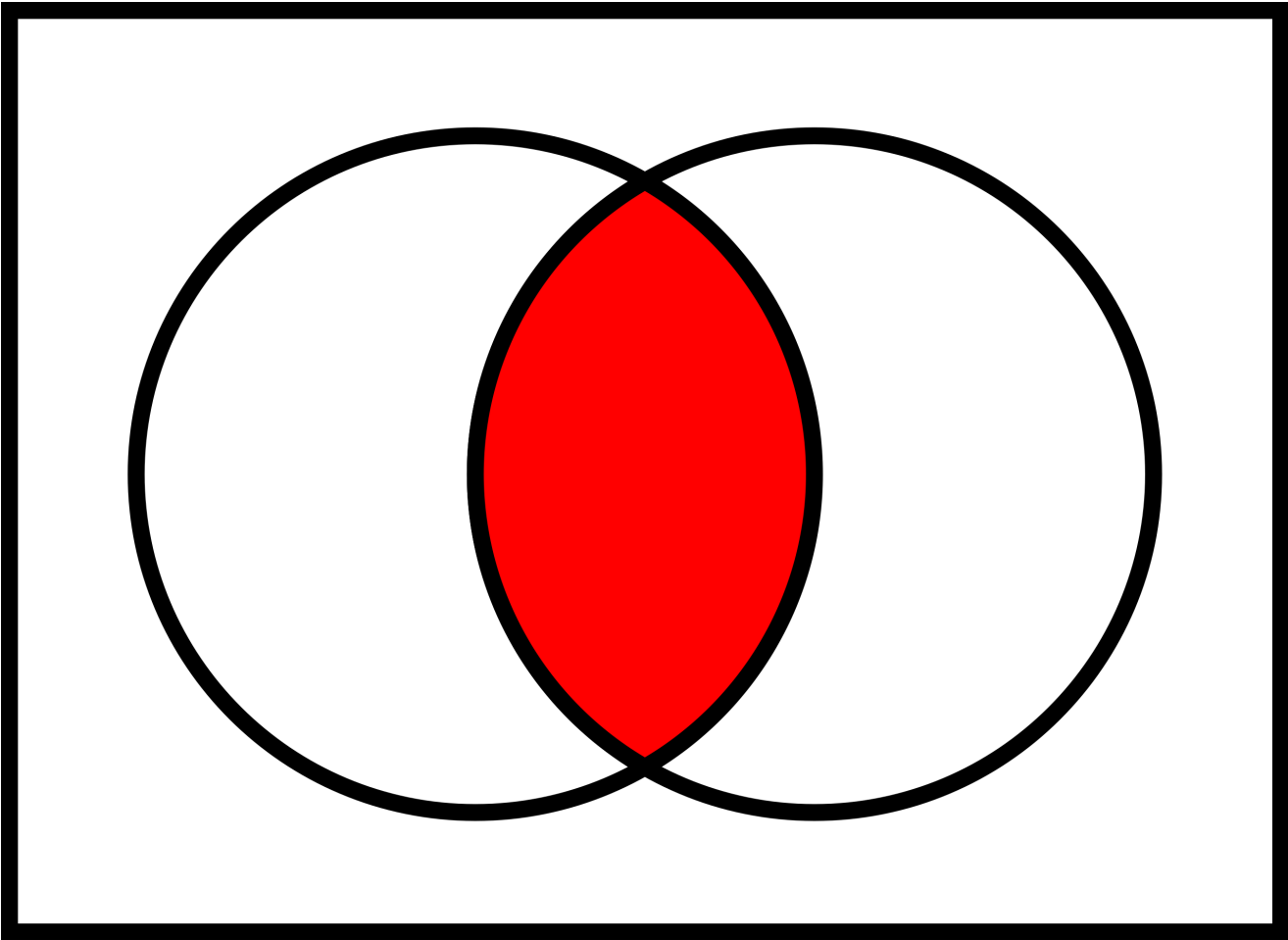
4.2.2 Relationen von Mengen

Venn-Diagramme eignen sich, um typische Operationen (Relationen) auf Mengen zu visualisieren.

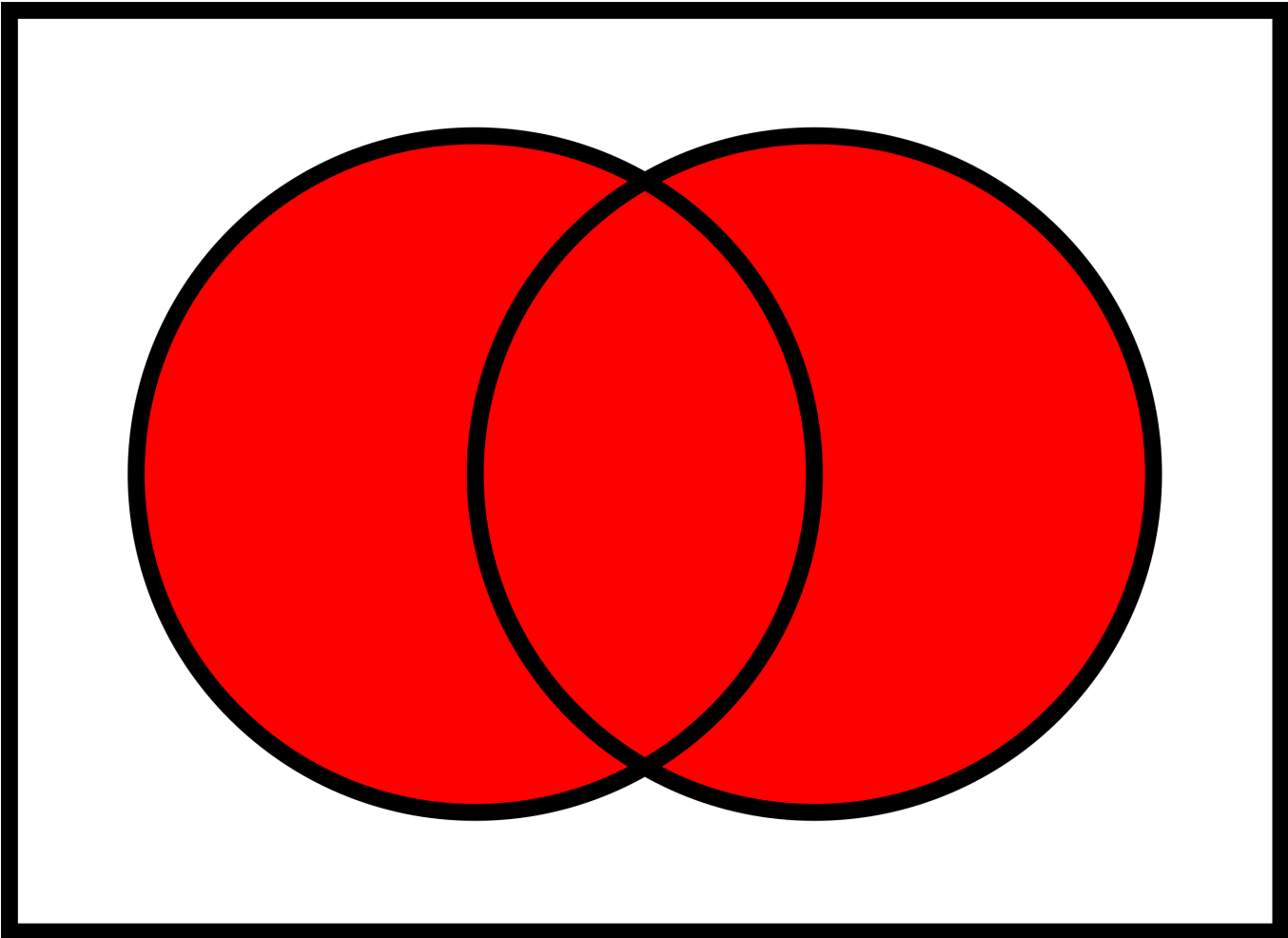
4.2.2.1 Überblick

Die folgenden Diagramme stammen von [Wikipedia \(En\)](#).

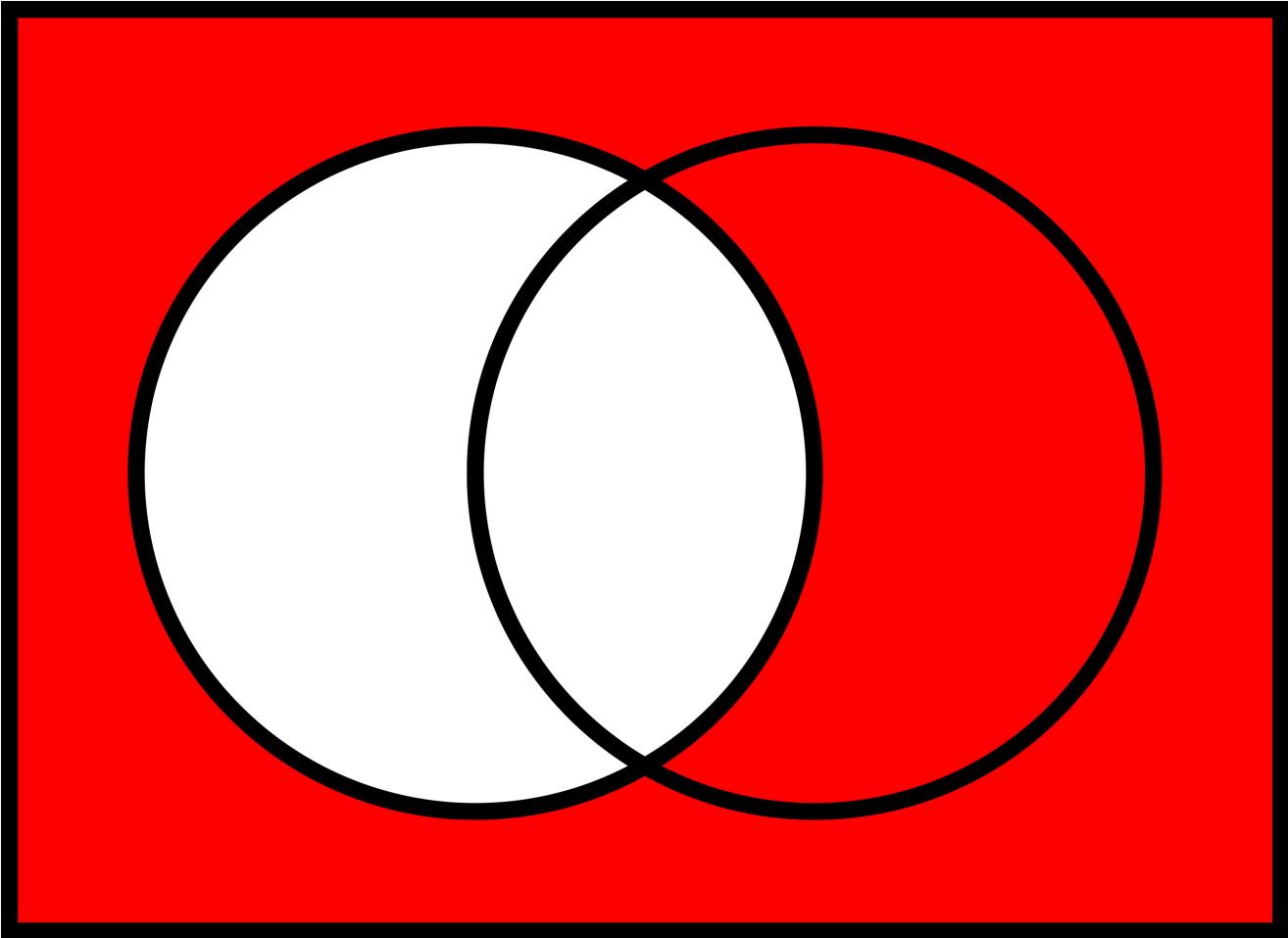
Wir gehen von Ereignisraum Ω aus, mit dem Ereignis A als Teilmenge: $A \subset B$.



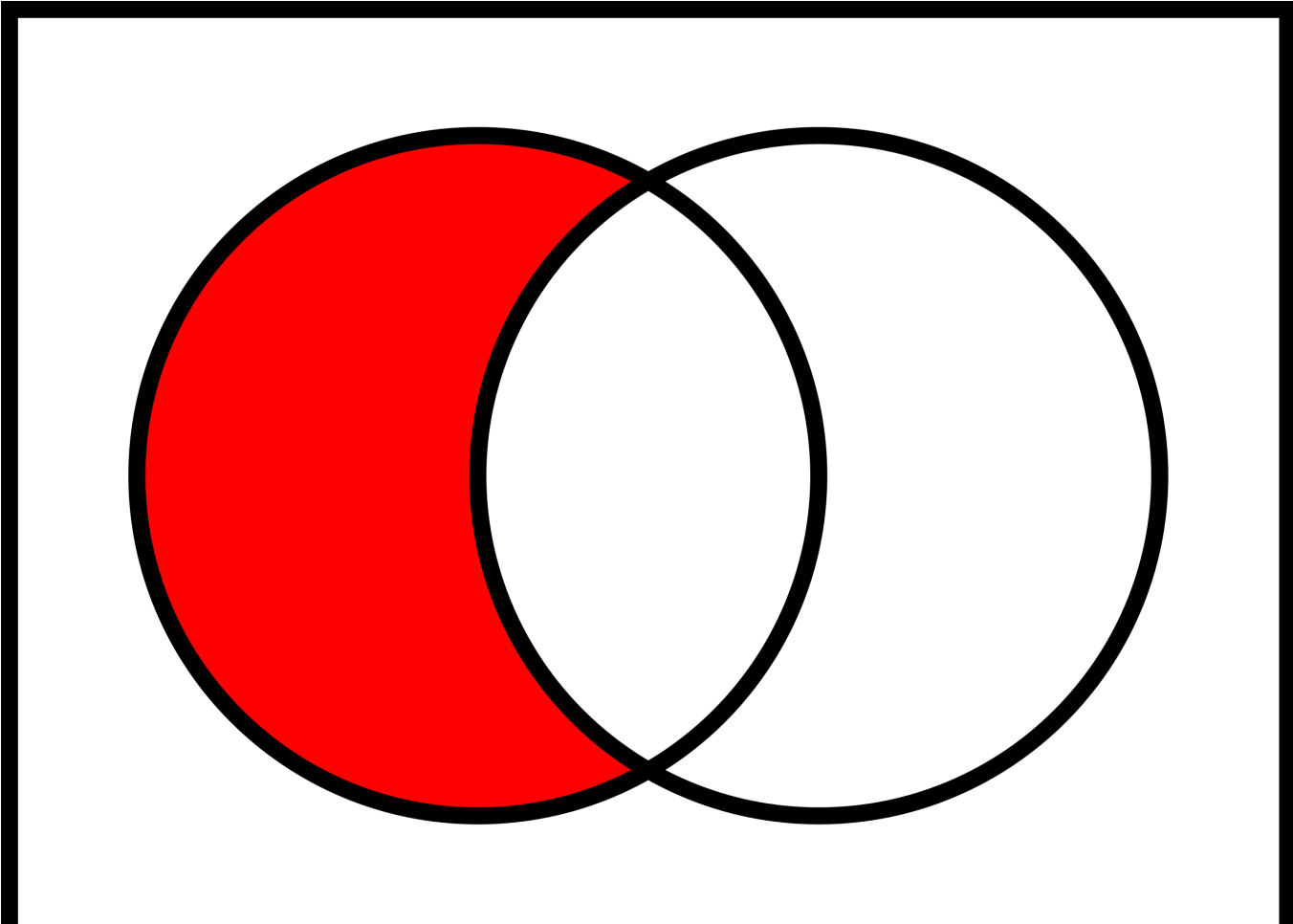
$A \cap B$



$A \cup B$



\bar{A}



$$A \setminus B$$

Abbildung 4.1: Typische Mengenoperationen

4.2.2.2 Disjunkte Ereignisse

(Engl. disjoint events)

$$A = \{1, 2, 3\}; B = \{4, 5, 6\}$$

A und B sind disjunkt: ihre Schnittmenge ist leer: $A \cap B = \emptyset$, s. [Abbildung 4.2](#)

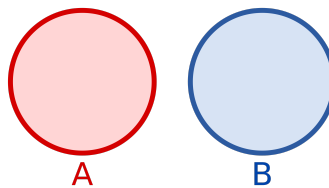


Abbildung 4.2: Zwei disjunkte Ereignisse, dargestellt noch überlappungsfreie Kreise

4.2.2.3 Eselsbrücke zur Vereinigungs- und Schnittmenge

Das Zeichen für eine Vereinigung zweier Mengen kann man leicht mit dem Zeichen für einen Schnitt zweier Mengen leicht verwechseln; daher kommt eine Eselsbrücke gelesen, s. [Abbildung 4.3](#).

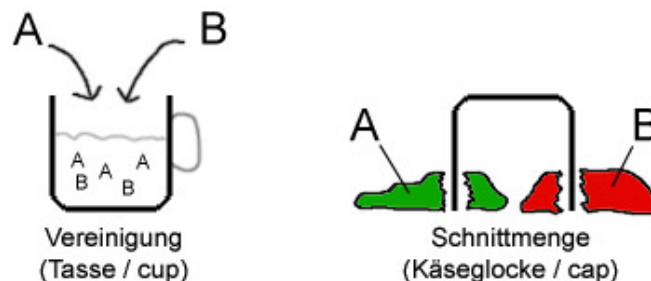


Abbildung 4.3: Eselsbrücke für Vereinigungs- und Schnittmenge

[Quelle: rither.de](http://rither.de)

4.2.2.4 Animationen

[Animation zu Mengenoperationen](#)

[Animation zur Vereinigung von Mengen](#)

[Quelle](#)

4.2.3 Additionssatz

Der Additionssatz wird verwendet, wenn wir an der Wahrscheinlichkeit interessiert sind, dass *mindestens eines* der Ereignisse eintritt.

4.2.3.1 Diskunkte Ereignisse

$$\Omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

Gesucht sei die Wahrscheinlichkeit des Ereignis $A = \{1, 2\}$.

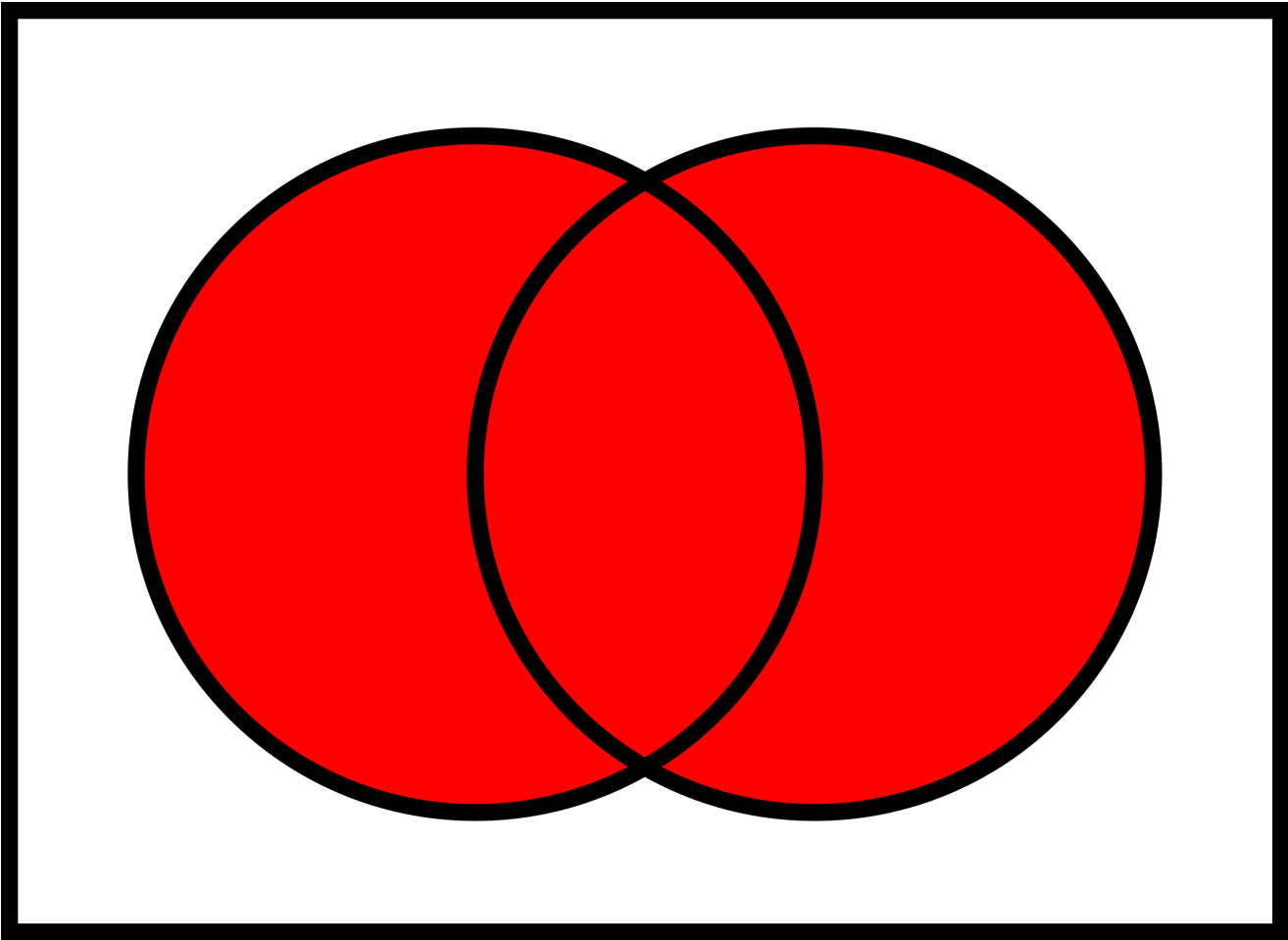
1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

$$P(1 \cup 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

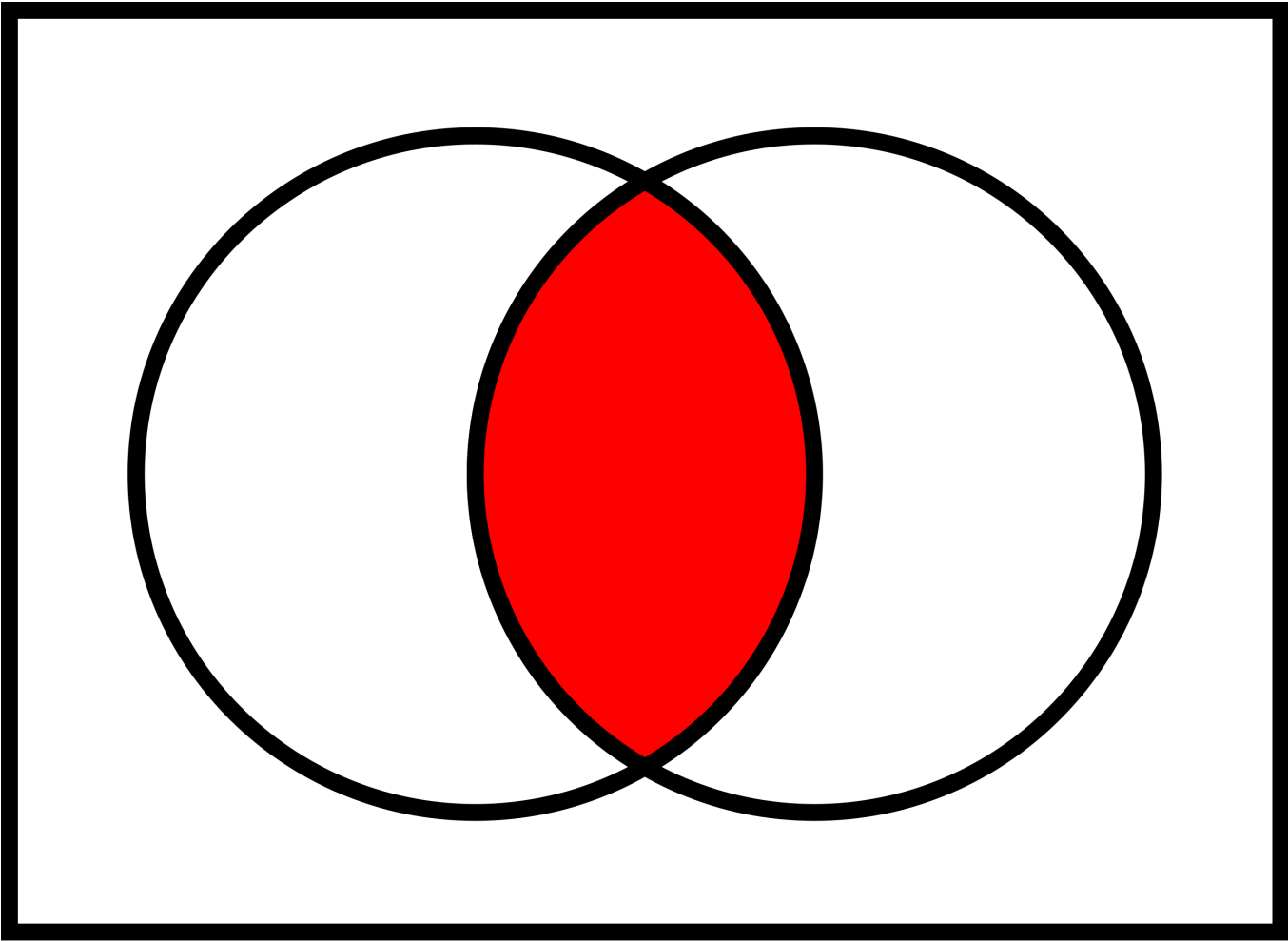
4.2.3.2 Allgemein (disjunkt oder nicht disjunkt)

Bei der Addition der Wahrscheinlichkeiten für A und B wird der Schnitt $A \cap B$ doppelt erfasst. Er muss daher noch abgezogen werden (vgl. [Abbildung 4.4](#)):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



$A \cup B$



$$A \cap B$$

Abbildung 4.4: Die Schnittmenge muss beim Vereinigen abgezogen werden, damit sie nicht doppelt gezählt wird.

4.2.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

4.2.4.1 Animation

Schauen Sie sich mal diese [Wahnsinnsanimation von Victor Powell an](#). Hammer!

4.2.4.2 Schema

Abb. [Abbildung 4.5](#) illustriert gemeinsame Wahrscheinlichkeit, $P(A \cap B)$ und bedingte Wahrscheinlichkeit, $P(A|B)$.

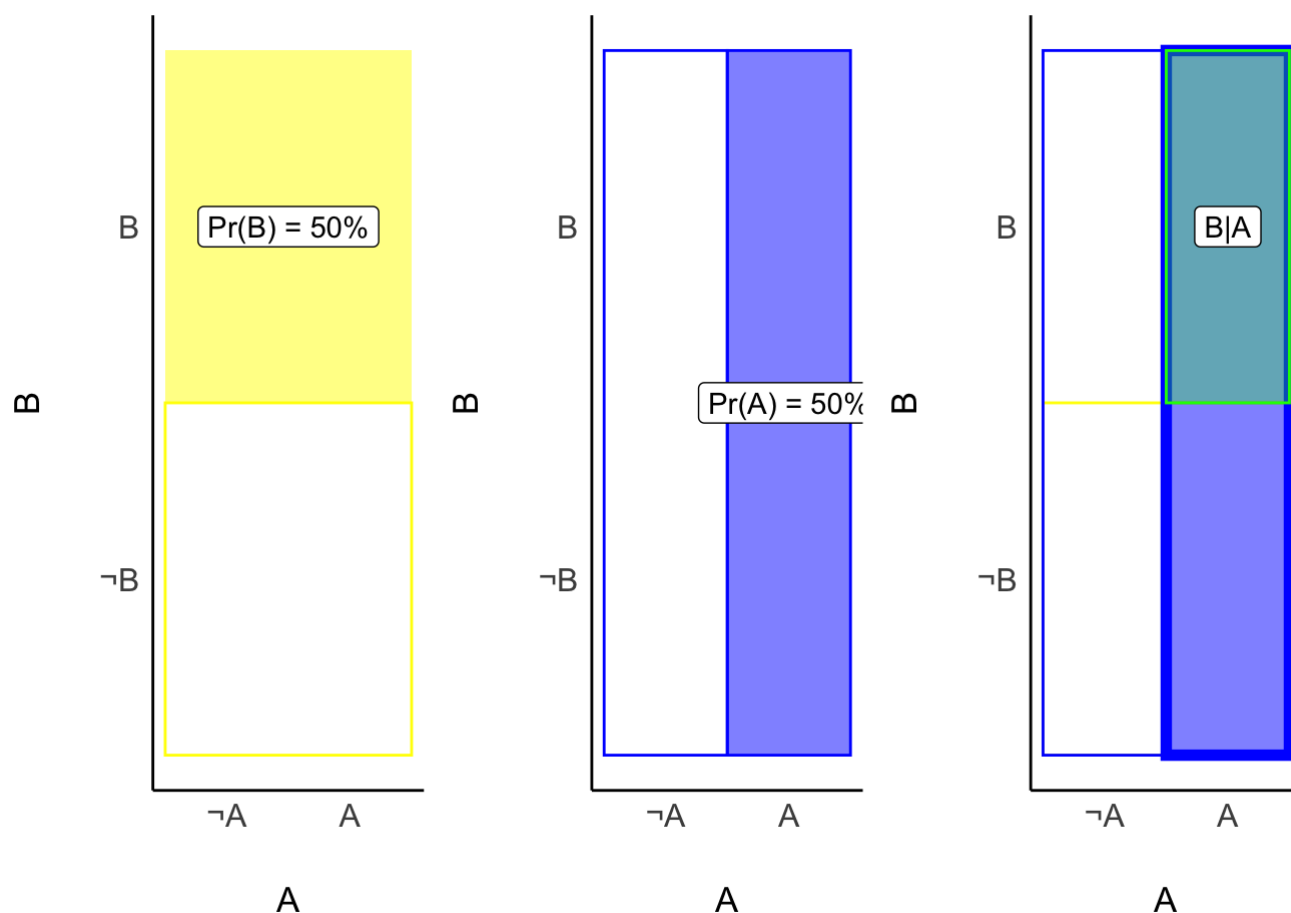


Abbildung 4.5: Illustration von gemeinsamer und bedingter Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit ist vergleichbar zu Filtern einer Tabelle:

```
d <-
  tibble::tribble(
    ~id, ~A, ~B,
    "1", 0L, 0L,
    "2", 0L, 1L,
    "3", 1L, 0L,
    "4", 1L, 1L,
```



```
"SUMME", 2L, 2L
)
```

Es ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = 2/4$$

$$P(B) = 2/4$$

$$P(A \cap B) = 1/4$$

$$P(A|B) = 1/2$$

4.2.5 (Un-)Abhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit ist ein Spezialfall von Abhängigkeit: Es gibt sehr viele Ausprägungen für Abhängigkeit, aber nur eine für Unabhängigkeit. Können wir Unabhängigkeit nachweisen, haben wir also eine starke Aussage getätigt.

Abhängig, s. [Abbildung 4.6](#), links: Überleben auf der Titanic ist offenbar *abhängig* von der Passagierklasse. Auf der anderen Seite: Das Ereignis *Überleben* auf der Titanic ist *unabhängig* vom Ereignis *Alter ist eine Primzahl*, s. [Abbildung 4.6](#), rechts.

Abhängigkeit zweier Ereignisse

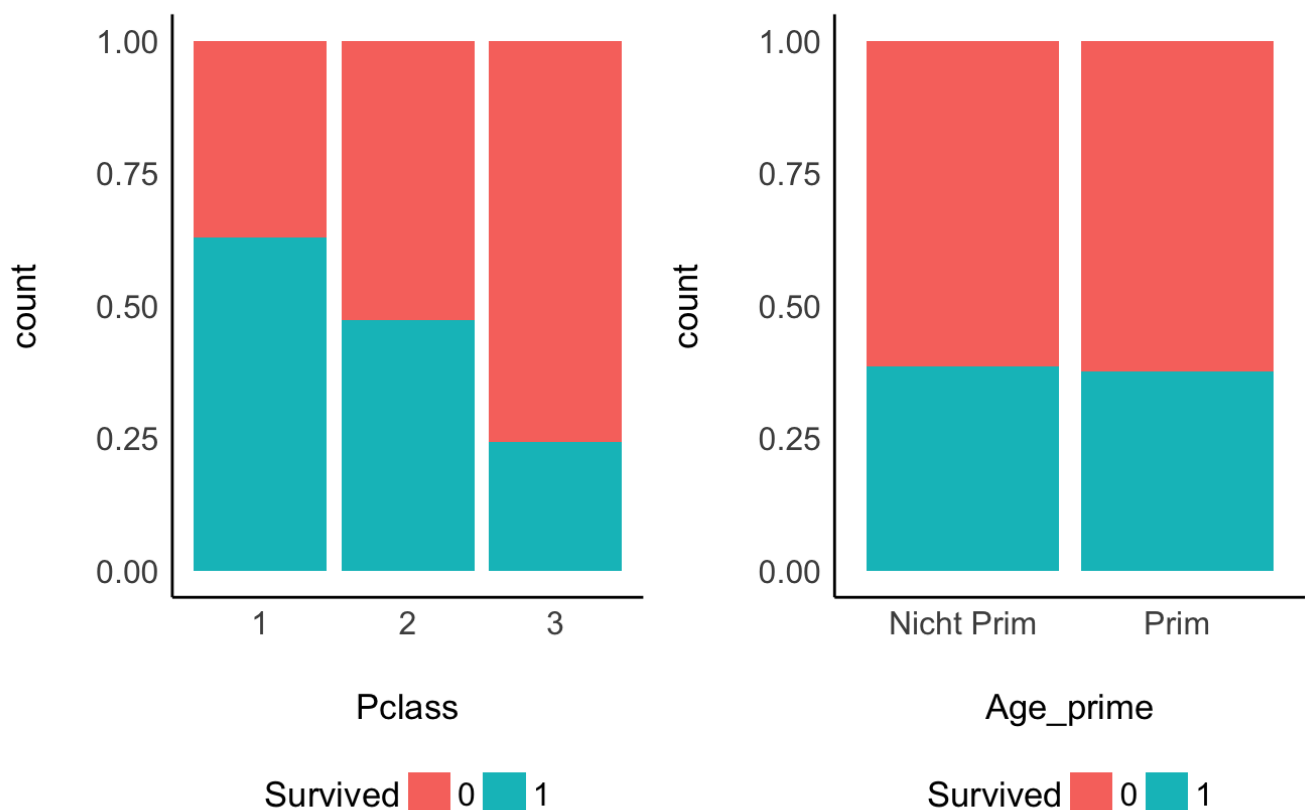


Abbildung 4.6: Abhängigkeit und Unabhängigkeit zweier Ereignisse

Zur Ab- bzw. Un-Abhängigkeit zweier Variablen, an Beispielen illustriert.

Beispiel 4.1 (Zusammenhang von Covidsterblichkeit und Impfquote) Sind die Ereignisse *Tod durch Covid* bzw. *Impfquote* (A) und *Land*¹ (B) voneinander abhängig (Abb. [Abbildung 4.7](#))?

Anteil komplett geimpfter Personen Corona-Tote pro Million

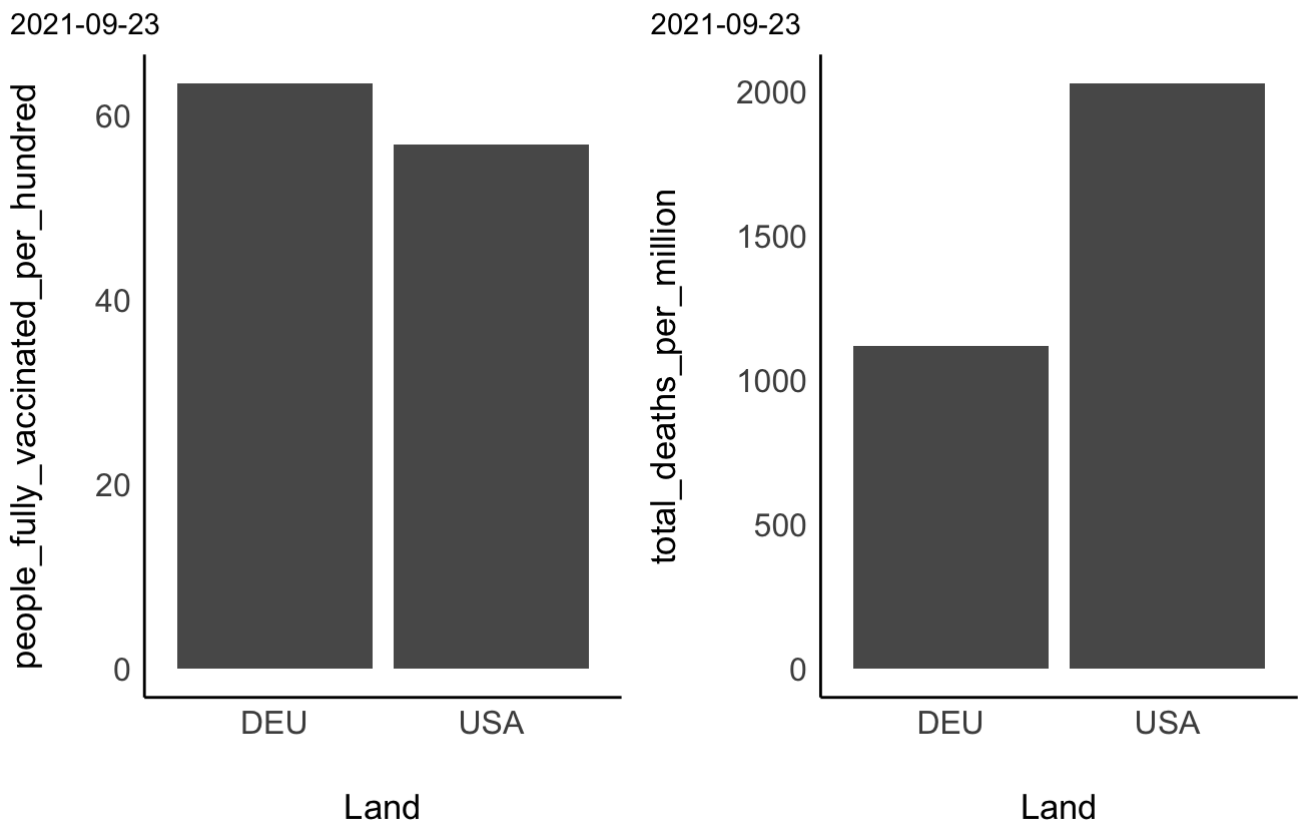


Abbildung 4.7: Impfquote und Sterblichkeit sind voneinander abhängig (bezogen auf Covid, auf Basis vorliegender Daten)

Ja, da in beiden Diagrammen gilt: $P(A|B) \neq Pr(A) \neq Pr(A|\neg B)$.

Daten von [Our World in Data](https://ourworldindata.org/).

4.2.6 Multiplikationssatz

Der Multiplikationssatz wird verwendet, wenn wir an der Wahrscheinlichkeit interessiert sind, dass *alle Ereignisse* eintreten.

4.2.6.1 Unabhängige Ereignisse

Wir werfen eine faire Münze *zwei* Mal (Abb. [Abbildung 4.8](#)).

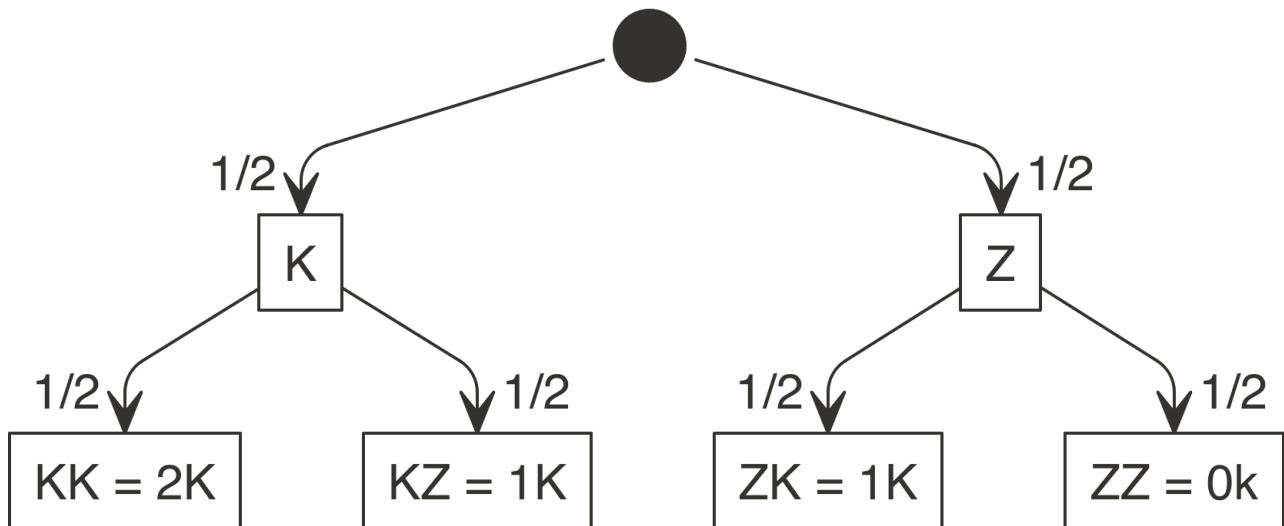


Abbildung 4.8: Wir werfen 2 faire Münzen

Abb. [Abbildung 4.8](#) zeigt ein *Baumdiagramm*. Jeder *Kasten* (Knoten) zeigt ein *Ergebnis*. Die Pfeile (Kanten) symbolisieren die Abfolge des Experiments: Vom “Start” (schwarzer Kreis) führen zwei mögliche Ergebnisse ab, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$. Die untersten Knoten nennt man auch *Blätter* (Endknoten), sie zeigen das Endresultat des (in diesem Fall) zweifachen Münzwurfs. Der Weg vom Start zu einem bestimmten Blatt nennt man *Pfad*. Die Anzahl der Pfade entspricht der Anzahl der Blätter. In diesem Diagramm gibt es vier Pfade (und Blätter).

Ereignis	Pr
0K	$1/2 * 1/2 = 1/4$
1K	$1/4 + 1/4 = 1/2$
2K	$1/2 * 1/2 = 1/4$

Wir werfen eine faire Münze *drei* Mal (Abb. [Abbildung 4.9](#))

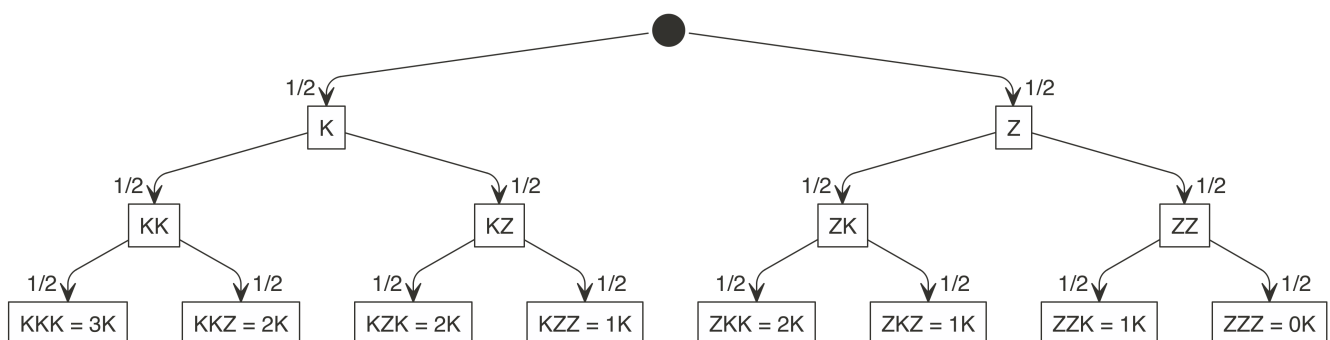


Abbildung 4.9: Wir werfen drei faire Münzen

Ereignis	Pr
0K	$1/2 * 1/2 * 1/2 = 1/8$
1K	$1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8$
2K	$3 * 1/8 = 3/8$

Ereignis	Pr
3K	$1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$
$Pr(AB) = Pr(A) \cdot Pr(B) = 50\% \cdot 50\% = 25\%$	

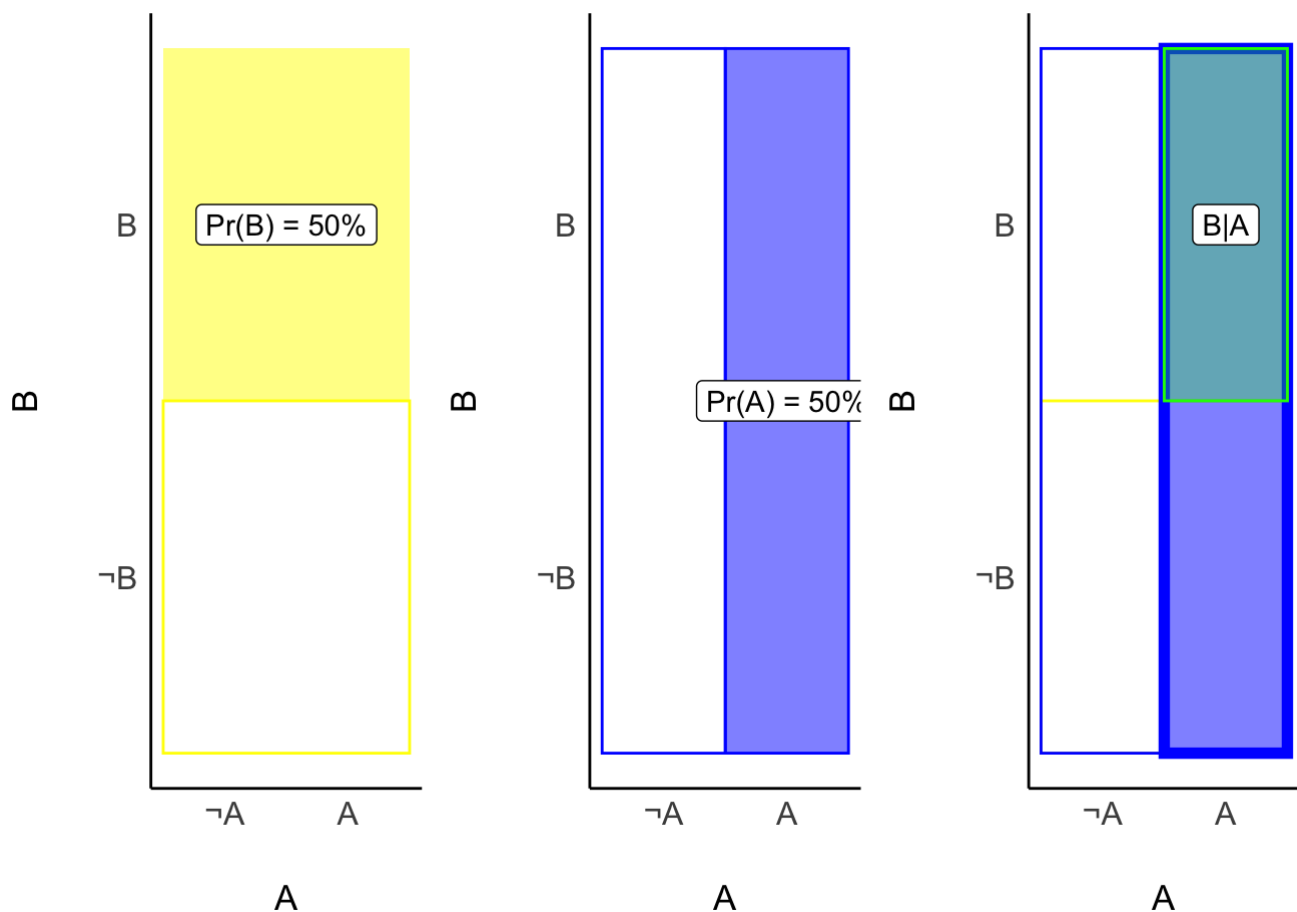


Abbildung 4.10: Unabhängige Ereignisse visualisiert

Abb. [Abbildung 4.10](#) zeigt, dass gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A)$.

4.2.6.2 Kalt und Regen

Von McElreath (2020) stammt diese Verdeutlichung der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit:

Was ist die Wahrscheinlichkeit für *kalt* ❄️ und *Regen* 🌧️?

Die Wahrscheinlichkeit für kalt und Regen ist die Wahrscheinlichkeit von *Regen* 🌧️, wenn's *kalt* ❄️ ist mal die Wahrscheinlichkeit von *Kälte* ❄️.

Ebenfalls gilt:

Die Wahrscheinlichkeit für kalt und Regen ist die Wahrscheinlichkeit von *Kälte* ❄️, wenn's *regnet* 🌧️ mal die Wahrscheinlichkeit von *Regen* 🌧️.

Das Gesagte als Emoji-Gleichung:

$$P(*und\text{🌧️}) = P(\text{🌧️}|*) \cdot P(*) = P(*|\text{🌧️}) \cdot P(\text{🌧️}) = P(\text{🌧️}und*)$$

Allgemein:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Man kann also die "Gleichung drehen".

4.2.6.3 Abhängige Ereignisse

Ein Baumdiagramm bietet sich zur Visualisierung abhängiger Ereignisse an, s. Abb. [Abbildung 4.11](#). Für unabhängige Ereignisse übrigens auch.

In einer Urne befinden sich fünf Kugeln, von denen vier rot sind und eine blau ist.

wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zwei Ziehungen ohne Zurücklegen (ZOZ) *zwei rote Kugeln* gezogen werden ([bourier_2018?](#)), S. 47.

Hier ist unsere Urne:

R, R, R, R, B

Und jetzt ziehen wir. Hier ist das Baumdiagramm, s. Abb. [Abbildung 4.11](#).

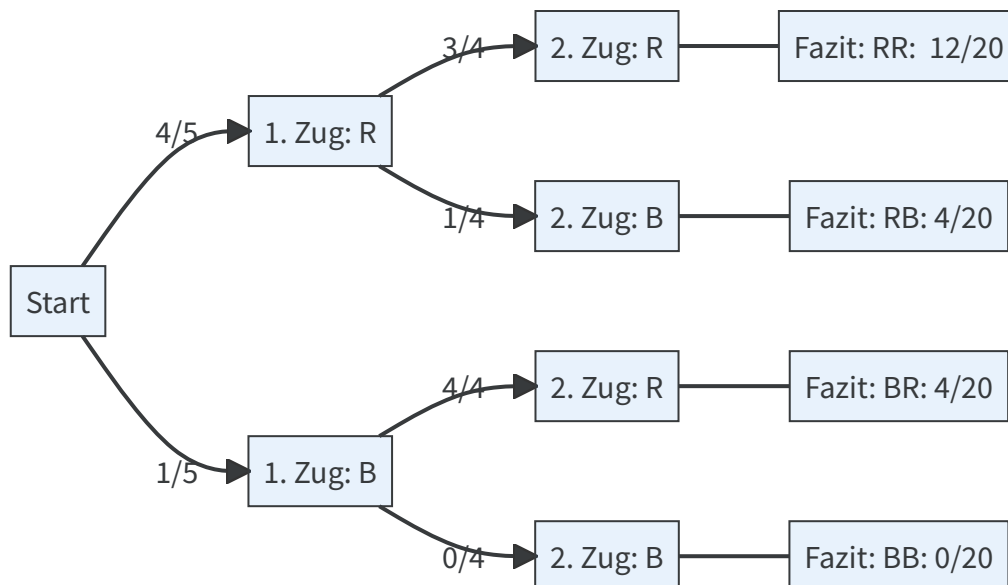


Abbildung 4.11: Baumdiagramm für ein ein zweistufiges Zufallsereignis, wobei der 2. Zug (Stufe) abhängig ist vom 1. Zug.

Es gilt also: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$.

4.2.7 Totale Wahrscheinlichkeit

[Abbildung 4.12](#) zeigt das Baumdiagramm für die Aufgabe ([bourier_2018?](#)), S. 56.

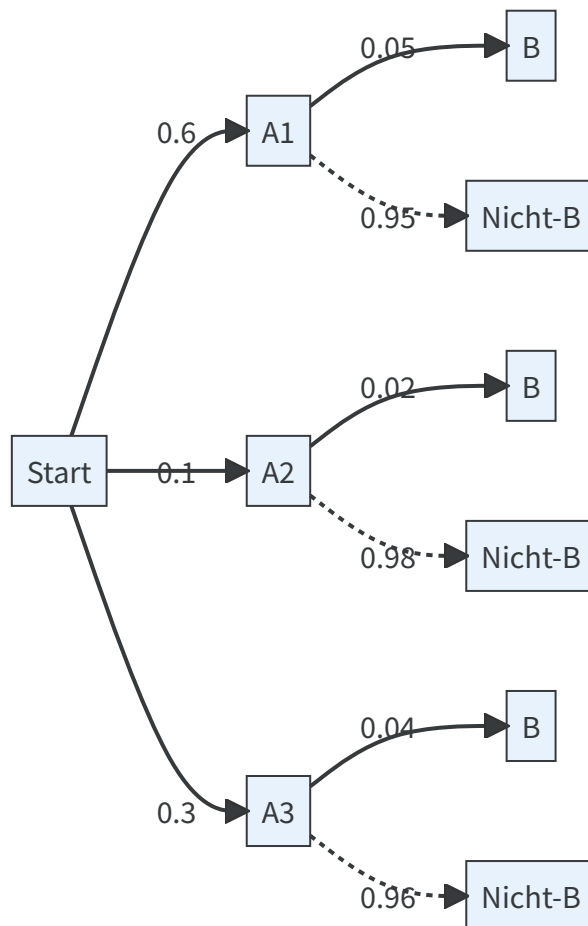


Abbildung 4.12: Totale Wahrscheinlichkeit

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(B)$.

Dazu addieren wir die Wahrscheinlichkeiten der relevanten Äste.

```

W_total <- 0.6 * 0.05 + 0.1 * 0.02 + 0.3 * 0.04
W_total
## [1] 0.044

```

Die totale Wahrscheinlichkeit beträgt also $P(B) = 4.4\%$.

Einfacher noch ist es, wenn man anstelle von Wahrscheinlichkeiten absolute Häufigkeiten verwendet.

4.2.8 Bayes

4.2.8.1 Bayes als Baum

Gesucht sei $P(A_1|B)$.

Für Bayes' Formel setzt man die Wahrscheinlichkeit des *günstigen* Ast zur Wahrscheinlichkeit aller relevanten Äste, $P(B)$.

Der günstige Ast ist hier schwarz gedruckt, die übrigen Äste gestrichelt, s. [Abbildung 4.13](#).

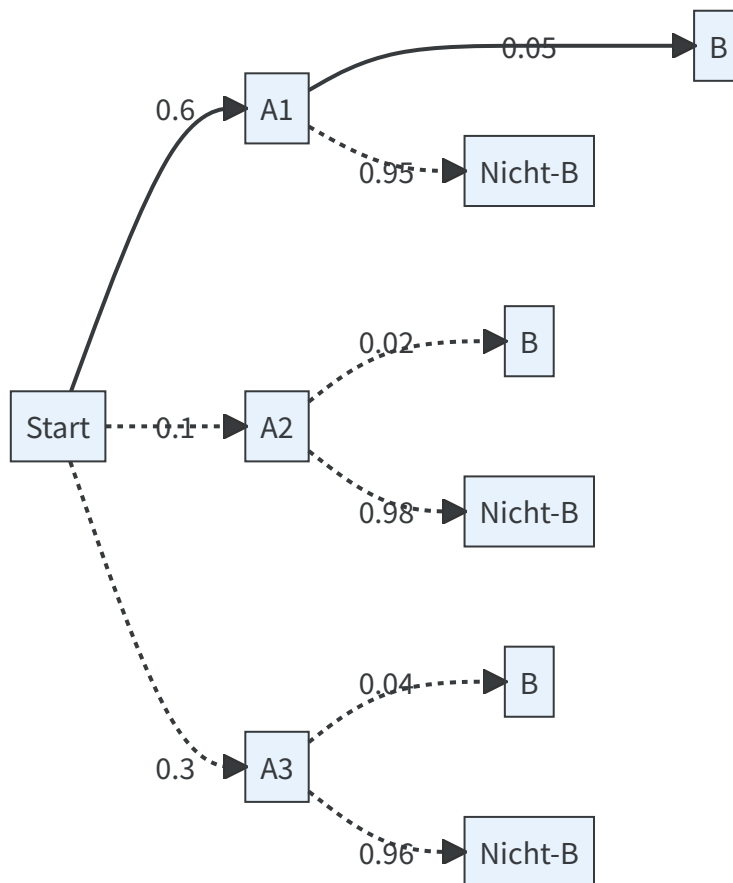


Abbildung 4.13: Günstige Pfade

$$P(A|B) = \frac{P(A1 \cap B)}{P(B)} = \frac{0.6 \cdot 0.05}{0.03 + 0.002 + 0.012} = \frac{0.03}{0.044} \approx 0.68$$

$P(A|B)$ beträgt also ca. 68%.

Zur Erinnerung: $P(B)$ ist die totale Wahrscheinlichkeit.

4.3 Bayes' Theorem

4.3.1 Bayes als bedingte Wahrscheinlichkeit

Bayes' Theorem ist auch nur eine normale bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(A|B) = \frac{\overbrace{P(A \cap B)}^{\text{umformen}}}{P(B)}$$

$P(A \cap B)$ kann man umformen, s. [Gleichung 4.1](#):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad (4.1)$$

Man kann sich Bayes' Theorem auch wie folgt herleiten:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Dann lösen wir nach $P(A|B)$ auf:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

4.3.2 Wozu wird Bayes in der Praxis genutzt?

In der Praxis nutzt man Bayes häufig, wenn man Daten zu einer Wirkung W hat, und auf die Ursache U zurückschließen möchte, sinngemäß:

$W \xrightarrow{\text{Bayes}} U.$

Dann kann man [Gleichung 4.1](#) so schreiben, s. [Gleichung 4.2](#):

$$P(U|W) = \frac{P(U) \cdot P(W|U)}{P(W)} \quad (4.2)$$

Eine ähnliche Situation, die in der Praxis häufig ist, dass man Daten D hat und auf die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese H schließen möchte, s. [Gleichung 4.3](#).

$D \xrightarrow{\text{Bayes}} H.$

$$P(H|D) = \frac{P(H) \cdot P(D|H)}{P(D)} \quad (4.3)$$

[Gleichung 4.3](#) fragt nach $P(H|D)$:

Was ist die Wahrscheinlichkeit der Hypothese H , jetzt wo wir die Daten haben (und ein Modell?)

Und antwortet so ([Gleichung 4.3](#)):

Diese Wahrscheinlichkeit entspricht der Grundrate (Apriori-Wahrscheinlichkeit) der Hypothese mal der Plausibilität (Likelihood) der Daten unter Annahme (gegeben) der Hypothese. Aus Standardisierungsgründen dividiert man noch die totale Wahrscheinlichkeit der Daten über alle Hypothesen.

4.3.3 Zusammengesetzte Hypothesen

Das ist vielleicht ein bisschen fancy, aber man kann Bayes' Theorem auch nutzen, um die Wahrscheinlichkeit einer *zusammengesetzten Hypothese* zu berechnen: $H = H_1 \cap H_2$. Ein Beispiel wäre: "Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass es Regen (R) und Blitzeis (B) gibt, wenn es kalt (K) ist?".

Das sieht dann so aus, [Gleichung 4.4](#):

$$\begin{aligned} P(R \cap B|K) &= \frac{P(R \cap B) \cdot P(K|R \cap B)}{P(D)} \\ &= \frac{P(R) \cdot P(B) \cdot P(K|R \cap B)}{P(D)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Hier haben wir $P(R \cap B)$ aufgelöst in $P(R) \cdot P(B)$, das ist nur zulässig, wenn R und B unabhängig sind.

4.3.3.1 Bayes-Video von 3b1b

Das [Video zu Bayes von 3b1b](#) verdeutlicht das Vorgehen der Bayes-Methode auf einfache und anschauliche Weise.

4.4 Aufgaben

Zusätzlich zu den Aufgaben im Buch:

- [mtcars-abhaengig](#)
- [voll-normal](#)
- [corona-blutgruppe](#)
- [Bed-Wskt2](#)
- [Gem-Wskt1](#)
- [wuerfel01](#)
- [wuerfel02](#)
- [wuerfel03](#)
- [wuerfel04](#)

4.5 —



1. hier mit den zwei Ausprägungen *DEU* und *USA* 